Radiação de Dipolo Elétrico

(VERSÃO PRELIMINAR)

a c tort*
Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Caixa Postal 68.528; CEP 21941-972 Rio de Janeiro, Brazil

4 de Junho de 2014

*e-mail: tort@ufrj.br.

Conteúdo

1 Os potenciais escalar e vetorial

Suponha que em uma região do espaço tenhamos uma distribuição localizada de cargas e correntes descritas, respectivamente, por uma densidade de carga $\rho_(\mathbf{x}, t)$, e uma densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$, onde $\mathbf{x}$ marca a posição de um ponto arbitrário P em relação à origem O, e t é o tempo. Observe que $\mathbf{x}$ pode indicar um ponto dentro ou fora da distribuição. As equações de Maxwell para os campos elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ e magnético $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ se escrevem:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{4}$$

Como para um campo vetorial $\mathbf{V}$ com derivadas parciais de primeira e segunda ordem bem definidas, a divergância do seu rotacional é sempre nula, isto é: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$, vemos que a Eq. (2) permite escrever:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{5}$$

onde $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ é o **potencial vetorial**. Substituindo este resultado na Eq. (3) e rearranjando segue que:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{t}} \right) = 0. \tag{6}$$

Como o rotacional de um gradiente de uma função escalar $V(\mathbf{x}, t)$ suficentemente bem comportada para os nossos propósitos é nulo, podemos escrever:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V, \tag{7}$$

ou ainda:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{8}$$

Portanto, se pudermos de algum modo determinar os campos auxiliares $V(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, os campos físicos observáveis $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ podem ser obtidos das Eqs. (8) e (5).

1.1 As equações de movimento para V e $\mathbf{A}$

Da lei de Ampére-Maxwell, Eq. (4), temos:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \tag{9}$$

Usando a identidade vetorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}),$$

podemos rescrever a Eq. (9) como:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{10}$$

Esta é a equação de movimento para o potencial vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$.

Da lei de Gauss, Eq. (1), temos:

$$\nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{11}$$

ou ainda:

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{12}$$

As Eqs. (10) e (12) estão acopladas, mas podemos desacoplá-las impondo a *condição de Lorenz*:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{13}$$

Se a condição de Lorenz for satisfeita as Eqs. (10) e (12) ficam mais simples, embora ainda inomogêneas:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}, \tag{14}$$

$$\nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{15}$$

O produto das constantes materiais μ_0 e ϵ_0 tem as dimensões de inverso de velocidade ao quadrado, isto é:

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}. \tag{16}$$

Substituindo os valores S.I. dessas constantes obtemos $c \approx 3,0 \times 10^8$ m/s.

1.2 Transformações de calibre

É sempre possível encontrar potenciais V e $\mathbf{A}$ tais que a condição de Lorenz seja satisfeita. Este fato matemático recebe o nome de **liberdade de calibre**. De fato, suponha que $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ não satisfaça à condição de Lorenz. Então, como:

$$\nabla\times(\nabla\Lambda\,(\mathbf{x},t))=0,$$

onde $\Lambda\,(\mathbf{x},t))$ é uma função escalar suficientemente bem comportada para os nossos propósitos, podemos fazer a substituição:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\to\mathbf{A}'(\mathbf{x},t)=\mathbf{A}(\mathbf{x},t)+\nabla\Lambda\,(\mathbf{x},t)\,. \tag{17}$$

Neste caso, o campo magnético $\mathbf{B}$ permanece invariável:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=\mathbf{B}'(\mathbf{x},t). \tag{18}$$

O que acontece com o campo elétrico se efetuarmos a transformação dada pela Eq. (17)? Substituindo a Eq. (17) na Eq. (8), obtemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\to\mathbf{E}'(\mathbf{x},t)=\mathbf{E}(\mathbf{x},t)-\nabla\left(\frac{\partial\Lambda(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right). \tag{19}$$

Portanto, ao contrário do campo magnético, o campo elétrico é sensível à transformação definida pela Eq. (17). Para que o campo elétrico tenha o mesmo comportamento que o campo magnético frente à transformação de calibre é preciso efetuar, *simultaneamente*, a transformação:

$$V(\mathbf{x},t)\to V'(\mathbf{x},t)=V(\mathbf{x},t)-\frac{\partial\Lambda(\mathbf{x},t)}{\partial t}, \tag{20}$$

pois neste caso teremos

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\mathbf{E}'(\mathbf{x},t). \tag{21}$$

Como mencionado acima, os novos potenciais devem satisfazer à condição de Lorenz, isto é:

$$\nabla\cdot\mathbf{A}'+\mu_0\epsilon_0\,\frac{\partial V'}{\partial t}=0. \tag{22}$$

Fazendo uso das Eqs. (17) e (20), obtemos:

$$\nabla^2\Lambda-\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}=-\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu_0\epsilon_0\,\frac{\partial V}{\partial t}\right), \tag{23}$$

que permite, em princípio, determinar a função escalar $\Lambda(\mathbf{x},t)$, se impusermos a esta equação as condições de contorno adequadas.

1.3 Solução das equações de onda para V e $\mathbf{A}$

Se a condição de Lorenz for satisfeita, os potenciais escalar e vetorial obedecem às equações de movimento:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{24}$$

e,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}, \tag{25}$$

que são equações de onda com fontes. É possível mostrar que se as fontes são localizadas em uma região do espaço $\mathcal{R}$ e os potenciais tendem a zero no infinito de modo suficientemente rápido, as soluções são dadas por:

$$V\left(\mathbf{x}, t\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{R}} \frac{\rho\left(\mathbf{x}, t'\right)\, d^3x'}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|}, \tag{26}$$

e,

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{x}, t\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathcal{R}} \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{x}, t'\right)\, d^3x'}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|}, \tag{27}$$

onde:

$$t' = t - \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|}{c}, \tag{28}$$

é o *tempo retardado*. Em princípio, dados ρ e $\mathbf{J}$, podemos calcular V e $\mathbf{A}$, e a partir dos potenciais, calcular $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. O problema inverso é: dados $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ determinar ρ e $\mathbf{J}$.

2 O potencial vetorial para o dipolo elétrico

O potencial vetorial se escreve:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{z}}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-D/2}^{D/2} \frac{I(t')\, dz'}{\|\mathbf{x}' - z'\,\hat{\mathbf{z}}\|}, \tag{29}$$

onde fizemos $\mathbf{x}' = z'\,\hat{\mathbf{z}}$. Agora,

$$\|\mathbf{x} - z'\,\hat{\mathbf{z}}\| = r\left(1 + \frac{z'^2}{r^2} - 2\,\frac{z'}{r}\,\cos\theta\right)^{1/2}. \tag{30}$$

Fazendo uso da expansão em Taylor de $(1+u)^p$, ao redor de $u = 0$, temos

$$(1+u)^p = 1 + pu + \frac{p(p-1)}{2!}\,u^2 + \cdots, \tag{31}$$

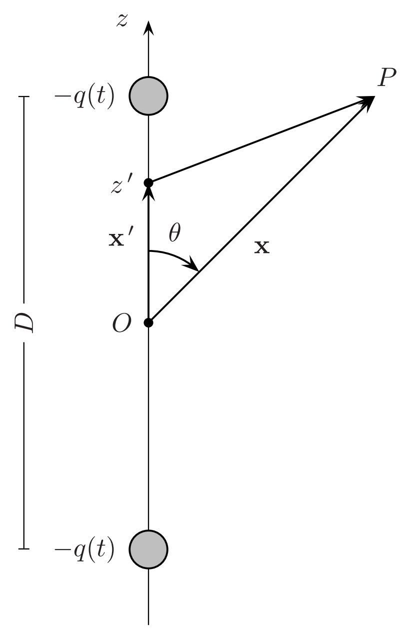

Figura 1: Modelo simplificado de um dipolo elétrico.

No nosso caso, mantendo apenas os termos de ordem zero

$$\frac{1}{\|\mathbf{x} - z'\,\hat{\mathbf{z}}\|} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\,\frac{z'}{r}\,\cos\theta\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r}. \tag{32}$$

Portanto,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi\,r}\,\hat{\mathbf{z}}\int_{-D/2}^{D/2} I(t - r/c)\,dz', \tag{33}$$

ou ainda

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \approx \frac{\mu_0\,D}{4\pi\,r}\,I(t - r/c)\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{34}$$

A corrente $I(t)$, por definição, é dada por:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\,q_0\,cos\,(\omega t) = -q_0\omega\,\mathrm{sen}\,(\omega t). \tag{35}$$

Portatnto,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \approx -\frac{\mu_0\, D\, q_0 \omega}{4\pi\, r}\,\mathrm{sen}\,\left[\omega\,(t-r/c)\right]\,\hat{\mathbf{z}}, \qquad r \gg D. \tag{36}$$

O momento de dipolo instantâneo é dado por

$$\mathbf{p}(t) := q(t) D\,\hat{\mathbf{z}} = q_0 D \cos{(\omega t)}\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{37}$$

Derivando o momento de dipolo em relação ao tempo,

$$\frac{d\,\mathbf{p}(t)}{dt} = -q_0 \omega D\,\mathrm{sen}\,(\omega t)\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{38}$$

Vemos então que é possível escrever para o potencial vetor retardado a expressão

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi\, r}\,\frac{d\,\mathbf{p}(t-r/c)}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, c^2\, r}\,\frac{d\,\mathbf{p}(t-r/c)}{dt}. \tag{39}$$

3 O potencial escalar do dipolo elétrico

Para calcular o potencial escalar V, podemos usar a expressão dada pela Eq. (26), se soubermos como escrever $\rho(\mathbf{x},t)$, ou, já que sabemos $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$, a condição de Lorenz, Eq. (13). Esta última é a alternativa mais simples.

Observe que $\mathbf{A}$ só tem componentes na direção Oz,

$$A(\mathbf{x},t) = A_z(r,t)\,\hat{\mathbf{z}}, \tag{40}$$

onde

$$A_z(r,t) = -\frac{\mu_0 q_0 \omega D}{4\pi r}\,\mathrm{sen}\,\left[\omega\,(t-r/c)\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, c^2}\,\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r}, \tag{41}$$

onde $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. Agora,

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_z(r,t)}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, c^2}\,\left[\dot{p}(t-r/c)\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\dot{p}(t-r/c)\right]. \tag{42}$$

Mas,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} = -\frac{z}{r^3}, \tag{43}$$

O segundo termo pode ser calculado mais facilmente se fizermos a transformação de variáveis $u = t - r/c$. Então,

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\dot{p}(t-r/c) = \frac{\partial}{\partial z}\,\dot{p}(u) = \frac{\partial \dot{p}(u)}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{44}$$

Como

$$\frac{\partial \dot{p}(u)}{\partial u} = \frac{\partial \dot{p}(u)}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial u} = \ddot{p}(u), \tag{45}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[t - \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}{c}\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2} = -\frac{z}{cr}, \tag{46}$$

obtemos

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\dot{p}(t-r/c) = -\frac{z}{cr}\,\ddot{p}(t-r/c). \tag{47}$$

Portanto,

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\left[\frac{z}{r}\,\dot{p}(t-r/c) + \frac{z}{cr^2}\,\ddot{p}(t-r/c)\right]. \tag{48}$$

Com a condição de Lorentz obtemos

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\left[\frac{z}{r}\,\dot{p}(t-r/c) + \frac{z}{cr^2}\,\ddot{p}(t-r/c)\right]. \tag{49}$$

Integrando no tempo e lembrando que $z = r\,\cos\theta$,

$$V(r,\theta,t) = \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0\,r^2}\,\left[\frac{1}{r}\,p(t-r/c) + \frac{r}{c}\,\dot{p}(t-r/c)\right], \tag{50}$$

a menos de uma função de r e θ que escolheremos como identicamente nula na região de interesse. As equações (50) e (39) são os resultados que buscávamos.

Exercício 1 Obtenha as equações (49) e (50). ■

4 Os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ de um dipolo elétrico oscilante

Agora que sabemos as expressões para o potencial vetor e para o potencial escalar associados com um dipolo elétrico, equações (50) e (39) , podemos calcular os campos elétrico e indução magnética correspondentes.

4.1 O campo indução magnética do dipolo

Convém que comecemos pelo cálculo do campo indução magnética $\mathbf{B}$. Fazendo uso da identidade vetorial

$$\nabla\times(f\mathbf{a}) = \nabla f\times\mathbf{a} + f\,\nabla\times\mathbf{a},$$

onde f é uma função escalar e $\mathbf{a}$ é um campo vetorial. No nosso caso,

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, c^2}\,\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r}, \qquad \mathbf{a} = \hat{\mathbf{z}}.,$$

Como $\nabla\times\hat{\mathbf{z}} = 0$, temos, usando a identidade vetorial acima,

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, c^2}\,\nabla\left[\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r}\right]\times\hat{\mathbf{z}}. \tag{51}$$

Como $\dot{p}(t-r/c)$ é uma função somente de r (e t!), podemos escrever

$$\nabla\left[\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r}\right] = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r}\right]\hat{\mathbf{e}}_r, \tag{52}$$

onde

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\mathbf{x}}{r}. \tag{53}$$

Portanto,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, c^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r}\right]\hat{\mathbf{e}}_r\times\hat{\mathbf{z}}. \tag{54}$$

Como antes, faremos a transformação de variável $u = t - r/c$. Então:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r}\right] = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\dot{p}(u)}{r}\right] = -\frac{1}{r^2}\,\dot{p}(u) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\dot{p}(u)}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial r}, \tag{55}$$

ou, lembrando que

$$\frac{\partial\dot{p}(u)}{\partial u} = \frac{\partial\dot{p}(u)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{c},$$

temos

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, c^2}\left[-\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r^2} - \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{rc}\right]\hat{\mathbf{e}}_r\times\hat{\mathbf{z}}, \tag{56}$$

ou, como $\mathbf{p}(t-r/c) = p(t-r/c)\,\hat{\mathbf{z}}$, temos depois de trocar a ordem do produto vetorial

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, c^2}\left[\frac{1}{r^2}\,\frac{d\mathbf{p}(t-r/c)}{dt} + \frac{1}{rc}\,\frac{d^2\mathbf{p}(t-r/c)}{dt^2}\right]\times\hat{\mathbf{e}}_r, \tag{57}$$

que é o resultado que queríamos obter.

4.2 O campo elétrico do dipolo

O campo elétrico do dipolo requer que calculemos a derivada temporal de $\mathbf{A}$ e o gradiente de V. Começemos pelo primeiro que é imediato:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, c^2 r}\, \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c). \tag{58}$$

O gradiente do potencial escalar requer o cálculo de

$$\nabla V(r,\theta,t) = \frac{\partial V(r,\theta,t)}{\partial r}\, \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\, \frac{\partial V(r,\theta,t)}{\partial \theta}\, \hat{\mathbf{e}}_\theta. \tag{59}$$

Derivando a Eq. (50) em relação a θ, temos

$$\frac{\partial V(r,\theta,t)}{\partial r} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{4\pi\epsilon_0\, r^2} \left[\frac{1}{r}\, p(t-r/c) + \frac{r}{c}\, \dot{p}(t-r/c)\right]. \tag{60}$$

A derivada em relação a r é um pouco mais difícil de calcular, mas podemos usar o truque que utilizamos anteriormente: definimos a variável $u = r - r/c$. Segue como antes que

$$\frac{\partial p(u)}{\partial u} = \frac{\partial p(u)}{\partial t} \equiv \dot{p}(u),$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{c},$$

obtemos o resultado procurado

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r,\theta,t) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0\, c^2 r}\, \ddot{\mathbf{p}}(t-r/c) + \frac{\cos\,\theta}{4\pi\epsilon_0\, r^3} \left[2\, p(u) + 2\, \frac{r}{c}\, \dot{p}(u) + \frac{r^2}{c^2}\right] \hat{\mathbf{e}}_r \\ &+ \frac{\operatorname{sen}\theta}{4\pi\epsilon_0\, r^3} \left[p(u) + \frac{r}{c}\, \dot{p}(u)\right] \hat{\mathbf{e}}_\theta. \end{aligned} \tag{61}$$

Exercício 2 Obtenha o campo elétrico do dipolo elétrico. ■

O campo elétrico do dipolo pode ser dividido em três contribuições distintas, a saber:

Zona próxima Os termos que dependem de $p(u)$, e que variam com $1/r^3$, nos dão o campo elétrico de um dipolo elétrico simples (veja o Apêndice) , mas dependente do tempo. Este é o termo que nos dá o campo da **zona próxima** ao dipolo:

$$\mathbf{E}_{\text{z. p.}}(r,\theta,t = \frac{p(u)}{4\pi\epsilon_0\, r^3}\, \left(2\, \cos\,\theta\, \hat{\mathbf{e}}_r + \operatorname{sen}\theta\, \hat{\mathbf{e}}_\theta\right). \tag{62}$$

Este é o termo dominante no limite $r \to 0$.

Zona intermediária Os termos que dependem de $\dot{p}(u)$, e que variam com $1/r^2$, nos dão o campo elétrico na **zona intermediária**:

$$\mathbf{E}_{\text{z. i.}}(r,\theta,t) = \frac{\dot{p}(u)}{4\pi\epsilon_0\, r^2 c}\,\left(2\,\cos\,\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r + \text{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\right). \tag{63}$$

Zona longínqua ou de radiação Por último, temos os termos mais importantes que dependem de $\ddot{p}(u)$ e variam com $/r$ e são os termos dominantes quando $r \to \infty$. Estes termos se escrevem:

$$\mathbf{E}_{\text{rad.}}(r,\theta,t) = \frac{\cos\,\theta}{4\pi\epsilon_0\, c^2 r}\,\ddot{p}(u)\,\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, c^2 r}\,\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c). \tag{64}$$

Para completar o cálculo do campo elétrico de radiação do dipolo elétrico convém rescrever o último termo como uma combinação linear de $\hat{\mathbf{e}}_r$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta$. Lembrando que

$$= \cos\,\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r - \text{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

podemos escrever,

$$\ddot{\mathbf{p}}(u) = \ddot{p}(u)\,\left(\cos\,\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r - \text{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\right).$$

Segue então que na zona de radiação

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(r,\theta,t) = \frac{\ddot{p}(t-r/c)\,\text{sen}\,\theta}{4\pi\epsilon_0\, r^2 c}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta. \tag{65}$$

5 O vetor de Poynting e a potência instantânea

Estamos quase prontos para calcular o vetor de Poynting e a potência instantânea na zona de radiação, mas antes precisamos rescrever o campo indução magnética em uma forma mais conveniente. Na zona de radiação, o termo relevante do campo indução magnética, Eq. (57) se escreve

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, c^2}\,\frac{1}{rc}\,\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)\,\times\hat{\mathbf{e}}_r. \tag{66}$$

Como o dipolo está orientado ao longo do eixo Oz, temos

$$\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c) = \ddot{p}(t-r/c)\,\hat{\mathbf{z}} = \ddot{p}(t-r/c)\,\left(\cos\,\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r - \text{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\right), \tag{67}$$

Segue que

$$\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c)\,\times\hat{\mathbf{e}}_r = -\ddot{p}(t-r/c)\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\times\hat{\mathbf{e}}_r = \ddot{p}(t-r/c)\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\phi. \tag{68}$$

Portanto, o campo indução magnética na zona de radiação pode ser posto na forma

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(r,\theta,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\, c^2}\, \frac{\operatorname{sen}\theta}{rc}\, \ddot{p}(t-r/c)\ \times \hat{\mathbf{e}}_\phi. \tag{69}$$

Como os campos na zona de radiação são transversos um ao outro, isto é

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(r,\theta,t) = \frac{1}{c}\, \hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{E}_{\text{rad}}(r,\theta,t), \tag{70}$$

como podemos provar facilmente, o vetor de Poynting na zona de radiação se escreve,

$$\mathbf{S}_{\text{rad}}(r,\theta,t) = \frac{1}{\mu_0}\, \mathbf{E}_{\text{rad}}(r,\theta,t) \times \mathbf{B}_{\text{rad}}(r,\theta,t) = \frac{1}{\mu_0 c}\, \mathbf{E}_{\text{rad}}(r,\theta,t) \times \left[\hat{\mathbf{e}}_r \times \mathbf{E}_{\text{rad}}(r,\theta,t)\right]. \tag{71}$$

Fazendo uso da identidade vetorial

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$$

obtemos para o **o vetor de Poynting instantâneo**, a expressão

$$\mathbf{S}_{\text{rad}}(r,\theta,t) = \frac{1}{\mu_0 c}\, \mathbf{E}^2_{\text{rad}}\, \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^3 r^2}\, \ddot{p}^2(t-r/c)\, \hat{\mathbf{e}}_r. \tag{72}$$

Portanto, o fluxo instantâneo de energia por unidade de tempo, medida em W/m^2, é radial, embora no seja esfericamente simétrico.

Exercício 3 Mostre que na zona de radiação os campos elétrico e indução magnética são transversos, isto é, os dois têm uma relação entre si similar ao que acontece em uma onda plana. ■

Exercício 4 Obtenha as Eqs. 69 e 72 ■

Vejamos como se calcula a **potência instantânea**. Considere uma esfera de raio R muito maior do que a dimensão linear do dipolo, veja a Figura 2. A potência instantânea é a integral sobre a área dessa esfera, isto é:

$$P(t) = \int_\Omega \mathbf{S}_{\text{rad}}(R,\theta,t)\cdot\hat{\mathbf{n}}\, R^2\, d\Omega = \frac{\ddot{p}^2(t-R/c)}{16\pi^2\epsilon_0^2 c^3} \int_\Omega \operatorname{sen}^2\theta\, d\Omega, \tag{73}$$

onde $d\Omega = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$. Procedendo como anteriormente obtemos

$$P(t) = \frac{2}{3}\, \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2(t-R/c)}{4\pi\epsilon_0\ c^3}, \tag{74}$$

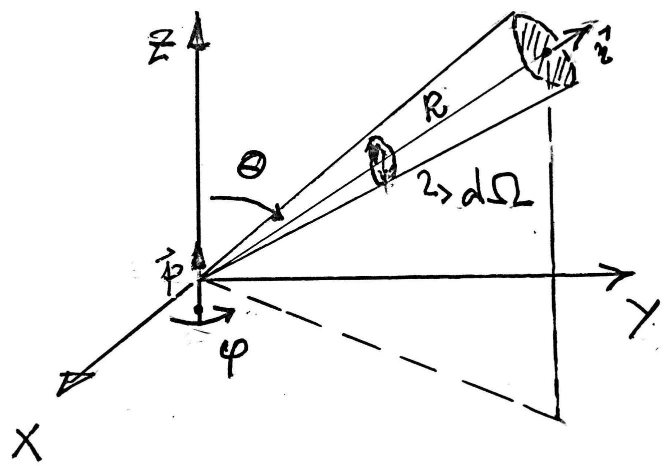

Figura 2: Geometria do cálculo da radiação de um dipolo elétrico ideal.

que é a **fórmula** ou **teorema de Larmor**.

Exercício 5 Obtenha a Eq. (74). É este resultado que impede a existência de um átomo clássico compatível com a teoria eletromagnética clássica. ■

6 A potência média

Finalmente, a **potência média emitida por unidade de ângulo sólido** é dada por:

$$\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} = \frac{\langle \ddot{\mathbf{p}}^2(t - R/c)\rangle}{16\,\pi^2\epsilon_0\,c^3}\,\mathrm{sen}^{\,2}\,\theta. \tag{75}$$

O ângulo θ é o ângulo entre o momento de dipolo $\mathbf{p}(t)$ e o vetor posição do ponto de observação $\mathbf{x}$. É mais conveniente expressar trocar θ pelo ângulo que o vetor posição do ponto de observação faz com a direção de propagação da onda incidente. Denotemos este ângulo por ϑ. É possível mostrar que então que

$$\mathrm{sen}^2\,\theta = \frac{1 + \cos^2\,\vartheta}{2}. \tag{76}$$

Portanto, podemos escrever também:

$$\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} = \frac{\langle \ddot{\mathbf{p}}^2(t-R/c)\rangle}{16\,\pi^2\epsilon_0\,c^3}\left(\frac{1+\cos^2\,\vartheta}{2}\right). \tag{77}$$

A potência média integrada sobre uma esfera de raio R centrada no dipolo é dada por:

$$\langle P\rangle = \int_\Omega \frac{d\langle P\rangle}{d\Omega}\,d\Omega = \frac{\langle \ddot{\mathbf{p}}^2(t-R/c)\rangle}{16\,\pi^2\epsilon_0\,c^3}\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta. \tag{78}$$

A integral em ϕ é imediata. Fazendo a mudança de variável $u = \cos\,\theta$, obtemos para a integral em θ, o fator $4/3$. Portanto, a potência média total é

$$\langle P\rangle = \frac{4}{3}\,\frac{\langle \ddot{\mathbf{p}}^2(t-R/c)\rangle}{8\,\pi\epsilon_0\,c^3}, \tag{79}$$

ou ainda,

$$\langle P\rangle = \frac{2}{3}\,\frac{\langle \ddot{\mathbf{p}}^2(t-R/c)\rangle}{4\pi\epsilon_0\;c^3}. \tag{80}$$

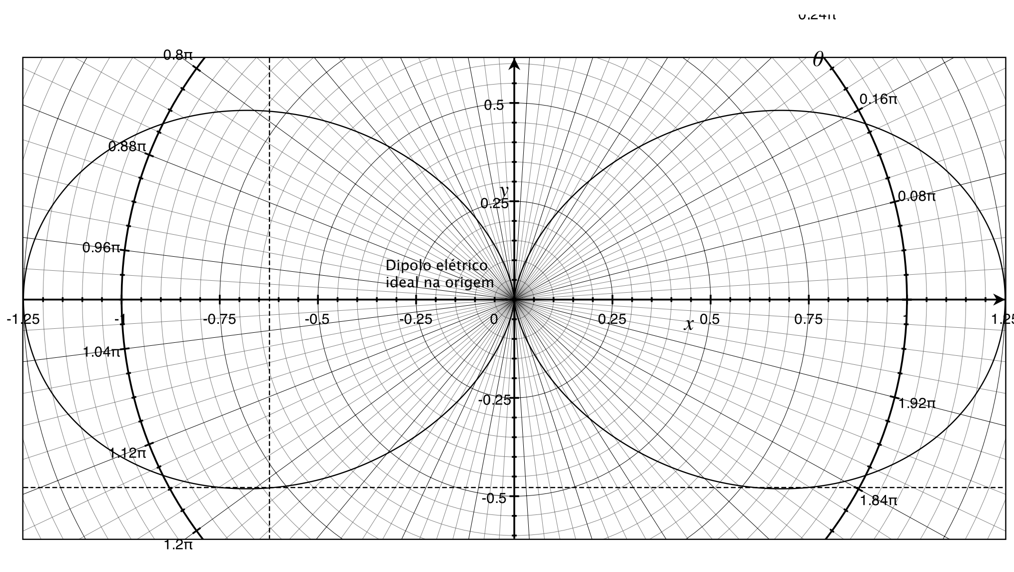

Figura 3: Distribuição angular da radiação de um dipolo eltrico ideal.

Clicando no enlace (*link*): **Radiação de diplo elétrico**, o leitor terá acesso a uma simulação do campo de radiação do dipolo e do padrão de distribuição da energia radiada[1].

[1] A simulação foi criada pelo Prof. C. E. M. Aguiar.

7 Aplicação ao espalhamento Rayleigh

Nesta seção veremos algumas aplicações da Eq. (75), em particular, ao espalhamento Rayleigh. Ao final espera-se com o leitor consiga entender a coloração azul do céu, **Problema 3** e Figura 8.

7.1 Seções de choque diferencial e total

Convém introduzir a seção de choque diferencial por meio da definição:

$$\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} = \langle \text{fluxo incidente}\rangle \, \frac{d\sigma}{d\Omega},$$

onde o fluxo incidente é dado pelo valor médio temporal da projeção do vetor de Poynting sobre a direção de incidência do feixe, isto é:

$$\langle \text{fluxo incidente}\rangle = \langle \mathbf{S}_{\text{incidente}}\rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Portanto, a seção de choque diferencial se escreve:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\langle \mathbf{S}_{\text{incidente}}\rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}} \, \frac{d\langle P\rangle}{d\Omega}. \tag{81}$$

A seção de choque total se escreve:

$$\sigma = \int_{\Omega} \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega, \tag{82}$$

7.2 A seção de choque de Thomson para o elétron livre

O campo elétrico de uma onda eletromagnética plana polarizada na direção Oz, em notação complexa, se escreve

$$\mathbf{E}(y,t) = E_0\, \mathrm{e}^{i(ky-\omega t)}\, \hat{\mathbf{z}}, \tag{83}$$

onde E_0 é uma amplitude complexa dada por

$$E_0 = |E_0|\, \mathrm{e}^{i\delta}. \tag{84}$$

Se a onda incide sobre um elétron inicialmente livre e na origem, $x = y = z = 0$, este oscilará ao longo do eixo Ox e passará a ser governado pela equação de movimento

$$\ddot{z} = -\frac{e}{m} E_0\, \mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{85}$$

onde e é a carga do elétron em módulo e m é a sua massa. O elétron comporta-se como um dipolo elétrico oscilante. Queremos calcular a seção de choque diferencial. Eq. (81), para o espalhamento da onda plana incidente pelo elétron. Como vimos anteriormente,

$$\frac{d\,\langle P\rangle}{d\Omega} = \frac{\left\langle \ddot{p}^{\,2}(t-R/c)\right\rangle}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\,\text{sen}^2\,\theta.$$

No caso, $\mathbf{p}(t) = -ez(t)\,\hat{\mathbf{z}}$. Portanto,

$$\ddot{p}^2(t) \equiv \frac{d^2\mathbf{p}(t)}{dt^2} \cdot \frac{d^2\mathbf{p}(t)}{dt^2} = e^2 \ddot{z}(t).$$

Portanto,

$$\frac{d\left\langle P\right\rangle}{d\Omega} = \frac{e^2\left\langle \ddot{z}^2(t-R/c)\right\rangle}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\,\text{sen}^2\,\theta. \tag{86}$$

Mas, podemos fazer uso do resultado

$$\left\langle a(t)b(t)\right\rangle = \frac{1}{2}\,a(t)b^*(t), \tag{87}$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são complexos que dependem de t. Este resultado permite calcular facilmente o valor médio no tempo que precisamos. De fato,

$$\left\langle z^2(t)\right\rangle = \left\langle z(t)z(t)\right\rangle = \frac{1}{2}\,z(t)z^*(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{e|E_0|}{m}\right)^2. \tag{88}$$

Portanto,

$$\frac{d\left\langle P\right\rangle}{d\Omega} = \frac{1}{2}\,\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{e|E_0|}{m}\right)^2\text{sen}^2\,\theta. \tag{89}$$

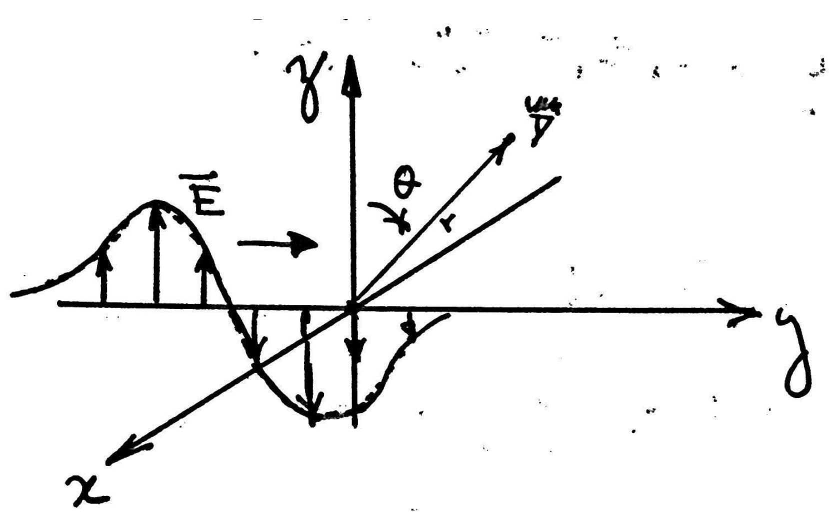

Figura 4: Onda eletromagnética plana incidindo sobre um elétron inicialmente em repoouso na origem.

O **raio clássico do elétron**, ou **raio de Lorentz**, ou ainda comprimento de espalhamento de Thomson é definido por

$$mc^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e}, \tag{90}$$

onde se ignora fatores numéricos que dependem do modelo de distribuição da carga, $3/5$ se o elétron for considerado como uma esfera carregada, ou $1/2$, se for considerado como uma casca esférica carregada. Segue que

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}. \tag{91}$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} = \frac{\epsilon_0 c|E_0|^2}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\, mc^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta = \frac{\epsilon_0 c|E_0|^2}{2}\, r_e^2 \operatorname{sen}^2\theta. \tag{92}$$

Para completar o cáculo da seção de choque diferencial, precisamos calcular o fluxo de energia associado com a onda plana incidente. Para uma onda plana que incide sobre o elétron vinda de $y \to -\infty$,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}^* = \frac{1}{\mu_0 c}\,\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{y}}\times\mathbf{E}^* = \epsilon_0 c\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*\,\hat{\mathbf{y}}. \tag{93}$$

Portanto, o valor médio no tempo do vetor de Poynting se escreve

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \epsilon_0 c\,\langle\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*\rangle\,. \tag{94}$$

Mas,

$$\langle\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*\rangle = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Re}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*) = \frac{1}{2}\,|E_0|^2. \tag{95}$$

O fluxo incidente é dado por

$$\langle\mathbf{S}\rangle\cdot\hat{\mathbf{y}} = \frac{1}{2}\,|E_0|^2. \tag{96}$$

Substituindo os as expressões para a potência diferencial média e para o fluxo incidente na expressão para a seção de choque, Eq. (81), obtemos, finalmente,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \operatorname{sen}^2\theta. \tag{97}$$

Lembrando que $d\Omega = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$, e integrando está equação, obtemos a **seção de choque de Thomson**

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\, r_e^2. \tag{98}$$

Observe que se a onda plana incidente for harmônica, a seção de choque de Thomson não dependerá da sua frequência.

Exercício 6 Obtenha a seção de choque de Thomson. ■

7.3 A seção de choque de Thomson para o elétron ligado

Quando o elétron é ligado a um átomo ou molécula o modelo deve ser mudado. A equação de movimento do elétron agora se lê

$$m\ddot{z} + m\Gamma\dot{z} + m\omega_0^2 z = -eE_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t}. \tag{99}$$

A aceleração se escreve (a solução para o estado estacionário é dada por[2]:

$$\ddot{z}(t) = -\frac{e}{m}\,\frac{\omega^2 E_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\,\omega}. \tag{100}$$

A seção de choque de Thomson para a a interação entre um elétron ligado e uma onda plana incidente agora se escreve

$$\sigma(\omega) = F(\omega)\,\frac{8\pi}{3}\,r_e^2, \tag{101}$$

onde

$$F(\omega) = \left|\frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\,\omega}\right| = \frac{\omega^4}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \Gamma^2\,\omega^2.} \tag{102}$$

Exercício 7 Obtenha a seção de choque de Thomson modificada. ■

[2] Veja a referência [3]

Problemas

Problema 1 *A estabilidade de um átomo hidrogenóide do ponto de vista do eletromagnetismo clássico* Considere o modelo clássico de um átomo hidrogenóide. Neste modelo, o núlceo tem uma carga positiva $+Ze$, onde Z é o número de prótons, e $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C é o *quantum* elementar de carga, em torno do qual um elétron de carga $-e$ e massa m descreve uma órbita que por simplicidade suporemos como um círculo de raio R, pois o núcleo que tem uma massa $1836 \times Z$ vezes maior do que a massa do elétron pode ser considerado fixo . Apesar da sua simplicidade este modelo servirá para mostrar que do ponto de vista do eletromgnetismo clássico, o átomo não é estável, pois como você verá, este comporta-se como um dipolo elétrico que depende do tempo ao qual se pode aplicar as fórmulas para radiação de dipolo que são deduzidas nestas notas de aula.

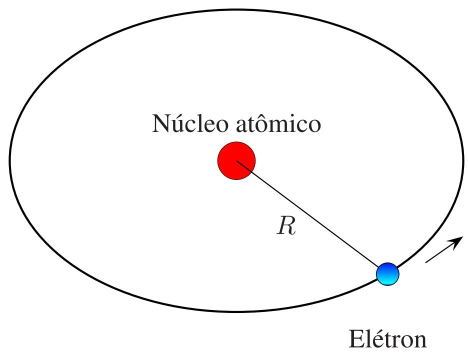

Figura 5: Modelo clássico de um átomo com um único elétron.

(a) Despreze o efeito do retardamento e calcule o momento de dipolo elétrico do átomo e a seguir a potência instantânea $P(t)$ emitida por este dipolo atômico. Suponha que são necessárias muitas voltas em torno do núcleo para que a órbita diminua de raio do modo significativo. Você deve obter:

$$P(t) = \frac{2}{3}\,\frac{e^2 a^2}{4\pi\epsilon_0 c^3},$$

onde a é a magnitude da aceleração centrípeta instantânea do elétron,

(b) Escreva a energia instantânea do átomo como:

$$E(t) \approx \frac{1}{2} m v(t)^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r(t)},$$

e use a lei da conservação da energia total para obter a equação diferencial que governa a variação instantânea do raio da órbita:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2\; c^3 m^2 r^2}$$

(c) Integre a equação diferencial acima e mostre que o tempo de vida do átomo é dado por:

$$\tau = \frac{1}{4} \frac{\left(4\pi\epsilon_0\right)^2 c^3 m^2 a_0^2}{Z^2 e^4},$$

onde a_0, é o raio inicial do átomo, o raio de Bohr.

(d) Calcule o tempo de vida do átomo de hidrogênio. Procure em uma tabela os valores das constantes que você precisa.

Problema 2 *A antena de meia-onda* Considere dois segmentos retos de fio conectados a um gerador de alta freqüência que fornece uma corrente alternada, veja a Figura 6. As cargas oscilantes emitirão ondas eletromagnéticas na freqüência de rádio. O comprimento da antena vale meio comprimento da onda de rádio, e a

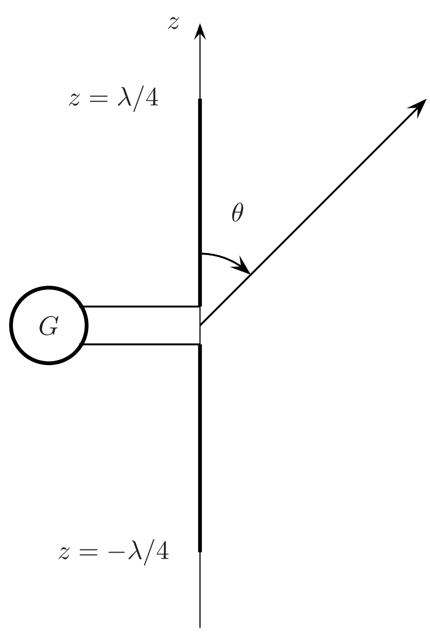

Figura 6: Geometria da antena de meia onda.

corrente ao longo da antena tem a forma de uma onda estacionária:

$$I(t) = I_0 \cos\frac{2\pi z}{\lambda} \cos\omega t.$$

(a) Mostre que o vetor potencial é dado por:

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_0}{r\omega} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \frac{\cos\left({}^1\!/_2\,\pi\cos\theta\right)}{\text{sen}^2\theta}.$$

As demais componentes são nulas. Você precisará da relação:

$$\cos\,\alpha\,\cos\,\beta = \frac{1}{2}\,\cos\left(\alpha+\beta\right) + \frac{1}{2}\,\cos\left(\alpha-\beta\right),$$

e lembrar que $\lambda = 2\pi c/\omega$.

(b) Mostre que o campo magnético associado se escreve:

$$\mathbf{B} \sim \frac{2I_0}{3}\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\frac{\cos\left({}^1\!/_2\,\pi\cos\theta\right)}{\mathrm{sen}\theta}\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{z}} \tag{103}$$

(c) Use o fato de que o campo magnético e o campo elétrico são perpendiculares entre si na zona de radiação e calcule o vetor de Poynting instantâneo. Observe que não é necessário calcular o campo elétrico!

(d) Calcule a média temporal $\langle S\rangle$ da magnitude do vetor de Poynting.

(e) Calcule a potência média emitida por unidade de ângulo sólido:

$$\frac{d\left\langle P\right\rangle}{d\Omega} = \left\langle S\right\rangle r^2.$$

(f) Calcule a potência média emitida.

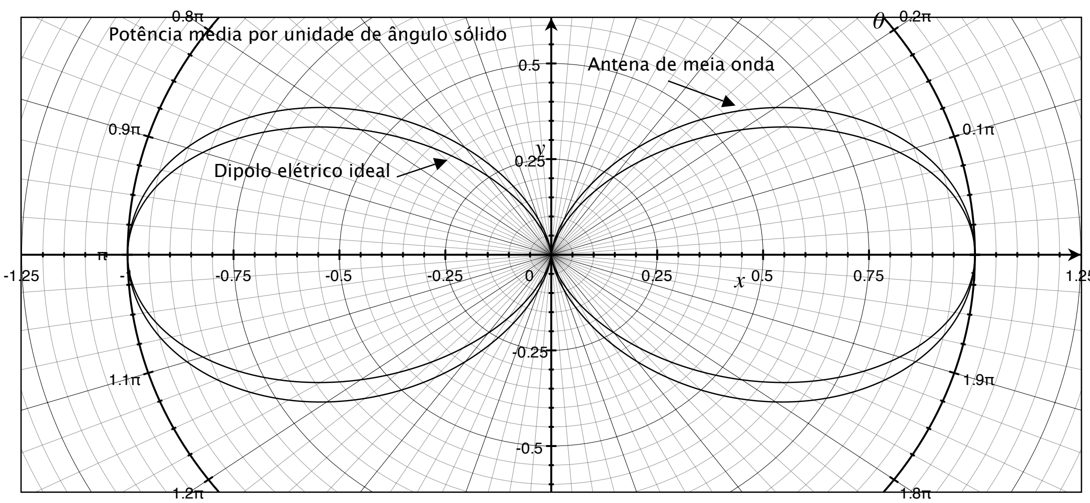

Figura 7: Distribuição angular da radiação de dipolo e de antena de meia onda.

Problema 3 *Espalhamento Rayleigh. Por quê o céu é azul e o pôr do Sol vermelho?* Mostre que um elétron ligado espalha 9.4 vezes mais a luz azul do que a luz vermelha. Agora explique o porquê do céu ser azul. **Sugestão:** Para baixas frequências, isto é, para $\omega \ll \omega_0$, a seção de choque de Thomson modificada se escreve

$$\sigma(\omega) \approx \frac{\omega^4}{\omega_0^4}\,\frac{8\pi}{3}\,r_e^2.$$

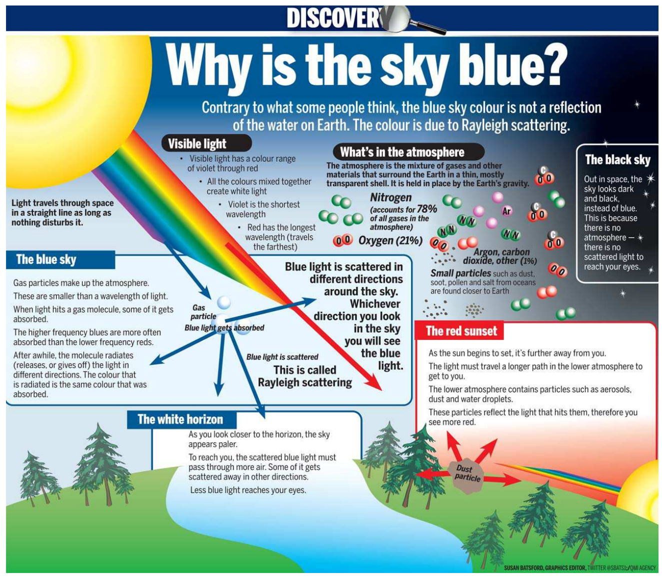

Figura 8: O espalhamento Rayleigh e a coloração do céu.

Referências

[1] H. M. Nussenzveig *Curso de Física Básica* Vol. 3, Cap. 12. (São Paulo: Edgar Blúcher).

[2] R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands: *Lições de Física* Vol. II, Cap. 21, especialmente as seções 21-3 e 21-4. Porto Alegre: Bookman (2008).

[3] A. C. Tort *Dinâmica newtoniana no plano complexo*. Notas de aula. Disponível em **Dinâmica newtoniana em notação complexa: oscilações e gravitação.**