Adição de dois spins $1/2$

a c tort*

14 de julho de 2014

O momento angular é um dos pontos mais importantes da mecânica quântica. Saber somar dois ou três momentos angulares é crucial para o entendimento da estrutura das partículas ‘elementares’ como por exemplo os bárions, constituídos por três quarks de spin $1/2$, ou dos mésons, constituídos por um quark e um antiquark, ou ainda para o entendimento das transições de nível nos átomos, e nas moléculas. Nesta nota, discutiremos o exemplo mais simples de adição de momento angular: a adição de dois spins $1/2$.

Matrizes e autovetores para o spin $1/2$

As matrizes de Pauli em termos das quais descrevemos o spin $1/2$ são:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

As matrizes de spin são:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y, \quad \text{e} \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z. \tag{2}$$

O importante operador $\mathbf{S}^2$ nesta representação se escreve:

$$\mathbf{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

As relações de comutação relevantes são:

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y, \tag{4}$$

e ainda:

$$\left[\mathbf{S}^2, S_x\right] = \left[\mathbf{S}^2, S_y\right] = \left[\mathbf{S}^2, S_z\right] = 0. \tag{5}$$

Convém lembrar também que os autovetores de S_z são:

$$|+;\mathbf{z}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad |-;\mathbf{z}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

e os autovetores de S_x e S_y são, respectivamente:

$$|+\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad |-\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$|+\mathbf{y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad |-\mathbf{y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \tag{8}$$

*email: tort@ufrj.br

Produtos diretos

Vamos precisar também do produto direto entre vetores coluna e matrizes 2×2 que descrevem os spins nos espaços de estados de spin de cada uma das partículas. Se u e v são dois autovetores da forma:

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad |v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

então o produto direto entre eles é definido (cuidado com a ordem!) por:

$$|u\rangle \otimes |v\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \otimes |v\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \, |v\rangle \\ u_2 \, |v\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 \\ u_1 v_2 \\ u_2 v_1 \\ u_2 v_2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Notação: dependendo das circunstâncias, muitas vezes escrevemos simplesmente: $|u\rangle \otimes |v\rangle = |u\rangle \, |v\rangle = |u; v\rangle$. Para matrizes 2×2, o produto direto é definido por:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} \tag{11}$$

ou,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} & a_{11}b_{14} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Esta é a definição convencional do produto direto também conhecido como **produto de Kronecker** ou **produto tensorial**.

A base $|m_{1z}; m_{2z}\rangle$

Considere o produto direto[1] :

$$\left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle = |+\mathbf{z}\rangle_1 \otimes |+\mathbf{z}\rangle_2. \tag{13}$$

em que fizemos a distinção entre o espaço de estados de spin da partícula 1 e o espaço de estados de spin da partícula 2. Fazendo uso da representação padrão do autovetor $|+\mathbf{z}\rangle$, temos:

$$\left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle = |+\mathbf{z}\rangle_1 \otimes |+\mathbf{z}\rangle_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Da mesma forma:

$$\left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle = |+\mathbf{z}\rangle_1 \otimes |-\mathbf{z}\rangle_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{15}$$

---

[1] Há muitas opções de notação, por exemplo:

$$|+z; +z\rangle = \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle = |+z\rangle_1 |+z\rangle_2 = |+z\rangle_1 \otimes |+z\rangle_2,$$

mas, todas querem dizer a mesma coisa: as duas partículas têm a projeção z do seu respectivo spin apontando no sentido positivo do eixo de quantização.

$$\left|-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle = |-\mathbf{z}\rangle_1 \otimes |+\mathbf{z}\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{16}$$

$$\left|-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle = |-\mathbf{z}\rangle_1 \otimes |-\mathbf{z}\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Os arranjos de spins que estes kets representam estão (groseiramente) esboçados na Figura 1. A escolha desta base é de certo modo natural. Lembre-se que temos a liberdade de escolher a base ortonormal que melhor nos aprouver, independentemente da dinâmica da interação entre os dois spins.

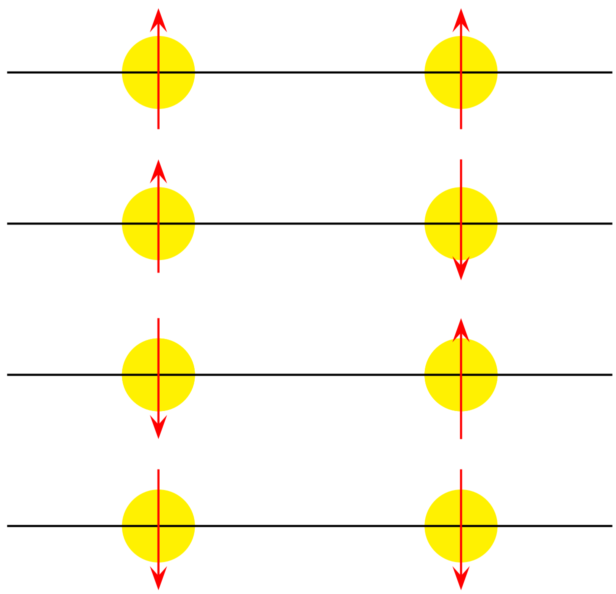

Figura 1: As quatro possibilidades para o arranjo dos spins de duas partículas de spin $1/2$. O diagrama mostra a projeção do spin ao longo de eixo de quantização, em geral denotado por eixo z.

EXERCÍCIO 1: Obtenha os quatro autovetores da base $|m_{1z}; m_{2z}\rangle$.

As matrizes S^2 e S_z de um sistema de duas partículas de spin $1/2$

O momento angular de um sistema de dois spins se escreve:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S_1} + \mathbf{S_2} \tag{18}$$

ou, escrevendo explicitamente os produtos diretos:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S_1} \otimes \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_1 \otimes \mathbf{S}_2 \tag{19}$$

Em particular:

$$S_z = S_{1z} + S_{2z} = S_1 z \otimes \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_1 \otimes S_{2z} \tag{20}$$

ou ainda:

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1\cdot\mathbf{I}_2 & 0\cdot\mathbf{I}_2 \\ 0\cdot\mathbf{I}_2 & -1\cdot\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_1\cdot 1 & \mathbf{I}_1\cdot 0 \\ \mathbf{I}_1\cdot 0 & -\mathbf{I}_1\cdot 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Como:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

temos

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Observe que S_z é uma matriz diagonal. Portanto, seus autovalores são: $1, 0, 0, -1$. Mais sobre isto mais tarde. Vejamos agora como se calcula $\mathbf{S}^2$:

$$\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 = \mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2 + 2\,\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2 \tag{24}$$

Calculemos cada um dos termos para obter a representação matricial de $\mathbf{S}^2$. Comecemos com o termo cruzado:

$$\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2 = S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z} = \frac{\hbar^2}{4}\left(\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\sigma_{2z}\right) \tag{25}$$

Em explicitamente termos do produto direto:

$$\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(\sigma_{1x}\otimes\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\otimes\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\otimes\sigma_{2z}\right) \tag{26}$$

$$\sigma_{1x}\otimes\sigma_{2x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\otimes\sigma_{2x} = \begin{pmatrix} 0\cdot\sigma_{2x} & 1\cdot\sigma_{2x} \\ i\cdot\sigma_{2x} & 0\cdot\sigma_{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\sigma_{1y}\otimes\sigma_{2y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\otimes\sigma_{2y} = \begin{pmatrix} 0\cdot\sigma_{2y} & -i\cdot\sigma_{2y} \\ i\cdot\sigma_{2y} & 0\cdot\sigma_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$\sigma_{1z}\otimes\sigma_{2z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\otimes\sigma_{2z} = \begin{pmatrix} 1\cdot\sigma_{2z} & 0\cdot\sigma_{2z} \\ 0\cdot\sigma_{2z} & -1\cdot\sigma_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Segue que:

$$\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2 = \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \tag{30}$$

ou ainda:

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Vejamos agora os termos quadráticos:

$$\mathbf{S}_1^2 = \frac{3\hbar^2}{4} I_1 \otimes I_2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes I_2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \cdot I_2 & 0 \cdot I_2 \\ 0 \cdot I_2 & 1 \cdot I_1 \end{pmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Da mesma forma calculamos $\mathbf{S}_2^2$. O resultado, naturalmente, é $\mathbf{S}_2^2 = \mathbf{S}_1^2$! Finalmente, podemos agora somar os termos matriciais para obter (não se esqueça do fator 2 que multiplica o termo cruzado!):

$$\mathbf{S}^2 = \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Observe que $\mathbf{S}^2$ não é diagonal na representação $|m_{1z}; m_{2z}\rangle$.

A base $|S, M_S\rangle$

O próximo passo é calcular os autovaloress e autovetores de $\mathbf{S}^2$ e S_z. Depois então poderemos diagonalizar a matriz $\mathbf{S}^2$. Isto nos levará à uma base alternativa, a base $|S, M_S\rangle$, onde S é o número quântico para o spin total e M_S a projeção do spin total ao longo do eixo de quantização. Para diagonalizar $\mathbf{S}^2$ temos de seguir o protocolo seguinte:

Passo 1 : resolver a equação de autovalores para $\mathbf{S}^2$ determinando os seus autovalores..

Passo 2 : determinar os autovetores correspondentes.

Passo 3 : construir a matriz unitária U que permite efetuar a diagonalização de acordo com a regra:

$$\mathbf{S}^2_{\text{diag}} = U^{-1}\, \mathbf{S}^2\, U,$$

onde U^{-1} é a inversa de U. Esta matriz é construída com os autovetores de $\mathbf{S}^2$, pois estes autovetores formam as colunas da matriz U.

Comecemos, pois com a solução da equação de autovalores:

$$\mathbf{S}^2\, |\varphi\rangle = \lambda\, \hbar^2\, |\varphi\rangle\,, \tag{34}$$

onde a constante de Planck ao quadrado aparece no L.D. da equação de autovalores por conveniência. Escrevendo

$$|\varphi\rangle = c_1 \left|\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle + c_2 \left|\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\rangle + c_3 \left|-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\rangle + c_4 \left|-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\rangle, \tag{35}$$

ou, usando os resultados da secão anterior:

$$|\varphi\rangle = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

e substituindo na equação de autovalores temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

Efetuando a multiplicação matricial e transpondo termos obtemos o sistema linear:

$$\begin{aligned} &(2-\lambda)\cdot c_1 + 0\cdot c_2 + 0\cdot c_3 + 0\cdot c_4 = 0, \\ &0\cdot c_1 + (1-\lambda)\cdot c_2 + 4\cdot c_3 + 0\cdot c_4 = 0, \\ &0\cdot c_1 + 4\cdot c_2 + (1-\lambda)\cdot c_3 + 0\cdot c_4 = 0, \\ &0\cdot c_1 + 0\cdot c_2 + 4\cdot c_3 + (2-\lambda)\cdot c_4 = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Uma solução não-trivial para este sistema existirá se o determinante:

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2-\lambda), \end{vmatrix} \tag{39}$$

for nulo. Neste ponto (e nos que vêm depois!), pouparemos tempo se fizermos uso de *softwares* que permitem cálculos simbólicos, como por exemplo, *Maple* ou o *Mathematica*. Aqui usaremos um *software* simples, fácil de ser utilizado, apropriado ao nosso objetivo e que tem a vantagem de ser gratuito: usaremos o *Eigenmath*, para calcular determinantes, raízes de equações algébricas e operações com matrizes[2]. Voltando ao nosso problema e com o auxílio do *Eigenmath*, vemos que a condição de que o determinante formado pelos coeficientes do sistema linear seja nulo leva à equação algébrica do quarto grau:

$$x^4 - 6\,x^3 + 12\,x^2 - 8\,x = 0, \tag{40}$$

cujas raízes reais (e degeneradas) são 0 e 2. Isto significa que uma medida do observável $\mathbf{S}^2$ tem como resultado $0\,\hbar^2$ ou $2\,\hbar^2$. É usual escrever os autovalores de $\mathbf{S}^2$ na forma $S(S+1)\,\hbar^2$. Isto significa que $S=0$ ou $S=1$.

É vantajoso lembrar que os operadores $\mathbf{S}^2$ e S_z, comutam:

$$\left[\mathbf{S}^2, S_z\right] = \mathbf{S}^2\,S_z - S_z\,\mathbf{S}^2 = 0, \tag{41}$$

consequentemente, podemos determinar um conjunto de autovetores de S_z que também sejam autovetores de $\mathbf{S}^2$. Como na base que estamos utilizando até agora, a base $|m_{1z}; m_{2z}\rangle$, o operador S_z é diagonal, convém resolver:

$$S_z\,|\varphi\rangle = M_S\,\hbar\,|\varphi\rangle \tag{42}$$

ou ainda

$$\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = M_S\,\hbar \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Observe que podemos inferir imediatamente que os autovalores de S_z são: $1, 0, 0, -1$ em unidades de $\hbar$, mas observe também que o autovalor nulo é degenerado. A equação acima conduz ao sistema:

$$\begin{aligned} &(1-M_s)\cdot c_1 + 0\cdot c_2 + 0\cdot c_3 + 0\cdot c_4 = 0, \\ &0\cdot c_1 + (0-M_s)\cdot c_2 + 0\cdot c_3 + 0\cdot c_4 = 0, \\ &0\cdot c_1 + 0\cdot c_2 + (0-M_s)\cdot c_3 + 0\cdot c_4 = 0, \\ &0\cdot c_1 + 0\cdot c_2 + 0\cdot c_3 + (-1-M_s)\cdot c_4 = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

[2]Você pode descarregá-lo em seu computador, assim como o seu manual em: **Eigenmath**. Há versões para Mac, Windows e Linux.

Para $S = 0$, e logo, necessariamente, $M_S = 0$, obtemos:

$$|S = 0, M_S = 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ -c_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Os outros três autovalores, $1, 0, -1$ devem corresponder a $S = 1$.

Para $M_S = 1$ obtemos:

$$|S = 1, M_S = 1\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Para $M_S = 0$ obtemos:

$$|S = 1, M_S = 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

E para $M_S = -1$:

$$|S = 1, M_S = -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_4 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Para completar, por simplicidade, escolheremos as componentes dos autovetores acima, que em princípio são números complexos arbitrários, iguais à unidade: $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$. E mais ainda, exigiremos que a base recém-obtida seja normalizada, isto é:

$$\langle S'; M_S' | S; M_S\rangle = \delta_{S'M_S}\, \delta_{M_S' M_S}. \tag{49}$$

O resultado final em notação um pouco mais simplificada como o leitor pode deduzir facilmente são os autovetores:

$$|0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |1\,1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |1\,-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Uma visão geométrica (clássica) destes resultados é mostrada na Figura 2.

$\boxed{\text{EXERCÍCIO 2:}}$ Complete os detalhes e obtenha a base ortonormal $|S; M_S\rangle$

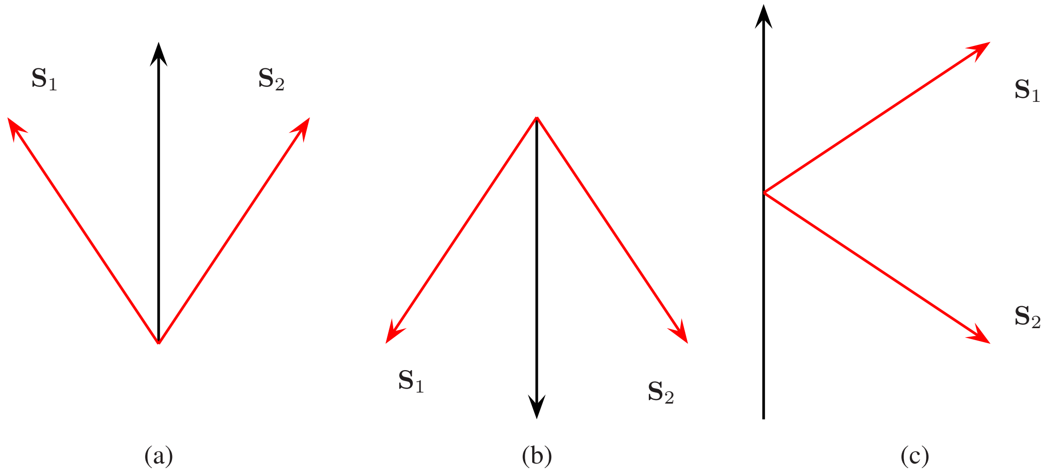

Figura 2: Modelo vetorial para $S = 1$. (a) $M_S = +1$, (b) $M_S = -1$, (c) $M_S = 0$.

A diagonalizacão de S^2

Como agora sabemos os autovetores de $\mathbf{S}^2$, podemos montar a matriz que permite diagonalizar este operador:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{51}$$

onde usamos os autovetores de $\mathbf{S}^2$ como colunas. A matriz inversa, lembre-se que U deve ser unitária, $U^{-1} = U^{\dagger}$, é dada por:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

EXERCÍCIO 3: Para as matrizes acima, verifique que $U^{-1}\,U = U\,U^{-1} = I$. Use o *Eigenmath*.

Segue que:

$$\hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Esta é a representação do operador spin total $\mathbf{S}^2$ na representação $|S; M_S\rangle$, Note que os autovalores de $\mathbf{S}^2$ estão na diagonal principal como esperado e que o auto valor $2\,\hbar^2$ e triplamente degenerado.

$\boxed{\text{Exercício 4:}}$ Verifique a Eq. 53. Use o *Eigenmath*.

Os coeficientes de Clebsch-Gordon

Os autovetores $|S; M_S\rangle$ podem ser expressos como combinações lineares da base formada pelos autovetores $|m_{1z}; m_{2z}\rangle$. De fato, é fácil verificar que:

$$|0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{54}$$

$$|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Portanto, podemos escrever:

$$|0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left| -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle, \tag{56}$$

$$|1\,1\rangle = \left| \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle, \tag{57}$$

$$|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle, \tag{58}$$

$$|1\,-1\rangle = \left| -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle. \tag{59}$$

Os coeficientes no L.D. desta transformação linear são chamados **coeficientes de Clebsch-Gordon**, veja a Tabela 1. O estado $|0\,0\rangle$ é muitas vezes chamado de **singleto** e os estados $|1\,1\rangle$, $|1\,0\rangle$ e $|1\,-1\rangle$ formam um **tripleto**.

A adição de dois spins $1/2$ que discutimos aqui é um caso importante, porém particular, de um método geral para somar dois momentos angulares que é discutido em quase todos os textos de mecânica quântica. Um exemplo de aplicaçnao é ao spin dos bárions e dos mésons, veja o exercício a seguir.

	$\left\|\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$	$\left\|-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$	$\left\|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle$	$\left\|-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle$
$\|1;-1\rangle$	1	0	0	0
$\|1;0\rangle$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\|0;0\rangle$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\|1;1\rangle$	0	0	0	1

Tabela 1: Coeficientes de Clebsch-Gordon para a adição de dois spins $1/2$.

EXERCÍCIO 5: Os quarks são partículas elementares de spin $1/2$. A combinação de três quarks constitui um bárion, por exemplo, o próton, por outro lado, um quark e um antiquark constituem um méson, por exemplo, o píon neutro π^0. Quais os spins possíveis para os bárions e mésons?

Referências

[1] J. Townsend: *A Modern Approach to Quantum Mechanics*, 1st edition. (University Science Books: Claremont) 2000.