



Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Física

Segunda lista de Métodos Matemáticos da Física Teórica II — 25 de Março de 2017

Prof. João Torres de Mello Neto

1ª Questão:

Resolva a equação hipergeométrica pelo método de Frobenius em torno de $x = 0$. Observe os pontos singulares.

$$(x^2 - x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(2x - \frac{1}{2}\right) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4}y = 0 \quad (1)$$

2ª Questão:

A equação de Euler resolvida pelo método de Frobenius implica numa equação indicial com raízes complexas. Resolva a equação de Euler em torno de $x = 0$:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (2)$$

e mostre que as soluções podem ser escritas como uma combinação linear de $\cos(\ln x)$ e $\sin(\ln x)$.

3ª Questão:

A equação de Bessel na forma padrão é dada por

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (3)$$

a) Obtenha as soluções em séries para $y(x)$ supondo que p não é um inteiro. Uma das soluções tem a forma

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

onde a função $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

b) O que acontece se p for um inteiro? Já discutimos um problema assim em sala.

4ª Questão:

Considere um objeto de massa m e área de seção transversal A que flutua, em equilíbrio, na superfície de um fluido com densidade volumétrica ρ . Se o objeto for empurrado cuidadosamente na água de modo que ele afunde um pouco, e deixado livre, ele executará pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio $z = 0$. a) Mostre que a equação diferencial obedecida pelo sistema é

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\rho Ag}{m}z = 0 \quad (4)$$

b) Para um cilindro circular reto de raio R e altura L , oscilando no eixo vertical, determine a frequência de oscilação ω e o período T .

5ª Questão:

Em astrofísica, a equação de Lane-Emden descreve a estrutura de uma estrela com equação de estado $P = K\rho^{(n+1)/n}$. Se definimos $\rho = \lambda\Phi^n$, a equação do equilíbrio hidrostático se torna

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\Phi}{dx} \right) + \Phi^n = 0 \quad (5)$$

onde x é uma variável adimensional que representa a distância ao centro da estrela ($x = 0$).

a) Encontre uma solução para Φ no caso $n = 1$.

b) Encontre os primeiros três termos numa solução em série para Φ para n arbitrário. Verifique que seu resultado concorda com o resultado da parte (a) quando $n = 1$. Sugestão: Inicie argumentando que a série possui apenas potências pares de x .