



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física

Décima lista de de Métodos Matemáticos
da Física Teórica II - 15 de Junho de 2017

Prof. João Torres de Mello Neto

1ª Questão

a) Mostre que a l -ésima função esférica de Bessel é dada por

$$f_l(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l f_0(x)$$

onde $f_l(x)$ denota $j_l(x)$ ou $n_l(x)$.

b) Dados

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \eta_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

calcule $j_1(x)$, $j_2(x)$, $n_1(x)$ e $n_2(x)$.

2ª Questão

a) De um modo mais formal, uma equação diferencial de primeira ordem não-homogênea é dada por

$$L[y] \equiv y' + p(x)y = f(x), \quad x > a$$

sujeita a uma condição inicial $B[y] \equiv y(a) = 0$.

a) Mostre que a solução da equação é dada por

$$y = \int_a^{+\infty} G(x|x') f(x') dx'$$

onde $G(x|x')$ satisfaz à equação

$$L[G(x|x')] = \delta(x - x'), \text{ para } a < x, \quad G(a|x') = 0.$$

e a função de Green é dada por

$$G(x|x') = \begin{cases} 0 & a < x < x' \\ \exp\left(-\int_{x'}^x p(t) dt\right) & x' < x \end{cases}$$

b) Refaça o primeiro problema sobre função de Green discutido em sala:

$$m \frac{dv}{dt} + \alpha v = F(t)$$

com condições de contorno no tempo $v \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \pm\infty$ e a força $F(t) = F_0$ entre $t = 0$ e $t = T$ e nula fora deste intervalo.

3ª Questão

a) Encontre a função de Green para a equação de Poisson unidimensional

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -\rho(x)$$

com condições de contorno $V(x) = 0$ em $x = 0$ e $x = a$.

b) Encontre a a solução para $V(x)$ quando

$$\rho(x) = x^2(a^2 - x^2)$$

4ª Questão

Encontre a equação de Green para a equação de Helmholtz em uma região circular bidimensional de raio a para condição de contorno de Dirichlet .

$$(\nabla^2 + k^2)G = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Obtenha o resultado como uma soma dupla sobre as autofunções apropriadas. Lembre que fizemos o mesmo problema em sala para um retângulo.