

Eletrodinâmica clássica II - 2022/1

Cap 09: Ondas eletromagnéticas

João R. T. de Mello Neto

Bacharelado em Física
Instituto de Física - UFRJ

Maio 2022

Descoberta das ondas eletromagnéticas

"It's of no use whatsoever[...] this is just an experiment that proves Maestro Maxwell was right—we just have these mysterious electromagnetic waves that we cannot see with the naked eye. But they are there."

Asked about the applications of his discoveries, Hertz replied, "Nothing, I guess."

"Heinrich Hertz", Wikipedia

Ondas em uma dimensão

- ★ **Onda progressiva clássica:** perturbação associada com um excesso localizado de energia num meio macroscópico e contínuo, que se propaga (ou seja, se translada) no espaço de uma dimensão conforme o tempo passa.
- ★ Ondas **estacionárias** não se propagam no espaço e podem ser modeladas como a soma de duas ondas.
- ★ Num meio **não-dispersivo** a forma ou o envelope de uma onda progressiva se mantém constante e é invariante sobre translações espaciais ou temporais.
- ★ Na figura, cada ponto da onda é deslocado de vt no tempo t .
- ★ Dada a forma inicial do **deslocamento vertical da corda** $g(z) \equiv f(z, 0)$, qual a forma num tempo posterior, $f(z, t)$?
- ★ O deslocamento vertical num ponto z , num tempo posterior t , é o mesmo que o deslocamento na distância vt para a esquerda, ou seja, em $z - vt$ no tempo $t = 0$:

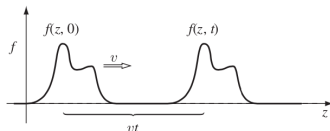


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

$$f(z, t) = f(z - vt, 0) = g(z - vt)$$

Ondas em uma dimensão

- ★ Uma onda depende de z e de t de uma forma muito especial sempre: $z - vt$.
- ★ Funções que podem representar ondas unidimensionais:

$$f_1(z, t) = Ae^{-b(z-vt)^2}, \quad f_2(z, t) = A \sin[b(z - vt)], \quad f_3(z, t) = \frac{A}{b(z - vt)^2 + 1}$$

- ★ funções que não podem representar ondas unidimensionais:

$$f_4(z, t) = Ae^{-b(bz^2 + vt)}, \quad f_5(z, t) = A \sin(bz) \cos(bvt)^3$$

Ondas obedecem à segunda lei de Newton

- ★ Imagine uma corda longa sob tensão T [N] oscilando.
- ★ Seu deslocamento transversal da posição de equilíbrio [m] no ponto z ao longo da corda no tempo t é dado por $f(z, t)$.
- ★ A força resultante transversal no elemento de corda é

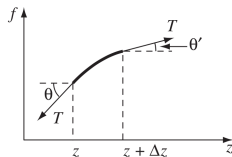


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

$$\Delta F_y(z, t) = T'_y(z + \Delta z, t) - T_y(z, t) = T \sin \theta' - T \sin \theta$$

- ★ Deslocamento transversal pequeno comparado com a corda: $\sin \theta \approx \theta \approx \tan \theta$

$$\Delta F_y(z, t) = T \left(\left. \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} \right|_{z+\Delta z} - \left. \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} \right|_z \right) \simeq T \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial z^2} \Delta z$$

- ★ Se a massa por unidade de comprimento da corda é μ [kg/m], a segunda lei nos dá:

$$\Delta F_y(z, t) = ma_y(z, t)$$

onde $a_y(z, t) = \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial t^2}$ e $m = \mu \Delta z$.

Ondas em uma dimensão

- ★ E portanto, igualando as duas expressões para $\Delta F_y(z, t)$ temos

$$T \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial z^2} \cancel{\Delta z} = \mu \cancel{\Delta z} \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial t^2} \quad \text{que dá} \quad \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial z^2} = \left(\frac{\mu}{T} \right) \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial t^2}$$

- ★ onde podemos inferir

$$\frac{T}{\mu} = \frac{\text{N}}{\text{kg/m}} = \frac{\text{kg} \times \text{m/s}^2}{\text{kg/m}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]^2$$

- ★ e finalmente temos a equação de onda na forma tradicional onde $v = \sqrt{T/\mu}$:

$$\frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial t^2} = 0$$

Solução da equação de onda unidimensional

- ★ Vamos mostrar que qualquer função da forma $f(z, t) = g(z - vt)$ satisfaz à equação de onda. Seja $u = z - vt$.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{dg}{du} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dg}{du} \quad \text{pois} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(z - vt)}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{dg}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{dg}{du} \quad \text{pois} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(z - vt)}{\partial t} = -v$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dg}{du} \right) = \frac{d^2 g}{du^2} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d^2 g}{du^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dg}{du} \right) = -v \frac{d^2 g}{du^2} \frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 g}{du^2}$$

- ★ e finalmente

$$\frac{d^2 g}{du^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

- ★ Observe que $g(z - vt)$ pode ser **qualquer** função diferenciável e que a solução geral é da forma $f(z, t) = g(z - vt) + h(z + vt)$.

Ondas progressivas

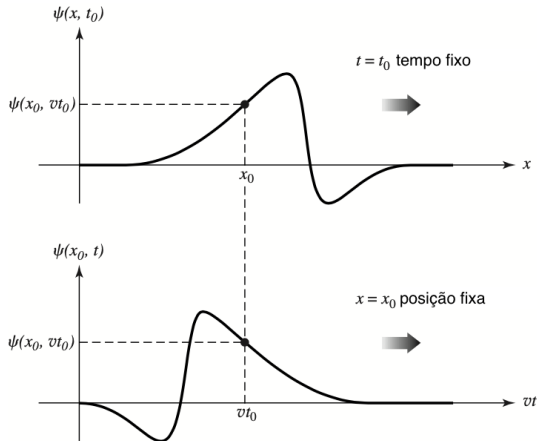


Imagem adaptada de E. Hecht, Opticks, 2017

★ Da página anterior: ondas progressivas na direção $+z$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial z}$$

Ondas senoidais

- ★ Função mais familiar: senoidal

$$f(z, t) = A \cos[k(z - vt) + \delta]$$

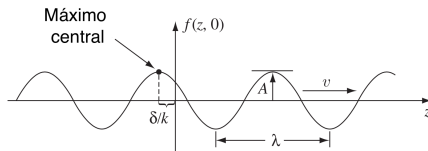


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

- ★ onde A **amplitude**, o argumento é a **fase** e δ é a **constante de fase**, usualmente $(0 \leq \delta < 2\pi)$. 
 - ★ Em $z = vt - \delta/k$ a fase é zero no “máximo central”, δ/k é a distância pela qual a onda é “atrasada”.
 - ★ O **número de onda** k se relaciona com o **comprimento de onda** λ [m] por $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.
 - ★ Quando o tempo passa a onda se desloca para a direita com velocidade v . Num ponto fixo z , a corda vibra para cima e para baixo, com o ciclo se completando em um **período** $T = \frac{2\pi}{kv}$ [s].
 - ★ A **frequência** ν [Hz] é dada por $\nu = \frac{1}{T} = \frac{kv}{2\pi} = \frac{v}{\lambda}$.
 - ★ A **frequência angular** [rad/s] é dada por $\omega = 2\pi\nu = kv$.

Ondas senoidais

- ★ Uma forma alternativa para a onda senoidal é:

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \delta)$$

- ★ e uma onda senoidal se deslocando para a **esquerda** é dada por:

$$f(z, t) = A \cos(kz + \omega t - \delta)$$

- ★ e como o cosseno é uma função par, podemos escrever a mesma função para a esquerda na forma

$$f(z, t) = A \cos(-kz - \omega t + \delta)$$

Observe também que

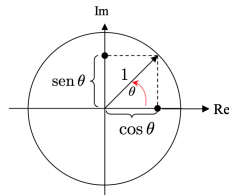
$$\cos(kz - \omega t \pm \pi/2) = \mp \sin(kz - \omega t)$$

Notação complexa

★ Pela fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$



★ lembrando que

$$i \equiv \sqrt{-1} \quad i^* = -i = -\sqrt{-1} \quad i^* i = i i^* = +1$$

$$|e^{i\theta}| \equiv \sqrt{e^{i\theta} e^{-i\theta}} = 1 = \sqrt{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) * (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)} = \sqrt{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta}$$

★ Notação para grandezas complexas:

$$\tilde{z} = x + iy, \quad \operatorname{Re}(\tilde{z}) = x, \quad \operatorname{Im}(\tilde{z}) = y$$

$$\tilde{z}^* = (x + iy)^* = x - iy, \quad \operatorname{Re}(\tilde{z}^*) = x, \quad \operatorname{Im}(\tilde{z}^*) = -y$$

Notação complexa

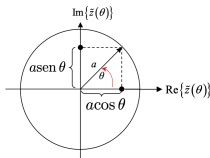
- ★ Vamos agora supor $\tilde{z}(\theta) = ae^{i\theta}$ onde a é uma constante real.

$$\tilde{z}(\theta) = ae^{i\theta} = a(\cos \theta + i \sin \theta) = a \cos \theta + ia \sin \theta$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{Im}\{\tilde{z}(\theta)\}}{\operatorname{Re}\{\tilde{z}(\theta)\}} \quad |\tilde{z}(\theta)| = a = \sqrt{|\operatorname{Re}\{\tilde{z}(\theta)\}|^2 + |\operatorname{Im}\{\tilde{z}(\theta)\}|^2}$$

$$\operatorname{Re}\{\tilde{z}(\theta)\} = a \cos \theta, \quad \operatorname{Im}\{\tilde{z}(\theta)\} = a \sin \theta$$

$$|\tilde{z}(\theta)| = |ae^{i\theta}| = a |e^{i\theta}| = a = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} = a \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = a$$



- ★ Para uma função de onda real

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \delta) = \operatorname{Re} \left[Ae^{i(kz - \omega t + \delta)} \right]$$

- ★ Para uma função de onda complexa

$$\tilde{f}(z, t) \equiv \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)} = \tilde{A} \cos(kz - \omega t) + i\tilde{A} \sin(kz - \omega t)$$

- ★ onde $\tilde{A} \equiv Ae^{i\delta}$ e A é real.

$$\tilde{f}(z, t) \equiv \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)} = Ae^{i\delta} e^{i(kz - \omega t)} = Ae^{i[(kz - \omega t) + \delta]} \quad (1)$$

$$= A\{\cos(kz - \omega t + \delta) + i \sin(kz - \omega t + \delta)\} \quad (2)$$

Exemplo 1

- ★ Exemplo 9.1 do Griffiths: soma de duas funções senoidais de mesma frequência mas de amplitudes e constantes de fase distintas

$$f_1(z, t) = A_1 \cos(kz - \omega t + \delta_1) \quad \text{e} \quad f_2(z, t) = A_2 \cos(kz - \omega t + \delta_2)$$

Análise de Fourier

- ★ Linearidade da equação de onda: a soma de duas soluções é uma solução também.
- ★ Teorema de Fourier: qualquer onda arbitrária (derivável, etc) pode ser expressa como uma superposição linear de ondas harmônicas (senos e cossenos).
- ★ Uma função definida no espaço real (z) pode ser transformada no espaço de números de onda (k) e vice-versa.

$$\tilde{f}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k) e^{i(kz - \omega t)} dk \quad \tilde{A}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(z, t) e^{-i(kz - \omega t)} dz$$

- ★ Dadas as condições iniciais para a onda em $t = 0$: $\tilde{f}(z, t = 0)$ e $\dot{\tilde{f}}(z, t = 0) \equiv \frac{\partial \tilde{f}(z, t=0)}{\partial t}$, pode-se determinar os coeficientes $\tilde{A}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\tilde{f}(z, 0) + \frac{i}{\omega} \dot{\tilde{f}}(z, 0) \right] e^{-ikz} dz$
- ★ Princípio da incerteza de Fourier para (z, k) : $\Delta z \cdot \Delta k \geq 1$
- ★ Dizemos que k e z são variáveis conjugadas.

Condições de contorno

- ★ Até agora corda infinita. Mas temos que examinar as **condições de contorno**.
- ★ Duas cordas semi-infinitas, amarradas em $z=0$, μ_1 e μ_2 e mesma T ($v = \sqrt{T/\mu}$). Extremidade direita fixa e direita oscilando com ω .

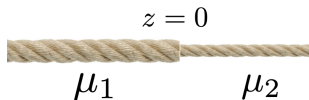
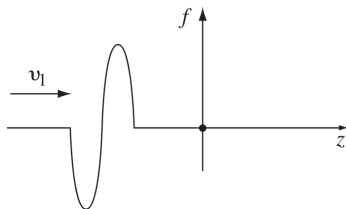
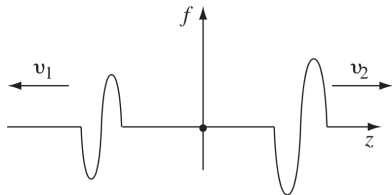


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

Condições de contorno

- ★ Onda incidente, refletida e transmitida:

$$\tilde{f}_I(z, t) = \tilde{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)}, \quad \tilde{f}_R(z, t) = \tilde{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0)$$

$$\tilde{f}_T(z, t) = \tilde{A}_T e^{i(k_2 z - \omega t)}, \quad (z > 0)$$

- ★ As três ondas oscilam com a mesma frequência (mantida em $z = -\infty$) e como $v = \lambda\nu = \omega/k$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

- ★ e perturbação total em cada ponto da corda é dada por:

$$\tilde{f}(z, t) = \begin{cases} \tilde{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)} + \tilde{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}, & \text{para } z < 0 \\ \tilde{A}_T e^{i(k_2 z - \omega t)}, & \text{para } z > 0 \end{cases}$$

Condições de contorno

- ★ O deslocamento da corda tem que ser o mesmo em $z = 0$ (condição de Dirichlet)

$$f(0^-, t) = f(0^+, t)$$

- ★ e se o nó ($z=0$) tem massa desprezível, então a resultante deve ser zero e as tangentes devem ser iguais (condição de Newman)

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{0^-} = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{0^+}$$

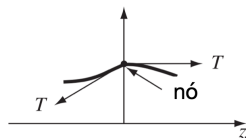
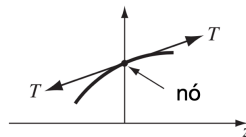


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

- ★ de onde obtemos $\tilde{A}_I + \tilde{A}_R = \tilde{A}_T$, $k_1 (\tilde{A}_I - \tilde{A}_R) = k_2 \tilde{A}_T$ que dá

$$\tilde{A}_R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) \tilde{A}_I, \quad \tilde{A}_T = \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right) \tilde{A}_I$$

- ★ ou

$$\tilde{A}_R = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) \tilde{A}_I, \quad \tilde{A}_T = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) \tilde{A}_I$$

Condições de contorno

- ★ Se a segunda corda é mais leve do que a primeira ($\mu_2 < \mu_1$, e $v_2 > v_1$), todas as const. de fase são iguais ($\delta_R = \delta_T = \delta_I$)

$$A_R = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) A_I, \quad A_T = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I$$

- ★ Se a segunda corda é mais pesada do que a primeira ($v_2 < v_1$), a onda refletida é invertida e ganha uma fase ($\delta_R + \pi = \delta_T = \delta_I$). Ou seja

$$\cos(-k_1 z - \omega t + \delta_I - \pi) = -\cos(-k_1 z - \omega t + \delta_I)$$

- ★ e portanto

$$A_R = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I, \quad A_T = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) A_I$$

- ★ Se a segunda corda tiver massa infinita $A_R = A_I$ and $A_T = 0$ e toda onda incidente é refletida.

Polarização

- ★ Ondas em cordas são **transversais**. As ondas de som e ondas nas molas *slinky* são **longitudinais**. Veja <https://www.youtube.com/watch?v=GIkeGBXqWW0>
- ★ Para ondas transversais, existem duas direções independentes perpendiculares à direção de propagação, as direções de **polarização** vertical e horizontal:

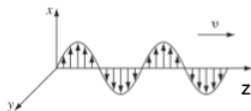
$$\tilde{\mathbf{f}}_v(z, t) = \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)}\hat{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{f}}_h(z, t) = \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)}\hat{\mathbf{y}}$$

- ★ ou numa direção arbitrária no plano xy definida pelo vetor de polarização $\hat{\mathbf{n}}$

$$\tilde{\mathbf{f}}(z, t) = \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)}\hat{\mathbf{n}}, \quad \text{onde} \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$$

- ★ usando que $\hat{\mathbf{n}} = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}$

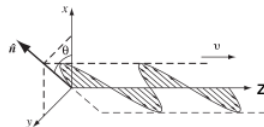
$$\tilde{\mathbf{f}}(z, t) = (\tilde{A} \cos \theta)e^{i(kz - \omega t)}\hat{\mathbf{x}} + (\tilde{A} \sin \theta)e^{i(kz - \omega t)}\hat{\mathbf{y}}$$



Polarização vertical



Polarização horizontal



Vetor de polarização

Imagem adaptada de Griffiths, 2017

Ondas eletromagnéticas no vácuo

- ★ Equações de Maxwell sem fontes (sem cargas ou correntes)

$$\begin{array}{ll} (i) & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ (iii) & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ (ii) & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ (iv) & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array}$$

- ★ que são equações parciais de primeira ordem acopladas para $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.
- ★ Elas podem ser desacopladas com a aplicação do rotacional a (iii) e (iv)

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

- ★ e de modo análogo

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Ondas eletromagnéticas no vácuo

★ e como $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

- ★ ou seja, duas equações separadas de segunda ordem.
- ★ No vácuo (que não é vazio na escala microscópica), cada componente cartesiana de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ satisfaz à equação de onda tridimensional:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

- ★ que significa que os campos eletromagnéticos se propagam com a velocidade da luz

$$v = \nu \lambda = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

- ★ que hoje é um fato trivial mas foi uma das grandes unificações de campos até então distintos da física: ϵ_0 e μ_0 vêm da lei de Coulomb e lei de Biot-Savart.
- ★ Observe que o papel que a corrente de deslocamento de Maxwell é fundamental para as ondas eletromagnéticas.

Ondas planas monocromáticas

- ★ E pela lei de Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$$-k \left(\tilde{E}_0 \right)_y = \omega \left(\tilde{B}_0 \right)_x, \quad k \left(\tilde{E}_0 \right)_x = \omega \left(\tilde{B}_0 \right)_y$$

- ★ ou de forma mais compacta

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{k}{\omega} \left(\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0 \right)$$

- ★ Vemos que $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ estão em **fase** e são **mutuamente perpendiculares**, com amplitudes relacionadas por

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{1}{c} E_0$$

- ★ A quarta equação (Ampère-Maxwell) $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ apenas reproduz o resultado da eq. de Faraday.

Ondas planas monocromáticas

- ★ Não há nada especial na direção z , a onda pode se propagar na direção do **vetor de onda** $\mathbf{k}$.

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}$$

- ★ onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor de polarização. Como $\mathbf{E}$ é transversal,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

- ★ Os campos físicos reais são

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}})$$

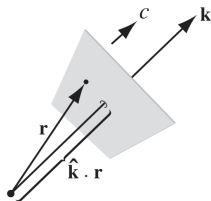


Imagem Griffiths, 2017

Exemplo 9.2 Griffiths

★ Se $\mathbf{E}$ aponta na direção x , $\mathbf{B}$ aponta para y

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}$$

★ ou tomando a parte real

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B}(z, t) = \frac{1}{c} E_0 \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{y}}$$

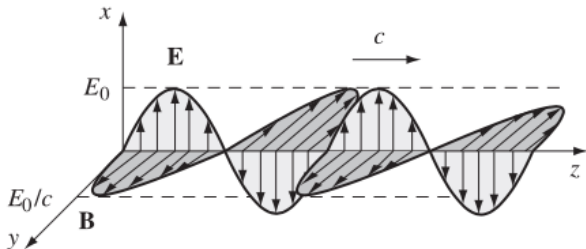


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

Espectro eletromagnético

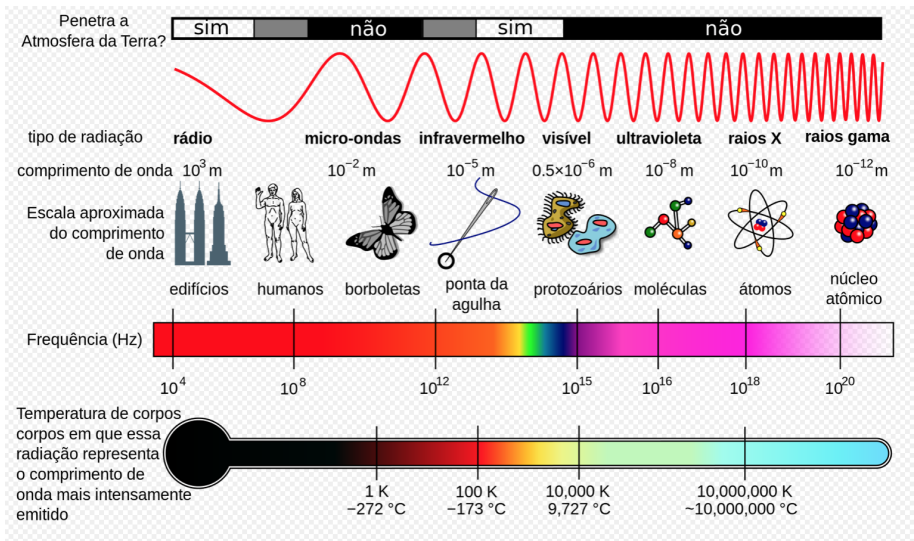


Imagem Wikipedia

Energia e momentum nas ondas eletromagnéticas

- ★ Já vimos que a densidade da energia é dada por

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

- ★ e no caso das ondas planas monocromáticas

$$B^2 = \frac{1}{c^2} E^2 = \mu_0 \epsilon_0 E^2$$

- ★ e portanto as contribuições elétrica e magnética são iguais

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta)$$

- ★ A densidade de fluxo de energia transportada pelos campos é dada pelo vetor de Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

Energia e momentum nas ondas eletromagnéticas

- ★ E para uma onda plana monocromática

$$\mathbf{S} = c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{z}} = cu \hat{\mathbf{z}}$$

- ★ Observe que $\mathbf{S}$ é a densidade de energia vezes a velocidade $c\hat{\mathbf{k}}$ como deveria ser.
- ★ Num tempo Δt um comprimento $c\Delta t$ passa pela área A , contendo uma quantidade de energia $uAc\Delta t$.

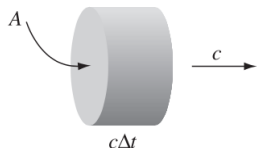


Imagem Griffiths, 2017

- ★ A energia por unidade de tempo por unidade de área transportada pela onda é uc .
- ★ As ondas eletromagnéticas também carregam **momentum**. A densidade de momentum armazenada nos campos é

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$$

- ★ e para ondas monocromáticas

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{c} u \hat{\mathbf{z}}$$

Média em vários períodos

- ★ No caso da luz o comprimento de onda é muito curto ($\sim 5 \times 10^{-7}$ m) e o período tão pequeno ($\sim 10^{-15}$ s) que qualquer medida macroscópica envolverá vários ciclos.
- ★ Tipicamente estamos interessados nos **valores médios**.
- ★ Como $\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kz - 2\pi t/T + \delta) dt = 1/2$ então

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2, \quad \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{z}}, \quad \langle \mathbf{g} \rangle = \frac{1}{2c} \epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{z}}$$

- ★ A potência média por unidade de área transportada por uma onda eletromagnética é denominada a **intensidade**: $I \equiv \langle S \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$
- ★ A luz transfere para um absorvedor perfeito num tempo Δt é $\Delta \mathbf{p} = \langle \mathbf{g} \rangle A c \Delta t$, portanto a **pressão da radiação** (força média por unidade de área) é

$$P = \frac{1}{A} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{I}{c}$$

- ★ O campo elétrico acelera as cargas na direção x e o campo magnético faz uma força $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ na direção z .

Ondas eletromagnéticas na matéria

- ★ Vamos discutir a propagação dentro da matéria em **meios lineares** mas numa região sem cargas ou correntes livres. As equações de Maxwell são

$$\begin{array}{ll} (i) & \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ (ii) & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ (iii) & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ (iv) & \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array}$$

- ★ e como estamos tratando de

- ★ meios lineares

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

- ★ e vamos supor também que os meios sejam

- ★ homogêneos, ϵ e μ não variam de ponto a ponto, portanto

$$\begin{array}{ll} (i) & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ (ii) & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ (iii) & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ (iv) & \nabla \times \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array}$$

- ★ que variam em relação às eq. no vácuo apenas pela mudança de $\epsilon_0 \mu_0$ por $\epsilon \mu$.

Ondas eletromagnéticas na matéria

- ★ Nestes meios lineares homogêneos as ondas se propagam com velocidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \quad \text{onde} \quad n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$$

- ★ onde n é o **índice de refração** da substância. Para a maioria dos materiais μ é muito próxima a μ_0 e portanto $n \cong \sqrt{\epsilon_r}$ e como normalmente a *constante dielétrica* ϵ_r é maior que um, a luz se propaga mais lentamente nos meios materiais.
- ★ Todos os resultados anteriores valem com a substituição $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$, $\mu_0 \rightarrow \mu$ e portanto $c \rightarrow v$.
- ★ A densidade da energia e o vetor de Poynting se tornam:

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

- ★ Para ondas monocromáticas $w = kv$, $\mathbf{B} = \mathbf{E}/v$ e a intensidade é $I = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2$.

Índice de refração na água

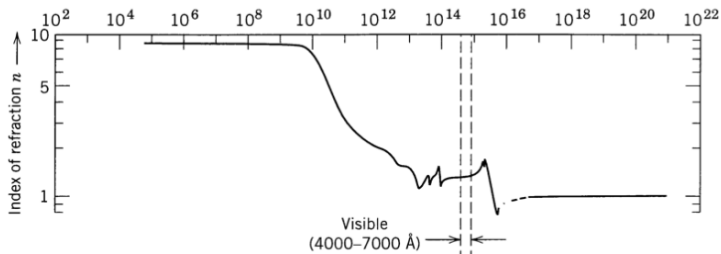


Imagem Jackson, 1999

Índice de absorção na água

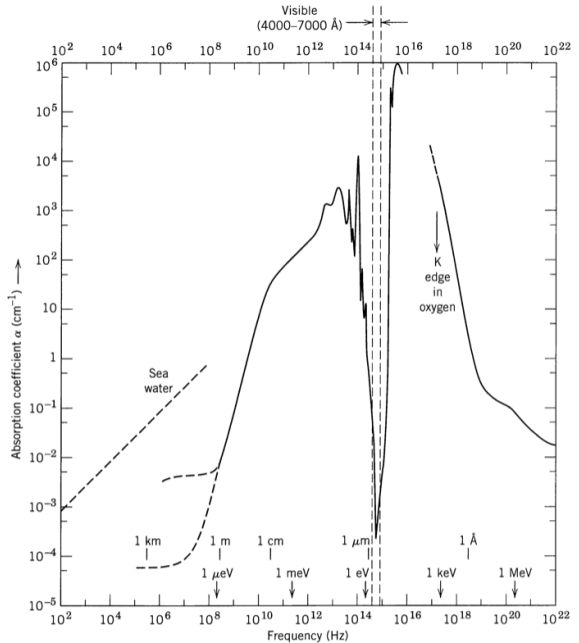


Imagem Jackson, 1999

Reflexão e transmissão em incidência normal

- ★ Numa interface entre dois meios transparentes (água para ar, p. ex.) esperamos uma onda refletida e outra transmitida.
- ★ Os detalhes dependem das condições de contorno já obtidas:

$$\begin{array}{ll} (i) & \epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp, \\ (ii) & B_1^\perp = B_2^\perp, \\ (iii) & \mathbf{E}_1^\parallel = \mathbf{E}_2^\parallel \\ (iv) & \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel \end{array}$$

- ★ que relacionam os campos elétricos e magnéticos logo à esquerda e logo à direita da interface entre dois meios lineares.

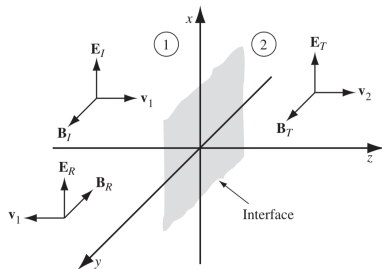


Imagem Griffiths, 2017

$$\tilde{\mathbf{E}}_I(z, t) = \tilde{E}_{0_I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_I(z, t) = \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0_I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_R(z, t) = \tilde{E}_{0_R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_R(z, t) = -\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0_R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(z, t) = \tilde{E}_{0_T} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_T(z, t) = \frac{1}{v_2} \tilde{E}_{0_T} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}$$

Reflexão e transmissão em incidência normal

- ★ Em $z = 0$ os campos à esquerda e à direita se juntam de acordo com as condições de contorno. Não existem componentes perpendiculares à interface, assim (i) e (ii) são triviais. A condição (iii) exige

$$\tilde{E}_{0_I} + \tilde{E}_{0_R} = \tilde{E}_{0_T}$$

- ★ e a condição (iv) resulta em

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0_I} - \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0_R} \right) = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{1}{v_2} \tilde{E}_{0_T} \right)$$

$$\tilde{E}_{0_I} - \tilde{E}_{0_R} = \beta \tilde{E}_{0_T}, \quad \text{onde} \quad \beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

- ★ que podem ser facilmente resolvidas em função da amplitude incidente

$$\tilde{E}_{0_R} = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \tilde{E}_{0_I}, \quad \tilde{E}_{0_T} = \left(\frac{2}{1 + \beta} \right) \tilde{E}_{0_I}$$

- ★ que são muito semelhantes às equações para as cordas de massas distintas. Se $\mu \approx \mu_0$ (que é verdade para a maioria dos materiais), $\beta = v_1/v_2$

$$\tilde{E}_{0_R} = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) \tilde{E}_{0_I}, \quad \tilde{E}_{0_T} = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) \tilde{E}_{0_I},$$

Reflexão e transmissão em incidência normal

- ★ A onda refletida é em fase (campo elétrico para cima) se $v_2 > v_1$ ($n_1 > n_2$) e fora de fase se $v_1 > v_2$ (para baixo) e as amplitudes reais são dadas por

$$E_{0R} = \left| \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right| E_{0I}, \quad E_{0T} = \left(\frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) E_{0I}$$

$$E_{0R} = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right| E_{0I}, \quad E_{0T} = \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right) E_{0I}$$

- ★ A intensidade é dada por $I = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2$ e a energia transmitida e refletida ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) é dada por

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_{0R}}{E_{0I}} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \left(\frac{E_{0T}}{E_{0I}} \right)^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

- ★ onde $R + T = 1$.

Reflexão e refração em incidência oblíqua

- ★ Caso mais geral: incidência num ângulo θ_I com um plano perpendicular à interface.
- ★ De novo, três ondas monocromáticas (frequência ω)

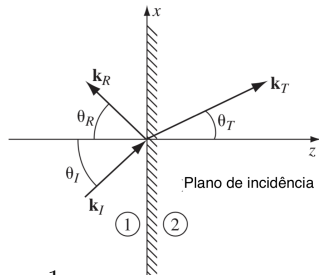


Imagem Griffiths, 2017

$$\tilde{\mathbf{E}}_I(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0_I} e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} \left(\hat{\mathbf{k}}_I \times \tilde{\mathbf{E}}_I \right)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_R(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0_R} e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} \left(\hat{\mathbf{k}}_R \times \tilde{\mathbf{E}}_R \right)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0_T} e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_2} \left(\hat{\mathbf{k}}_T \times \tilde{\mathbf{E}}_T \right)$$

★ onde

$$k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega, \text{ ou } k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T$$

Reflexão e refração em incidência oblíqua

- ★ De novo os campos combinados no meio 1 devem se juntar aos do meio 2 por meio das condições de contorno. As cond. de contorno partilham a mesma estrutura genérica:

$$(\quad)e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + (\quad)e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = (\quad)e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \text{em } z = 0.$$

- ★ Como as cond. de contorno devem valer em todos os tempos e em todo o plano (em $z = 0$), os expoentes devem ser iguais.

$$\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}, \quad \text{quando } z = 0$$

- ★ ou de modo mais explícito

$$x(k_I)_x + y(k_I)_y = x(k_R)_x + y(k_R)_y = x(k_T)_x + y(k_T)_y$$

- ★ que só vai valer sempre se as componentes valerem separadamente.

$$(k_I)_y = (k_R)_y = (k_T)_y \quad \text{para } x = 0$$

$$(k_I)_x = (k_R)_x = (k_T)_x \quad \text{para } y = 0$$

Reflexão e refração em incidência oblíqua

- ★ **Primeira lei:** Os vetores das ondas incidente, refletida e transmitida formam um plano (chamado **plano de incidência**) que também inclui a normal à superfície (aqui, o eixo z).
- ★ Da equação anterior

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T$$

- ★ onde θ_I é o **ângulo de incidência**, θ_R é o **ângulo de reflexão** e θ_T é o **ângulo de refração**. E como $k_I = k_R$
- ★ **Segunda lei:** o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão

$$\theta_I = \theta_R$$

- ★ e como $k_I = \frac{n_1}{n_2} k_T$, temos a **Terceira lei** ou **lei de Snell**

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2}$$

- ★ Três leis fundamentais da **ótica geométrica**. Valem para qualquer fenômeno ondulatório.

Reflexão e refração em incidência oblíqua

★ Os fatores exponenciais se cancelam ($\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}$ em $z = 0$).

★ As condições de contorno agora fornecem

$$\begin{aligned} (i) \quad \epsilon_1 \left(\tilde{\mathbf{E}}_{0I} + \tilde{\mathbf{E}}_{0R} \right)_z &= \epsilon_2 \left(\tilde{\mathbf{E}}_{0T} \right)_z & (ii) \quad \left(\tilde{\mathbf{B}}_{0I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0R} \right)_z &= \left(\tilde{\mathbf{B}}_{0T} \right)_z \\ (iii) \quad \left(\tilde{\mathbf{E}}_{0I} + \tilde{\mathbf{E}}_{0R} \right)_{x,y} &= \left(\tilde{\mathbf{E}}_{0T} \right)_{x,y} & (iv) \quad \frac{1}{\mu_1} \left(\tilde{\mathbf{B}}_{0I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0R} \right)_{x,y} &= \frac{1}{\mu_2} \left(\tilde{\mathbf{B}}_{0T} \right)_{x,y} \end{aligned}$$

★ onde $\tilde{\mathbf{B}}_0 = (1/v)\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0$

★ O problema pode ser convenientemente dividido em polarização da onda incidente **paralela** ao plano de incidência (plano xz) e polarização **perpendicular**.

★ Para a polarização *paralela* a condição (i) fornece

$$\epsilon_1 \left(-\tilde{E}_{0I} \sin \theta_I + \tilde{E}_{0R} \sin \theta_R \right) = \epsilon_2 \left(-\tilde{E}_{0T} \sin \theta_T \right)$$

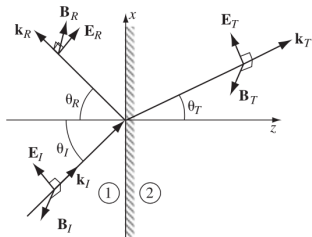


Imagem Griffiths, 2017

Reflexão e refração em incidência oblíqua

- ★ A (ii) não adiciona nada ($0 = 0$), pois os campos magnéticos não tem componente z . A (iii) fornece

$$\tilde{E}_{0I} \cos \theta_I + \tilde{E}_{0R} \cos \theta_R = \tilde{E}_{0T} \cos \theta_T$$

- ★ e a (iv) fornece

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \tilde{E}_{0T}$$

- ★ Dadas as leis da reflexão e refração, (i) e (iv) ambas resultam

$$\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \beta \tilde{E}_{0T} \quad \text{onde} \quad \beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$$

- ★ enquanto a (iii) se torna

$$\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \alpha \tilde{E}_{0T} \quad \text{onde} \quad \alpha \equiv \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}$$

- ★ e podemos expressar a amplitude refletida e transmitida como

Reflexão e refração em incidência oblíqua

$$\tilde{E}_{0R} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{0I}$$

- ★ que são o primeiro par das **equações de Fresnel**.
- ★ O segundo par (polarização *perpendicular*) é

$$E_{0R} = \left| \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right| E_{0I}, \quad E_{0T} = \left(\frac{2}{1 + \alpha\beta} \right) E_{0I}$$

- ★ A onda transmitida está sempre em fase com a onda incidente. A refletida está em fase se $\alpha > \beta$ e 180° fora de fase se $\alpha < \beta$.
- ★ As amplitudes das ondas refletidas e transmitidas dependem do ângulo de incidência, pois α é função de θ_I :

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}}{\cos \theta_I} = \frac{\sqrt{1 - [(n_1/n_2) \sin \theta_I]^2}}{\cos \theta_I}$$

- ★ Incidência normal ($\theta_I = 0$), $\alpha = 1$, recobramos as fórmulas anteriores.
- ★ Incidência quase paralela à interface ($\theta_I = 90^\circ$), α diverge e a onda é totalmente refletida.

Reflexão e refração em incidência oblíqua

- ★ Num ângulo intermediário denominado **ângulo de Brewster** a onda refletida é totalmente extinta.
- ★ Pelo primeiro par de equações de Fresnel, isso se dá quando $\alpha = \beta$, ou seja

$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2}$$

- ★ Para o caso típico onde $\mu_1 \cong \mu_2$, e $\beta \cong n_2/n_1$, $\sin^2 \theta_B \cong \beta^2 / (1 + \beta^2)$

- ★ e portanto

$$\tan \theta_B \cong \frac{n_2}{n_1}$$

- ★ Gráfico das amplitudes transmitidas e refletidas como função de θ_I , para luz incidente em vidro ($n_2 = 1.5$) vinda do ar ($n_1 = 1.0$).
- ★ Valor negativo indica a mudança de fase de 180° com relação ao feixe incidente. A amplitude é positiva.

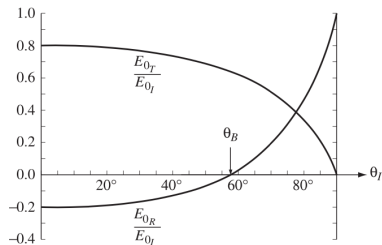


Imagem Griffiths, 2017

Reflexão e refração em incidência oblíqua

★ A potência por unidade de área é $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{z}}$. As intensidades na interface são:

$$I_I = \frac{1}{2}\epsilon_1 v_1 E_{0_I}^2 \cos \theta_I, \quad I_R = \frac{1}{2}\epsilon_1 v_1 E_{0_R}^2 \cos \theta_R, \quad I_T = \frac{1}{2}\epsilon_2 v_2 E_{0_T}^2 \cos \theta_T$$

★ Os coeficientes de reflexão e transmissão para ondas com polarização *paralela*

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_{0R}}{E_{0I}} \right)^2 = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2$$

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \left(\frac{E_{0T}}{E_{0I}} \right)^2 \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \alpha \beta \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right)^2$$

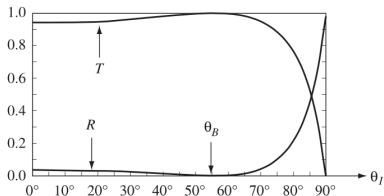


Imagem Griffiths, 2017

★ Gráfico para a interface ar/vidro. Note que $R + T = 1$ por conservação de energia.

Ondas eletromagnéticas em condutores

- ★ No caso de condutores, a densidade de corrente livre $\mathbf{J}_f$ em geral não é zero.
- ★ De acordo com a lei de Ohm, a densidade de corrente livre num condutor é $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$.
- ★ e as equações de Maxwell para meios lineares são

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_f, \quad (iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- ★ A equação da continuidade para a carga livre, junto com a lei de Ohm e a lei de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\sigma(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_f$$

- ★ para um meio homogêneo e linear, e resulta em

$$\rho_f(t) = e^{-(\sigma/\epsilon)t} \rho_f(0)$$

- ★ A carga livre inicial $\rho_f(0)$ se **dissipa** num tempo característico $\tau \equiv \epsilon/\sigma$.

Ondas eletromagnéticas em condutores

- ★ Assim após esse transiente, podemos considerar $\rho_f = 0$ e portanto

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- ★ e quando $\sigma = 0$ recuperamos o caso anterior do meio não condutor.
- ★ Aplicando o rotacional em (iii) e (iv) como anteriormente:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- ★ que ainda admitem soluções tipo ondas planas

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}$$

- ★ mas agora o **número de onda** $\tilde{k}$ é complexo:

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

Ondas eletromagnéticas em condutores

- ★ vamos calcular as partes real e complexa do *número de onda*, que em geral dependem de ω

$$\tilde{k} = k + i\kappa$$
$$\tilde{k}^2 = (k + i\kappa)^2 = k^2 - \kappa^2 + 2ik\kappa = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

- ★ que pode ser reescrita

$$[(k^2 - \kappa^2) - \mu\varepsilon\omega^2] + i[2k\kappa - \mu\sigma\omega] = 0$$

- ★ as duas partes tem que ser nulas simultaneamente. Temos então duas equações e duas incógnitas, k e κ .
- ★ Da última relação (parte complexa) temos $\kappa = \frac{1}{2}\mu\sigma\omega/k$
- ★ e substituindo o resultado na parte real:

$$k^2 - \kappa^2 = k^2 - \left(\frac{1}{2}\mu\sigma\omega/k\right)^2 = k^2 - \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{2}\mu\sigma\omega\right)^2 = \mu\varepsilon\omega^2$$

- ★ que pode ser arrumada:

$$k^4 - (\mu\varepsilon\omega^2) k^2 - \left(\frac{1}{2}\mu\sigma\omega\right)^2 = 0$$

Ondas eletromagnéticas em condutores

- ★ A equação quártica para k pode ser resolvida como quadrática: vamos definir $x \equiv k^2$, $a \equiv 1$, $b \equiv -(\mu\varepsilon\omega^2)$ e $c \equiv -\left(\frac{1}{2}\mu\sigma\omega\right)^2$
- ★ que se reduz a $ax^2 + bx + c = 0$. Assim

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad k^2 = \frac{1}{2} \left[+(\mu\varepsilon\omega^2) \mp \sqrt{(\mu\varepsilon\omega^2)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\mu\sigma\omega\right)^2} \right]$$

$$k^2 = \frac{1}{2} (\mu\varepsilon\omega^2) \left[1 \mp \sqrt{1 + 4 \frac{(\mu^2\sigma^2\omega^2)}{4(\mu^2\varepsilon^2\omega^4)}} \right] = \frac{1}{2} (\mu\varepsilon\omega^2) \left[1 \mp \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} \right]$$

- ★ De um ponto de vista físico, k^2 deve ser positivo (raiz positiva).

$$k = \sqrt{k^2} = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} \right]^{1/2} = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}$$

Ondas eletromagnéticas em condutores

- ★ Voltando às eq. iniciais para calcular κ : $\kappa^2 = k^2 - \mu\epsilon\omega^2$

$$\kappa^2 = \frac{1}{2} (\mu\epsilon\omega^2) \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} \right] - \mu\epsilon\omega^2 = \frac{1}{2} (\mu\epsilon\omega^2) \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} - 1 \right]$$

- ★ e finalmente

$$k \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} + 1 \right]^{1/2}, \quad \kappa \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} - 1 \right]^{1/2}$$

- ★ A parte imaginária de $\tilde{k}$ resulta numa atenuação da onda (amplitude decrescente com quando z cresce):

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}$$

- ★ A distância na qual a amplitude da onda cai por um fator de $1/e$ é denominada **profundidade de penetração**

$$d \equiv \frac{1}{\kappa} \quad [\text{m}]$$

Ondas eletromagnéticas em condutores

- ★ A parte real de $\tilde{k}$ determina o comprimento de onda, a velocidade de propagação e o índice de refração na forma usual:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad v = \frac{\omega}{k}, \quad n = \frac{ck}{\omega}$$

- ★ Como anteriormente, as equações de Maxwell impõem vínculos sobre as amplitudes relativas dos campos, fases e polarizações.
- ★ Assim, (i) e (ii) proíbem componentes longitudinais, os campos são **transversais**.
- ★ E de novo, (iii), e independentemente, (iv), exigem que (se o campo elétrico estiver orientado na direção x):

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \frac{\tilde{k}}{\omega} \tilde{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}$$

Ondas eletromagnéticas em condutores

- ★ O numero complexo $\tilde{k}$ pode ser representado como $\tilde{k} = Ke^{i\phi}$, onde

$$K \equiv |\tilde{k}| = \sqrt{k^2 + \kappa^2} = \omega \sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} \quad \text{e} \quad \phi \equiv \tan^{-1}(\kappa/k)$$

- ★ E as amplitudes complexas $\tilde{E}_0 = E_0 e^{i\delta_E}$ e $\tilde{B}_0 = B_0 e^{i\delta_B}$ se relacionam como

$$B_0 e^{i\delta_B} = \frac{K e^{i\phi}}{\omega} E_0 e^{i\delta_E}$$

- ★ Vemos que os campos não estão mais em fase: $\delta_B - \delta_E = \phi$ (o campo magnetico está atrasado em relação ao campo elétrico).

Ondas eletromagnéticas em condutores

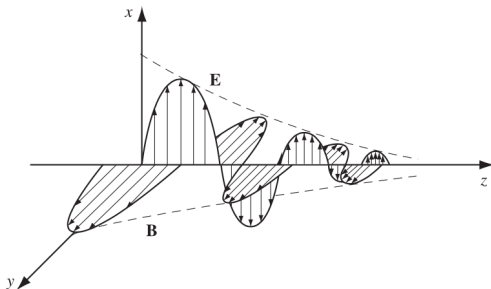
★ As amplitudes reais se relacionam da seguinte forma:

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{K}{\omega} = \sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}$$

★ e finalmente os campos (reais) são dados por

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E) \hat{\mathbf{x}},$$

$$\mathbf{B}(z, t) = B_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E + \phi) \hat{\mathbf{y}}$$



Reflexão numa superfície condutora

- ★ Aqui precisamos utilizar as condições de contorno mais gerais, obtidas no capítulo 7:

$$(i) \quad \epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = \sigma_f,$$

$$(iii) \quad \mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel = \mathbf{0}$$

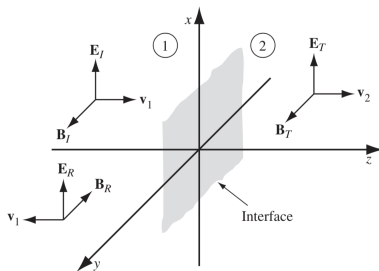
$$(ii) \quad B_1^\perp - B_2^\perp = 0,$$

$$(iv) \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$$

- ★ onde σ_f é a carga superficial livre e $\mathbf{K}_f$ é a corrente livre superficial.

- ★ Para condutores que obedecem à lei de Ohm ($\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$) não pode haver corrente superficial livre pois o campo teria que ser infinito na superfície.

- ★ Vamos supor o mesmo diagrama anterior, aqui o plano xy separa um meio linear não condutor (1) e um meio condutor (2).



Reflexão numa superfície condutora

- ★ As ondas incidentes, refletidas e transmitidas são:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_I(z, t) &= \tilde{E}_{0_I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, & \tilde{\mathbf{B}}_I(z, t) &= \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0_I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}} \\ \tilde{\mathbf{E}}_R(z, t) &= \tilde{E}_{0_R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, & \tilde{\mathbf{B}}_R(z, t) &= -\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0_R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}} \\ \tilde{\mathbf{E}}_T(z, t) &= \tilde{E}_{0_T} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, & \tilde{\mathbf{B}}_T(z, t) &= \frac{\tilde{k}_2}{\omega} \tilde{E}_{0_T} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

- ★ como $E^\perp = 0$ em ambos os lados, (i) resulta que $\sigma = 0$.
- ★ Como $B^\perp = 0$ em ambos os lados, (ii) é satisfeita trivialmente.
- ★ A condição (iii) exige que

$$\tilde{E}_{0_I} + \tilde{E}_{0_R} = \tilde{E}_{0_T}$$

- ★ enquanto que (iv) fornece

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} \left(\tilde{E}_{0_I} - \tilde{E}_{0_R} \right) - \frac{\tilde{k}_2}{\mu_2 \omega} \tilde{E}_{0_T} = 0, \quad \text{ou} \quad \tilde{E}_{0_I} - \tilde{E}_{0_R} = \tilde{\beta} \tilde{E}_{0_T}, \quad \tilde{\beta} \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} \tilde{k}_2$$

Reflexão numa superfície condutora

- ★ E resolvendo o sistema obtemos

$$\tilde{E}_{0R} = \left(\frac{1 - \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}} \right) \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \left(\frac{2}{1 + \tilde{\beta}} \right) \tilde{E}_{0I}$$

- ★ que parece a solução anterior para meios dielétricos, mas aqui $\tilde{\beta}$ é complexo.
- ★ No caso de um condutor perfeito ($\sigma = \infty$), $\tilde{k}_2 = \infty$, e $\tilde{\beta} = \infty$, pois no meio 2

$$k \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} + 1 \right]^{1/2}, \quad \kappa \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} - 1 \right]^{1/2}$$

- ★ e portanto

$$\tilde{E}_{0R} = -\tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = 0$$

- ★ e a onda é totalmente refletida com uma fase de 180° .
- ★ Como o comprimento de penetração para a prata é cerca de $100\text{\AA}$, um vidro com uma fina camada de prata se transforma num ótimo espelho.

Dependência da permissividade com a frequência

- ★ Em geral a permissividade ϵ , a permeabilidade μ e a condutividade σ dependem da frequência (**dispersão**).
- ★ Vidros por exemplo tem $n \cong \sqrt{\epsilon_r(\lambda)}$ conforme mostrado na figura abaixo para um vidro típico.
- ★ O azul é mais refratado que o vermelho.

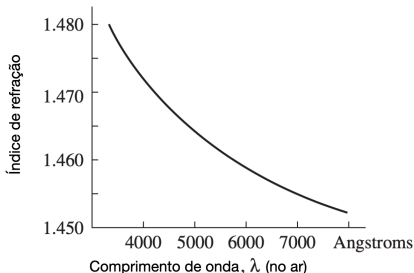


Imagem Griffiths, 2017

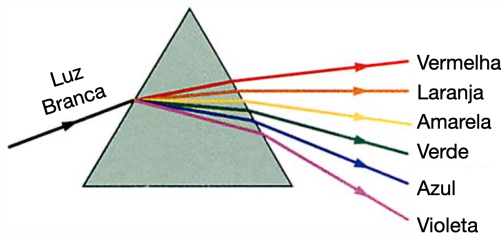


Imagem Tipler, Gene, Mosca, 2004

- ★ A velocidade de cada onda monocromática é dada pela **velocidade de fase** $v = \omega/k$ enquanto o pulso como um todo se propaga com a **velocidade de grupo** dada por $v_g = d\omega/dk$.

Dependência da permissividade com a frequência

- ★ Modelo atômico clássico para descrever a dependência da permissividade com a frequência.
- ★ Vamos imaginar os elétrons ligados às moléculas por uma força elástica

$$F_{\text{ligação}} = -k_{\text{mola}} x = -m\omega_0^2 x, \quad \text{onde} \quad \omega_0 = \sqrt{k_{\text{mola}}/m}$$

- ★ Qualquer potencial de ligação pode ser expresso na forma acima, pois em torno do ponto de equilíbrio

$$U(x) = U(0) + xU'(0) + \frac{1}{2}x^2U''(0) + \dots$$

- ★ onde $U(0) = 0$, $dU/dx = -F$ que é nula no ponto de equilíbrio e $k_{\text{mola}} = d^2U/dx^2|_0$.

- ★ O elétron sofre uma força de arrasto

$$F_{\text{arrasto}} = -m\gamma \frac{dx}{dt}$$

- ★ e é "forçado" pela força externa

$$F_{\text{externa}} = qE = qE_0 \cos(\omega t)$$

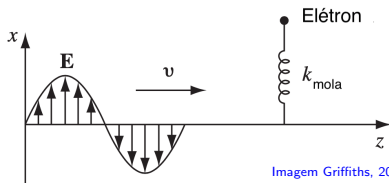


Imagem Griffiths, 2017

Dependência da permissividade com a frequência

- ★ Estamos supondo que a força magnética é desprezível.
- ★ A segunda lei de Newton aplicada ao elétron

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{tot}} = F_{\text{ligação}} + F_{\text{arrasto}} + F_{\text{externa}}$$
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = qE_0 \cos(\omega t)$$

- ★ Ou seja, um oscilador harmônico amortecido e forçado (o núcleo está em repouso).
- ★ A solução da equação fica mais simples se for considerada como uma eq. complexa

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} + \gamma \frac{d\tilde{x}}{dt} + \omega_0^2 \tilde{x} = \frac{q}{m} E_0 e^{-i\omega t}$$

- ★ e no estado estacionário oscila com a frequência da força externa:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$$

Dependência da permissividade com a frequência

- ★ Substituindo $\tilde{x}(t)$ na equação diferencial obtemos

$$\tilde{x}_0 = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0$$

- ★ que gera um momento de dipolo que é parte real de

$$\tilde{p}(t) = q\tilde{x}(t) = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}$$

- ★ Suponha que haja f_j elétrons com frequência ω_j e constante de amortecimento γ_j em cada molécula. Se há N moléculas por unidade de volume, a polarização $\mathbf{P}$ é a parte real de

$$\tilde{\mathbf{P}} = \frac{Nq^2}{m} \left(\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right) \tilde{\mathbf{E}}$$

- ★ Anteriormente a suscetibilidade elétrica tinha sido definida como $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$, mas agora $\mathbf{P}$ não é proporcional a $\mathbf{E}$ por causa da diferença de fase. Mas as quantidades complexas são proporcionais e assim definimos uma

suscetibilidade complexa $\tilde{\chi}_e$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \tilde{\chi}_e \tilde{\mathbf{E}}$$

Dependência da permissividade com a frequência

- ★ A proporcionalidade entre $\tilde{\mathbf{D}}$ e $\tilde{\mathbf{E}}$ é a **permeabilidade complexa** $\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 (1 + \tilde{\chi}_e)$ e a **constante dielétrica complexa** é

$$\tilde{\epsilon}_r = \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$$

- ★ A parte imaginária é importante quando ω é próximo das frequências ressonantes ω_j .
- ★ Num meio dispersivo, a equação de onda para uma dada frequência é dada por

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\epsilon}\mu_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$

- ★ e admite soluções de onda plana

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}$$

Dependência da permissividade com a frequência

- ★ com **número de onda complexo** $\tilde{k} \equiv \sqrt{\tilde{\epsilon}\mu_0\omega}$
- ★ que pode ser rescrito $\tilde{k} = k + i\kappa$ e o campo elétrico fica

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}$$

- ★ e vemos que a onda é atenuada. Como a intensidade é proporcional a E^2 (e portanto a $e^{-2\kappa z}$), definimos o **coeficiente de absorção**

$$\alpha \equiv 2\kappa$$

- ★ A velocidade da onda é ω/k , e o índice de refração é

$$n = \frac{ck}{\omega}$$

- ★ observe que aqui k e κ são determinados pelos parâmetros do oscilador amortecido.

Dependência da permissividade com a frequência

- ★ Para gases, o segundo termo da constante dielétrica complexa é muito pequeno:

$$\tilde{\epsilon}_r = \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$$

- ★ e podemos expandir a raiz quadrada na definição do número de onda complexo usando $\sqrt{1 + \epsilon} \cong 1 + \frac{1}{2}\epsilon$

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}_r} \cong \frac{\omega}{c} \left[1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right]$$

- ★ e da parte real de $\tilde{k}$ obtemos

$$n = \frac{ck}{\omega} \cong 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j (\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

e da parte imaginária

$$\alpha = 2\kappa \cong \frac{Nq^2\omega^2}{m\epsilon_0 c} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}$$

Dependência da permissividade com a frequência

- ★ Normalmente o índice de refração cresce com a frequência, como vimos para o caso do vidro. Mas na vizinhança de uma ressonância o índice de refração cai rapidamente: **dispersão anômala**.
- ★ A região de dispersão anômala ($\omega_1 < \omega < \omega_2$) coincide com a região de absorção máxima. A força externa está oscilando os elétrons na frequência "favorita" deles.
- ★ Fora da região de ressonâncias

$$n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2}$$

- ★ Para a maioria das substâncias as frequências naturais ω_j estão espalhadas por todo o espectro de forma caótica. Mas para materiais transparentes, as ressonâncias mas próximas estão no ultravioleta.

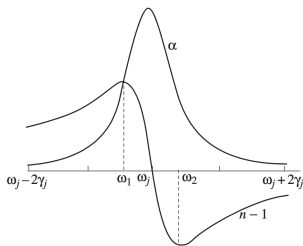


Imagem Griffiths, 2017

Dependência da permissividade com a frequência

- ★ Para $\omega < \omega_j$

$$\frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_j^2} \right)^{-1} \cong \frac{1}{\omega_j^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_j^2} \right)$$

- ★ e o índice de refração é reescrito como

$$n = 1 + \left(\frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} \right) + \omega^2 \left(\frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^4} \right)$$

- ★ ou em termos de comprimento de onda no vácuo ($\lambda = 2\pi c/\omega$)

$$n = 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right)$$

- ★ que é a fórmula de Cauchy. A é chamado o coeficiente de refração e B é o coeficiente de dispersão, que funciona bem para a maioria dos gases na região ótica.
- ★ O modelo clássico discutido nesta seção indica como o movimento harmônico amortecido dos elétrons pode dar conta da dependência com a frequência do índice de refração, como ele normalmente cresce com ω mas de vez em quando decresce nas regiões anômalas.

Guias de onda

- ★ Os campos devem satisfazer às eq. de Maxwell no interior do guia de onda:

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad (iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad (iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- ★ As ondas confinadas não são transversas em geral e cada componente é função de x e y :

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} + E_z \hat{\mathbf{z}}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_0 = B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}$$

- ★ As equações de Faraday e de Ampère fornecem

$$(i) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z, \qquad (iv) \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c^2} E_z$$

$$(ii) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - ikE_y = i\omega B_x, \qquad (v) \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} - ikB_y = -\frac{i\omega}{c^2} E_x$$

$$(iii) \quad ikE_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega B_y, \qquad (vi) \quad ikB_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{i\omega}{c^2} E_y$$

Guias de onda

★ As equações (ii), (iii), (v) e (vi) podem ser resolv. para E_x, E_y, B_x e B_y :

$$(i) \quad E_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_z}{\partial y} \right)$$

$$(ii) \quad E_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)$$

$$(iii) \quad B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

$$(iv) \quad B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

★ Se soubermos as comp. longitudinais E_z e B_z o problema está resolvido.

★ Exigindo que os campos satisfaçam $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ obtemos

$$(i) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2 \right] E_z = 0$$

$$(ii) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2 \right] B_z = 0.$$

Guias de onda

- ★ Se $E_z = 0$ as ondas são **ondas TE** (transversais elétricas), e se $B_z = 0$ são chamadas **ondas TM** (transversais magnéticas).
- ★ Se ambos $E_z = 0$ e $B_z = 0$ elas são **ondas TEM**. Estas ondas não podem acontecer num guia de ondas oco.
- ★ Vamos provar isso. Se $E_z = 0$, a lei de Gauss fornece $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$.
- ★ E se $B_z = 0$ a lei de Faraday (i) fornece $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$.
- ★ Ou seja, o vetor $\tilde{\mathbf{E}}_0$ tem divergente e rotacional nulos e portanto o potencial elétrico satisfaz a equação de Laplace.
- ★ Mas a condição de contorno para o campo elétrico $\mathbf{E}^{\parallel} = 0$ implica que a superfície é uma **equipotencial**, e como a equação de Laplace não permite máximos ou mínimos locais, significa que o potencial é constante em todo lugar e o campo é zero, não pode haver onda!
- ★ Observe que esse argumento não se aplica para um guia de ondas composto de dois tubos concêntricos, por exemplo.

Ondas TE num guia de ondas retangular

- ★ Vamos supor que a seção reta do guia de ondas tem altura a e largura b e vamos discutir ondas TE.
- ★ Temos que resolver

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2 \right] B_z = 0$$

- ★ sujeita às condições de contorno $\mathbf{E}^{\parallel} = \mathbf{0}$ e $B^{\perp} = 0$.
- ★ Vamos utilizar a técnica de separação de variáveis $B_z(x, y) = X(x)Y(y)$

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + [(\omega/c)^2 - k^2] XY = 0$$

- ★ Dividendo por XY e notando que os termos em x e y têm que ser constantes:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2$$

- ★ com

$$-k_x^2 - k_y^2 + (\omega/c)^2 - k^2 = 0$$

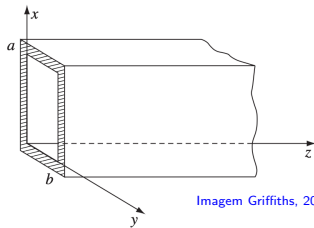


Imagem Griffiths, 2017

Ondas TE num guia de ondas retangular

- ★ A solução geral para $X(x)$

$$X(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)$$

- ★ Mas as condições de contorno exigem que B_x seja nulo em $x = 0$ e $x = a$.
- ★ Lembrando que já obtivemos

$$B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left(k \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

- ★ e como $E_z = 0$ para esse tipo de onda, temos que dX/dx devem se anular em $x = 0$ e $x = a$.
- ★ Assim $A = 0$ e $k_x = m\pi/a$, ($m = 0, 1, 2, \dots$).
- ★ O mesmo vale para Y , e portanto $k_y = n\pi/b$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).
- ★ e concluímos que

$$B_z(x, y) = B_0 \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)$$

Ondas TE num guia de ondas retangular

- ★ Esta solução é chamada o modo TE_{mn} . O primeiro índice é associado convencionalmente com a primeira dimensão. Vamos então supor que $a \geq b$.
- ★ O número de onda é dado por

$$k = \sqrt{(\omega/c)^2 - \pi^2 [(m/a)^2 + (n/b)^2]}$$

- ★ Quando

$$\omega < c\pi\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2} \equiv \omega_{mn}$$

- ★ o comprimento de onda é imaginário e ao invés de uma onda progressiva temos uma onda que é atenuada exponencialmente.
- ★ Assim ω_{mn} é chamada a **frequência de corte** para o modo em questão.
- ★ A menor frequência de corte ocorre para TE_{10} :

$$\omega_{10} = c\pi/a$$

- ★ E frequências menores que esta não se propagam.

Ondas TE num guia de ondas retangular

- ★ O número de onda pode ser escrito de uma forma mais compacta:

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}$$

- ★ e a velocidade da onda é dada por

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}}$$

- ★ que é maior que c . Mas como vai ser discutido num problema, a energia da onda se propaga com velocidade

$$v_g = \frac{1}{dk/d\omega} = c \sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2} < c$$

Ondas TE num guia de ondas retangular

- ★ Vamos supor uma onda plana usual que se desloca num ângulo θ com relação ao eixo z e se refletindo perfeitamente em cada superfície condutora.
- ★ Nas direções x e y as ondas refletidas interferem e formam padrões de ondas estacionárias. de comprimentos de onda $\lambda_x = 2a/m$ e $\lambda_y = 2b/n$, com números de onda $k_x = 2\pi/\lambda_x = \pi m/a$ e $k_y = \pi n/b$.
- ★ E na direção z temos uma onda progressiva com número de onda $k_z = k$.
- ★ O vetor de propagação para a onda plana original é portanto

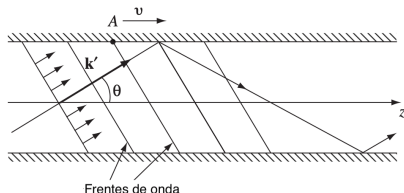
$$\mathbf{k}' = \frac{\pi m}{a} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\pi n}{b} \hat{\mathbf{y}} + k \hat{\mathbf{z}}$$

- ★ e a frequência é

$$\omega = c |\mathbf{k}'| = c \sqrt{k^2 + \pi^2 [(m/a)^2 + (n/b)^2]} = \sqrt{(ck)^2 + (\omega_{mn})^2}$$

- ★ Apenas alguns ângulos levam ao padrão de interferência das ondas estacionárias:

$$\cos \theta = \frac{k}{|\mathbf{k}'|} = \sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}$$



Ondas TE num guia de ondas retangular

- ★ A onda plana se propaga com velocidade c , mas porque ela se desloca num ângulo θ com o eixo z , sua velocidade ao longo do guia de onda é
$$v_g = c \cos \theta = c \sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}$$
- ★ A velocidade da onda, por outro lado, é a velocidade das frentes de onda (A, na figura, por exemplo) no tubo.
- ★ Como a velocidade que uma frente de onda atinge uma praia no mar, as frentes de onda no interior do tubo pode se mover muito mais rapidamente do que as próprias ondas:

$$v = \frac{c}{\cos \theta} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_{mn}/\omega)^2}}$$

Linha de transmissão coaxial

- ★ Mostramos que num guia de ondas oco não ocorre ondas TEM.
- ★ Mas numa linha de transmissão coaxial, consistindo de um longo fio de raio a circundado por uma casca cilíndrica de radio b ondas TEM com $E_z = 0$ e $B_z = 0$ podem se propagar.
- ★ Das eq. de Maxwell obtemos $-ikE_y = i\omega B_x$ e $ikB_x = -\frac{i\omega}{c^2}E_y$ e portanto $k = \omega/c$
- ★ e as ondas viajam com velocidade c e não são dispersivas e

$$cB_y = E_x \text{ e } cB_x = -E_y$$

- ★ Os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são perpendiculares e as eqs. de Maxwell fornecem

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$



Linha de transmissão coaxial

- ★ Estas são as equações da eletrostática e da magnetostática, para o espaço livre, em duas dimensões.
- ★ A solução com simetria cilíndrica pode ser tomada emprestada do problema de um fio infinito carregado e de uma corrente num fio infinito:

$$\mathbf{E}_0(s, \phi) = \frac{A}{s} \hat{\mathbf{s}}, \quad \mathbf{B}_0(s, \phi) = \frac{A}{cs} \hat{\phi}$$

- ★ para alguma constante A . Substituindo as soluções genéricas para uma guia de onda e tomando a parte real:

$$\mathbf{E}(s, \phi, z, t) = \frac{A \cos(kz - \omega t)}{s} \hat{\mathbf{s}}$$
$$\mathbf{B}(s, \phi, z, t) = \frac{A \cos(kz - \omega t)}{cs} \hat{\phi}$$