

Métodos Computacionais em Física I (2010/1)

EP10 - Turma IFA - Prof. Edivaldo Santos
Entrega: 05/07/2010 até 13h

Reconstrução Angular de Chuveiros Atmosféricos Extensos:

Raios Cósmicos são partículas carregadas (elétrons, prótons e núcleos atômicos) que bombardeiam a Terra constantemente vindos do espaço e são produzidos tanto dentro quanto fora de nossa própria galáxia. Os mais energéticos, conhecidos pela sigla UHECR (do inglês *Ultra High Energy Cosmic Rays*), podem possuir energias até 10 milhões de vezes maior que as atingidas no acelerador LHC do CERN e acredita-se que são gerados em objetos astrofísicos poderosíssimos a milhões de anos-luz da Terra.

Ao entrarem na atmosfera terrestre, os UHECR colidem no topo dela com átomos de nitrogênio e oxigênio produzindo uma reação em cadeia que dá origem a uma cascata de partículas relativísticas que se propaga até o solo. Essa cascata de partículas recebe o nome de Chuveiro Atmosférico Extenso, pois ao chegar ao solo pode cobrir áreas de algumas dezenas de quilômetros quadrados e conter, na sua fase de desenvolvimento máximo, bilhões de partículas.

Há décadas que os físicos descobriram uma maneira de detectar essas partículas que chegam ao solo, mapear sua densidade, e medir seus tempos de chegada ao solo, sendo capazes de reconstruir a direção de chegada do raio cósmico primário que colidiu no topo da atmosfera.

A parte frontal da cascata de partículas pode ser aproximada razoavelmente, pelo menos para pontos não muito distantes do seu eixo por um plano se propagando à velocidade da luz c pela atmosfera em direção ao solo. Suponha que o chuveiro se desenvolve ao longo da direção caracterizada pelos ângulos θ e ϕ em coordenadas esféricas. Se ao atingir o solo, a cascata dispara um conjunto de N detectores de radiação esparsos ocupando as posições $\{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$, é fácil mostrar que os tempos de disparo $\{t_1, \dots, t_N\}$ desses detectores são dados por:

$$t_i = T_0 - \left[\frac{u(x_i - x_c) + v(y_i - y_c)}{c} \right], \quad (1)$$

onde T_0 é o instante em que o ponto referente ao eixo do chuveiro (sua parte central) atinge o solo e o ponto de impacto é dado pelas coordenadas (x_c, y_c) . As variáveis u e v são os chamados cossenos diretores e dados por $u = \sin \theta \cos \phi$ e $v = \sin \theta \sin \phi$. O arquivo plano.gif contém uma animação de uma frente plana chegando ao solo e atingindo alguns detectores. Ver também a figura na página seguinte.

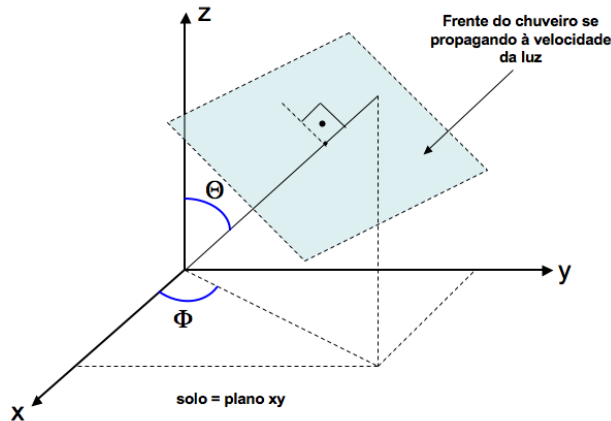
Num experimento real, devido às incertezas nos aparelhos de medição, os tempos de disparo teóricos t_i serão medidos como t_i^m , com incertezas correspondentes σ_i . Assim, os valores de u e v , e consequentemente, a direção de chegada do raio cósmico representada por θ e ϕ , pode ser estimada, a partir de uma minimização do χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{t_i^m - t_i}{\sigma_i} \right)^2. \quad (2)$$

O mínimo do χ^2 deve corresponder a um ponto no espaço de parâmetros (T_0, u, v) tal que $\frac{\partial \chi^2}{\partial T_0} = 0$, $\frac{\partial \chi^2}{\partial u} = 0$ e $\frac{\partial \chi^2}{\partial v} = 0$. É trivial mostrar que essas três equações para as derivadas parciais de χ^2 podem ser postas na forma de uma única equação matricial da forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (com $w_i = 1/\sigma_i^2$):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum_i w_i & \sum_i w_i \bar{x}_i & \sum_i w_i \bar{y}_i \\ \sum_i w_i \bar{x}_i & \sum_i w_i \bar{x}_i^2 & \sum_i w_i \bar{x}_i \bar{y}_i \\ \sum_i w_i \bar{y}_i & \sum_i w_i \bar{x}_i \bar{y}_i & \sum_i w_i \bar{y}_i^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} T_0 \\ u' \\ v' \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_i w_i t_i^m \\ \sum_i w_i \bar{x}_i t_i^m \\ \sum_i w_i \bar{y}_i t_i^m \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}, \quad (3)$$

onde definiu-se $u' = -u/c$ e $v' = -v/c$, $\bar{x}_i = x_i - x_c$, $\bar{y}_i = y_i - y_c$ e a soma é sobre todas os detectores disparados. O sistema matricial acima pode então ser resolvido encontrando-se a inversa da matriz 3×3 , de modo que $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.



- Escreva um programa em C para resolver a equação matricial acima utilizando as funções para decomposição LU vistas em sala de aula. Em `inverse.c` você encontrará todas as funções apropriadas para a tarefa em questão (**analise-as com cuidado e descubra o que elas fazem**). O arquivo `chuveiros.dat` contém 10000 chuveiros medidos por uma rede hipotética de detectores de solo, cuja precisão na medida de tempo é $\sigma_i = 25$ ns. O formato de cada linha do arquivo é o seguinte:

$$N \quad \sigma_i(\text{ns}) \quad x_b(\text{m}) \quad y_b(\text{m}) \quad \theta_v(\text{graus}) \quad \phi_v(\text{graus}) \quad x_1(\text{m}) \quad y_1(\text{m}) \quad t_1^m(\text{ns}) \cdots x_N(\text{m}) \quad y_N(\text{m}) \quad t_N^m(\text{ns}) \quad (4)$$

onde N , como já foi dito anteriormente, é o número de estações disparadas pelo chuveiro, θ_v e ϕ_v são os valores verdadeiros da direção de chegada do chuveiro e (x_b, y_b) é a estimativa da posição do ponto de impacto no solo tomada como o baricentro dos detectores disparados. Use (x_b, y_b) no lugar de (x_c, y_c) na equação (1) acima.

- Cada inversão matricial deve fornecer então os valores dos cossenos diretores u e v e, por conseguinte, das direções reconsruídas (θ_r, ϕ_r) de cada chuveiro, já que

$$\theta_r = \arcsin\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right) \quad \text{e} \quad \phi_r = \text{atan2}(v, u), \quad (5)$$

onde $\text{atan2}()$ é a função arco-tangente da biblioteca `math.h` (valor de retorno no intervalo $[-\pi, \pi]$).

- Faça histogramas das diferenças $\theta_r - \theta_v$ e $\phi_r - \phi_v$ para a amostra de 10000 chuveiros. Baseado nesses histogramas, você seria capaz de dizer qual a resolução angular aproximada da rede de detectores?

Para saber mais:

- O maior detector de raios cósmicos na atualidade é o Observatório Pierre Auger, localizado na cidade de Malargüe, Argentina, com 1600 detectores de solo cobrindo uma área de 3000 km² (aproximadamente 3 vezes a área da baía de Guanabara!!!)

<http://www.auger.org/admin/> (pagina principal)

- Belas simulações de chuveiros atmosféricos foram feitas pelo grupo COSMUS da Universidade de Chicago, usando o programa de simulação AIRES:

<http://astro.uchicago.edu/cosmus/projects/aires/>

- O arquivo `proton.1EeV.mov` contém uma animação de uma dessas animações e corresponde a um próton de energia 1 EeV (1 hexa-elétron-Volt = 10¹⁸ eV) colidindo no topo da atmosfera sobre a cidade de Chicago.