



Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Física

Sétima lista de Mecânica Quântica I

Entregar segunda, 08/06.

prof. João T. de Mello Neto

monitor: Victor B. Mello

1ª Questão:

Considere o problema da partícula livre em três dimensões.

a) Fazendo $V(r) = 0$ na equação radial

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} [V(r) - E] R(r) = l(l+1) R(r)$$

e utilizando as variáveis adimensionais

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad \rho = kr$$

mostre que ela se torna a equação diferencial de Bessel muito similar à equação discutida em sala:

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + 1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) g_l(\rho) = 0$$

b) Sabendo que as funções esféricas de Bessel $j_l(\rho)$ e $\eta_l(\rho)$ são soluções da equação acima, mostre que as combinações lineares a seguir (funções de Hankel) tem a forma assintótica indicada:

$$h_l^{(+)}(\rho) = \eta_l(\rho) + i j_l(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} \frac{e^{i(\rho - l\frac{\pi}{2})}}{\rho}$$
$$h_l^{(-)}(\rho) = \eta_l(\rho) - i j_l(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} \frac{e^{-i(\rho - l\frac{\pi}{2})}}{\rho}$$

c) Mostre que, se $E < 0$, não há autoestados de energia negativa para a partícula livre.

d) Mostre que, se $E > 0$, a equação de Bessel tem apenas a solução $j_l(\rho)$ e a solução completa para a equação de Schrödinger é dada

por

$$\Psi_{l,m}(r, \theta, \phi) = j_l(kr)Y_l^m(\theta, \phi)$$

2ª Questão:

Determine os autovalores de energia de um oscilador harmônico tri-dimensional anisotrópico cuja equação de Schrödinger na representação de coordenadas é dada por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(x, y, z) + \frac{m}{2}(\omega_1^2x^2 + \omega_2^2y^2 + \omega_3^2z^2)\Psi(x, y, z) = E\Psi(x, y, z)$$

3ª Questão:

Encontre os valores esperados $\langle r \rangle$ e $\langle 1/r \rangle$ para o estado fundamental de um átomo de hidrogênio.

4ª Questão:

Em notação espectroscópica, um estado é especificado como $^{2s+1}l_j$, onde s é o spin e j é o momentum angular total. Em particular para átomo de hidrogênio, $s = \frac{1}{2}$, ou seja, o spin do elétron. Assim $j = l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}$.

- a) Liste todos os estados possíveis para $n = 1, n = 2$ e $n = 3$.
- b) Mostre que para as transições entre os níveis $n = 3 \rightarrow n = 3$, $n = 3 \rightarrow n = 1$ e $n = 2 \rightarrow n = 1$, fótons de comprimento de onda 6559 Å, 1025 Å e 1215 Å são emitidos, respectivamente.