



Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Física

Quinta lista de Mecânica Quântica I

Entregar terça, 19/05, início da aula

prof. João T. de Mello Neto

monitor: Victor B. Mello

1ª Questão: Prove que

$$\hat{x}\Psi(p_x) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} \Psi(p_x)$$

2ª Questão:

a) Mostre que $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{A})$.

b) Mostre que o traço de um comutador é sempre zero, $\text{Tr}([\hat{A}, \hat{B}]) = 0$.

c) Ilustre os resultados em a) e b) com as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 8-2i & 4i & 0 \\ 1 & 0 & 1-i \\ -8 & i & 6i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -i & 2 & 1-i \\ 6 & 1+i & 3i \\ 1 & 5+7i & 0 \end{pmatrix}$$

3ª Questão:

Calcule o comutador $[\hat{X}, \hat{P}]$ na representação de momento e verifique que é igual a $i\hbar$.

4ª Questão:

Demonstre a desigualdade de Schwartz.

5ª Questão:

Considere a matriz A , que representa um operador $\hat{A}$, um ket $|\Psi\rangle$ e um bra $\langle\Phi|$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3+2i & 3i \\ -i & 3i & 8 \\ 1-i & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} -1+i \\ 3 \\ 2+3i \end{pmatrix}, \quad \langle\Phi| = (6 \quad -i \quad 5).$$

- a) Calcule as quantidades $A|\Psi\rangle$, $\langle\Phi|A$, $\langle\Phi|A|\Psi\rangle$ e $|\Psi\rangle\langle\Phi|$.
- b) Encontre o complexo conjugado, o transposto e o hermitiano conjugado de A , $|\Psi\rangle$ e $\langle\Phi|$.
- c) Calcule $\langle\Phi|\Psi\rangle$ e $\langle\Psi|\Phi\rangle$. Eles são iguais? Comente sobre a diferença entre o complexo conjugado, hermitiano conjugado e o transposto de bras e kets.

6ª Questão: Considere um espaço consistindo de três kets ortonormais $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$. Nesta base, os operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são representados por

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

onde a e b são reais.

- a) O operador $\hat{A}$ claramente tem um espectro degenerado. O operador $\hat{B}$ também possui um espectro degenerado?
- b) Mostre que $\hat{A}$ e $\hat{B}$ comutam.
- c) Encontre um novo conjunto de kets ortonormal que sejam autoestados tanto de $\hat{A}$ quanto de $\hat{B}$. Especifique os autovalores de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ para cada um dos três autoestados. A sua especificação de autovalores caracteriza completamente cada autoestado?