



Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Física

Segunda lista de Mecânica Quântica I

Entregar até sexta, 10/04, 17h (sala A320-06)

prof. João T. de Mello Neto

monitor: Victor B. Mello

1ª Questão: Uma partícula de massa m , que se move livremente num poço de potencial quadrado e infinito de largura a , possui a seguinte função de onda em $t=0$:

$$\psi(x, 0) = \frac{A}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sqrt{\frac{3}{5a}} \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \frac{1}{\sqrt{5a}} \sin\left(\frac{5\pi x}{a}\right)$$

onde A é uma constante real.

- (a) Encontre de modo que $\psi(x, 0)$ seja normalizada.
- (b) Se são realizadas medidas da energia, quais os valores que serão encontrados e quais as respectivas probabilidades?
- (c) Calcule o valor esperado da energia.
- (d) Encontre a função de onda para qualquer tempo t posterior, $\psi(x, t)$.
- (e) Determine a probabilidade de se encontrar o sistema em qualquer tempo t no estado

$$\phi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{5\pi x}{a}\right) \exp(-iE_5 t/\hbar)$$

- (f) Determine a probabilidade de se encontrar o sistema em qualquer tempo t no estado

$$\chi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \exp(-iE_2 t/\hbar)$$

2ª Questão: Dados os operadores de criação e destruição definidos como:

$$\begin{aligned} a_+ &= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(-ip + m\omega x) \\ a_- &= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(+ip + m\omega x) \end{aligned}$$

Prove os seguintes resultados para um autoestado do hamiltoniano de um oscilador harmônico unidimensional:

- (a) O valor esperado da posição e do momento são nulos.
- (b) O valor esperado do potencial e da energia cinética são iguais
- (c) Δ_x e Δ_p , as incertezas na posição e no momentum, satisfazem a relação $\Delta_x \Delta_p = (n + \frac{1}{2})\hbar$, onde n é o número quântico do estado.
- (d) Mostre que a autofunção ψ_0 é uma gaussiana, e que a paridade do estado n é par para n par e ímpar para n ímpar.

3ª Questão: Encontre os autovalores e os autovetores normalizados da matriz:

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}$$

4ª Questão: Uma partícula de massa m está sujeita a um potencial tal que em $t = 0$ a função de onda que descreve a partícula é dada por

$$\Psi(x, 0) = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}\psi_1(x) + \frac{\sqrt{6}}{3}\psi_2(x) + \frac{1}{3}\psi_3(x) \right] \quad (1)$$

onde os $\psi_n(x)$ são autofunções do hamiltoniano $\hat{H}$, cada um dos quais tem seu autovalor de energia dado por $-(1/n^2)E_0$, onde E_0 é uma constante positiva.

- a) Se uma medida da energia é realizada, quais são os possíveis resultados da medida?
- b) Qual a probabilidade de se medir cada uma dessas energias?
- c) Qual o valor esperado da energia?
- d) Suponha que existe outra quantidade física que possa ser medida, uma quantidade seja representada matematicamente por Q . Suponha que os $\psi_n(x)$ são autofunções do operador que representa esta quantidade, $\hat{Q}$, com autovalores nQ_0 . Se a energia for medida primeiro e o valor encontrado for $-(1/9)E_0$ e em seguida, uma medida de Q for realizada, qual será o valor de Q obtido?