

# Eletrodinâmica clássica II - 2022/1

## **Eletrodinâmica e equações de Maxwell**

João R. T. de Mello Neto

Bacharelado em Física  
Instituto de Física - UFRJ

Abril 2022

# Robot *Perserverance* em Marte



## Robot *Perserverance* em Marte

Controlado por ondas eletromagnéticas emitidas da Terra que levam de 5 a 20 min para chegar a Marte, dependendo da posição relativa dos planetas!

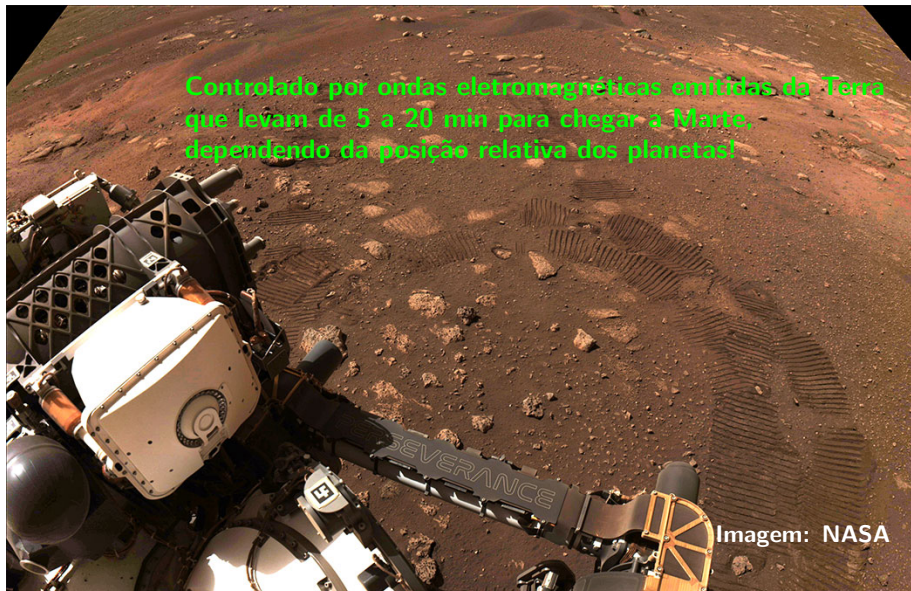


Imagem: NASA

# Até agora: eletrostática e magnetostática

## ★ Eletrostática:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{z^2} \hat{\mathbf{z}} \quad [\text{N}]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{z^2} \hat{\mathbf{z}} d\tau' \quad [\text{V/m}] \quad \text{onde } \mathbf{z} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{int}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$V(\mathbf{r}) \equiv - \int_{\odot}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad [\text{V}] \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad [\text{C/m}^2]$$

# Até agora: eletrostática e magnetostática

## ★ Magnetostática:

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{dQ_{\text{int}}}{dt} \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l}' \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} \quad [\text{T}]$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r} d\tau' \quad [\text{T/m}]$$

$$\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad [\text{A/m}]$$

# Lei de Ohm

Para que uma corrente exista num condutor, por exemplo, as cargas precisam ser “empurradas”. Em geral, a **densidade de corrente** (em  $[C/s.m^2]$ ) é proporcional à **força por unidade de carga**:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f}$$

onde  $\sigma$  é a **condutividade** do material (ou **resistividade**  $\rho = 1/\sigma$   $[\Omega m]$ ). Mesmo isolantes conduzem um pouco, mas geralmente podemos considerar metais como condutores perfeitos  $\sigma = \infty$  e isolantes  $\sigma = 0$ . A força que age nas cargas é a força eletromagnética e a densidade de corrente fica:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Como a velocidade das cargas é pequena:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

que é conhecida como a lei de Ohm.

# Tabela de resistividade

| Material           | Resistivity           | Material               | Resistivity         |
|--------------------|-----------------------|------------------------|---------------------|
| <i>Conductors:</i> |                       | <i>Semiconductors:</i> |                     |
| Silver             | $1.59 \times 10^{-8}$ | Sea water              | 0.2                 |
| Copper             | $1.68 \times 10^{-8}$ | Germanium              | 0.46                |
| Gold               | $2.21 \times 10^{-8}$ | Diamond                | 2.7                 |
| Aluminum           | $2.65 \times 10^{-8}$ | Silicon                | 2500                |
| Iron               | $9.61 \times 10^{-8}$ | <i>Insulators:</i>     |                     |
| Mercury            | $9.61 \times 10^{-7}$ | Water (pure)           | $8.3 \times 10^3$   |
| Nichrome           | $1.08 \times 10^{-6}$ | Glass                  | $10^9 - 10^{14}$    |
| Manganese          | $1.44 \times 10^{-6}$ | Rubber                 | $10^{13} - 10^{15}$ |
| Graphite           | $1.6 \times 10^{-5}$  | Teflon                 | $10^{22} - 10^{24}$ |

**TABLE 7.1** Resistivities, in ohm-meters (all values are for 1 atm, 20° C). *Data from Handbook of Chemistry and Physics*, 91st ed. (Boca Raton, Fla.: CRC Press, 2010) and other references.

# Exemplo 1

- ★ exemplo 7.1 Griffiths

- ★ Um resistor cilíndrico de seção reta  $A$  constante e comprimento  $L$  é feito de um material de condutividade  $\sigma$ . Supondo que o potencial seja constante em cada tampa do resistor e a diferença de potencial entre elas é  $V$ , qual a corrente que flui?

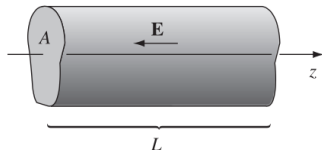


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

# Exemplo 1

- ★ exemplo 7.1 Griffiths

- ★ Um resistor cilíndrico de seção reta  $A$  constante e comprimento  $L$  é feito de um material de condutividade  $\sigma$ . Supondo que o potencial seja constante em cada tampa do resistor e a diferença de potencial entre elas é  $V$ , qual a corrente que flui?

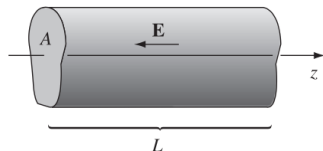


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

- ★ o campo elétrico é **uniforme** no interior do fio:

$$I = JA = \sigma EA = \frac{\sigma A}{L} V$$

- ★ e portanto

$$V = RI, \quad \text{onde} \quad R = \frac{L}{\sigma A}$$

## Forma mais conhecida da lei de Ohm

A corrente total que flui de um eletrodo para o outro é proporcional à diferença de potencial entre eles:

$$V = RI$$

onde  $R$  é a **resistência** que é uma função da geometria do problema e da condutividade do material entre os eletrodos. Ela é medida em **ohms** ( $1\Omega = 1V/1A$ ).

Para correntes **estacionárias** e condutividade **uniformes**

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

a densidade de carga é nula e qualquer excesso de carga se encontra na superfície. A equação de Laplace vale no interior de um material ôhmico homogêneo que conduz uma corrente estacionária e tudo que foi visto sobre esse assunto pode ser aplicado para o cálculo do potencial.

## Cálculo da resistência de um condutor

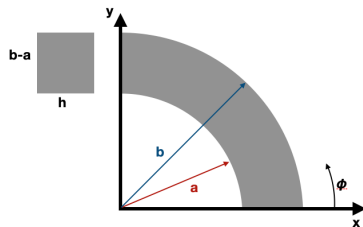
- ★ Quando a geometria é tal que  $\mathbf{J}$  possa ser determinado facilmente de uma corrente total  $I$ , como o Exemplo 7.1 anterior:
  - \* Começamos a solução supondo uma  $I$ .
  - \* De  $I$ ,  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma$  são determinados.
  - \* A diferença de potencial é calculada de  $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
  - \* A resistência  $R = V/I$  é independente da  $I$  suposta, que será cancelada no processo.
- ★ Para uma geometria mais complicada, dadas as equipotenciais dos terminais:
  - \* Escolha uma sistema de coordenadas apropriado para a dada geometria;
  - \* Suponha uma diferença de potencial  $V_0$  entre os terminais do condutor;
  - \* Encontre o campo elétrico no condutor. Se o material é *homogêneo*, tendo uma condutividade *constante*, o método geral é resolver a equação de Laplace  $\nabla^2 V = 0$  para  $V$  no sistema de coordenadas escolhido e então obter  $\mathbf{E} = -\nabla V$
  - \* Encontre a corrente total

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_A \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

- \* Encontre a resistência  $R = V_0/I$

## Exemplo 2

- ★ Um material condutor de espessura uniforme  $h$  e condutividade  $\sigma$  tem a forma de um quarto de arruela circular, com raio interno  $a$  e raio externo  $b$  (seção transversal retangular). Determine a resistência entre as seções retas inicial e final.



- ★ Para referência, em coordenadas polares:

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial s} \hat{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial T}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

## Exemplo 2

- ★ Um material condutor de espessura uniforme  $h$  e condutividade  $\sigma$  tem a forma de um quarto de arruela circular, com raio interno  $a$  e raio externo  $b$  (seção transversal retangular). Determine a resistência entre as seções retas inicial e final.

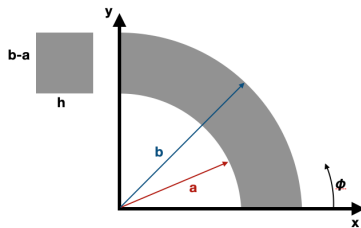
$$\begin{aligned} V &= 0 & \text{em } \phi &= 0 \\ V &= V_0 & \text{em } \phi &= \pi/2. \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0 \quad V = c_1 \phi + c_2 \quad V = \frac{2V_0}{\pi} \phi$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla V = -\sigma \frac{\partial V}{s \partial \phi} \hat{\phi} = -\frac{2\sigma V_0}{\pi s} \hat{\phi}$$

- ★ Integra a  $\mathbf{J}$  para achar  $I$  em  $\phi = \pi/2$  na qual  $d\mathbf{A} = -h dr \hat{\phi}$

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \frac{2\sigma V_0}{\pi} h \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{2\sigma h V_0}{\pi} \ln \frac{b}{a}$$



$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\pi}{2\sigma h \ln(b/a)} \quad [\Omega]$$

# Modelo microscópico para a resistência

- ★ A lei de Ohm é apenas uma relação empírica que vale para a maioria dos materiais.
- ★ Se as cargas estão submetidas a forças, por que não aceleram e aumentam a velocidade com o tempo?
- ★ Os elétrons sofrem colisões frequentes por causa de sua energia térmica. Supondo uma distância média  $\lambda$  entre colisões:

$$t = \frac{\lambda}{v_{\text{term}}} \rightarrow v_{\text{med}} = \frac{1}{2}at = \frac{a\lambda}{2v_{\text{term}}}$$

onde  $a$  é a aceleração média entre colisões. Para  $n$  moléculas por unidade de volume e  $f$  elétrons livres por molécula, cada uma com carga  $q$ , massa  $m$ , a densidade de corrente é dada por

$$\mathbf{J} = nfq\mathbf{v}_{\text{ave}} = \frac{nfq\lambda}{2v_{\text{term}}} \frac{\mathbf{F}}{m} = \left( \frac{nf\lambda q^2}{2mv_{\text{term}}} \right) \mathbf{E} \quad [\text{A/m}^2]$$

- ★ O trabalho da força elétrica é convertido em calor no resistor. Se o trabalho por unidade de carga é  $V$  e a quantidade de carga fluindo por unidade de tempo é  $I$ , a potência produzida é  $P = VI = I^2R$  [W].

## Força eletromotriz

Esquema de uma bateria:

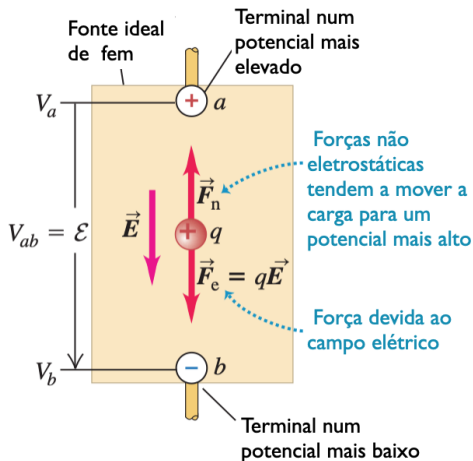
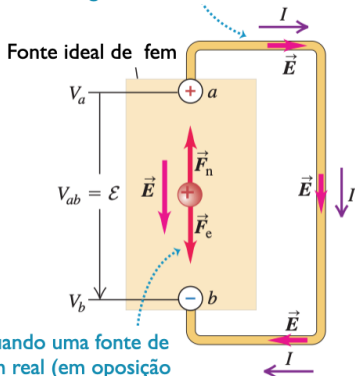


Imagem adaptada de Serway, Jewett, 2013

# Força eletromotriz

Potencial entre os terminais cria um campo elétrico no circuito, fazendo a carga se mover



Quando uma fonte de fem real (em oposição a uma fonte ideal) e conectada,  $V_{ab}$  e  $F_e$  caem e  $F_n > F_e$ ,  $F_n$  realiza um trabalho nas cargas

# Força eletromotriz

Duas forças num circuito: a **fonte**  $\mathbf{f}_s$  ( $\mathbf{F}_n/q$  no esquema da figura anterior) e a **força eletrostática**  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{F}_e/q$  na figura anterior)

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E}.$$

Na bateria a  $\mathbf{f}_s$  é causada por processos químicos.

O efeito das forças nas cargas é dado pela integral de linha no circuito:

$$\mathcal{E} \equiv \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l}$$

pois  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$  para campos eletrostáticos.

$\mathcal{E}$  é a **força eletromotriz** ou **fem** do circuito. É um termo ruim: é a integral de uma força por unidade de carga.

## Força eletromotriz

Numa bateria ideal a força resultante nas cargas é nula ( $\mathbf{E} = -\mathbf{f}_s$ ).

A diferença entre os terminais  $a$  e  $b$  da bateria é

$$V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}$$

A função da bateria é estabelecer e manter uma diferença de potencial igual à força eletromotriz.

# Como realmente funciona uma bateria?

Uma fonte de FEM produz campos elétricos que podem produzir trabalho.

- ★ Campos elétricos podem ser criados por campos magnéticos variáveis ou por separação de cargas (caso da bateria).
- ★ Não existe um “campo elétrico químico” que separa as cargas.
- ★ Existe sim uma região na bateria que as cargas se movem em direções opostas às direções que o campo elétrico que age nelas indicaria.
- ★ Este movimento é um movimento difusivo análogo ao movimento sob gradientes de pressão osmótica.
- ★ O mecanismo responsável por essa difusão é a existência de estados de energia mais baixos em uma região da bateria comparada com uma região adjacente.
- ★ O mecanismo de relaxação nestes estados de mais baixa energia é que a real fonte de energia para o circuito.

Dana Roberts, *How batteries work: A gravitational Analog*, Am. J. of Phys, 51(9), 1983

# Lei de Faraday

Versão moderna dos experimentos de Faraday (1831):

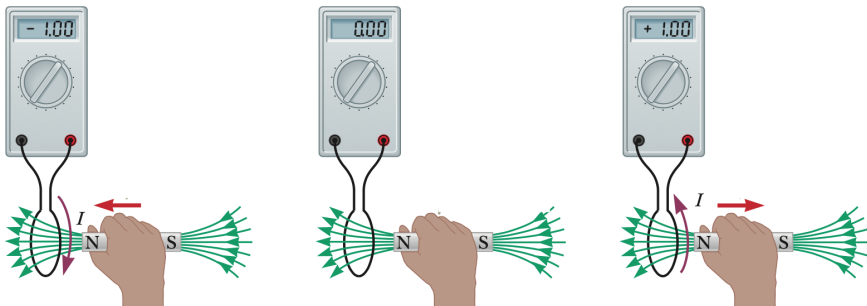


Imagem adaptada de Serway, Jewett, 2013

**Lei de Faraday** Um campo magnético variável induz um campo elétrico.

**Regra de Lenz:** A direção do campo elétrico na indução magnética se opõe à mudança de fluxo, ou seja, se um condutor estiver presente a corrente induzida produz um campo magnético na direção que tenta manter o fluxo.

# Lei de Faraday

Versão moderna dos experimentos de Faraday (1831):

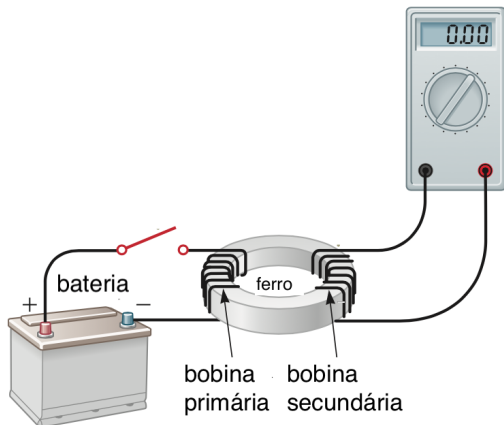
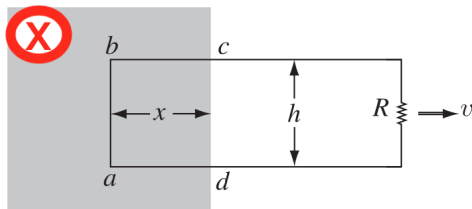


Imagem adaptada de Serway, Jewett, 2013

# Fem gerada por movimento

- ★ Fonte mais comum de fem: **gerador**. Explora o movimento de um fio numa região com campo magnético.
- ★ Na figura abaixo, um retângulo feito de fio condutor é arrastado para a direita com velocidade  $v$  numa região de campo magnético.
- ★ Segmento  $ab$ : força  $qvB$ , corrente na direção horária.

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f}_{\text{mag}} \cdot d\mathbf{l} = vBh \quad [\text{V}]$$



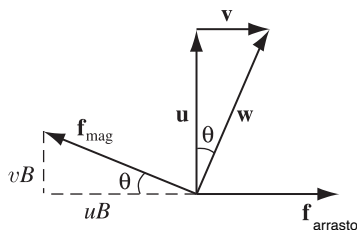
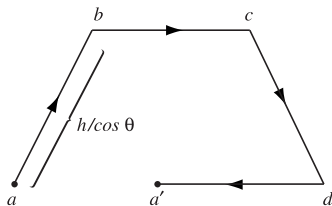
- ★ Integral deve ser feita num instante de tempo **fixo**.
- ★ É assim que a fem é definida.

Imagem adaptada de Griffiths, 2017

# Fem gerada por movimento

- ★ Quem provê a energia gasta no resistor? Quem **puxa** o retângulo!
- ★ Figura: componente da força magnética para a esquerda  $quB$ .
- ★ Força de arrasto por unidade de carga:  $f_{\text{arrasto}} = uB$
- ★ O trabalho da força de arrasto é dado pelo produto escalar entre a força de arrasto e a distância percorrida pela carga ( $h/\cos\theta$ ). O cosseno do ângulo entre  $\mathbf{f}_{\text{arrasto}}$  e  $d\mathbf{l}$  é  $\sin\theta$ .

$$\int \mathbf{f}_{\text{arrasto}} \cdot d\mathbf{l} = (uB) \left( \frac{h}{\cos\theta} \right) \sin\theta = vBh = \mathcal{E}$$



## Expressão para a fem de movimento

- ★ Fluxo de  $\mathbf{B}$  pelo retângulo:  $\Phi \equiv \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$   $Wb$
- ★ Num determinado momento:  $\Phi = Bhx$
- ★ O fluxo decresce quando o retângulo se move:

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bh \frac{dx}{dt} = -Bhv$$

- ★ E pelo resultado anterior, a **regra do fluxo** para a fem de movimento:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad V$$

- ★ Fórmula bastante geral:
  - ▷ Qualquer formato do circuito (não precisa ser retangular);
  - ▷ Pode se mover em uma direção arbitrária;
  - ▷ Pode se deformar com o passar do tempo, não precisa ter forma fixa!

# Prova da regra do fluxo

- ★ Um laço genérico num tempo  $t$  e também um tempo infinitesimal  $dt$  depois.
- ★ A **variação** do fluxo nesse intervalo é o fluxo na **fita** que conecta as duas áreas  

$$d\Phi = \Phi(t + dt) - \Phi(t) = \Phi_{\text{fita}} = \int_{\text{fita}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$
- ★  $\mathbf{v}$  velocidade do fio,  $\mathbf{u}$  velocidade das cargas no fio,  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

$$d\mathbf{a} = (\mathbf{v} \times d\mathbf{l})dt$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l})$$

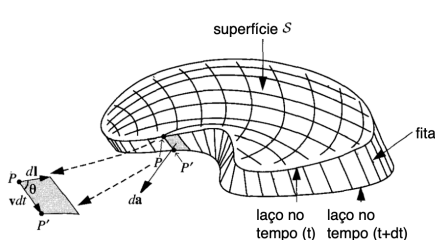
- ★ Como  $d\mathbf{l}$  é paralelo a  $\mathbf{u}$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint \mathbf{B} \cdot (\mathbf{w} \times d\mathbf{l})$$

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{w} \times d\mathbf{l}) = -(\mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint (\mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

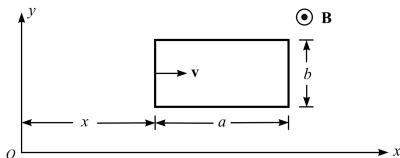
$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint \mathbf{f}_{\text{mag}} \cdot d\mathbf{l}$$



$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

## Exemplo 3

- ★ Um retângulo condutor de dimensões  $a \times b$  move-se no plano  $xy$  com velocidade constante  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{i}}$  conforme a figura. O campo  $\mathbf{B}$  é dado por  $\mathbf{B}(x, t) = B_0 \cos \omega t \cos kx \hat{\mathbf{k}}$  onde  $B_0$ ,  $\omega$  e  $k$  são constantes. Calcule a fem induzida no retângulo como função do tempo. Suponha que em  $t = 0$ ,  $x = 0$ .



## Exemplo 3

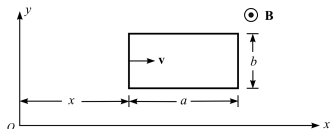
- ★ Um retângulo condutor de dimensões  $a \times b$  move-se no plano  $xy$  com velocidade constante  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{i}}$  conforme a figura. O campo  $\mathbf{B}$  é dado por  $\mathbf{B}(x, t) = B_0 \cos \omega t \cos kx \hat{\mathbf{k}}$  onde  $B_0$ ,  $\omega$  e  $k$  são constantes. Calcule a fem induzida no retângulo como função do tempo. Suponha que em  $t = 0$ ,  $x = 0$ .

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \right\} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} v$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \int_x^{x+a} B(x, t) b dx = \int_x^{x+a} B_0 b \cos \omega t \cos kx \\ &= \frac{B_0 b}{k} \{ \sin k(x+a) - \sin kx \} \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{B_0 b \omega}{k} \{ \sin k(x+a) - \sin kx \} \sin \omega t \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{B_0 b k}{k} \{ \cos k(x+a) - \cos kx \} \cos \omega t$$

$$\mathcal{E} = \frac{B_0 b \omega}{k} \{ \sin k(x+a) - \sin kx \} \sin \omega t - B_0 b v \{ \cos k(x+a) - \cos kx \} \cos \omega t \quad \text{V}$$



## Exemplo 4

- ★ exemplo 7.4 Griffiths
- ★ Um disco de metal de raio  $a$  gira com velocidade angular  $\omega$  num eixo vertical dentro de um campo magnético uniforme  $\mathbf{B}$  que aponta para cima. Um circuito é estabelecido conectando-se uma ponta de um resistor ao eixo e a outra ponta a um contato deslizante que toca a borda exterior do disco. Encontre a corrente no resistor.

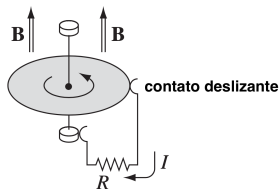


Imagem adaptada de Griffiths, 2017



# Lei de Faraday

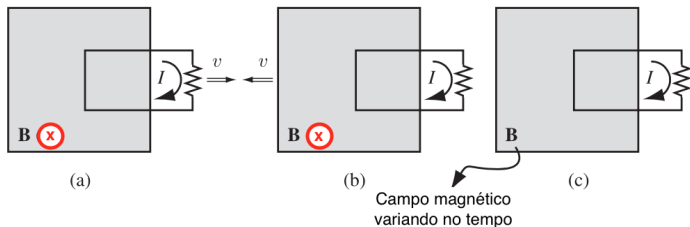


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

- ★ O famoso artigo de Einstein de 1905 começa com uma discussão da Lei de Faraday: porque o que importa é apenas o movimento relativo entre o magneto e a bobina?
- ★ A lei de Faraday é uma das leis fundamentais do eletromagnetismo. Vale sempre!

Um campo magnético variável no tempo induz um campo elétrico.

# Lei de Faraday

- ★ Do que já vimos anteriormente:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- ★ Da definição de fluxo  $\Phi \equiv \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

- ★ E utilizando o teorema de Stokes  $\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$

- ★ Obtemos a lei de Faraday na forma diferencial:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

## O campo elétrico induzido

- ★ Se  $\mathbf{E}$  vem da lei de Faraday (devido a um  $\mathbf{B}$  variável e  $\rho = 0$ ), é matematicamente idêntico à magnetostática:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{equivalente a} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

- ★ Portanto podemos utilizar tudo que já obtivemos para a lei de Biot-Savart:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}}{r^2} d\tau' \quad [\text{T}]$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\partial \mathbf{B} / \partial t) \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} d\tau' = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{z}}}{r^2} d\tau' \quad [\text{V/m}]$$

- ★ E se houver simetria no problema, podemos utilizar o que aprendemos com a lei de Ampère na forma integral ( $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{int}}$ ) só que agora é a lei de Faraday na forma integral

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- ★ Utilizamos a aproximação **quase estática** com o campo  $\mathbf{B}$  dado pela magnetostática (adequada se os campos não variam rapidamente e se lidamos com distâncias curtas).

## Exemplo 5 - problema 7.19 Griffiths

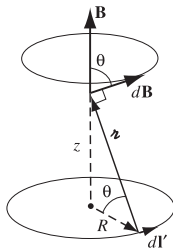
Um toróide tem uma seção transversal retangular, com raio interno  $a$ , raio externo  $a + w$  e altura  $h$ . Ele é feito de  $N$  voltas do fio por onde passa uma corrente que cresce numa taxa constante ( $dI/dt = K$ ). Se  $w$  e  $h$  são ambos bem menores que  $a$ , encontre o campo elétrico num ponto  $z$  sobre o centro do toróide. [Dica: Use a analogia entre a lei de Faraday e campos magnetostáticos, e se refira ao Ex. 5.6]

**Solução 1** No exemplo 5.6 pede-se para calcular o campo magnético num ponto  $z$  no eixo que passa no centro de um anel circular de raio  $R$  que carrega uma corrente constante  $I$ .

A componente horizontal de  $d\mathbf{B}$  se anula e a componente vertical é dada pelo  $\cos \theta$ , que é constante como  $z^2$

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl'}{z^2} \cos \theta$$

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{\cos \theta}{r^2} \right) 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$



## Exemplo 5 - problema 7.19 Griffiths

Campo do toróide:

$$\mathbf{B}(t) = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I(t)}{2\pi s} & \text{no interior} \\ 0 & \text{no exterior} \end{cases}$$

Fluxo no toróide ( e usando que  $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + \dots$  )

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 N I(t)}{2\pi} \int_a^{a+w} \frac{h}{s} ds = \frac{\mu_0 N h I(t)}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{w}{a}\right) \approx \frac{\mu_0 N h w I(t)}{2\pi a}$$

E portanto  $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 N h w K}{2\pi a}$ .

E mesmo que  $\mathbf{B}$  de uma corrente circular:  $I \rightarrow \frac{-1}{\mu_0} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{N h w K}{2\pi a}$

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{-N h w K}{2\pi a} \right) \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{N h w K a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

## Exemplo 5 - problema 7.19 Griffiths

**Solução 2** Vamos calcular o campo elétrico a partir da fórmula de Biot-Savart quando substituímos  $\mathbf{J}$  por  $(-1/\mu_0)\partial\mathbf{B}/\partial t$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\partial\mathbf{B}/\partial t) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau'$$

Segundo o enunciado,  $w \ll a$  e  $h \ll a$  e portanto vamos considerar  $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}} - a\hat{\mathbf{s}}$ ,  $r^2 = z^2 + a^2$ . E da expressão do campo dentro do toróide:

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\mu_0 N}{2\pi s'} \frac{dI}{dt} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 N K}{2\pi s'} \hat{\phi}$$

Calculando o produto vetorial:

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \times \hat{\mathbf{r}} = \frac{\frac{\mu_0 N K}{2\pi s'} \hat{\phi} \times (z\hat{\mathbf{z}} - a\hat{\mathbf{s}})}{(z^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 N K}{2\pi s (z^2 + a^2)^{1/2}} (z\hat{\mathbf{s}} + a\hat{\mathbf{z}})$$

No ponto  $z$  do eixo as componentes em  $\hat{\mathbf{s}}$  se anulam.

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{((\partial\mathbf{B}/\partial t) \times \hat{\mathbf{r}})_z}{r^2} d\tau' = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mu_0 N K a \hat{\mathbf{z}}}{2\pi s' (z^2 + a^2)^{3/2}} s' ds' dz' d\phi'$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{N K a h w \hat{\mathbf{z}}}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

# Indutância

★ Nos dois laços abaixo, se uma corrente  $I_1$  passa pelo laço 1 um campo  $\mathbf{B}_1$  é gerado.

★ O campo  $\mathbf{B}_1$  produz um fluxo no laço 2,  $\Phi_2$ .

★ Pela lei de Biot-Savart  $\mathbf{B}_1$  é dado por

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

★ ou seja,  $\mathbf{B}_1$  é proporcional a  $I_1$  e da mesma forma o fluxo  $\Phi_2$ :

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2$$

$$\Phi_2 = M_{21} I_1$$

★ onde  $M_{21}$  [H] é a chamada **indutância mútua** dos dois laços.

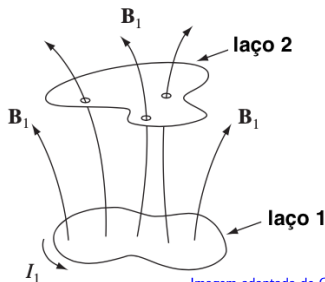


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

# Indutância

- ★ Vamos obter uma fórmula para a indutância mútua, expressando o fluxo em termos do potencial vetor:

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a}_2 = \int (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{a}_2 = \oint \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2$$

- ★ O potencial de um laço é dado por (veja seção 5.4 do livro texto):

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}_1}{r}$$

- ★ que substituído em  $\Phi_2$

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left( \oint \frac{d\mathbf{l}_1}{r} \right) \cdot d\mathbf{l}_2$$

- ★ temos a **fórmula de Neumann**:

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \quad [\text{H}]$$

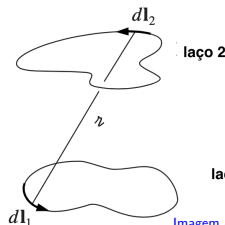


Imagem adaptada de Griffiths, 2017

- ⇒ 1 H (henry) = 1 V.A<sup>-1</sup>.s = 1 Ω.s
- ⇒ Quantidade puramente **geométrica**.
- ⇒ Por simetria  $M_{21} = M_{12} = M$



## Exemplo 6

- ★ A figura mostra uma bobina toroidal retangular com um número grande  $N$  de espiras. Faça a hipótese que a corrente  $I$  flui verticalmente nas faces interna e externa e flui horizontalmente nas faces inferior e superior. a) Calcule o campo magnético no interior e no exterior da bobina. b) Calcule a auto-indutância da bobina.

Sistema de coordenadas apropriado é o cilíndrico:

$$\mathbf{B} = B_\phi \hat{\phi} \quad d\mathbf{l} = r d\phi \hat{\phi} \quad d\mathbf{a} = h dr \hat{\phi}$$

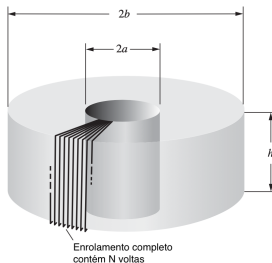


Imagem adaptada de Purcell, Morin, 2013

## Exemplo 6

- ★ A figura mostra uma bobina toroidal retangular com um número grande  $N$  de espiras. Faça a hipótese que a corrente  $I$  flui verticalmente nas faces interna e externa e flui horizontalmente nas faces inferior e superior. a) Calcule o campo magnético no interior e no exterior da bobina. b) Calcule a auto-indutância da bobina.
- ★ a) Por simetria, o campo magnético é sempre perpendicular a qualquer seção reta da bobina, ou seja, na direção  $\hat{\phi}$ , e tem o mesmo módulo para cada raio  $r$  (em rel. ao eixo da bobina). Na lei de Ampère, para um círculo no interior do bobina,  $2\pi r B = NI$ , e portanto  $B = \mu_0 NI / 2\pi r$ . Se  $b - a \ll a$  o campo tende ao de um solenoide infinito de seção reta retangular  $B = \mu_0 n I$ , onde  $n = N / 2\pi a$  é o número de espiras por unidade de comprimento. Aqui  $r \approx a \approx b$ .

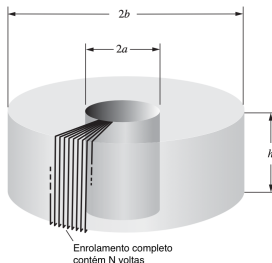


Imagem adaptada de Purcell, Morin, 2013

## Exemplo 6

- ★ A figura mostra uma bobina toroidal retangular com um número grande  $N$  de espiras. Faça a hipótese que a corrente  $I$  flui verticalmente nas faces interna e externa e flui horizontalmente nas faces inferior e superior. a) Calcule o campo magnético no interior e no exterior da bobina. b) Calcule a auto-indutância da bobina.

★ b)

$$\Phi_1 = h \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

$$\Phi_N = \frac{\mu_0 N^2 I h}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \frac{dI}{dt}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \quad H$$

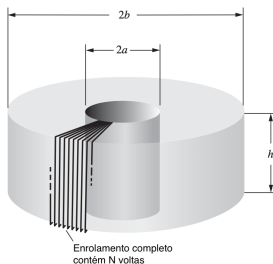


Imagem adaptada de Purcell, Morin, 2013

# Energia em campos magnéticos

- ★ Quando a corrente começa a fluir num circuito um trabalho contra a fem reativa tem que ser realizado para estabelecer a corrente. Ele é recuperado quando a corrente é desligada.
- ★ O trabalho feito no circuito numa unidade de carga contra a fem numa volta no circuito é  $-\mathcal{E}$ . O trabalho total por unidade de tempo é:

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt}$$

- ★ que integrado no tempo (corrente inicial nula):

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

- ★ que depende apenas da geometria e da corrente final, não importando quanto tempo foi necessário para estabelecer a corrente.

# Energia em campos magnéticos

- ★ Vamos expressar  $W$  de uma forma mais geral. Sabemos que  $\Phi = LI$ . Por outro lado

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

- ★ Assim  $LI = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  e portanto

$$W = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) dl$$

- ★ que pode ser generalizado para correntes volumares:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau$$

- ★ Utilizando a lei de Ampère  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  podemos eliminar  $\mathbf{J}$  da expressão

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\tau$$

# Energia em campos magnéticos

- ★ Uma integração por partes transfere a derivada de  $\mathbf{B}$  para  $\mathbf{A}$ :

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

- ★ e portanto

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\mu_0} \left[ \int B^2 d\tau - \int \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left[ \int_V B^2 d\tau - \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \right] \end{aligned}$$

- ★ integrando em todo o espaço ( a corrente é nula fora do volume inicial)

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{todo o espaço}} B^2 d\tau$$

Pode-se considerar a energia armazenada

- ▶ no campo magnético ou
- ▶ na distribuição de correntes  $\frac{1}{2}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{J})$  por unid. de volume

# Energia em campos magnéticos

- ★ Não é óbvio porque se gasta energia para estabelecer um campo magnético, já que campo magnético não realiza trabalho.
- ★ Como não havia campo magnético antes, estabelecer o campo significa variar o campo magnético, que induz um campo **elétrico**.
- ★ O campo elétrico realiza trabalho enquanto o campo magnético varia (antes e depois o campo elétrico é zero).
- ★ As fórmulas de energia magnética e elétrica (veja cap. 2 Griffiths) são muito semelhantes:

$$W_{\text{elet}} = \frac{1}{2} \int (V\rho) d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau$$

# Eletrodinâmica antes de Maxwell

- ★ Até aqui as equações que dão a dinâmica dos campos elétricos e magnéticos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

- ★ Existe uma inconsistência clara no conjunto de equações. A aplicação do op. divergência na equação de Faraday

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B})$$

- ★ e temos zero nos dois lados da equação.



## "Corrente de deslocamento" de Maxwell

- ★ Voltando ao problema da divergência da densidade de corrente nem sempre ser zero na eq. de Ampère:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left( \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

- ★ e se a equação de Ampère for reescrita com um termo adicional a inconsistência desaparece:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- ★ O nome "deslocamento" é histórico, pois Maxwell construiu um modelo mecânico para o campo eletromagnético no vácuo, supondo que o vácuo seria um meio elástico conhecido como éter.

## "Corrente de deslocamento" de Maxwell

- ★ O novo termo (que não é uma corrente) resolve o problema do capacitor carregando. Suponha que o campo seja constante entre as placas:

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$

- ★ onde  $Q$  é a carga na placa e  $A$  a área. Entre as placas:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 A} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0 A} I$$

e a lei de Ampère completa na forma integral fica:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{int}} + \mu_0 \epsilon_0 \int \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a}$$

- ★ Agora vamos escolher a superfície atravessada pela corrente:

- ▶ sup. disco escuro:  $E = 0$  e  $I_{\text{int}} = I$

- ▶ sup. balão claro:  $I_{\text{int}} = 0$  mas  $\int (\partial \mathbf{E} / \partial t) \cdot d\mathbf{a} = I / \epsilon_0$

- ★ Não há mais inconsistência.

## "Corrente de deslocamento" de Maxwell

- ★ Como se compara o novo efeito físico predito por Maxwell com a corrente usual?
- ★ Suponha a vizinhança de um fio no qual passa uma corrente alternada. No interior do fio a corrente é  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ .
- ★ A corrente alternada produz um campo elétrico dado por  $\mathbf{E} = \mathbf{E}e^{i\omega t}$  e portanto

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i\omega \mathbf{E} \quad \rightarrow \quad \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| \approx \omega |\mathbf{E}|$$

- ★ e assim, a razão dos efeitos das duas "correntes" é dada por

$$\frac{|\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}|}{|\sigma \mathbf{E}|} \cong \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma} \cong 8.85 \times 10^{-12} \cdot \frac{\omega}{\sigma}$$

- ★ e utilizando-se valores típicos para um fio de metal da rede elétrica  $\sigma \geq 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$  e  $\omega \approx 377 \text{ rad/s}$  ( $v = 60\text{Hz}$ ), a razão é  $\leq 10^{-16}$ , ou seja, **desprezível** nas condições quase estacionárias.

# Equações de Maxwell

- ★ Assim o conjunto completo de equações de Maxwell na forma diferencial (onde densidades de carga e de corrente, as fontes do campo eletromagnético são explicitadas no lado direito), junto com a força de Lorentz é dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- ★ elas dão conta de fenômenos experimentais desde a escala atômica  $10^{-13}$  cm (experimento de Rutheford) até campos magnéticos intergaláticos em escalas astrofísicas.
- ★ Para meios materiais temos que adicionar a polarização e a magnetização do meio e as equações constitutivas.

# Equações de Maxwell na matéria

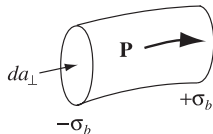
- ★ As equações de Maxwell estão completas e corretas na forma que foram apresentadas anteriormente.
- ★ Mas em meio materiais tem uma forma mais conveniente de apresentá-las.
- ★ Na matéria existem correntes e cargas **ligadas** sobre as quais não temos controle. É melhor escrever as equações apenas com as cargas **livres**.
- ★ Vimos que a polarização  $\mathbf{P}$  e a magnetização  $\mathbf{M}$  podem produzir

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad \mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$$

- ★ Para o caso não estático: mudança na polarização envolve um fluxo de cargas ligadas  $\mathbf{J}_p$  que deve ser adicionado à corrente total.
- ★ Num tubo de matéria: a polarização induz uma densidade de carga  $\sigma_b = P$  numa ponta e  $-\sigma_b$  na outra.
- ★ Se a polarização aumenta um pouco, a carga em cada ponta aumenta, e aparece a corrente:

$$dI = \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} da_{\perp} = \frac{\partial P}{\partial t} da_{\perp}$$

- ★ E a corrente de polarização é dada por  $\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$



# Equações de Maxwell na matéria

- ★ A corrente de polarização  $\mathbf{J}_p$  é distinta da corrente ligada  $\mathbf{J}_b$ .
- ★  $\mathbf{J}_b$  tem a ver com magnetização do material e envolve o spin e o movimento orbital dos elétrons.
- ★  $\mathbf{J}_p$  é o resultado do movimento linear das cargas quando a polarização muda.
- ★ Se  $\mathbf{P}$  aponta para a direita e está crescendo, cada carga positiva se move um pouco para a direita e cada negativa um pouco para a esquerda. O efeito cumulativo é a corrente de polarização.
- ★ A corrente de polarização deve ser consistente com a equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{P}) = -\frac{\partial \rho_b}{\partial t}$$

- ★ A carga total pode ser separada em duas partes:

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

- ★ E a densidade de corrente em três partes:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_p = \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

# Equações de Maxwell na matéria

- ★ A equação de Gauss pode ser reescrita:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{onde} \quad \mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- ★ A lei de Ampère-Maxwell pode ser reescrita:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{onde} \quad \mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

- ★ Assim o conjunto completo em termos das cargas e correntes livres:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{1}{\epsilon} \rho_f & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J}_f \end{aligned}$$

# Equações de Maxwell na matéria

- ★ O conjunto anterior não é mais geral.
- ★ Apenas reflete uma divisão conveniente da carga e corrente entre partes livres e ligadas.
- ★ Precisam ser suplementadas pelas **relações constitutivas** que dependem da natureza do meio.
- ★ Para meios lineares (susceptibilidade elétrica e magnética):

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad \text{e} \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

e portanto:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

onde a permissividade e a permeabilidade são definidas como:

$$\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad \text{e} \quad \mu \equiv \mu_0 (1 + \chi_m)$$

# Carga magnética

- ★ Na ausência de cargas e correntes existe uma simetria que salta aos olhos nas eq. de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

- ★ Quando trocamos  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$  e  $\mathbf{B} \rightarrow -\mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}$  ao mesmo tempo a primeira equação se transforma na segunda e a segunda se transforma na primeira.
- ★ Nas equações de Maxwell completas vemos que a presença de  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  elétricas quebram a simetria.
- ★ Porque não existem cargas  $\rho_m$  e correntes  $\mathbf{J}_m$  magnéticas de modo que a simetria seja restaurada?

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e & \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \mu_0 \rho_m & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

# Carga magnética

- ★ Se cargas  $\rho_m$  e correntes  $\mathbf{J}_m$  magnéticas existissem as duas seriam conservadas:

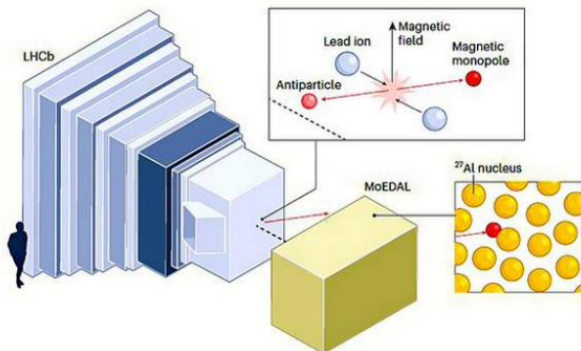
$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{J}_e = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}$$

- ★ De um ponto de vista da simetria das equações de Maxwell as cargas magnéticas teriam que existir!
- ★ Que magnetos sempre tenham dois polos é um fato bem estabelecido. No entanto não há nenhuma **lei da natureza** que impeça a existência de pólos sul e norte separados, como as cargas elétricas positivas e negativas.
- ★ Mas experimentalmente não há indícios que elas existam na natureza. Muitos experimentos já procuraram por elas mas sem êxito.
- ★ A mecânica quântica permite a existência de monopolos magnéticos  $g$  mas eles tem que ter o valor  $g = \frac{2\pi\hbar}{\mu_0 e} n$ , onde  $n$  é um inteiro (**Faremos este cálculo no próximo capítulo**).
- ★ A existência de monopolos magnéticos é uma questão em aberto.

# Buscas recentes por monopolos magnéticos

## Experimento MOEDAL no CERN

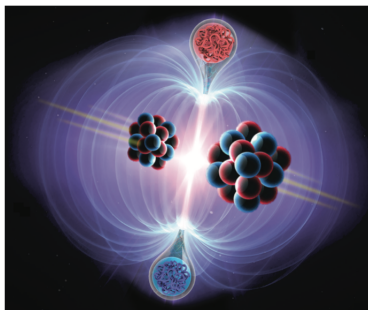
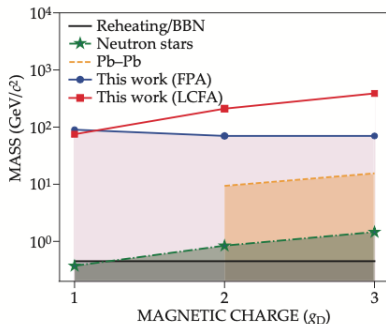
- ★ Colisões de núcleos de chumbo no LHC (no ponto de interação do LHCb).
- ★ O campo magnético entre os dois núcleos  $\approx 10^{16}$  T, o maior já observado no Universo (10000 vezes o da superfície das estrelas de neutrons).
- ★ Um par de monopolos pode ser criado neste campo.
- ★ O detetor MoEDAL contém um isótopo de alumínio (Al-27) que pode capturar partículas que possuem cargas magnéticas.



# Buscas recentes por monopolos magnéticos

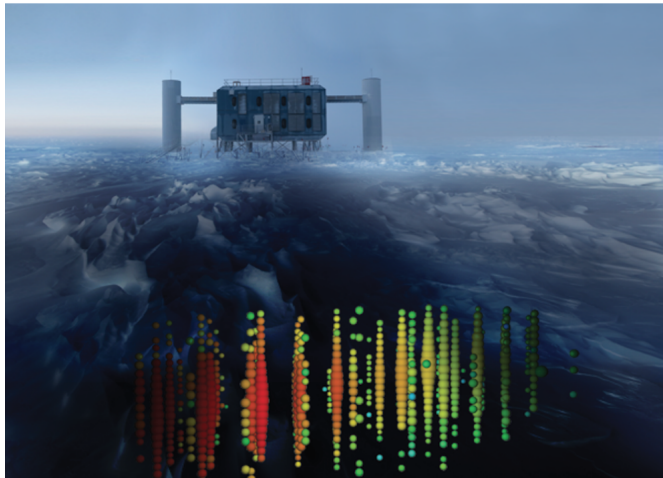
## Experimento MOEDAL no CERN

- ★ Produção de um par de monopolos no campo magnético de dois núcleos de chumbo.
- ★ Resultados do experimento MoEDAL: exclusão de monopolos com massa menor que 75 GeV para cargas de monopolo até  $n=3$ .



# Buscas recentes por monopolos magnéticos

Experimento IceCube: radiação cherenkov no gelo

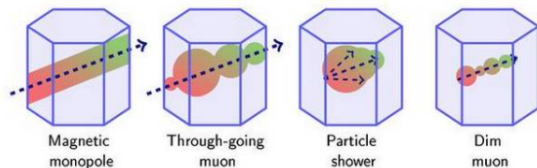
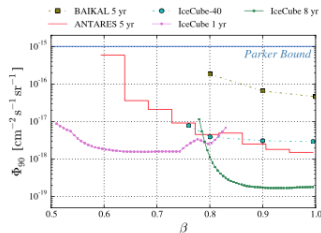


Colab. IceCube

# Buscas recentes por monopolos magnéticos

## Experimento IceCube: radiação cherenkov no gelo

- ★ Como múons atravessando o gelo, monopolos produziram radiação cherenkov, só que distribuída uniformemente na trajetória do monopolo.



Colab. IceCube, Phys.Rev.Lett, 2022