



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Quinta lista de Mecânica Quântica 1
Entrega: 29 de Abril de 2014
(no início da aula)

1ª Questão:

Considere um sub espaço do espaço de Hilbert que é gerado pelo conjunto ortonormal $|a_1\rangle, \dots, |a_n\rangle$. Mostre que o operador

$$\mathcal{P}_a = \sum_{i=1}^n |a_i\rangle\langle a_i|$$

- a) $\mathcal{P}_a$ é linear;
- b) $\mathcal{P}_a^2 = \mathcal{P}_a$;
- c) $\mathcal{P}_a$ é hermiteano: $\mathcal{P}_a^\dagger = \mathcal{P}_a$;
- d) Quais são os autovetores e autovalores de $\mathcal{P}_a$?

2ª Questão:

a) Verifique que os seguintes operadores hermiteanos comutam e especifique uma base de autovetores simultânea para os dois:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Mostre que os dois operadores são diagonais na nova base.

3ª Questão:

Um sistema de dimensão três possui uma base ortonormal $|1\rangle, |2\rangle$ e $|3\rangle$. Nesta base o hamiltoniano $\hat{H}$ e dois outros operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são representados pelas seguintes matrizes:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12}^* & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{pmatrix} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

E_{11} , E_{22} , E_{33} , α_3 , β_1 e β_2 são reais e supõe-se que α_1 seja diferente de zero.

a) Estabeleça as condições sobre os elementos das matrizes para que os operadores sejam hermiteanos.

b) Encontre os autovalores e os autovetores do hamiltoniano $\hat{H}$. O que acontece no caso das relações $E_{11} = E_{22}$ e $E_{12} = 0$ serem satisfeitas simultaneamente?

c) Supondo-se que $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sejam hermiteanos e que eles comutam com $\hat{H}$ e entre si, encontre seus autovalores e autovetores.

4ª Questão:

Prove que o traço de um operador $\hat{A}$, $\text{Tr } A = \sum_n \langle u_n | A | u_n \rangle$ é independente da base ortornormal particular $\{|u_n\rangle\}$ escolhida.

5ª Questão:

Já que uma combinação linear de duas matrizes de mesma forma é uma outra matriz da mesma forma, é possível considerar matrizes como membros de um espaço vetorial. Mostre que qualquer matriz 2×2 pode ser expressa como combinação linear das seguintes matrizes, conhecidas como matrizes de Pauli:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$