
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

Segunda lista de Métodos Matemáticos 1 — 22 de Março de 2012
Deve ser entregue toda dia 30/03 (sexta-feira) antes da aula.

Prof. João Torres

Questão 1: Compute a divergência do campo vetorial $\vec{v} = k\vec{r}$, onde $\vec{r}$ é o vetor posição e k uma constante. Encontre o fluxo de $\vec{v}$ através de um cubo de lado a centrado na origem e mostre que é igual a $\int \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV$ no volume do cubo.

Questão 2: Encontre a circulação do campo vetorial $\vec{u} = x^2y^3(\hat{y} + \hat{x})$ em torno de um quadrado de lado a no plano $x - y$, centrado na origem. Calcule também $\int (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \hat{n} dA$ na superfície do quadrado e mostre que o resultado é igual ao da circulação.

Questão 3: O campo magnético numa região do espaço é dado pela função $\vec{B} = B_0(\rho/a^3)(a-\rho)^2\hat{\phi}$, $0 \leq \rho \leq a$, e $\vec{B} = 0$ para $\rho > a$. Encontre a densidade de corrente na região. Lembre da relação $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}$.

Questão 4: Encontre uma expressão para $\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b})$ em termos das derivadas de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Questão 5: Prove a identidade

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a})$$

Questão 6: Prove:

$$\int_V \vec{\nabla} \Phi dV = \oint_S \Phi \hat{n} dA \quad (1)$$

$$\oint_C \Phi d\vec{l} = \int_S \hat{n} \times \vec{\nabla} \Phi dA \quad (2)$$

Questão 7: Obtenha as expressões para o gradiente, a divergência, o rotacional e o laplaciano em coordenadas esféricas.