



Universidade Federal do Rio de Janeiro Instituto de Física

Quarta lista de Métodos Matemáticos da Física Teórica II — 07 de Abril de 2017

Prof. João Torres de Mello Neto

1ª Questão:

Uma vareta com boa condutividade térmica isolada de comprimento $L = 1$ tem condições de contorno $u(0, t) = 100$ e $u(1, t) = 0$, onde $u(x, t)$ denota o campo de temperatura na vareta em unidades arbitrárias. A condição inicial é $f(x) = 30 \sin(\pi x)$. Resolva

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

fazendo $c = 1$.

Resposta:

$$u(x, t) = u_1(x) + u_2(x, t) = 100(1-x) + 30e^{-\pi^2 t} \sin \pi x - \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(n\pi)^2} \sin(n\pi x)}{n}$$

2ª Questão:

Uma vareta com boa condutividade térmica isolada de comprimento $L = 1$ tem condições de contorno $\partial u(0, t)/\partial x = 0$ e $\partial u(1, t)/\partial x = 0$, onde $u(x, t)$ denota o campo de temperatura na vareta em unidades arbitrárias. A condição inicial é $f(x) = 100$ se $0 < x \leq \frac{1}{2}$ e 0 se $\frac{1}{2} < x < 1$. Resolva

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

fazendo $c = 1$.

Resposta:

$$u(x, t) = 50 + \frac{200}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos[(2k+1)\pi x] e^{-(2k+1)^2 \pi^2 t}$$

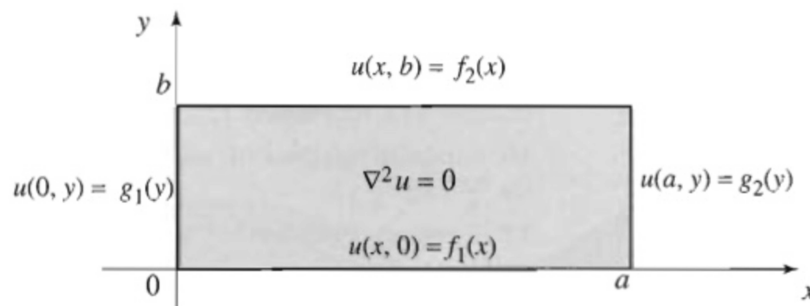


Figura 1: Problema 3

3ª Questão:

Resolva a equação de Laplace num retângulo de lados $a = 2$ e $b = 1$ conforme a figura 1. As condições de contorno são $f_1(x) = 100$, $f_2 = g_1 = 0$, $g_2(y) = 100(1 - y)$. Lembre que o problema análogo só com $f_1 = V_0$ foi resolvido em sala. Use a linearidade da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

para impor as duas condições de contorno neste ‘problema de Dirichlet’.

Resposta:

$$u(x, y) = \frac{400}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right) \sinh\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}(1-y)\right)}{(2k+1) \sinh\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)} + \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi y) \sinh(n\pi x)}{n\pi \sinh(2n\pi)}$$

4ª Questão:

Seja

$$Ly(x) = \frac{d}{dx}\left(f(x) \frac{dy(x)}{dx}\right) + g(x)$$

um operador L diferencial linear auto-adjunto qualquer em $[a, b]$ e se y_1 e y_2 são duas vezes diferenciáveis em $[a, b]$, mostre que

$$y_1(Ly_2) - (Ly_1)y_2 = [f(y_1y_2' - y_2y_1')]'$$