



Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Física

Sexta lista de Mecânica Quântica I

Entregar quinta, 28/05, início da aula

prof. João T. de Mello Neto

monitor: Victor B. Mello

Estude o apêndice A, revisão de álgebra linear do livro do Griffiths (ou outra referência que você prefira).

1ª Questão:

Considere um sub espaço do espaço de Hilbert que é gerado pelo conjunto ortonormal $|a_1\rangle, \dots, |a_n\rangle$. Mostre que o operador

$$\mathcal{P}_a = \sum_{i=1}^n |a_i\rangle\langle a_i|$$

- a) $\mathcal{P}_a$ é linear;
- b) $\mathcal{P}_a^2 = \mathcal{P}_a$;
- c) $\mathcal{P}_a$ é hermiteano: $\mathcal{P}_a^\dagger = \mathcal{P}_a$;
- d) Quais são os autovetores e autovalores de $\mathcal{P}_a$?

2ª Questão:

a) Verifique que os seguintes operadores hermiteanos comutam e especifique uma base de autovetores simultânea para os dois:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- b) Mostre que os dois operadores são diagonais na nova base.
- c) Qual o significado físico de dois operadores comutarem e terem uma base comum?

3ª Questão:

Considere a seguinte matriz hermitiana:

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule $\det(\mathbb{T})$ e $\text{Tr}(\mathbb{T})$.
- b) Encontre os autovalores de $\mathbb{T}$. Verifique que a soma e o produto dos autovalores fornecem os resultados esperados. Escreva versão diagonalizada de $\mathbb{T}$.
- c) Encontre os autovetores de $\mathbb{T}$. No setor degenerado construa dois autovetores linearmente independentes. Ortogonalize estes dois autovetores e verifique que eles são sempre ortogonais ao terceiro. Normalize todos os três autovetores.
- d) Construa a matriz $\mathbb{S}$ que diagonaliza $\mathbb{T}$ e mostre explicitamente que a transformação de similaridade usando $\mathbb{S}$ reduz $\mathbb{T}$ à forma diagonal esperada.

4ª Questão:

Funções de matrizes são definidas por suas expansões em série de Taylor, como por exemplo:

$$\exp(\mathbb{M}) = \mathbb{1} + \mathbb{M} + \frac{1}{2}\mathbb{M}^2 + \frac{1}{3!}\mathbb{M}^3 + \dots$$

- a) Encontre $\exp(\mathbb{M})$, para

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Mostre que se $\mathbb{M}$ é diagonalizável, então

$$\det(e^{\mathbb{M}}) = e^{\text{Tr}(\mathbb{M})}$$

- b) Mostre que se duas matrizes $\mathbb{M}$ e $\mathbb{N}$ comutam, então

$$e^{\mathbb{M}+\mathbb{N}} = e^{\mathbb{M}}e^{\mathbb{N}} \tag{1}$$