

# Eletrodinâmica clássica II - 2020/2

## **Cap 08: Leis de conservação**

João R. T. de Mello Neto

Bacharelado em Física  
Instituto de Física - UFRJ

Abril 2021

## A descoberta mais importante do sec. XIX

“From a very long view of the history of mankind - seen from, say, ten thousand years from now - there can be little doubt that the **most significant event** of the 19th century will be judged as Maxwell's discovery of the **laws of electrodynamics**. The American Civil War will fade into provincial insignificance in comparison with this important scientific event of the same decade.”

Richard Feynmann, *Lectures on Physics*, vol. II,

# A equação da continuidade

- ★ A **conservação local** da carga é uma condição importante para o EM:

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

- ★ onde a carga num volume  $\mathcal{V}$  é  $Q(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}, t) d\tau$  e a corrente saindo pela superfície  $\mathcal{S}$  é  $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ .
- ★ Com o auxílio do teorema da divergência podemos escrever

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{J} d\tau$$

- ★ e como a expressão acima é válida para qualquer volume:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

- ★ que é a equação da continuidade. Ela está contida nas equações de Maxwell e serve como um vínculo entre as fontes.

# O teorema de Poynting

- ★ Vamos desenvolver equações de conservação para a energia e o momentum. A densidade de energia e a densidade de momentum serão expressas como função da “corrente” de energia e da “corrente” de momentum.
- ★ Do cap.2: o trabalho para juntar uma distribuição estática de carga é:

$$W_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

e vimos no cap 7 que o trabalho para estabelecer correntes é:

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau$$

- ★ o que sugere que a energia total armazenada nos campos eletromagnéticos por unidade de volume é

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

- ★ Em seguida vamos confirmar a expressão acima e desenvolver a lei de conservação da energia para a eletrodinâmica.

# O teorema de Poynting

- ★ Suponha que uma configuração de cargas e correntes produza campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  num certo instante  $t$ . No instante seguinte  $dt$  as cargas se movem um pouco. Qual o trabalho realizado pelas forças eletromagnéticas que agem nas cargas em  $dt$ ?
- ★ De acordo com a força de Lorentz

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}dt = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}dt$$

podemos escrever  $q \rightarrow \rho d\tau$  e  $\rho\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{J}$  e portanto a taxa de trabalho realizado nas cargas é

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

- ★ O trabalho realizado por unidade de volume e de tempo é  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ , que pode ser expressa apenas em termos dos campos com o auxílio da lei de Ampère-Maxwell:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

# O teorema de Poynting

- ★ Por meio da identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

e utilizando-se a lei de Faraday ( $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ ) temos

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

- ★ Temos também as identidades

$$\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (B^2) \quad \text{e} \quad \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2)$$

- ★ temos

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

e finalmente temos o teorema de Poynting:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau - \frac{1}{\mu_0} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}$$

# O teorema de Poynting

- ★ O trabalho realizado nas cargas pela força eletromagnética é igual ao decréscimo da energia remanescente nos campos menos a energia que fluiu através da superfície.
- ★ A energia por unidade de tempo e área transportada pelos campos é denominada o **vetor de Poynting**, que é a **densidade de fluxo de energia**:

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

- ★ Podemos escrever o teorema de Poynting de modo mais compacto

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V u d\tau - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$$

- ★ Se estivermos numa região sem cargas, então  $dW/dt = 0$  e portanto

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = -\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = -\int (\nabla \cdot \mathbf{S}) d\tau$$

e assim temos a “equação da continuidade” para a energia:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S}$$

# Momentum: a terceira lei de Newton para a eletrodinâmica

- ★ Suponha uma carga  $q$  se movendo com velocidade  $\mathbf{v}_1 = -v\mathbf{i}$
- ★ O campo não é dado pela lei de Coulomb pois a carga está se movendo, mas os campos apontam para a **posição instantânea** da carga.
- ★ A corrente não é estacionária e o campo magnético não é dado pela lei de Biot-Savart, embora ele circule em torno do eixo do movimento com o sentido dado pela regra da mão direita.

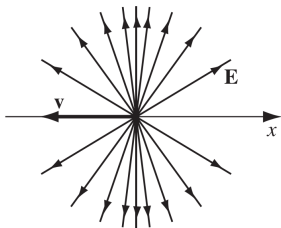
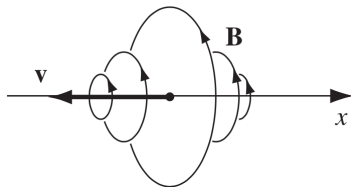


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

# Momentum: a terceira lei de Newton para a eletrodinâmica

- ★ Agora suponha uma segunda carga com velocidade  $\mathbf{v}_2 = -v\mathbf{j}$
- ★ Suponha que as duas cargas estejam em trilhos e que mantenham as mesmas direção e velocidade. As forças agindo em cada carga estão ilustradas na figura.
- ★ Vemos que a força eletromagnética de  $q_1$  em  $q_2$  é igual em módulo mas não oposta à força de  $q_2$  em  $q_1$ , violando a terceira lei.
- ★ Mas os próprios campos carregam momentum.
- ★ Para que o momentum total seja **conservado** temos que somar o momentum dos **campos**.

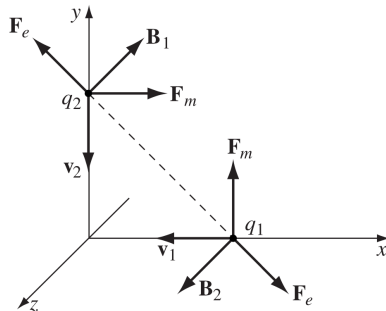


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

# Tensor das tensões de Maxwell

- ★ Vamos calcular a força eletromagnética total nas cargas dentro do volume  $\mathcal{V}$

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho d\tau = \int_{\mathcal{V}} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) d\tau$$

- ★ E expressar a força por unidade de volume em função apenas dos campos:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}$$

- ★ e utilizando-se a lei de Faraday  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

e portanto a força pode ser escrita como:

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] - \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

# Tensor das tensões de Maxwell

- ★ Para tornar a exp. anterior simétrica, vamos somar um zero  $(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}$ .
- ★ Regra do produto no. 2 (cap. 1), para quaisquer dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ :

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

- ★ que no nosso caso fica:

$$\nabla(E^2) = 2(\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} + 2\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

- ★ e portanto (temos uma expressão análoga para  $\mathbf{B}$ )

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2}\nabla(E^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}$$

- ★ E fazendo todas essas substituições chegamos a

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \epsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \\ & - \frac{1}{2}\nabla \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

# Tensor das tensões de Maxwell

- ★ Para simplificar e dar um sentido físico mais claro à expressão anterior vamos definir o **tensor de Maxwell**:

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0 \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right)$$

- ★ composto de nove componentes  $(T_{xx}, T_{yy}, T_{xz}, T_{yx} \dots)$ .
- ★ Delta de Kronecker:  $(\delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = 1)$  e  $(\delta_{xy} = \delta_{xz} = \delta_{yz} = 0)$
- ★ Algumas componentes do tensor:

$$T_{xx} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 - B_y^2 - B_z^2) \quad (1)$$

$$T_{xy} = \epsilon_0 (E_x E_y) + \frac{1}{\mu_0} (B_x B_y) \quad (2)$$

- ★ Observe que é um tensor simétrico  $T_{xy} = T_{yx}$

# Tensor das tensões de Maxwell

- ★ Como tem dois índices o tensor  $T_{ij}$  é também representado por  $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$
- ★ O produto escalar com um vetor é definido à direita e à esquerda:

$$(\mathbf{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}})_j = \sum_{i=x,y,z} a_i T_{ij}, \quad (\overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{a})_j = \sum_{i=x,y,z} T_{ji} a_i$$

- ★ e o objeto resultante, que só tem um índice livre, é um vetor. Em particular a divergência de  $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$  tem como sua  $j$ -ésima componente

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}})_j = & \epsilon_0 \left[ (\nabla \cdot \mathbf{E}) E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla) E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2 \right] \\ & + \frac{1}{\mu_0} \left[ (\nabla \cdot \mathbf{B}) B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2 \right] \end{aligned}$$

e a força por unidade de volume pode ser escrita de modo mais compacto:

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$$

# Tensor das tensões de Maxwell

- ★ A força eletromagnética **total** nas cargas em  $\mathcal{V}$  é (onde o teorema da divergência foi utilizado na primeira integral à direita):

$$\mathbf{F} = \oint_S \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} d\tau$$

- ★ No caso estático o segundo termo da direita se anula e a força eletromagnética pode ser expressa inteiramente em termos do tensor das tensões **na fronteira**:

$$\mathbf{F} = \oint_S \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a}$$

- ★ Fisicamente  $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$  é a força por unidade de área agindo na superfície.
- ★  $T_{ij}$  é a força por unidade de área na direção  $i$  agindo num elemento de superfície orientado na direção  $j$ .
- ★ Elementos diagonais ( $T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}$ ) assim fornecem a **pressão**.
- ★ Elementos fora da diagonal ( $T_{xy}, T_{xz}$ , etc. ) fornecem o **cisalhamento**.

## Exemplo 1

- ★ **Griffiths, ex. 8.2:** Determine a força resultante no hemisfério superior de uma esfera sólida uniformemente carregada de raio  $R$  e carga  $Q$  por meio do tensor de Maxwell.

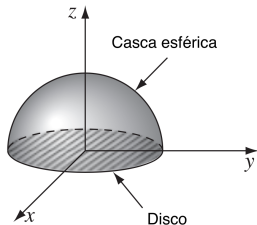


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

# Exemplo 1

- ★ Griffiths, ex. 8.2: Determine a força resultante no hemisfério superior de uma esfera sólida uniformemente carregada de raio  $R$  e carga  $Q$  por meio do tensor de Maxwell.
- ★ A superfície consiste de uma casca esférica de raio  $R$  e de um disco em  $\theta = \pi/2$ . Para a casca:

$$d\mathbf{a} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{\mathbf{r}}$$

- ★ Em componentes cartesianas

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$$

- ★ e a componente  $zx$  tensor fica

$$T_{zx} = \epsilon_0 E_z E_x = \epsilon_0 \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi$$

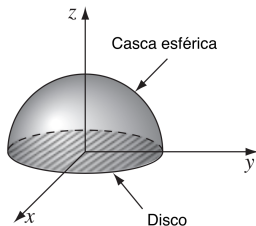


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

## Exemplo 1

★ Enquanto as componentes  $zy$  e  $zz$  são dadas por

$$T_{zy} = \epsilon_0 E_z E_y = \epsilon_0 \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi$$

$$T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

★ A força resultante é claramente na direção  $z$ , portanto só precisamos calcular

$$(\vec{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a})_z = T_{zx} da_x + T_{zy} da_y + T_{zz} da_z = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \right)^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi$$

★ e a força na casca esférica é

$$F_{\text{casca}} = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \right)^2 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{8R^2}$$

## Exemplo 1

- ★ No disco equatorial:

$$d\mathbf{a} = -rdrd\phi\hat{\mathbf{z}}$$

- ★ e agora estamos no interior da esfera:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r(\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\hat{\mathbf{y}})$$

- ★ e a componente  $zz$  do tensor é

$$T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) = -\frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 r^2$$

$$(\vec{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a})_z = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 r^3 drd\phi$$

- ★ e a força no disco é

$$F_{\text{disco}} = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{16R^2}$$

## Exemplo 1

- ★ Portanto a força total no hemisfério superior da esfera é

$$F = F_{\text{casca}} + F_{\text{disco}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q^2}{16R^2}$$

- ★ Para obtermos este resultado podemos na realidade utilizar **qualquer** superfície que contenha a carga em questão. Podemos utilizar uma superfície esférica no plano superior de raio infinito. Como a superfície esférica está no infinito, os campos são nulos e o tensor é nulo. Mas agora precisamos calcular o tensor no plano  $r > R$ . Já calculamos a componente  $zz$  do tensor:

$$T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2} (E_z^2 - E_x^2 - E_y^2) = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

e fazendo nela  $\theta = \pi/2$  e  $R \rightarrow r$

$$T_{zz} = -\frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4}$$

## Exemplo 1

- ★ e de novo utilizando o elemento de área  $d\mathbf{a} = -rdrd\phi\hat{\mathbf{z}}$

$$(\overleftarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a})_z = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^3} drd\phi$$

- ★ e a contribuição do plano para  $r > R$  é dada por

$$\frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 2\pi \int_R^\infty \frac{1}{r^3} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{8R^2}$$

- ★ que é idêntica à da casca esférica!
- ★ Observe que um problema de força no volume foi reduzido a um problema de integração na superfície!

# Conservação do momentum

- ★ De acordo com a segunda lei de Newton, a força num objeto é a taxa de variação do seu momentum:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{mec}}}{dt}$$

- ★ e a equação anterior para a força total nas cargas em  $\mathcal{V}$  pode ser reescrita

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{mech}}}{dt} = -\epsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{S} d\tau + \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{a}$$

- ★ onde  $\mathbf{p}_{\text{mec}}$  é o momentum mecânico das partículas no volume  $\mathcal{V}$  e pode ser interpretada de forma análoga ao teorema de Poynting.
- ★ A primeira integral representa o **momentum** armazenado nos campos

$$\mathbf{p} = \mu_0\epsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \mathbf{S} d\tau$$

- ★ enquanto a segunda integral é o **momentum** por unidade de tempo **fluindo** através da superfície.

# Conservação do momentum

- ★ Deduzimos então a lei de **conservação do momentum** em eletrodinâmica:

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{mec}}}{dt} = -\epsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} d\tau + \oint_S \mathbf{T} \cdot d\mathbf{a}$$

- ★ Se o momentum mecânico cresce, ou o momentum dos campos decresce ou os campos estão levando momentum pela superfície para dentro do volume.
- ★ A densidade de momentum dos campos é

$$\mathbf{g} = \mu_0\epsilon_0 \mathbf{S} = \epsilon_0(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

- ★ E o mom. eletromagnético por tempo passando pela área  $d\mathbf{a}$  é  $-\mathbf{T} \cdot d\mathbf{a}$
- ★ Se o mom. mecânico não muda em  $V$  temos a “eq. da continuidade” para o momentum:

$$\int \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} d\tau = \oint \mathbf{T} \cdot d\mathbf{a} = \int \nabla \cdot \mathbf{T} d\tau \quad \text{e portanto} \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{T}$$

# Momento Angular

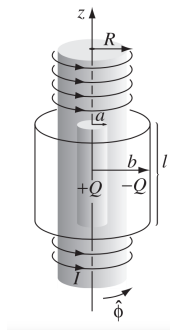
- ★ Os campos eletromagnéticos tiveram origem como um conceito auxiliar de mediador da força elétrica e agora são os objetos mais importantes do eletromagnetismo. Eles carregam energia

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

- ★ e momentum  $\mathbf{g} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$
- ★ e talvez ainda de modo menos intuitivo eles carregam também momentum angular:  $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \epsilon_0 [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})]$
- ★ Mesmo campos **estáticos** podem conter momentum e momentum angular, desde que  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  seja diferente de zero.
- ★ E apenas quando essas contribuições do campo são incluídas é que as leis de conservação são mantidas.

## Exemplo 2

- ★ Griffiths, ex. 8.4: Imagine um solenóide com raio  $R$ ,  $n$  voltas por unidade de comprimento e corrente  $I$ . Duas cascas cilíndricas não-condutoras de comprimento  $l$  podem girar em torno do eixo do solenóide. A interna ao solenóide tem raio  $a$  e contém carga  $+Q$  uniformemente distribuída sobre sua superfície. A outra, fora do solenóide, tem raio  $b$  e contém carga  $-Q$ . Supomos  $l \gg b$ . Quando a corrente no solenóide é reduzida gradualmente, os cilindros começam a girar. De onde o momento angular veio?

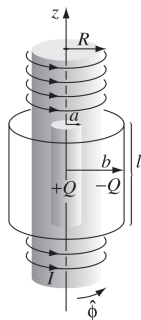


## Exemplo 2

- ★ Griffiths, ex. 8.4: Imagine um solenóide com raio  $R$ ,  $n$  voltas por unidade de comprimento e corrente  $I$ . Duas cascas cilíndricas não-condutoras de comprimento  $l$  podem girar em torno do eixo do solenóide. A interna ao solenóide tem raio  $a$  e contém carga  $+Q$  uniformemente distribuída sobre sua superfície. A outra, fora do solenóide, tem raio  $b$  e contém carga  $-Q$ . Supomos  $l \gg b$ . Quando a corrente no solenóide é reduzida gradualmente, os cilindros começam a girar. De onde o momento angular veio?

- ★ Vamos mostrar que o momentum angular estava originalmente nos campos.
- ★ Antes que a corrente fosse reduzida, entre as cascas cilíndricas havia um campo elétrico e um campo magnético:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l s} \hat{\mathbf{s}} \quad (a < s < b), \quad \mathbf{B} = \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}} \quad (s < R)$$



## Exemplo 2

- ★ A densidade de momentum em  $a < s < R$ :

$$\mathbf{g} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s} \hat{\phi}$$

- ★ A comp.  $z$  de densidade de momentum angular nessa região é

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{g})_z = -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l}$$

- ★ Que integrando no volume entre as cascas  $\pi (R^2 - a^2) l$

$$\mathbf{L} = -\frac{1}{2} \mu_0 n I Q (R^2 - a^2) \hat{\mathbf{z}}$$

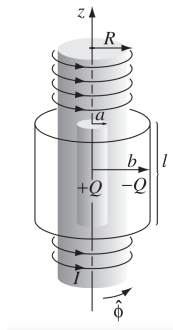


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

## Exemplo 2

- ★ Quando a corrente diminui aparece um campo coaxial entre as cascas (lei de Faraday):

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2}\mu_0 n \frac{dI}{dt} \frac{R^2}{s} \hat{\phi} \quad (s > R)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2}\mu_0 n \frac{dI}{dt} s \hat{\phi}, \quad (s < R)$$

- ★ Que causa um torque no cilindro externo:

$$\mathbf{N}_b = \mathbf{r} \times (-Q\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\mu_0 n Q R^2 \frac{dI}{dt} \hat{\mathbf{z}}$$

- ★ que causa um momento angular

$$\mathbf{L}_b = \frac{1}{2}\mu_0 n Q R^2 \hat{\mathbf{z}} \int_I^0 \frac{dI}{dt} dt = -\frac{1}{2}\mu_0 n I Q R^2 \hat{\mathbf{z}}$$

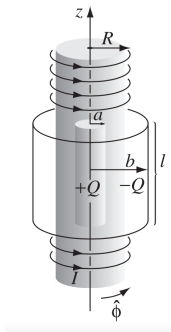


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

## Exemplo 2

★ Da mesma forma, para o cilindro interno de raio  $a$

$$\mathbf{N}_a = -\frac{1}{2}\mu_0 n Q a^2 \frac{dI}{dt} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{L}_a = \frac{1}{2}\mu_0 n I Q a^2 \hat{\mathbf{z}}$$

★ e portanto

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\text{em}} &= -\frac{1}{2}\mu_0 n I Q (R^2 - a^2) \hat{\mathbf{z}} \\ &= \mathbf{L}_a + \mathbf{L}_b\end{aligned}$$

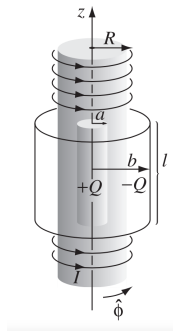


Imagem adaptada de Griffiths, 2017



# Campos magnéticos não fazem trabalho

- ★ Ao mesmo tempo, uma fem de movimento é induzida no anel, a qual se opõe ao fluxo das cargas e reduz sua velocidade angular:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$



Imagem adaptada de Griffiths, 2017

- ★ onde  $d\Phi$  é o fluxo pela "fita" desenhada pelo anel entre  $t$  e  $t + dt$ :  $d\Phi = B_s 2\pi a dz$
- ★ A fem é dada por  $\mathcal{E} = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = f(2\pi a)$  onde  $\mathbf{f}$  é a força por unidade de carga. Assim  $f = -B_s \frac{dz}{dt}$ , a força num num segmento de tamanho  $dl$  é  $f \lambda dl$  e portanto o torque no anel é

$$N = a \left( -B_s \frac{dz}{dt} \right) \lambda (2\pi a)$$

- ★ e o trabalho realizado para frear a rotação das cargas é  $N d\phi = N \omega dt$  ou seja

$$dW = -2\pi a^2 \lambda \omega B_s dz$$

- ★ O anel é freiado e a energia rotacional que ele perde é igual à energia potencial que ele ganha.
- ★ O campo magnético converte energia de uma forma para outra!!

# Díades, diádicos e tensores

- ★ Gibbs apresentou o conceito de diádico no final do século dezenove para generalizar a análise vetorial a problemas nos quais as componentes de vetores são relacionadas de uma forma linear. Atualmente a abordagem tensorial é predominante mas os diádicos ainda aparecem em eletrodinâmica e em mecânica clássica.
- ★ Uma díade é um par de vetores em uma ordem definida:  $\mathbf{AB}$  ou  $\mathbf{BA}$
- ★ Um diádico é um polinômio linear formado de díades:  $\mathbf{AB} + \mathbf{CD} + \dots$
- ★ Uma díade é definida pelas seguintes propriedades, onde  $\mathbf{C}$  é um vetor qualquer:

$$(\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad \mathbf{C} \cdot (\mathbf{AB}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}$$

- ★ Para vetores fixos  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ , a díada  $\mathbf{AB}$  define um *operador vetorial linear*  $\mathbf{F}(\mathbf{C})$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{C}) = (\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{C}$$

- ★ Um operador vetorial linear é chamado também um *tensor*.

# Díades, diádicos e tensores

- ★ Já definimos anteriormente o tensor de Maxwell como o diádico  $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$  que já numa notação tensorial:

$$(\mathbf{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}})_j = \sum_{i=x,y,z} a_i T_{ij}, \quad (\overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{a})_j = \sum_{i=x,y,z} T_{ji} a_i$$

- ★ O tensor de Maxwell é um tensor de segunda ordem que pode ser representado também por uma matriz  $3 \times 3$  onde  $i$  é o índice das *linhas* e  $j$  é o índice das *colunas*:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} \equiv (\overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{ij}) = \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{xx} & \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{xy} & \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{xz} \\ \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{yx} & \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{yy} & \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{yz} \\ \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{zx} & \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{zy} & \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx}\hat{x}\hat{x} & T_{xy}\hat{x}\hat{y} & T_{xz}\hat{x}\hat{z} \\ T_{yx}\hat{y}\hat{x} & T_{yy}\hat{y}\hat{y} & T_{yz}\hat{y}\hat{z} \\ T_{zx}\hat{z}\hat{x} & T_{zy}\hat{z}\hat{y} & T_{zz}\hat{z}\hat{z} \end{pmatrix}$$

- ★ Dados  $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)$  e  $\vec{b} = (b_x \ b_y \ b_z)$  a operação  $\vec{b} = \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}$

$$b_j = (\vec{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}})_j = \sum_{i=1}^3 a_i T_{ij} = a_i T_{ij}$$

## Díades, diádicos e tensores

$$\begin{pmatrix} b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_x T_{xx} + a_y T_{yx} + a_z T_{zx} & a_x T_{xy} + a_y T_{yy} + a_z T_{zy} & a_x T_{xz} + a_y T_{yz} + a_z T_{zz} \end{pmatrix}$$

★ e de forma similar  $\vec{c} = \overleftrightarrow{T} \cdot \vec{a}$

$$c_i = (\overleftrightarrow{T} \bullet \vec{a})_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} a_j = T_{ij} a_j$$

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x T_{xx} + a_y T_{xy} + a_z T_{xz} \\ a_x T_{yx} + a_y T_{yy} + a_z T_{yz} \\ a_x T_{zx} + a_y T_{zy} + a_z T_{zz} \end{pmatrix}$$

★ E finalmente, a divergência de um tensor  $\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T}$  é um vetor e possui a mesma estrutura matemática de  $\vec{b} = \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{T}$  vista acima:

$$(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T})_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial r_i}$$

onde a soma é no índice  $i$ , ou seja, nas *colunas*.

# Díades, diádicos e tensores

★ Ou seja, explicitando as componentes:

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \\&= \left( \left( \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \right) \\&= \left( (\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T})_x \quad (\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T})_y \quad (\vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T})_z \right)\end{aligned}$$

# Interpretação física do vetor de Poynting

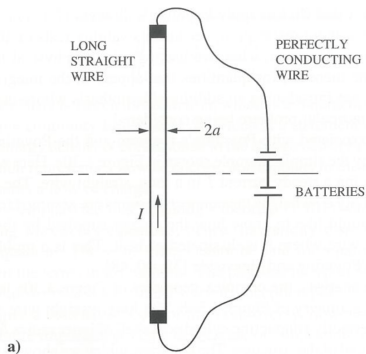
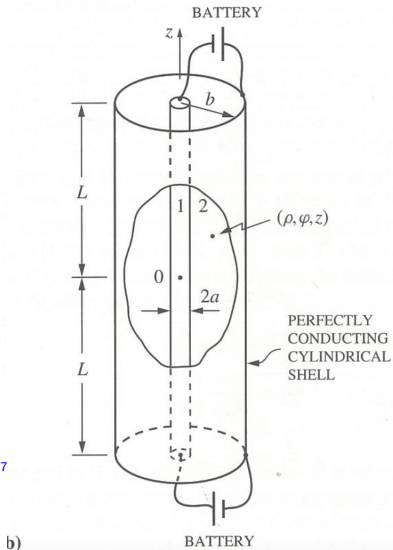


Imagem adaptada de Smith, 1997



# Interpretação física do vetor de Poynting

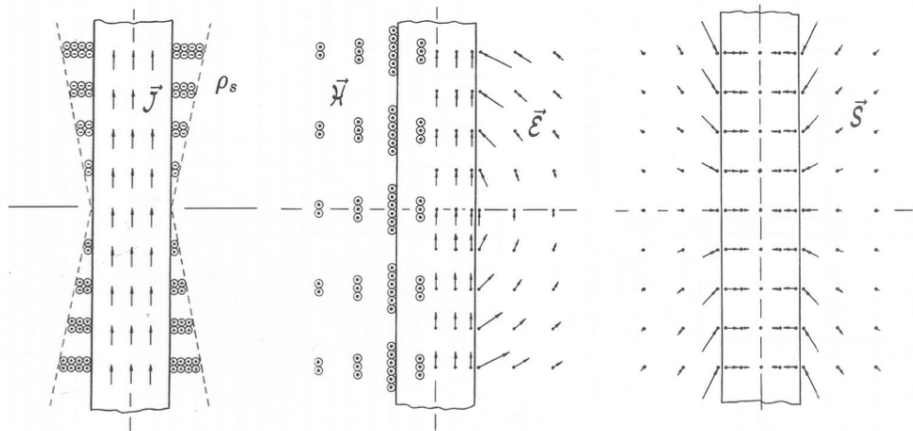


Imagem adaptada de Smith, 1997

# Interpretação física do vetor de Poynting

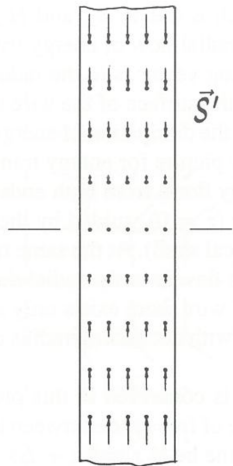


Imagem adaptada de Smith, 1997