



Universidade Federal do Rio de Janeiro Instituto de Física

Quinta lista de Métodos Matemáticos
da Física Teórica II - 27 de Abril de 2017

Prof. João Torres de Mello Neto

1ª Questão

Expandir a função

$$f(x) = 7x^4 - 3x + 1$$

em polinômios de Legendre. Dados $P_0 = 1$, $P_1 = x$ e $P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, utilize as relações de recorrência para calcular os outros polinômios relevantes.

2ª Questão

Um conjunto de autofunções $y_n(x)$ satisfaz a equação de Sturm-Liouville e as condições de contorno discutidas em sala:

$$\frac{d}{dx} \left(f(x) \frac{dy}{dx} \right) - g(x)y + \lambda w(x)y = 0$$

$$\alpha_1 y + \beta_1 \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{em } x = a$$

$$\alpha_2 y + \beta_2 \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{em } x = b$$

Suponha que a função $g(x) = 0$.

- Mostre que as derivadas $u_n(x) = y'_n(x)$ também são funções ortogonais.
- Determine a função peso $w(x)$ para essas funções.
- Que condições de contorno são exigidas para a ortogonalidade?

3ª Questão

Use as relações de recorrência dos polinômios de Legendre para mostrar que as derivadas $P'_l(\mu)$ são ortogonais no domínio $(-1, +1)$ com função peso $(1 - \mu^2)$, de acordo com o problema anterior.

4ª Questão

Calcule a integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_l(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

e depois obtenha uma série de Fourier-Legendre ($f(x) = \sum_n a_n P_n(x)$) para a função $1/\sqrt{1-x^2}$. (Sugestão: calcule os casos $l = 0$ e $l = 1$ e empregue as relações de recorrência dos polinômios de Legendre trabalhadas em sala.)

5ª Questão

Utilize a fórmula de Rodrigues para calcular as integrais

$$I_{nl} = \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_l(x) dx, \quad \forall n, l \geq 0,$$

primeiramente para $n \neq l$ e depois para o caso $n = l$, demonstrando a ortonormalidade do sistema $\{P_l(x), l = 0, 1, 2, \dots\}$.