

Métodos Computacionais em Física I (FIW234)

Turmas IFA e IFB

Equações Diferenciais: introdução aos sistemas caóticos

Edivaldo M. Santos e João R. T. de Mello Neto

Aula 6

- O pêndulo não linear amortecido e forçado
- Determinismo e Imprevisibilidade
- Seção de Poincaré
- Atratores estranhos

Introdução

- **Caos** é o termo utilizado para descrever o movimento que aparentemente é muito complexo de sistemas considerados simples, com poucos graus de liberdade.
- Na realidade, esses sistemas são essencialmente **deterministas**: o conhecimento preciso das condições iniciais do sistema nos permite, pelo menos em princípio, prever exatamente o comportamento futuro do sistema.
- O problema de se entender um sistema caótico está em reconciliar os conceitos de **aleatoriedade** e **determinismo**, que aparentemente são antagônicos.
- O elemento chave para este entendimento é a noção de **não-linearidade**. Muito informalmente, um sistema é linear se a resposta é proporcional ao estímulo.
- Por quê sistemas caóticos são considerados tão interessantes?
 - O estudo desses sistemas trouxe novos conceitos e ferramentas teóricas que nos permitem categorizar e entender o comportamento complexo mencionado anteriormente;
 - Comportamento caótico parece ser universal: aparece em osciladores mecânicos, circuitos elétricos, lasers, sistemas óticos não-lineares, reações químicas, células nervosas, fluidos e muitos outros!!
 - Comportamento caótico possui características qualitativas e quantitativas que são **universais**: o estudo de circuitos elétricos simples pode ser utilizado para o entendimento de arritmias cardíacas.

O pêndulo não-linear amortecido e forçado

- O pêndulo não linear amortecido e forçado é descrito pela equação

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\text{sen}(\theta) - q\frac{d\theta}{dt} + F_E\text{sen}(\Omega_E t)$$

- Onde
 - θ é a coordenada angular do pêndulo
 - g é a aceleração da gravidade local
 - q parametriza a intensidade do amortecimento
 - F_E é a amplitude da força externa
 - Ω_E é a frequência angular da força externa
- Como vimos na aula passada, uma equação diferencial de segunda ordem ser transformada em duas equações diferenciais acopladas de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{l}\text{sen}(\theta) - \omega + F_E\text{sen}(\Omega_E t)\end{aligned}$$

O pêndulo não-linear forçado

- Precisamos modificar apenas uma linha do código

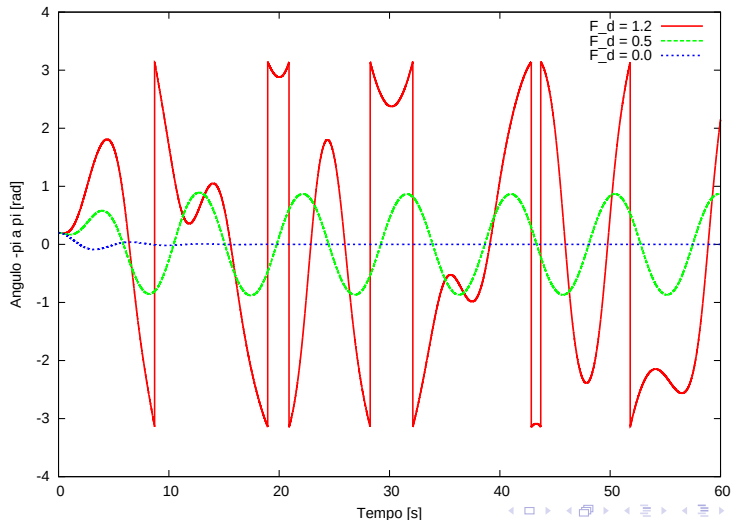
mhs_rk4.c

- Só essa função deve ser modificada:

```
/* funcao que diz o que estamos integrando - oscilador nao linear forçado */
double f(double x, double y[], int i)
{
    if (i == 0)
        return(y[1]);
    else if (i == 1)
        return(-omega2*sin(y[0]) -q*y[1] +
               FE*sin(omegaE*x));
    else{
        printf("Numero de eq. incorreto!\n");
        return -999999.;
    }
}
```

O pêndulo não-linear forçado ($-\pi \leq \theta \leq \pi$)

Os "pulos" em θ não são discontinuidades. Estamos utilizando apenas os valores $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Na figura usamos $q = 1/2$, $l = g = 9.8$, $\Omega_E = 2/3$ e $dt = 0.001$



O pêndulo não-linear forçado

- Na figura anterior vimos que para força externa nula o movimento é amortecido e o pêndulo fica em repouso após algumas oscilações. Essas oscilações forçadas possuem uma frequência próxima da frequência natural do pêndulo não-amortecido ω_0 e são um resquício do movimento harmônico simples.
- Com uma força externa pequena, $F_E = 0.5$, observamos dois regimes. As primeiras oscilações são afetadas pelo decaimento de um transiente inicial como no caso de não haver força externa. Ou seja, o deslocamento inicial do pêndulo se dá com uma componente do movimento que decai como tempo e que tem uma frequência angular $\sim \omega_0$. Após esse transiente ser amortecido, o pêndulo oscila com uma frequência dada pela força externa.
- O comportamento muda radicalmente quando $F_E = 1.2$. Os pulos verticais em θ correspondem ao reajuste do ângulo para manter $-\pi \leq \theta \leq \pi$ e portanto correspondem ao pêndulo dar uma volta passando pela posição vertical invertida. O pêndulo não se acomoda em nenhum movimento que pareça estacionário, mesmo que se espere um tempo muito grande. Para este valor da força externa, o comportamento nunca se repete. Este é um exemplo de **caos**.
- O que significa movimento caótico? A intuição nos diz que é um movimento aleatório e imprevisível, e o movimento para $F_E = 1.2$ certamente tem essa aparência. Mas da teoria das equações diferenciais, sabemos que uma vez determinadas as condições iniciais, o movimento é **determinado**.
- Como o movimento pode ser determinista e imprevisível ao mesmo tempo?

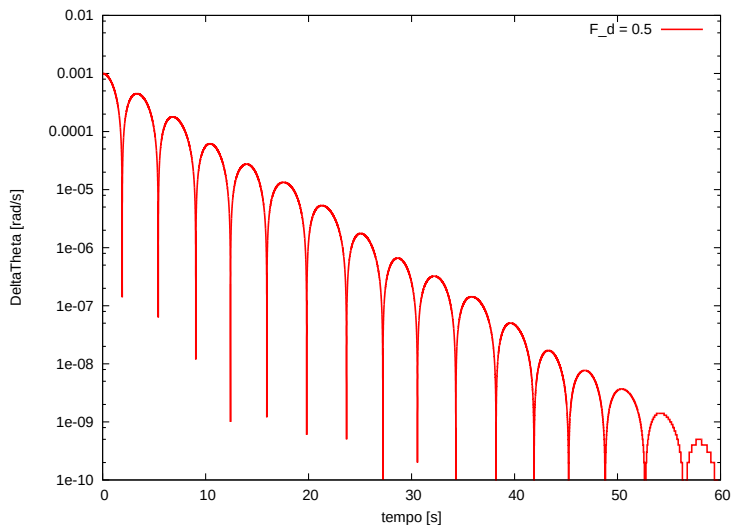
Expoentes de Lyapunov

- Vamos testar a estabilidade das soluções. Vamos considerar dois pêndulos com mesmos parâmetros e que começam a oscilar no mesmo tempo, ambos do repouso. A única diferença é que $\theta_1 = \theta_2 + 0.001$
- Vamos seguir as posições dos dois pêndulos (integrando) no tempo.
- As duas próximas figuras mostram $\Delta\theta(t) \equiv \theta_2(t) - \theta_1(t)$ para dois valores de F_E : 0.5 e 1.2.
- O primeiro valor, $F_E = 0.5$, foi o valor para o qual encontramos movimento oscilatório simples. Para entender esses resultados, vejamos a próxima figura. Ocorrem quedas rápidas a aproximadamente cada 3 s. Essas quedas em $\Delta\theta$ ocorrem quando um dos pêndulos atinge um ponto de retorno. $\Delta\theta$ se anulará perto de cada ponto de retorno já que as trajetórias de $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ precisam se cruzar. Os valores dos picos vão decrescendo rapidamente com t . Isto significa que o movimento dos dois pêndulos se torna mais e mais similar, já que a diferença nos dois ângulos se aproxima de zero quando o movimento se desenvolve (cai seis ordens de grandeza em umas doze oscilações). Isso significa que o movimento é **previsível**. Se não conhecessemos as condições iniciais do do pêndulo 1, mas soubéssemos que eram muito próximas do pêndulo 2, poderíamos prever a trajetória do primeiro, já que o gráfico mostra que $\theta_1(t)$ converge para uma solução particular (a do pêndulo 2).

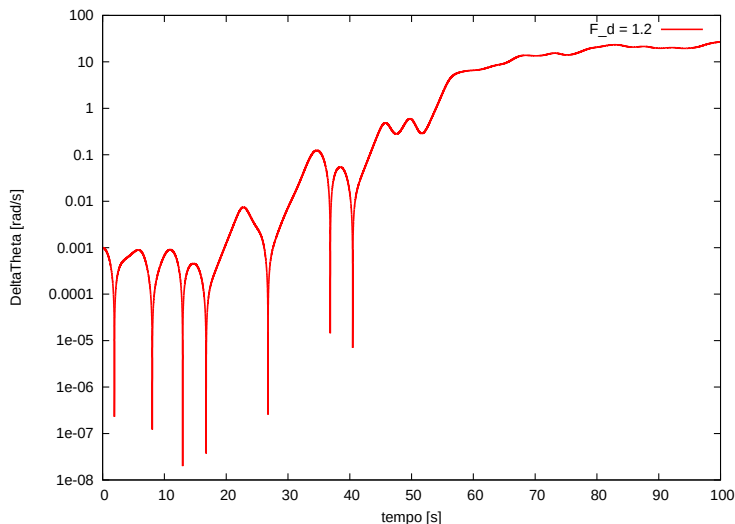
Expoentes de Lyapunov

- Por outro lado, o gráfico seguinte, para $F_E = 1.2$, mostra que $\Delta\theta$ cresce exponencialmente, ou seja, θ_1 e θ_2 divergem uma da outra. $\Delta\theta$ satura, pois atingiu um valor da ordem de 2π e não pode crescer mais.
- Uma linha que passe pelos picos nos dois gráficos será uma exponencial, de modo que $\Delta\theta(t) \approx e^{\lambda t}$.
- Esta forma funcional para $\Delta\theta$ é muito comum e o parâmetro λ é conhecido como **expoente de Lyapunov**.
- Como não podemos conhecer os valores das condições iniciais *exatamente*, para todos os propósitos práticos o comportamento do sistema para $F_E = 1.2$ é **imprevisível**. O sistema então é ao mesmo tempo *determinista* e *imprevisível*. Isto é o que significa ser **caótico**.

O pêndulo não-linear forçado: Expoentes de Lyapunov



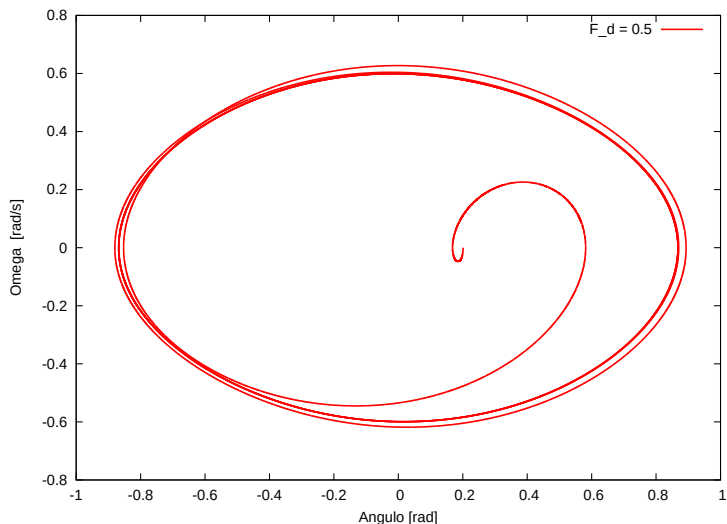
O pêndulo não-linear forçado: Expoentes de Lyapunov



O pêndulo não-linear forçado: espaço de fase

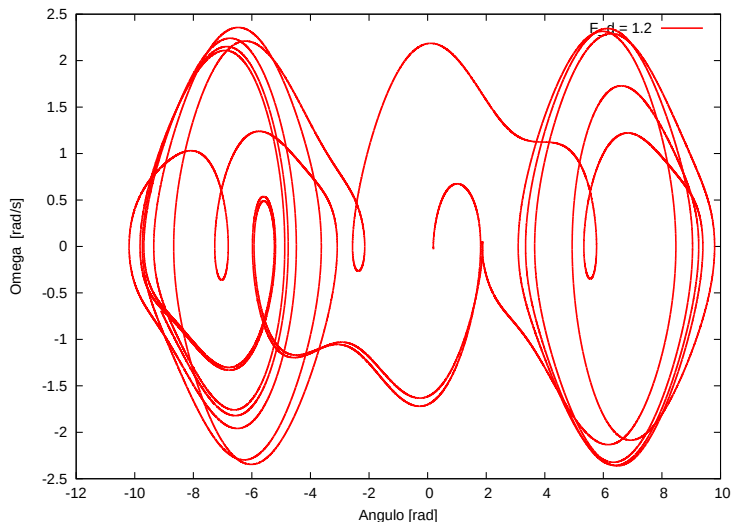
- O interessante é que ainda se pode fazer previsões no que diz respeito a θ , mesmo no regime caótico.
- Para ilustrar isso vamos fazer o gráfico do **espaço de fase**, que é o gráfico de velocidade angular contra ângulo.
- A próxima figura mostra o espaço de fase quando $F_E = 0.5$. Vemos que no início a trajetória depende das condições iniciais, mas rapidamente ela tende para uma órbita regular no espaço de fase, que corresponde a movimentos oscilatório de θ e ω .
- A figura seguinte mostra o espaço de fase para o regime caótico. O espaço de fase exibe muitas órbitas que são quase fechadas e que persistem por apenas um ou dois ciclos. O padrão não é simples mas não é completamente aleatório, o que poderia ter sido antecipado devido aos resultados anteriores.

O pêndulo não-linear forçado: espaço de fase



O pêndulo não-linear forçado: espaço de fase

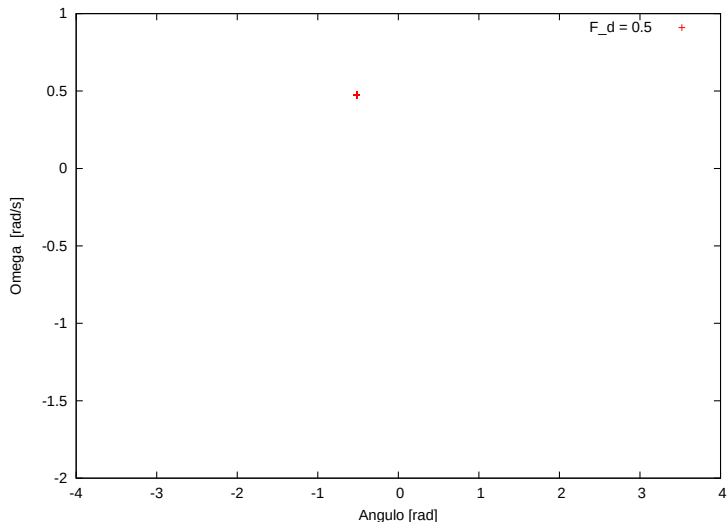
Aqui removemos a restrição em θ .



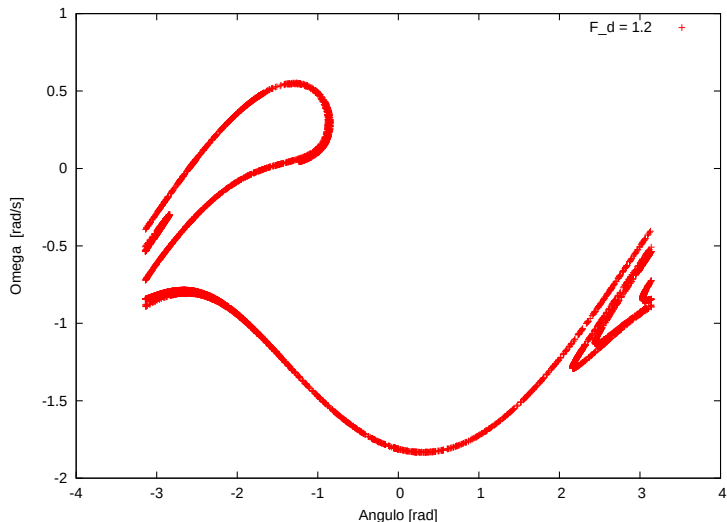
O pêndulo não-linear forçado: seção de Poincaré

- Vamos examinar as trajetórias no espaço de fase de uma forma um pouco distinta e encontraremos um resultado muito interessante. Vamos fazer o gráfico de novo dos pontos $\theta \times \omega$ mas apenas quando eles estiverem **em fase** com a força externa. Assim, vamos colocar o ponto no gráfico apenas quando $\omega_E t = n\pi$, onde n é um inteiro. Este é um exemplo de uma **seção de Poincaré**.
- Analogia: luz estroboscópica. Pode-se ler a etiqueta que está girando num *long-play* se uma luz estroboscópica operar na mesma frequência de rotação do disco. *As coisas se tornam simples quando olhamos para elas numa frequência que é adequada ao problema.*
- A seção de Poincaré para o caso $F_E = 0.5$ nos fornece apenas **um ponto** (após termos deixado a solução transiente se esvanecer) já que em qualquer ponto do ciclo de oscilação encontramos sempre os mesmos valores de θ e ω .
- No regime caótico, o gráfico é muito distinto. A trajetória do pêndulo cai nessa superfície (no espaço de fase), e essa superfície é denominada de atrator. O único ponto para o caso $F_E = 0.5$ é um atrator também. No regime caótico os atratores têm uma estrutura muito complicada. Os atratores caóticos possuem estrutura fractal e usualmente são denominados atratores **estranhos**.

O pêndulo não-linear forçado: Seção de Poincaré, $F_d = 0.5$



O pêndulo não-linear forçado: Seção de Poincaré, $F_d = 1.2$



- Nossos resultados principais:
- É possível para um sistema físico ser ao mesmo tempo determinista e imprevisível - isto é o que se denomina por caos
- O comportamento no regime caótico não é completamente aleatório, mas pode ser descrito por um atrator estranho no espaço de fase

PARA FAZER EM SALA DE AULA

- O programa `poincare.c` grafica os pontos quando eles estão em fase com a força, ou seja, nos tempos $t \sim 2\pi n/\Omega_E$, onde n é um inteiro. Nestes valores de t a força externa tinha valor zero. No entanto, podemos escolher fazer o gráfico quando a força corresponde ao máximo da força externa, ou num tempo $\pi/4$ fora de fase com a força, etc. Construa a seção de Poincaré para o primeiro caso e para os três valores de $F_d = 0.0, 0.5$ e 1.2 .
- Estude como o atrator caótico muda para condições iniciais distintas. Mantenha a força externa $F_d = 1.2$ e construa os atratores para alguns valores iniciais de θ .