



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

**Dinâmica newtoniana em notação complexa:  
oscilações e gravitação**

Alexandre C. Tort

Rio de Janeiro  
2011

# Dinâmica newtoniana em notação complexa: oscilações e gravitação

(VERSÃO PRELIMINAR)

A C Tort\*

Instituto de Física

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Caixa Postal 68.528; CEP 21941-972 Rio de Janeiro, Brazil

5 de Janeiro de 2011

---

\*e-mail: tort@ufrj.br.

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Cinemática bidimensional no plano complexo</b>	<b>3</b>
1.1	Números complexos: um pouco de história . . . . .	3
1.2	A álgebra dos números complexos . . . . .	12
1.3	A representação plano-polar de um número complexo. . . . .	13
1.4	Curvas, posição, velocidade e aceleração no plano complexo . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Dinâmica bidimensional no plano complexo</b>	<b>19</b>
2.1	O oscilador harmônico simples . . . . .	20
2.2	O oscilador harmônico amortecido . . . . .	26
2.3	O oscilador harmônico forçado . . . . .	30
2.4	Osciladores bidimensionais anisotrópicos – figuras de Lissajous . . . . .	39
2.5	Referenciais não inerciais; o pêndulo de Foucault . . . . .	42
<b>3</b>	<b>O Sistema Solar e o problema de Kepler</b>	<b>49</b>
3.1	De Ptolomeu às leis de Kepler . . . . .	49
3.2	Forças centrais . . . . .	54
3.3	A lei das áreas . . . . .	55
3.4	Momento angular em notação complexa . . . . .	56
3.5	A órbita elíptica e a lei do inverso do quadrado . . . . .	57
3.6	A energia mecânica e a órbita elíptica . . . . .	59
3.7	A terceira lei de Kepler e a Gravitação Universal . . . . .	62
3.8	A dinâmica da órbita elíptica . . . . .	64
	<b>Problemas</b>	<b>68</b>

# 1 Cinemática bidimensional no plano complexo

Nesta seção nosso objetivo principal é refazer a cinemática vetorial bidimensional na linguagem dos números complexos. Para isto, começamos com um breve estudo da noção de número complexo e da sua matemática. Apenas o necessário aos nossos propósitos será revisto. Depois disto, introduziremos a cinemática no plano complexo.

## 1.1 Números complexos: um pouco de história

Os principais conjuntos de números com os quais tratamos habitualmente são:

(i) O conjunto dos números naturais:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\},$$

(ii) O conjunto dos números naturais incluindo o zero:

$$\mathbf{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\},$$

(iii) O conjuntos dos inteiros (que inclui o zero e os inteiros negativos)

$$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\},$$

(iv) O conjunto dos números racionais ou frações, números que pode ser postos na forma  $a/b$ , onde  $a, b \in \mathbf{Z}$ , mas com  $b \neq 0$ . Denotamos esse conjunto por  $\mathbf{Q}$ .

(v) O conjuntos dos números irracionais  $\mathbf{I}$ , isto é, aqueles que não podem ser escritos em forma de fração, por exemplo:  $\sqrt{2} = 1,41423\dots$ ,  $\pi = 3,14159\dots$ .

(vi) O conjuntos dos números reais,  $\mathbf{R}$ , que resulta da união do conjuntos dos mencionados acima, mais precisamente dos racionais (que já inclui os inteiros) e dos irracionais.

Cada um dos conjuntos descritos acima contém um elemento que é solução de uma equação algébrica. Por exemplo, a equação algébrica:

$$2x = 3,$$

é resolvida com  $x = 3/2 \in \mathbf{Q}$ . A tentativa de obter a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos iguais à unidade leva à equação do segundo grau:

$$x^2 - 2 = 0,$$

que é resolvida se fizermos  $x = \pm\sqrt{2} \in \mathbf{I}$ . No desenvolvimento histórico da matemática, porém, surgem problemas algébricos que exigem soluções que não estão contempladas pelos conjuntos acima. Alguns desses problemas surgiram de problemas práticos enfrentados por civilizações antigas, como por exemplo, a construção de pirâmides. O décimo quarto problema do papiro matemático de Moscou talvez seja o primeiro exemplo registrado do aparecimento dos números complexos, ou mais apropriadamente no caso, dos números imaginários [1]. O problema, embora numérico, sugere que os antigos egípcios conheciam a fórmula para calcular o volume de uma pirâmide de base quadrada truncada, ou *frustum*. Eis a fórmula, em notação moderna:

$$V = \frac{1}{3} h (a^2 + b^2 + ab),$$

onde  $a$  e  $b$  são os lados dos quadrados que formam a base e o topo, respectivamente, da pirâmide, e  $h$ , a sua altura, veja a Figura 1. Os lados  $a$  e  $b$  podem ser medidos diretamente, mas a altura  $h$  não. Foi Heron de Alexandria quem por volta do século I e.C. conseguiu expressar a altura  $h$  em função de  $a$ ,  $b$  e  $c$ , a aresta inclinada da pirâmide. Seu resultado se lê:

$$h^2 = c^2 - 2 \left( \frac{a-b}{2} \right)^2.$$

Para  $a = 28$ ,  $b = 4$ , e  $c = 15$ , Heron obtém:

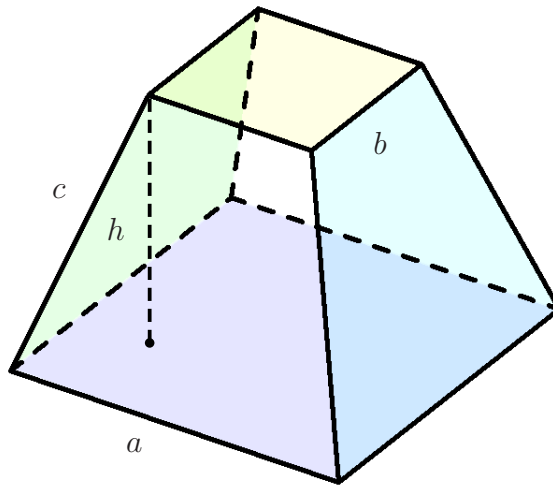


Figura 1: *Frustum*.



Figura 2: Heron de Alexandria (c. 62 e.C.). Capa da *Arithmetica* de Diofanto de Alexandria (200/214-284/298). (Ilustrações Wikipedia)

$$h = \sqrt{-63},$$

que ele rescreve como  $\sqrt{63}$ , acreditando talvez que o resultado inicial não fazia o menor sentido.

Na *Arithmetica* de Diofanto de Alexandria (200/214-284/298), matemático grego do século III e.C., no Livro 6, encontramos o Problema 22, cujo enunciado se lê:

*Dado um triângulo reto de área 7 e perímetro 12, determinar seus lados.*

Em notação moderna, o enunciado pode ser rescrito como:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{2} &= 7, \\ a + b + \sqrt{a^2 + b^2} &= 12, \end{aligned}$$

onde  $a$  e  $b$  denotam os lados do triângulo. Diofanto então escreve:

$$a = \frac{1}{x}, \quad b = 14x,$$

que automaticamente satisfaz a primeira equação. A seguir escreve:

$$\frac{1}{x} + 14x + \sqrt{\frac{1}{x^2} + (14)^2x^2} = 12.$$

Rescrevendo esta equação como:

$$\frac{1}{x} + 14x - 12 = -\sqrt{\frac{1}{x^2} + 196x^2},$$

elevando ambos os lados ao quadrado e simplificando, Diofanto obtém a equação algébrica do segundo grau:

$$172x = 336x^2 + 24.$$

cujas raízes são:

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{168},$$

e conclui: “Esta equação é impossível”, querendo dizer: tal triângulo não pode ser construído.

A surgimento de raízes estranhas em equações algébricas continua no Renascimento com Del Ferro, Tartaglia e Cardano nas tentativas (bem sucedidas!) de resolver as equações algébricas cúbicas [1], [2], [3]. Um polêmico resumo desse esforço, mas com contribuições originais, foi escrito por Girolamo Cardano (1501-1576). No compêndio de álgebra de Cardano, *Artis magna sive de regulis algebraicis* ou simplesmente *Ars Magna*, publicado em 1545, o seguinte problema, cujo enunciado resumimos, é proposto:

*Dividir 10 em duas partes de tal modo que seu produto seja 40.*

Novamente, denotando as partes por  $x$  e  $y$ , podemos traduzir o enunciado da seguinte forma:

$$x + y = 10,$$

$$xy = 40.$$

Elevando a primeira equação ao quadrado:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 100,$$

e multiplicando a segunda por quatro:

$$4xy = 160.$$

Somando as duas equações:

$$x^2 - 2xy + y^2 = -60,$$

ou,

$$(x - y)^2 = -60.$$

logo,

$$x - y = \pm\sqrt{-60} = \pm 2\sqrt{-15}.$$

Agora temos o sistema linear:

$$\begin{aligned} x + y &= 10, \\ x - y &= \pm 2\sqrt{-15}. \end{aligned}$$

Segue que:

$$x = 5 \pm \sqrt{-15},$$

e

$$y = 5 \mp \sqrt{-15}.$$

É fácil comprovar que este é o resultado correto se manipularmos estes resultados com as regras ordinárias da álgebra, em particular, para verificar que o produto é igual a 40, usamos  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ , com  $b^2 = -15$ . Cardano considerou o resultado final “tão sutil quanto inútil,” provavelmente seguindo a tradição herdada da matemática grega, pois não lhe encontra uma interpretação geométrica.

**Exercício 1** Resolva o problema proposto no livro de Cardano fazendo uso da fórmula de Bhaskara (conhecida desde a civilização babilônica). O resultado significa que a parábola  $x^2 + 40$  e a reta  $10x$  e não têm um ponto em comum como pode ser verificado pelo exame do gráfico da Figura 3. ■

Entretanto, foram as equações cúbicas e não as quadráticas que promoveram um avanço na compreensão de soluções envolvendo os números complexos. No livro de Cardano encontramos a equação cúbica:

$$x^3 = 3px + q,$$

e a solução (aqui ligeiramente modificada em relação à solução original):

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$



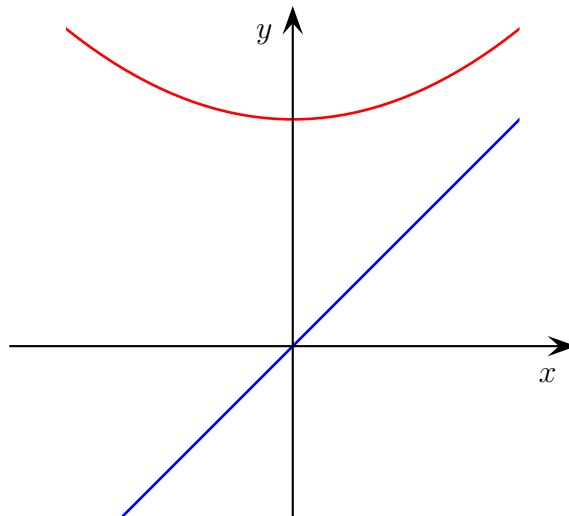


Figura 3: Interpretação geométrica da equação  $x^2 + 40 = 10x$ .

Do ponto de vista geométrico, esta equação pode ser interpretada como a condição para que o gráfico de  $y = x^3$  seja interceptada pela reta  $y = 3px + 2q$ . Observe que se  $q^2 > p^3$ , existe um valor de  $x$  para o qual a reta intercepta o gráfico da cúbica, mas se  $q^2 < p^3$ , a fórmula de Cardano envolve números complexos e não haverá interceptação.

**Exercício 2** Verifique que para:

$$x^3 = 6x + 6,$$

a fórmula de Cardano nos dá  $x = 2^{2/3} + 2^{1/2} \approx 2.847$ . Veja a Figura 4. ■

Observe que a fórmula de Cardano nos dá somente uma das raízes da cúbica. que a solução de Niccolò Fontana (1499-1557), também dito Tartaglia (o gago) para a cúbica reduzida, isto é, a equação algébrica do terceiro grau:

Em 1572 (ano de sua morte), o engenheiro e arquiteto bolonhês Rafael Bombelli (1526-1572) publicou seu livro *L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica*, no qual apresenta a cúbica:

$$x^3 = 15x + 4.$$

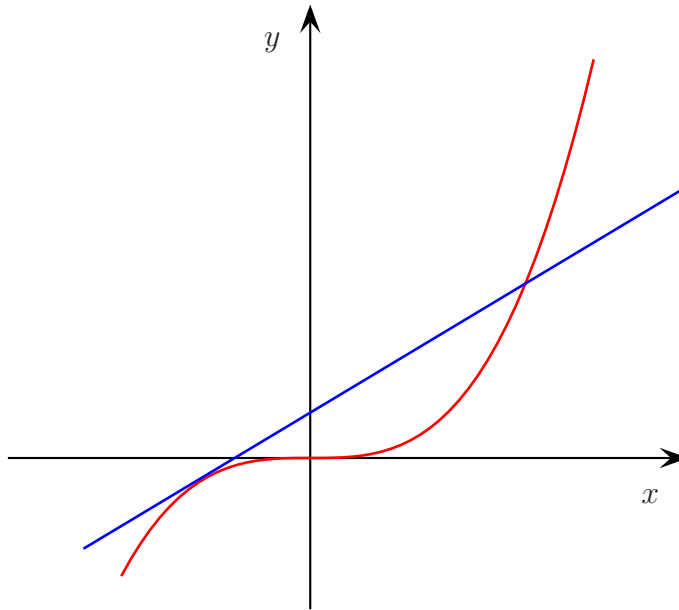


Figura 4: Interpretação geométrica da equação  $x^3 = 6x + 6$ .

Não é difícil concluir por inspeção que  $x = 4$  é uma das soluções dessa equação, veja a Figura 5. Mas a fórmula de Cardano nos dá:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Bombelli enfrentou o desafio oferecido pela manipulação das raízes quadradas de números negativos e conseguiu mostrar que

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1},$$

e

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1},$$

e logo, ao somarmos estes resultados obtemos  $x = 4$ . A fórmula de Cardano leva a uma raiz real! Para obter este resultado, Bombelli supõe que dado dois números da forma  $a + \sqrt{-1}b$  e  $c + \sqrt{-1}d$ , a soma e a multiplicação obedecem às regras ( com  $(\sqrt{-1})^2 = -1$ ):

$$\begin{aligned} (a + \sqrt{-1}b) + (c + \sqrt{-1}d) &= (a + c) + \sqrt{-1}(b + d) \\ (a + \sqrt{-1}b)(c + \sqrt{-1}d) &= (ac - bd) + \sqrt{-1}(ad + bc). \end{aligned}$$

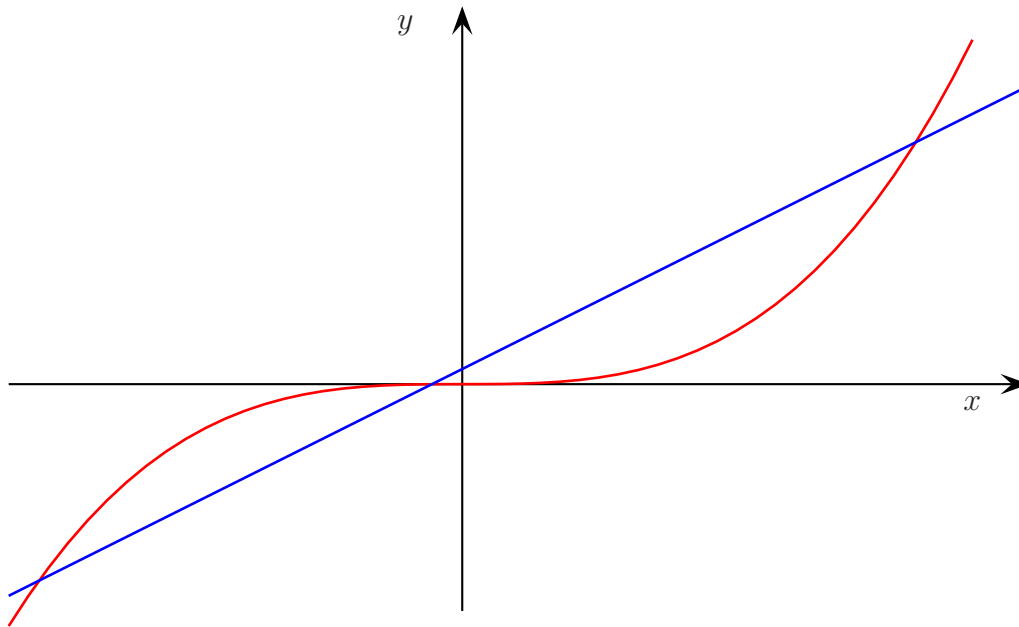


Figura 5: Interpretação geométrica da equação.  $x^3 = 15x + 4$ . Há três raízes reais para esta equação:  $4$ ,  $-2 + \sqrt{3}$ , e  $-2 - \sqrt{3}$ .

**Exercício 3** Mostre que  $2 \pm \sqrt{-121} = 2 \pm \sqrt{-1} 11 = (2 \pm \sqrt{-1})^3$ , e verifique a solução de Bombelli. ■

Tentativas (malogradas) de geometrização dos números complexos, isto é, de encontrar uma interpretação geométrica para os números da forma  $a + bi$  foram pesquisadas por vários matemáticos, entre eles, René Descartes (1596-1650) a quem devemos, entre outras coisas, uma bem sucedida interpretação geométrica da raiz quadrada de um número real. Mas a solução do problema da geometrização deve-se a um obscuro topógrafo nascido na Noruega, mas que ainda jovem emigrou para a Dinamarca onde estudou e estabeleceu-se como profissional competente tornando-se Inspetor Real de Topografia. Seu nome era Casper Wessel (1745-1818) e em 1799 publicou uma memória nos Anais da Real Academia Dinamarquesa de Ciências e Letras com o título *Sobre a representação analítica da direção*, na qual além da representação geométrica dos complexos, apresenta o modo de combiná-los. A solução de Wessel foi redescoberta pelo matemático amador e livreiro Jean-Robert Argand (1768-1826). A solução de Wessel, só aparentemente muito simples, consiste em considerar o eixo cartesiano  $x$  como representando os

reais e o eixo cartesiano  $y$ , os números puramente imaginários. Um número complexo  $a+b\sqrt{-1}$  pode ser considerado como o par ordenado  $(a, b)$  no plano cartesiano. Jean-Robert Argand nasceu em Genebra, Suíça, mas mudou-se para Paris em 1806 onde estabeleceu-se como livreiro. Argand, desconhecedor do trabalho de Wessel, redescobriu a solução e a publicou por conta própria em 1806, com o título *Ensaio sobre uma maneira de representar quantidades imaginárias nas construções geométricas*. Argand introduziu também o conceito de módulo de um número complexo. Em 1813, o ensaio de Argand foi republicado na revista francesa *Annales Mathématiques*, certamente a razão pela qual a representação geométrica dos complexos é conhecida hoje em dia como **diagrama de Argand** ou **plano de Argand**.

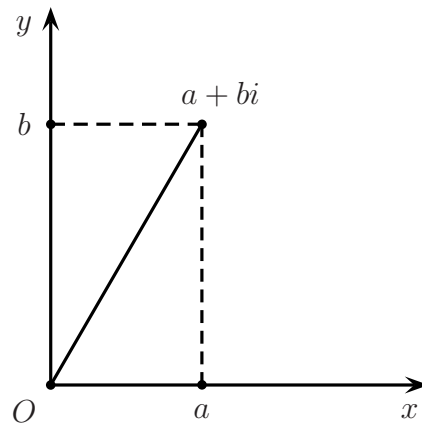


Figura 6: O diagrama de Argand.

Pouco a pouco, a natureza dos números complexos foi sendo desvelada. Coube ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) completar o entendimento dos complexos. Contribuições cruciais foram feitas por Karl Friedrich Gauss (1777-1855), pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865). Hamilton, que abominava a interpretação geométrica dos complexos, considerou o número  $a + bi$  como o par ordenado  $(a, b)$  e desenvolveu sua álgebra. Gauss introduziu o termo *complexo* e também desenvolveu uma interpretação geométrica, mas fiel ao seu lema, *pauca sed matura* (pouco, mas maduro), não publicou os resultados até considerá-los satisfatórios. O diagrama de Argand é também chamado (exceto na França!) **plano de Gauss**.

## 1.2 A álgebra dos números complexos

As regras básicas para operar com os números complexos são essencialmente as mesmas que empregamos com os números reais. Introduzindo a notação:  $\sqrt{-1} = i$ , devida a Euler, e lembrando sempre de fazer a substituição  $i^2 \rightarrow -1$ , quando for o caso, essas regras são:

(i) Adição:

$$(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i \quad (1)$$

(ii) Subtração:

$$(a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i \quad (2)$$

(iii) Multiplicação:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (3)$$

(iv) Divisão:

$$\begin{aligned} \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{a + bi}{c + di} \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} \\ &= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \end{aligned} \quad (4)$$

O **valor absoluto** de um número complexo é definido por:

$$|a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2},$$

e tem uma interpretação geométrica simples: é a distância da origem ao ponto  $P$  do plano que associamos com o número complexo.

Como vimos, a geometrização dos números complexos leva à sua representação no plano cartesiano  $xy$ . É conveniente para os nossos propósitos introduzir uma notação alternativa. Um número complexo arbitrário será doravante representado sempre que possível por  $z$  e pode ser associado de modo único com um ponto do  $\mathbf{R}^2$  descrito pelo par ordenado  $z = (x, y)$ , ou na forma que será mais conveniente para o nossos propósitos aqui:

$$z = x + iy,$$

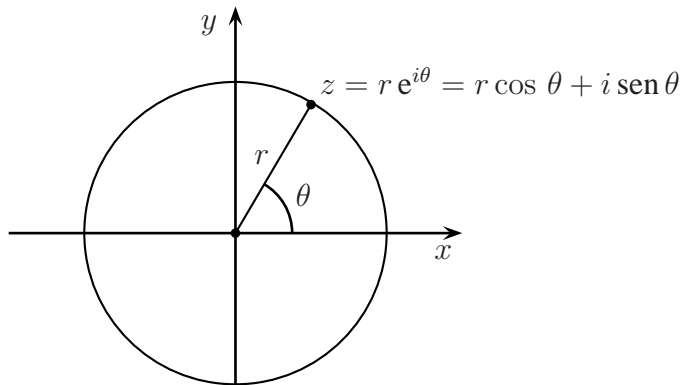


Figura 7: Representação polar de um número complexo.

e seu **complexo conjugado** por:

$$z^* = x - iy,$$

que como veremos mais adiante será a mais adequada para a nossa discussão da cinemática e da dinâmica no plano complexo.

**Exercício 4** Represente no diagrama de Argand os números complexos: (a)  $4 + 3i$ , (b)  $-7 + i$ , (c)  $-2 - 3i$ , (d)  $2 - 2i$ , (e) 3. Calcule complexo conjugado e o módulo desses números. ■

### 1.3 A representação plano-polar de um número complexo.

Da Figura 7 é fácil ver que um número complexo pode ser escrito como:

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta. \quad (5)$$

Esta é a forma polar do número complexo. A expansão da função cosseno é dada por;

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots,$$

e a expansão da função seno é dada por:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots$$

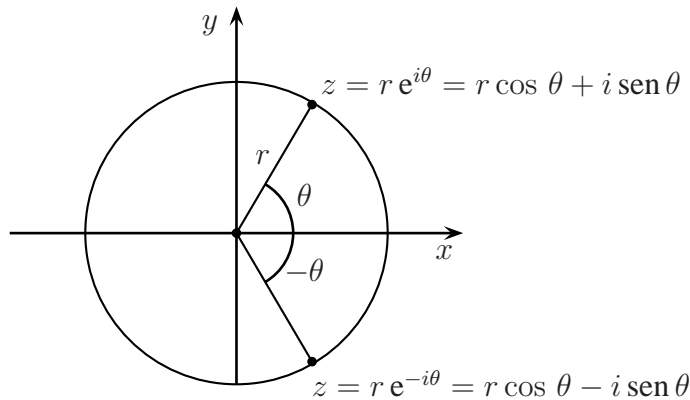


Figura 8: Um número complexo e seu conjugado representados na forma polar.

Por outro lado, a expansão da função exponencial se lê:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Se fizermos a substituição  $x \rightarrow i\theta$  na expansão da exponencial, obteremos:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots$$

lembrando que  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = ii^2 = -i$ , etc., vemos que podemos escrever:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.}$$

Esta é a **fórmula de Euler** descoberta por volta de 1740, uma das contribuições cruciais de Leonhard Euler (1707-1783) à teoria dos números complexos. A fórmula de Euler permite-nos escrever um número complexo na forma polar como:

$$z = r e^{i\theta}.$$

O complexo conjugado  $z^*$  se escreve:

$$z^* = r e^{-i\theta} = r (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta).$$

A distância radial  $r$  é o **módulo** do número complexo e ângulo  $\theta$ , o seu **argumento**. Observe que para um dado  $r$ ,  $\arg(z) = \theta$ , e  $\arg(z) + 2\kappa\pi = \theta + 2\kappa\pi$ , com  $\kappa \in \mathbf{Z}$ , representam o mesmo número complexo. Na representação cartesiana, um ponto do  $\mathbf{R}^2$  representa um único complexo, mas na representação plano-polar, o mesmo complexo tem infinitas representações.

**Exercício 5** Mostre e interprete geometricamente as relações:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

■

**Exercício 6** Observe que o número  $i = \sqrt{-1}$  pode ser escrito na forma polar como:

$$i = e^{i\pi/2}.$$

Mostre que multiplicar um número complexo  $z$  por  $i$  geometricamente significa girar este número de  $\pi/2$  no plano complexo, no sentido anti-horário. Veja a Figura 10 (a). ■

**Exercício 7** Represente a forma plano-polar os números complexos:

- (i)  $4 + 3i$ ;
- (ii)  $-7 + i$ ;
- (iii)  $-2 - 3i$ ;
- (iv)  $3$ .

■

O **produto escalar** entre dois números complexos  $z_1 = x_1 + iy_1$ , e  $z_2 = x_2 + iy_2$  é definido por:

$$z_1 \cdot z_2 := \frac{1}{2} (z_1^* z_2 + z_1 z_2^*) = x_1 x_2 + y_1 y_2;$$

e o **produto vetorial** por:

$$z_1 \times z_2 := \frac{1}{2i} (z_1^* z_2 - z_1 z_2^*) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

**Exercício 8** Se  $z_1 = e^{i\theta}$  e  $z_2 = ie^{i\theta}$ , mostre que:

- (i)  $z_1 \cdot z_2 = 0$ ,
- (ii)  $z_1 \times z_2 = 1$ .

■



## 1.4 Curvas, posição, velocidade e aceleração no plano complexo

Suponha que  $\phi(t)$  e  $\psi(t)$  sejam duas funções reais da variável real  $t$  que supomos contínuas para  $t \in [t_1, t_2]$ . As equações  $x = \phi(t)$  e  $y = \psi(t)$  ou:

$$z = x + iy = \phi(t) + i\psi(t),$$

ou ainda, em notação informal:

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad (6)$$

definem uma **curva contínua** ou **arco** no plano complexo que une os pontos  $P_1 = z(t_1)$  e  $P_2 = z(t_2)$ . Se  $z(t_1) = z(t_2)$ , para  $t_1 \neq t_2$ , isto é:  $P_1 = P_2$ , a curva é fechada. Uma curva que não intercepta a si mesma em nenhum ponto é dita ser uma **curva simples**. Finalmente, se  $x = \phi(t)$  e  $y = \psi(t)$  (e conseqüentemente  $z(t)$ ) tiverem derivadas contínuas no intervalo fechado  $[t_1, t_2]$ , a curva será dita ser uma **curva ou arco suave**. Uma curva composta por um número finito de arcos suaves é chamada **contínua por partes** ou **seccionalmente contínua**.

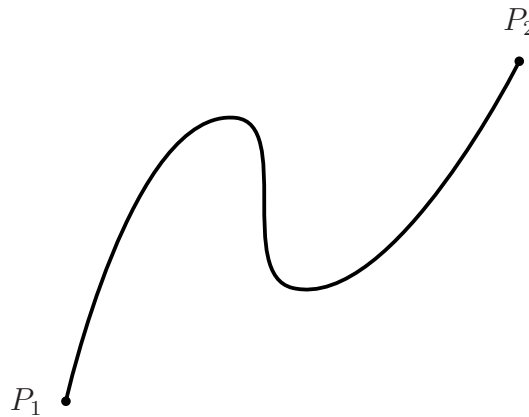


Figura 9: Curva suave.

A cinemática no plano complexo obedece às regras usuais da cinemática vetorial. A **posição instantânea** de um ponto no instante  $t$  no plano complexo é dada por:

$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)}, \quad (7)$$

A **velocidade instantânea** é definida por:

$$\tilde{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz(t)}{dt}. \quad (8)$$

Aplicando a definição à representação cartesiana da posição instantânea do ponto no plano complexo obtemos:

$$\tilde{v}(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + i \frac{dy(t)}{dt}, \quad (9)$$

e na representação polar

$$\tilde{v}(t) = \frac{dr(t)}{dt} e^{i\theta(t)} + ir \frac{d\theta(t)}{dt} e^{i\theta(t)}. \quad (10)$$

A **aceleração instantânea** é definida por:

$$\tilde{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \tilde{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\tilde{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}. \quad (11)$$

Na representação cartesiana a **aceleração instantânea** se escreve:

$$\tilde{a}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + i \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \quad (12)$$

e na representação polar:

$$\tilde{a}(t) = \left[ \frac{d^2 r(t)}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \right] e^{i\theta(t)} + i \left( 2 \frac{dr(t)}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} + r \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} \right) e^{i\theta(t)}. \quad (13)$$

**Exercício 9** Obtenha as Eqs. (10) e (13). ■

**Exemplo 1** *Movimento circular uniforme* Como exemplo considere um ponto material que descreve um movimento circular de raio  $R$  percorrendo arcos de círculo iguais em intervalos de tempo iguais. Tal movimento é dito movimento circular uniforme (MCU). As coordenadas cartesianas do ponto são:

$$x(t) = R \cos \omega t, \quad \text{e} \quad y(t) = R \sin \omega t,$$

onde  $\omega$  é a magnitude da velocidade angular. Multiplicando a coordenada  $y$  por  $i$  e somando com a coordenada  $x$ :

$$x(t) + iy(t) = R (\cos \omega t + i \text{sen } \omega t),$$

ou, fazendo uso da fórmula de Euler:

$$z(t) = R e^{i\omega t}.$$

A velocidade instantânea<sup>1</sup> é dada por:

$$\tilde{v} = \frac{dz}{dt} = i\omega z = e^{i\pi/2} \omega z,$$

que geometricamente significa girar  $z$  de  $\pi/2$  no sentido anti-horário e multiplicar o resultado por  $\omega$  Figura 10(a). A aceleração instantânea é dada por:

$$\tilde{a} = \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z = e^{i\pi} \omega^2 z,$$

isto é: giramos  $z$  no sentido anti-horário de  $\pi$  e multiplicamos o resultado pelo real  $-\omega^2$ , veja a Figura 10(a). A estreita relação existente entre os vetores geométricos (segmentos de reta orientados) no  $\mathbb{R}^2$  e o plano complexo  $\mathbb{C}$  permite o abuso de linguagem representado na Figura 10(b).

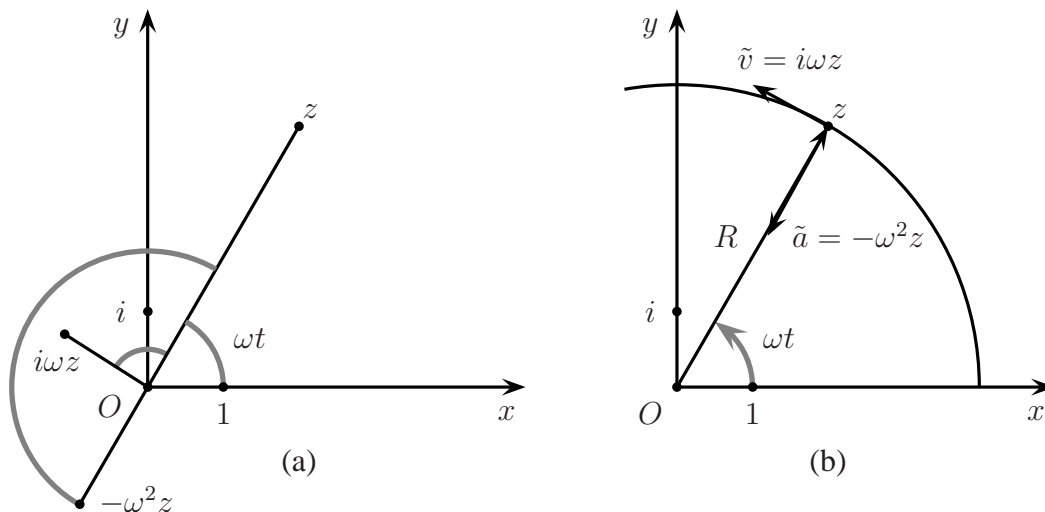


Figura 10: Movimento circular uniforme no plano complexo.

<sup>1</sup>Grandezas físicas complexas serão representadas por  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{E}$ , etc..

**Exercício 10** Mostre que no MCU:

(a)  $z \cdot \tilde{v} = 0$ ;

(b)  $z \cdot \tilde{a} = -R^2\omega^2$ .

■

## 2 Dinâmica bidimensional no plano complexo

Estamos agora em condições de introduzir a representação da dinâmica newtoniana no plano complexo. Isto significa resolver a equação newtoniana de movimento:

$$\tilde{F} = m\tilde{a}$$

com as condições iniciais:

$$z(0) = z_0 = x_0 + iy_0, \quad \text{e} \quad \frac{dz(0)}{dt} = \tilde{v}_0 = v_{x0} + iv_{y0},$$

para uma certa classe de problemas que podem ser reduzidos a problemas bidimensionais. Entre esses problemas encontramos:

- (i) o oscilador harmônico simples (OHS) e suas variantes, o pêndulo simples e o pêndulo cônico;
- (ii) o oscilador amortecido com atrito linear na velocidade;
- (iii) o oscilador forçado;
- (iv) o referencial girante;
- (v) o problema da força central;

e alguns outros que serão propostos nos problemas ao final do texto. Começemos com o OHS.

## 2.1 O oscilador harmônico simples

O oscilador harmônico simples é, provavelmente, o sistema mecânico mais importante da física clássica. O sistema massa-mola da Figura 11 representa o protótipo do OHS. O que caracteriza um OHS é a lei de força à qual o sistema está sujeito, a lei de Hooke:

$$F(x) = -\kappa x,$$

onde  $x$  é um número real que representa o afastamento da posição de equilíbrio e  $\kappa$  é uma constante material, medida em N/m no SI, que caracteriza o material com que a mola foi fabricada.

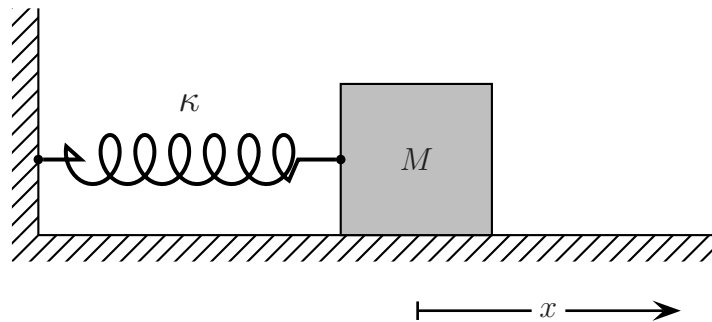


Figura 11: O OHS. A variável  $x$  mede o afastamento do bloco da posição de equilíbrio, o suporte é fixo .

Para discutir a dinâmica do OHS no plano complexo consideremos as equações de movimento:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\kappa x,$$

e

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\kappa y.$$

Multiplicando a segunda equação por  $i = \sqrt{-1}$  e somando com a primeira obtemos após dividir o resultado por  $m$ :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + i \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\frac{\kappa}{m} (x + iy),$$

ou,

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \omega^2 z(t) = 0, \quad (14)$$

onde:

$$\omega^2 = \frac{\kappa}{m}, \quad (15)$$

é a frequência angular do oscilador. A solução desta equação diferencial pode ser facilmente obtida escrevendo como solução tentativa:

$$z(t) = e^{ipt}.$$

Substituindo esta solução tentativa na Eq. (14), obtemos:

$$(-p^2 + \omega^2) z = 0.$$

Segue que  $p = \pm\omega$ , e a solução da Eq. (14) é:

$$z(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}, \quad (16)$$

e a velocidade complexa é dada por:

$$\tilde{v}(t) = \frac{dz}{dt} = i\omega C_1 e^{i\omega t} - i\omega C_2 e^{-i\omega t}, \quad (17)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes complexas que devem ser determinadas com as condições iniciais. Suponhamos que para  $t = 0$  tenhamos:

$$z(0) = z_0 = x_0 + iy_0; \quad \text{e} \quad \frac{dz(0)}{dt} = \tilde{v}_0 = v_{x0} + iv_{y0}. \quad (18)$$

Fazendo  $t = 0$  nas Eqs. (16) e (17) temos:

$$\begin{aligned} z_0 &= C_1 + C_2 \\ \tilde{v}_0 &= i\omega C_1 - i\omega C_2. \end{aligned}$$

Este sistema algébrico pode ser facilmente resolvido e os resultados são:

$$C_1 = \frac{1}{2} \left( z_0 - i \frac{\tilde{v}_0}{\omega} \right),$$

e:

$$C_2 = \frac{1}{2} \left( z_0 + i \frac{\tilde{v}_0}{\omega} \right).$$

**Exercício 11** Obtenha as constantes complexas  $C_1$  e  $C_2$ . ■

Portanto,

$$z(t) = \frac{1}{2} \left( z_0 - i \frac{\tilde{v}_0}{\omega} \right) e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \left( z_0 + i \frac{\tilde{v}_0}{\omega} \right) e^{-i\omega t}, \quad (19)$$

ou ainda:

$$z(t) = z_0 \cos \omega t + \frac{\tilde{v}_0}{\omega} \text{sen } \omega t. \quad (20)$$

Igualando a parte real do lado esquerdo desta equação com a parte real do lado direito obtemos:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_{x0}}{\omega} \text{sen } \omega t, \quad (21)$$

que descreve o OHS da Figura 11. Procedendo do mesmo modo com a parte imaginária:

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{v_{y0}}{\omega} \text{sen } \omega t. \quad (22)$$

As velocidades são:

$$v_x(t) = -x_0\omega \text{sen } \omega t + v_{x0} \cos \omega t; \quad (23)$$

e

$$v_y(t) = -y_0\omega \text{sen } \omega t + v_{y0} \cos \omega t. \quad (24)$$

Fazendo:

$$x_0 = a \cos \alpha$$

e,

$$\frac{v_{x0}}{\omega} = -a \text{sen } \alpha,$$

obtemos

$$x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega^2} = a^2,$$

e,

$$\tan \alpha = -\frac{v_{x0}}{x_0\omega}.$$

Usando essas relações podemos rescrever a solução  $x(t)$  na forma:

$$x(t) = a \cos \alpha \cos \omega t - a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \omega t = a \cos \Phi(t), \quad (25)$$

onde  $\Phi(t) = \omega t + \alpha$ . Um procedimento similar pode ser aplicado à solução  $y(t)$ . Fazendo:

$$y_0 = b \cos \beta,$$

e,

$$\frac{v_{y0}}{\omega} = -b \operatorname{sen} \beta,$$

escrevemos:

$$y(t) = b \cos \beta \cos \omega t - b \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \omega t. \quad (26)$$

Podemos escrever  $\beta = \alpha + \delta$ , segue então que:

$$y(t) = b \cos (\Phi(t) + \delta). \quad (27)$$

O ângulo  $\delta$  representa a diferença de fase entre as duas soluções. Eliminando o tempo entre as Eqs. (25) e (27), obtemos finalmente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{x}{a} \frac{y}{b} \cos \delta = \operatorname{sen}^2 \delta. \quad (28)$$

A Eq. (28) representa uma elipse centrada na origem, mas com o eixo maior formando um ângulo  $\delta$  com o eixo real  $x$ .

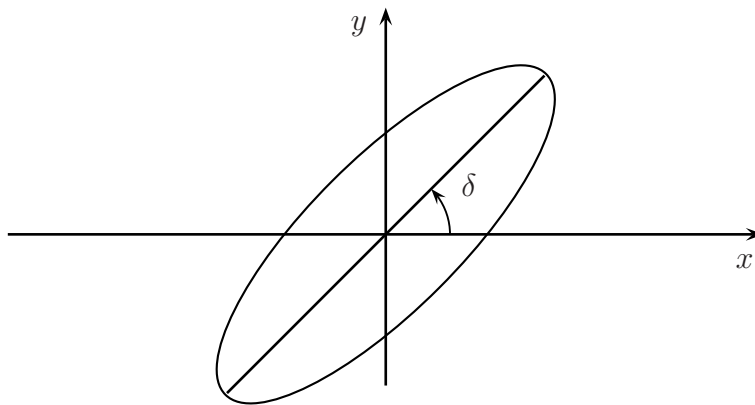


Figura 12: Elipse de polarização.



**Exercício 12** Obtenha a Eq. (28). ■

Uma aplicação das Eqs. (25), (27) e (28) é ao pêndulo cônico que discutiremos no exemplo a seguir.

**Exemplo 2** *O pêndulo conônico* O pêndulo cônico, veja a Figura 13, sob certas condições pode ser tratado como um oscilador harmônico simples bidimensional. A equação vetorial de movimento se escreve:

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}.$$

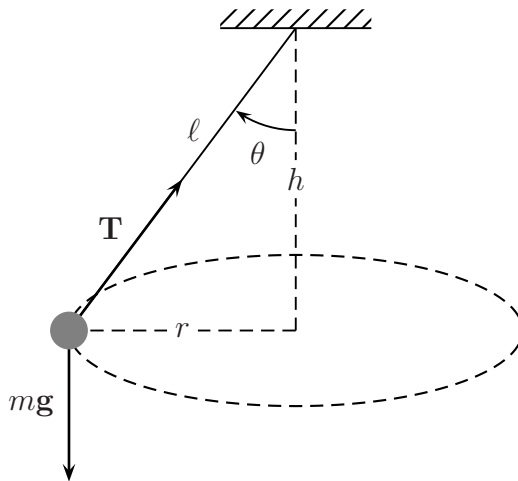


Figura 13: O pêndulo conônico.

Para pequenos afastamentos da vertical, a equação vetorial pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} x,$$

e

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} y.$$

Multiplicando a segunda equação por  $i$  e somando com a primeira:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = 0,$$

cujas soluções, como vimos anteriormente, é dada pelas Eqs. (25), (27) e (28). No caso particular em que  $\delta = \pi/2$  e  $a = b$ , a Eq. (28) se escreve:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

isto é: a trajetória do pêndulo no plano complexo, ou se preferirmos, no  $\mathbf{R}^2$ , será circular.

**Exercício 13** Obtenha as equações cartesianas que governam o movimento do pêndulo cônico na aproximação  $\theta \ll 1$ , e a equação de movimento correspondente no plano complexo. ■

Como escrever a energia mecânica de um O.H. S. em termos de quantidades complexas? A resposta é simples. Se exigirmos que a energia mecânica seja uma quantidade real podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$E = \frac{m}{2} \left| \frac{dz}{dt} \right|^2 + \frac{\kappa}{2} |z|^2. \quad (29)$$

A força (complexa) associada com a energia potencial (real):

$$U(z) = \frac{\kappa}{2} |z|^2,$$

é dada por (ver **Problema 1**):

$$\tilde{F} = -2 \frac{dU(z)}{dz^*} = -\kappa z,$$

em acordo com nossos cálculos anteriores.

**Exercício 14** Mostre que:

(i)

$$\frac{d|z|}{dz^*} = \frac{z}{|z|}.$$

(ii)

$$\frac{d|z|}{dz} = \frac{z^*}{|z|}.$$



**Exercício 15** Mostre que a energia mecânica do O.H.S., Eq. (29), é conservada, isto é:

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$



## 2.2 O oscilador harmônico amortecido

Suponhamos que além de uma força restauradora que obedece à lei de Hooke, o oscilador harmônico da Figura 11 esteja sujeito a uma força resistiva linear na velocidade instantânea do sistema:

$$F(v) = -bv = -b \frac{dx}{dt}.$$

A equação de movimento completa se escreve:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - \kappa x,$$

ou, rearrajando termos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

onde definimos:

$$2\gamma := \frac{b}{m},$$

e

$$\omega_0^2 := \frac{\kappa}{m}.$$

Uma equação diferencial similar pode ser escrita para o eixo  $y$ :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0.$$

Multiplicando a segunda equação por  $i$  e somando com a primeira:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0, \quad (30)$$

onde como antes,  $z = x + iy$ . Como solução tentativa escrevemos:

$$z(t) = e^{ipt}.$$

e a substituímos na Eq. (30) obtendo:

$$(-p^2 + 2\gamma p i + \omega_0^2) z(t) = 0.$$

Como esta relação deve ser válida para qualquer instante  $t$ , segue que:

$$p^2 - 2\gamma p i - \omega_0^2 = 0,$$

cujas raízes são:

$$p_{\pm} = \gamma i \pm \sqrt{-\gamma^2 + \omega_0^2}.$$

A solução que descreve **oscilações amortecidas** apresenta-se quando a condição:  $\omega_0^2 > \gamma^2$ , é satisfeita. Nesse caso,

$$z(t) = C_1 e^{-\gamma t + i\omega_1 t} + C_2 e^{-\gamma t - i\omega_2 t}, \quad (31)$$

onde a frequência angular real:

$$\omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

e  $C_1$  e  $C_2$  são constantes complexas que devemos determinar com as condições iniciais (complexas):

$$z(0) = z_0, \quad \frac{dz(0)}{dt} = \tilde{v}_0. \quad (32)$$

A velocidade complexa é dada por:

$$\tilde{v}(t) = \frac{dz(t)}{dt} = -\gamma e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_2 t}) + e^{-\gamma t} (i\omega_1 C_1 e^{i\omega_1 t} - i\omega_1 C_2 e^{-i\omega_2 t}). \quad (33)$$

**Exercício 16** Obtenha a velocidade instantânea complexa do oscilador harmônico amortecido.

■

Fazendo uso das condições iniciais temos:

$$\begin{aligned} z_0 &= C_1 + C_2 \\ \tilde{v}_0 &= (-\gamma + i\omega_1)C_1 - (\gamma + i\omega_1)C_2. \end{aligned}$$

O determinante principal deste sistema linear vale:

$$\Delta = -2i\omega_1.$$

Segue que:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{z_0(\gamma + i\omega_1) + \tilde{v}_0}{2i\omega_1}, \\ C_2 &= \frac{z_0(-\gamma + i\omega_1) - \tilde{v}_0}{2i\omega_1}. \end{aligned} \quad (34)$$

**Exercício 17** Obtenha os coeficientes complexos  $C_1$  e  $C_2$ . Verifique se os resultados levam aos coeficientes calculados anteriormente quando  $\gamma = 0$ . ■

A solução complexa se escreve:

$$z(t) = e^{-\gamma t} \left\{ \left[ \frac{z_0(\gamma + i\omega_1) + \tilde{v}_0}{2i\omega_1} \right] e^{i\omega_1 t} + \left[ \frac{z_0(-\gamma + i\omega_1) - \tilde{v}_0}{2i\omega_1} \right] e^{-i\omega_1 t} \right\}. \quad (35)$$

Um cálculo direto permite escrever a a parte real e a parte imaginária da Eq. (35). Os resultados são:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[ x_0 \cos \omega_1 t + \left( \frac{x_0 \gamma}{\omega_1} + \frac{v_{0x}}{\omega_1} \right) \text{sen } \omega_1 t \right], \quad (36)$$

e

$$y(t) = e^{-\gamma t} \left[ y_0 \cos \omega_1 t + \left( \frac{y_0 \gamma}{\omega_1} + \frac{v_{0y}}{\omega_1} \right) \text{sen } \omega_1 t \right]. \quad (37)$$

**Exercício 18** Obtenha as Eqs. (36) e (37) a partir da Eq. (35). ■

As Eqs. (36) e (37) consideradas conjuntamente são as equações paramétricas de um oscilador harmônico amortecido bidimensional. Cada uma dessas equações considerada isoladamente descreve um oscilador amortecido unidimensional. A Figura 14 representa a trajetória

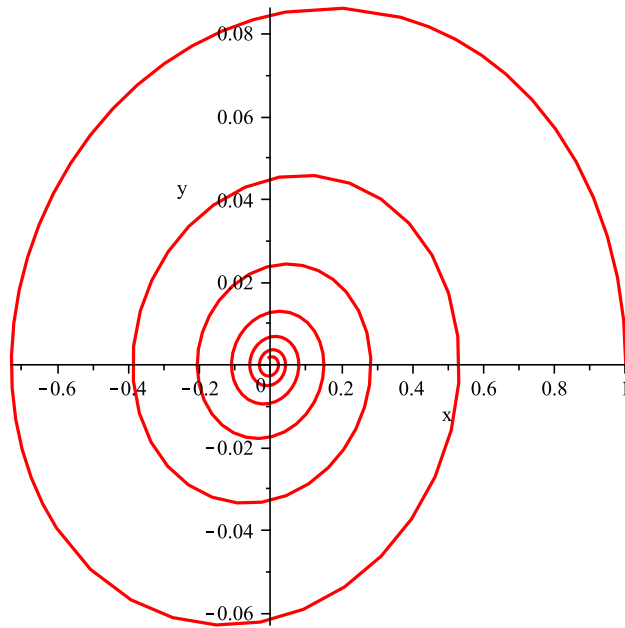


Figura 14: Oscilador harmônico bidimensional amortecido.

de um oscilador bidimensional amortecido para  $\gamma = 0.20 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_1 = 1.99$ , e condições iniciais:  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0$ ,  $v_{0x} = 0$  e  $v_{0y} = 0$ , em unidades apropriadas.

**Exercício 19** Mostre que o O.H. amortecido perde energia a uma taxa instantânea dada por:

$$\frac{dE(t)}{dt} = -b |\tilde{v}(t)|^2,$$

onde:

$$E(t) = \frac{m}{2} |\tilde{v}(t)|^2 + \frac{\kappa}{2} |z(t)|^2.$$

■

A Figura ?? representa a evolução temporal das oscilações unidimensionais amortecidas. O gráfico foi construído com a Eq. (36) para  $\gamma = 0.20 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_1 \approx 1.989$ , e condições iniciais:  $x_0 = 1$ ,  $v_{0x} = 0$ , em unidades apropriadas.

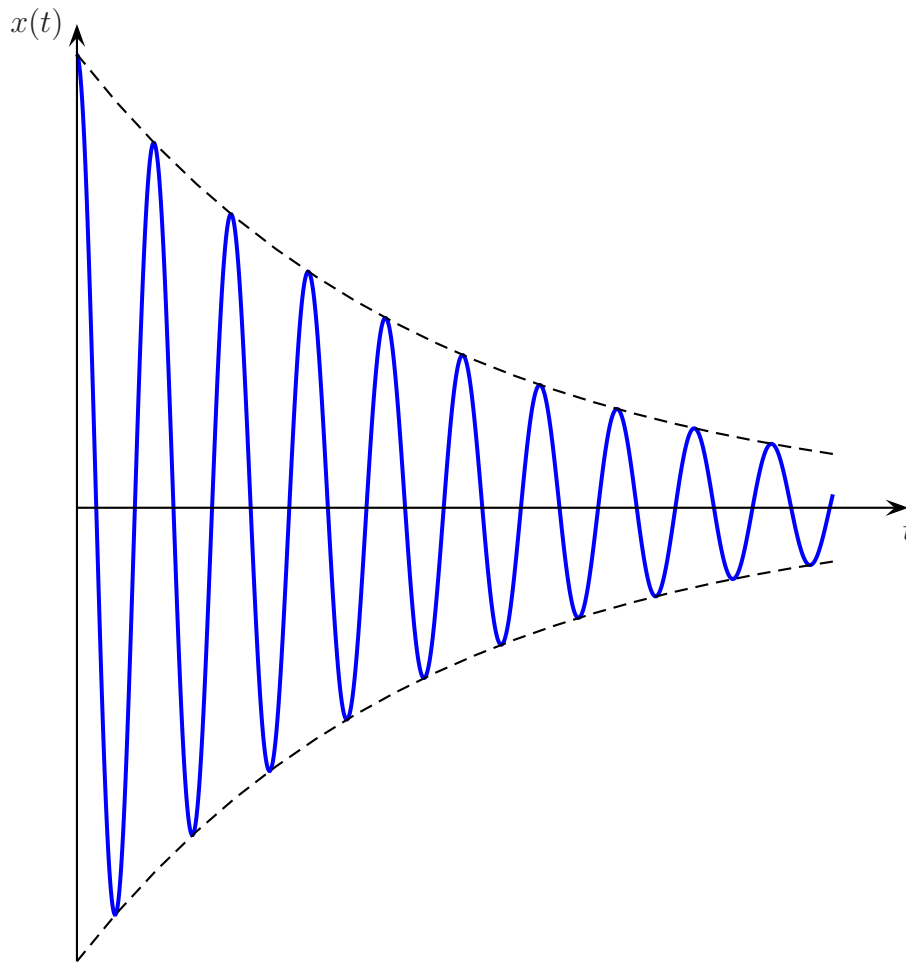


Figura 15: Oscilador harmônico unidimensional amortecido.

### 2.3 O oscilador harmônico forçado

Suponha que o oscilador harmônico amortecido sofra a ação de uma força periódica adicional dada por:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t.$$

Neste caso, a equação de movimento unidimensional se lê:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t,$$

onde  $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$ . Para passar para o plano complexo consideremos a equação:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \text{sen } \omega t.$$

Multiplicando esta equação por  $i$  e somando com a primeira obtemos:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}, \quad (38)$$

que é a equação de movimento que devemos resolver. A solução de uma equação diferencial deste tipo tem duas partes, a saber: a solução da equação homogênea associada e uma solução particular:

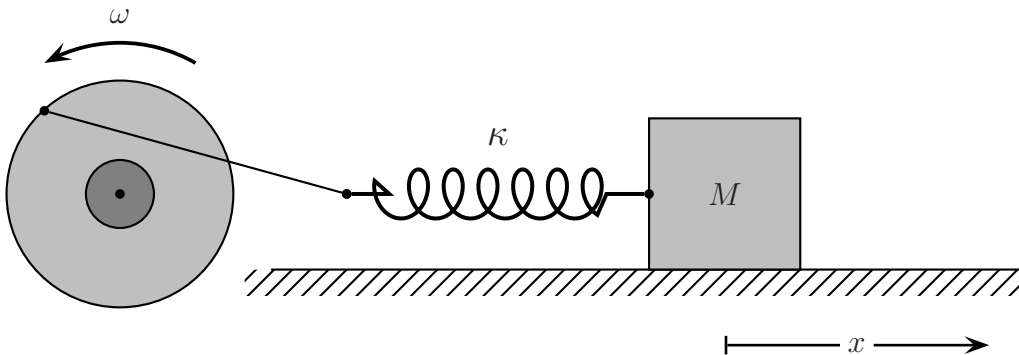


Figura 16: Oscilador harmônico com força externa periódica.

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t).$$

A solução da homogênea é dada pela Eq. (35), mas a solução particular deve ser determinada. Para isto escrevemos como solução tentativa:

$$z_p(t) = A(\omega) e^{i\omega t},$$

onde  $A(\omega)$  é uma amplitude complexa que depende da frequência angular da força externa  $\omega$ . A solução tentativa expressa nossa intuição física de que no **estado estacionário**, que prevalecerá quando a solução da homogênea tiver evanescido, o oscilador oscilará com a frequência angular da força externa. Observe que temos três frequências angulares envolvidas no problema:

- a frequência angular natural do oscilador  $\omega_0$ ;



- a frequência angular do oscilador amortecido  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ;
- a frequência angular da força externa  $\omega$ .

Substituindo a solução tentativa na Eq. (38) temos:

$$(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) A(\omega) = F_0/m.$$

Portanto a amplitude complexa se escreve:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}.$$

Expressando  $A(\omega)$  na forma plano-polar:

$$A(\omega) = |A(\omega)| e^{-i\varphi},$$

onde por conveniência futura escrevemos o argumento de  $A(\omega)$  como  $-\varphi$ , e rearranjando o lado direito dessa equação:

$$|A(\omega)| e^{-i\varphi} = \frac{(F_0/m) (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} - i \frac{(F_0/m) 2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}.$$

Comparando as partes reais e imaginárias em ambos os lados desta equação segue que:

$$|A(\omega)| \operatorname{sen} \varphi = \frac{(F_0/m) 2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \quad (39)$$

e

$$|A(\omega)| \operatorname{cos} \varphi = \frac{(F_0/m) (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (40)$$

É fácil mostrar agora que:

$$|A(\omega)|^2 = \frac{(F_0/m)^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]}.$$

e, logo:

$$|A(\omega)| = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}. \quad (41)$$

Por outro lado,

$$\varphi(\omega) = \arctan \left( \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (42)$$

**Exercício 20** Obtenha as expressões acima para  $|A(\omega)| \text{ sen } \varphi$ ,  $|A(\omega)| \text{ cos } \varphi$ ,  $|A(\omega)|$ , e  $\varphi(\omega)$ .

■

A solução estacionária complexa é dada por:

$$z(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} e^{i\omega t},$$

que pode ser reescrita na forma:

$$z(t) = \left[ \frac{(F_0/m)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} - i \frac{(F_0/m)2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \right] e^{i\omega t}.$$

Lembrando que  $z(t) = x(t) + iy(t)$  e fazendo uso da fórmula de Euler, obtemos para a parte real:

$$x(t) = \frac{(F_0/m)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{(F_0/m)2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \text{sen } \omega t. \quad (43)$$

e para a parte imaginária:

$$y(t) = -\frac{(F_0/m)2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{(F_0/m)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \text{sen } \omega t \quad (44)$$

**Exercício 21** Obtenha as Eqs, (43) e (44). ■

Consideremos a parte real da solução estacionária, Eq. (43). As funções de  $\omega$  que multiplicam o  $\cos \omega t$  e o  $\text{sen } \omega t$  podem ser substituídas por  $|A(\omega)| \text{ cos } \varphi$  e  $|A(\omega)| \text{ sen } \varphi$ , respectivamente. Segue que:

$$x(t) = |A(\omega)| \text{ cos } \varphi \cos \omega t + |A(\omega)| \text{ sen } \varphi \cos \omega t.$$

Fazendo uso do resultado para a amplitude  $|A(\omega)|$  e usando a identidade trigonométrica apropriada, obtemos finalmente:

$$x(t) = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi), \quad (45)$$

que, por escolha, (poderíamos ter escolhido a parte imaginária) descreve a solução estacionária observável. Observe que a resposta  $x(t)$  está retrasada em relação ao estímulo  $F_0 \cos \omega t$ . A medida do atraso é dada pela fase  $\varphi$ .

A amplitude (real) efetiva para o movimento ao longo do eixo  $x$  é uma função de  $\omega$ , e é dada por:

$$A_{\text{efetiva}}(\omega) = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}.$$

Esta amplitude tem um extremo (um máximo) em:

$$\omega_r = \omega_0 - 2\gamma.$$

Este valor para a frequência angular da força externa define a **ressonância da amplitude**.

**Exercício 22** Obtenha a Eq. (45) e a frequência angular  $\omega_r$  para a ressonância de amplitude.

■

O trabalho por unidade de tempo realizado pela força harmônica externa, isto é: a potência instantânea fornecida pelo agente externo para manter a situação estacionária é dado por:

$$P(t) = F(t) v(t),$$

onde

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -|A(\omega)|\omega \text{sen}(\omega t - \varphi).$$

Fazendo uso da identidade trigonométrica:

$$\text{sen}(\omega t - \varphi) = \text{sen} \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \text{sen} \varphi,$$

temos:

$$P(t) = -F_0 \cos \omega t |A(\omega)|\omega (\text{sen} \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \text{sen} \varphi).$$

De modo geral, será mais conveniente se trabalharmos com potência média definida por:

$$\langle P \rangle := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P(t) dt, \quad (46)$$

onde  $T$  é o período associado com nosso aparelho de medição. Lembrando que:

$$\langle \cos \omega t \text{sen} \omega t \rangle = 0$$

e

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2},$$

obtemos:

$$\langle P(\omega) \rangle = +\frac{1}{2} F_0 |A(\omega)| \omega \sin \varphi.$$

Usando a Eq. (39) obtemos finalmente:

$$\langle P(\omega) \rangle = \frac{1}{2} \frac{(F_0^2/m)(2\gamma)\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (47)$$

É conveniente rescrever a Eq. (47) em termos do **fator de qualidade**  $Q$ , definido por:

$$Q := \frac{\omega_0}{2\gamma}. \quad (48)$$

Neste caso,

$$\langle P(\omega) \rangle = \frac{1}{2Q} \frac{F_0^2}{m\omega_0} \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}. \quad (49)$$

**Exercício 23** Obtenha a Eq. (49). ■

A Figura 17 mostra o gráfico da potência média dada pela Eq. (49) para vários valores de  $Q$ . Observe que a potência média máxima absorvida pelo oscilador é independente de  $Q$  e ocorre para  $\omega = \omega_0$ , isto é: quando a frequência angular da força externa coincide com a frequência natural do oscilador.

Na ressonância, a potência média transferida ao oscilador forçado vale:

$$\langle P(\omega_0) \rangle = \frac{1}{2} \frac{Q F_0^2}{m\omega_0}.$$

Fora da ressonância, porém, dois valores distintos da frequência angular podem corresponder a um mesmo valor da potência média. A qualidade da resposta do oscilador forçado pode também ser analisada em termos da largura da curva de ressonância da potência média. A **largura a meia altura** dessa curva é definida pela condição:

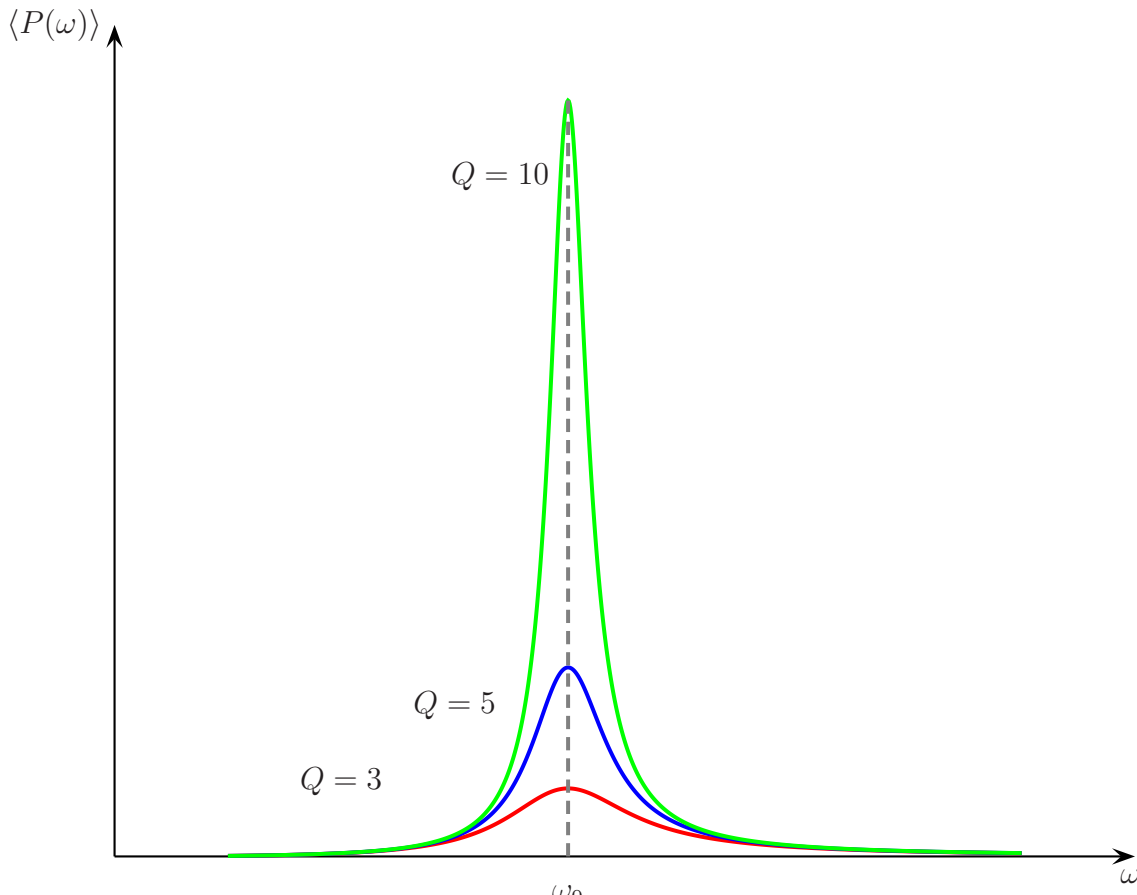


Figura 17: Potência média transferida para um oscilador forçado para diferentes valores do fator de qualidade  $Q$ .

$$\langle P(\omega) \rangle = \frac{1}{2} \times \langle P(\omega_0) \rangle.$$

Com o auxílio da Eq. (49) obtemos a seguinte equação algébrica para  $\omega$ :

$$\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} = \pm \frac{1}{Q}.$$

Das quatro raízes desta equação somente duas são fisicamente. São elas:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\gamma}{\omega_0} + \frac{\sqrt{\gamma^2 + 1}}{\omega_0},$$

e

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = -\frac{\gamma}{\omega_0} + \frac{\sqrt{\gamma^2 + 1}}{\omega_0}.$$

A largura a meia altura é definida por:

$$\omega_1 - \omega_2 = 2\gamma.$$

Para  $\gamma \ll 1$ , ou seja, um fator de qualidade  $Q$  muito alto, temos:

$$\omega_1 \approx \omega_0 + \gamma,$$

e

$$\omega_2 \approx \omega_0 - \gamma.$$

**Exercício 24** Obtenha equação algébrica para  $\omega/\omega_0$  e as raízes  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . ■

A amplitude efetiva,  $A_{\text{efetiva}}(\omega)$ , pode ser reescrita em termos do fator de qualidade. O resultado se lê:

$$A_{\text{efetiva}}(\omega) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}. \quad (50)$$

Observe que a frequência angular de ressonância para a a potência média e para a amplitude efetiva não coincidem.

**Exercício 25** Obtenha a Eq.(50). ■

**Exercício 26** Mostre que o ângulo  $\varphi(\omega)$  que mede o defasamento entre a força aplicada e o deslocamento do oscilador pode ser escrito na forma:

$$\varphi(\omega) = \arctan \left( \frac{1/Q}{\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}} \right). \quad (51)$$

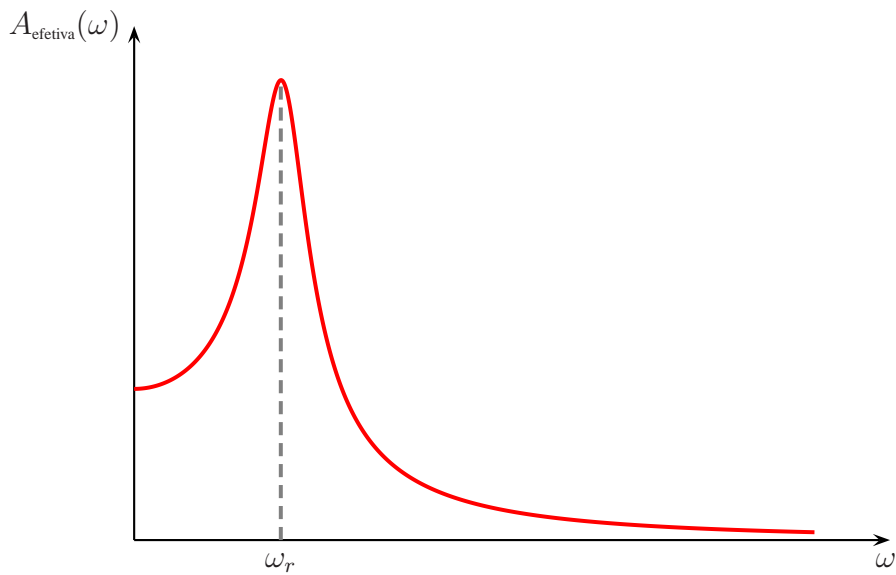


Figura 18: Amplitude efetiva para  $Q = 3$ .

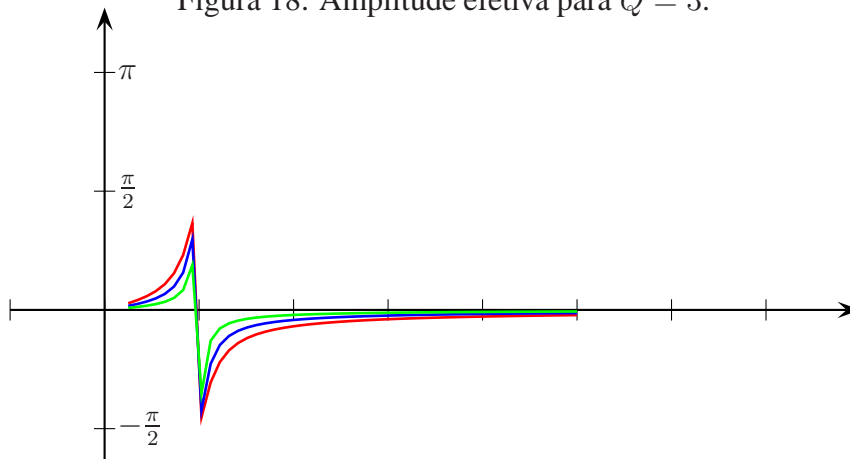


Figura 19: Diferença de fase  $\varphi(\omega)$  para diferentes valores de  $Q$ .



O leitor interessado encontrará uma simulação de um oscilador forçado na página eletrônica [Forced Oscillations \(Resonance\)](#).

## 2.4 Osciladores bidimensionais anisotrópicos – figuras de Lissajous

Uma aplicação importante das Eqs. (25) e (27) é às **figuras de Lissajous**, ou ainda **curvas de Bowditch**. Estas curvas foram estudadas pela primeira vez por Nathaniel Bowditch (1773-1835) em 1815, e posteriormente por Jules Antoine Lissajous (1822-1880) em 1857. Elas resultam da combinação linear do movimento de dois O.H.S. independentes, um oscilando ao longo do eixo  $x$  e o outro oscilando ao longo do eixo  $y$ .

Para descrever as curvas de Lissajous no plano complexo, consideremos dois O.H.S. bidimensionais independentes de frequências angulares distintas  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Cada um desses osciladores por si só pode ser descrito no plano complexo. Para isto, começamos escrevendo as equações de movimento:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\omega_1^2 x_1,$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\omega_1^2 y_1,$$

para o primeiro oscilador, e,

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\omega_2^2 x_2,$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\omega_2^2 y_2,$$

para o segundo. Multiplicando a segunda e a quarta equação por  $i$  e somando a segunda com a primeira e a quarta com a terceira, obtemos:

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\omega_1^2 z_1,$$

e

$$\frac{d^2 z_2}{dt^2} = -\omega_2^2 z_2.$$

A solução de cada uma dessas equações é dada pelas Eqs. (25) e (27) convenientemente adaptadas. Uma figura de Lissajous pode ser obtida considerando apenas a parte real da solução da equação de movimento do primeiro oscilador,  $x_1(t)$ , e a parte imaginária da solução do segundo,  $y_2(t)$ , isto é, construindo a solução:

$$z_3(t) = x_1(t) + iy_2(t).$$

Explicitamente:



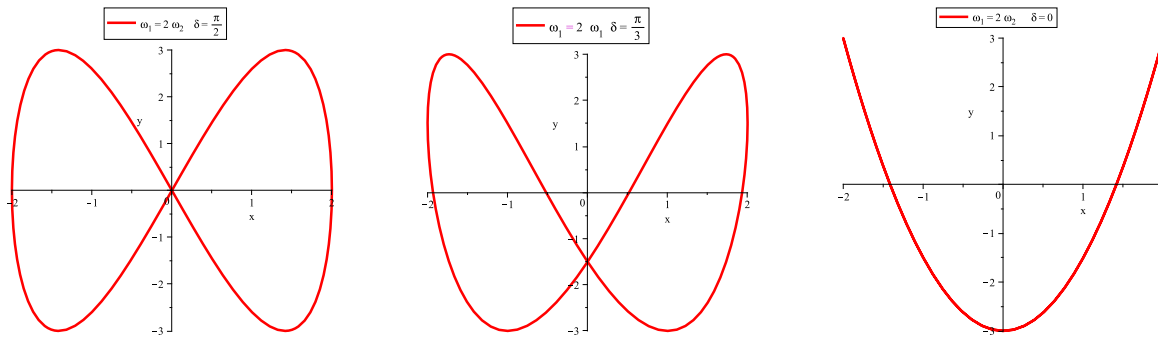


Figura 20: Figuras de Lissajous para  $\omega_1 = 2\omega_2$  e  $\delta = \alpha_2 + \beta_2 = \pi/2, \pi/3, 0$ . As amplitudes são:  $a_1 = 2$  e  $b_2 = 3$ , em unidades convenientes.

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1),$$

e,

$$y_2(t) = b_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2 + \beta_2) = b_2 \cos(\omega_2 t + \delta),$$

onde  $\delta := \alpha_2 + \beta_2$ .

**Exercício 27** Preencha os detalhes e obtenha  $x_1(t)$  e  $y_2(t)$ . ■

Se a razão entre as frequências angulares  $\omega_1/\omega_2$  (ou se preferirmos, os períodos de oscilação  $T_2/T_1$ ) for um número racional, isto é, a razão entre dois inteiros, a órbita no plano complexo será limitada e fechada. Se esta razão for um número irracional, a órbita será limitada, mas aberta. Em ambos os casos, a órbita está confinada em uma região retangular, veja a Figura 21.

**Exercício 28** Determine o sentido do movimento nas figuras de Lissajous mostradas na Figura 21. ■

Se a razão entre as frequências angulares não for igual a um número irracional, a órbita no plano complexo será aberta, e se dermos ao sistema uma duração apropriada, a região retangular de dimensões  $2a_1 \times 2b_2$ , será “varrida” pela órbita do oscilador.

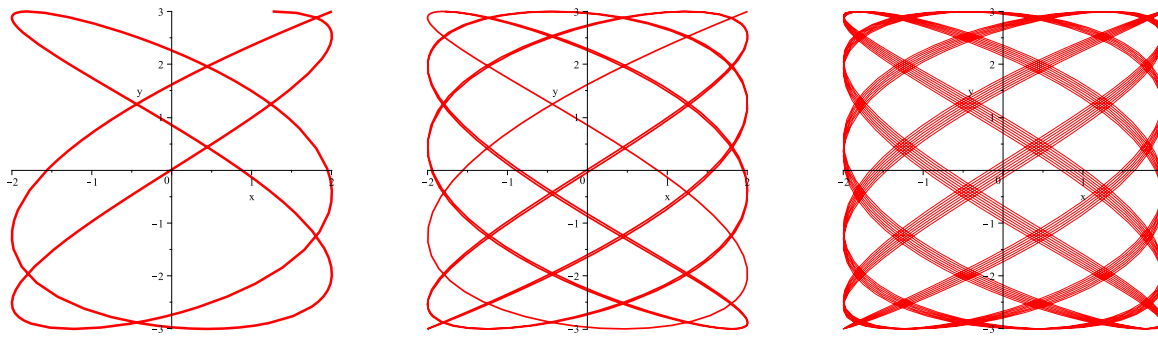


Figura 21: Figuras de Lissajous para  $\omega_1 = \pi$ ,  $\omega_2 = 3$ , e  $\delta = 0$ , para durações iguais a  $2\pi$ ,  $6\pi$ , e  $24\pi$ . Os demais parâmetros são idênticos aos utilizados na figura anterior.

Clicando no enlace (*link*): [Lissajous](#), o leitor terá acesso a um simulador Java que permite escolher as frequências (lineares)  $f_1 = \omega_1/(2\pi)$  e  $f_2 = \omega_2/(2\pi)$ , os ângulos de fase  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\beta_2$ , e as amplitudes  $a_1$  e  $b_2$  dos dois O.H.S. independentes.

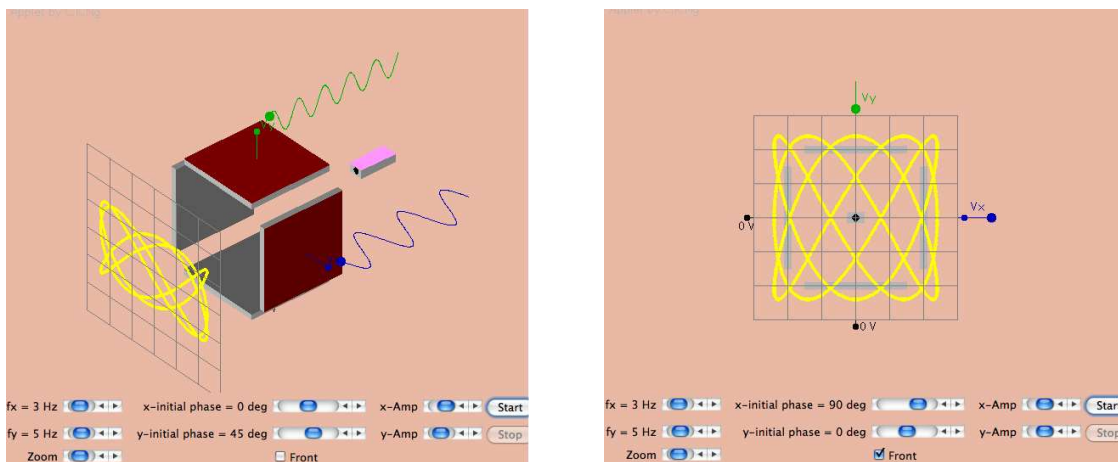


Figura 22: Simulador Java de figuras de Lissajous com duas possibilidades de visualização das figuras. Pode ser acessado em <http://www.ngsir.netfirms.com/englishhtm/Lissajous.htm>.

## 2.5 Referenciais não inerciais; o pêndulo de Foucault

Nesta seção, veremos como é possível descrever a relação entre referenciais inerciais e não inerciais por meio da notação complexa no caso em que o problema a analisar pode ser reduzido a um problema bidimensional e representado no plano complexo. Feito isto, aplicaremos o resultado ao experimento projetado por Jean-Bertrand-Léon Foucault (1819-1868) em 1851 para demonstrar a rotação da Terra, **o pêndulo de Foucault**.

Considere a Figura 24. Nela estão representados dois sistemas de coordenadas cartesianas com origem comum, o primeiro fixo, e o segundo em movimento de rotação em torno do eixo perpendicular ao plano da figura, no sentido anti-horário. A relação entre as coordenadas instantâneas de um ponto móvel  $P$  do plano podem ser deduzidas da geometria simples do problema:

$$x = x' \cos \Omega t - y' \cos \left( \frac{\pi}{2} - \Omega t \right) = x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t,$$

$$y = x' \sin \Omega t + y' \sin \left( \frac{\pi}{2} - \Omega t \right) = x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t.$$

Multiplicando a segunda equação por  $i$  e somando com a primeira obtemos:

$$z(t) = z'(t) e^{i\Omega t}. \quad (52)$$

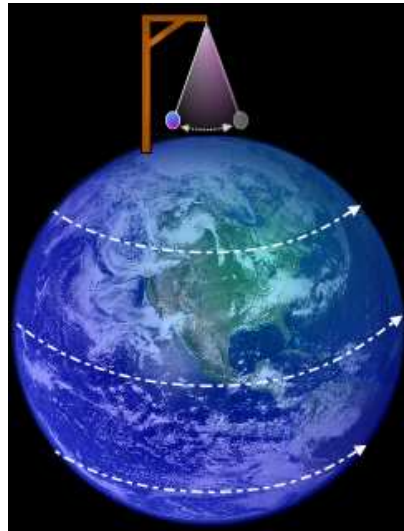


Figura 23: O pêndulo de Foucault no pólo norte. (Ilustração Wikipédia)

A transformação inversa se escreve:

$$z'(t) = z(t) e^{-i\Omega t}. \quad (53)$$

A Eq. (52) e a sua inversa representam a regra de transformação da posição da partícula de um referencial inercial bidimensional para um referencial girante, e vice-versa, em notação complexa.

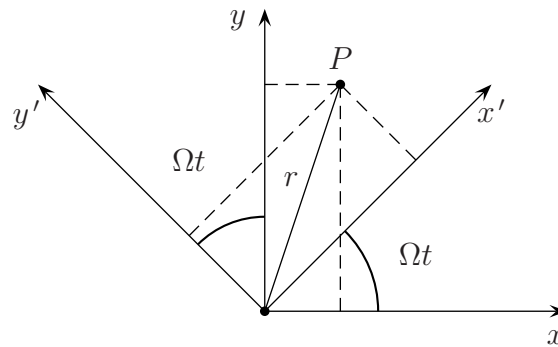


Figura 24: Rotação no  $\mathbb{R}^2$ .

A velocidade transforma-se de acordo com:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \left( \frac{dz'(t)}{dt} + i\Omega z'(t) \right) e^{i\Omega t}, \quad (54)$$

e a aceleração de acordo com:

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = \left( \frac{d^2z'(t)}{dt^2} e^{i\Omega t} + 2i\Omega \frac{dz'(t)}{dt} - \Omega^2 z'(t) \right) e^{i\Omega t}. \quad (55)$$

A equação newtoniana de movimento no referencial inercial se lê:

$$m \frac{d^2z(t)}{dt^2} = \tilde{F}.$$

A força deve transformar-se de mesmo modo que a posição:

$$\tilde{F} = \tilde{F}' e^{i\Omega t}.$$

Segue que a equação de movimento no referencial girante se escreve:

$$m \frac{d^2 z'(t)}{dt^2} + 2i \Omega m \frac{dz'(t)}{dt} - m \Omega^2 z'(t) = \tilde{F}'. \quad (56)$$

A Eq. (56) pode ser rescrita na forma:

$$m \frac{d^2 z'(t)}{dt^2} = \tilde{F}'_{\text{efetiva}}, \quad (57)$$

onde:

$$\tilde{F}'_{\text{efetiva}} := \tilde{F}' - 2i \Omega m \frac{dz'(t)}{dt} + m \Omega^2 z'(t), \quad (58)$$

é a força efetiva medida no referencial girante. O primeiro termo corresponde a uma força física real, por exemplo, o peso, a tração, etc., medida nesse referencial. O segundo termo representa a **força de Coriolis**, investigada pioneiramente por Gaspar de Coriolis em 1835. Finalmente, o terceiro termo representa a **força centrífuga**. A força de Coriolis e a força centrífuga são também chamadas de forças **fictícias**, ou **não inerciais**, ou ainda, **geométricas**, pois podem ser eliminadas passando para o referencial inercial. Na interpretação moderna da mecânica newtoniana, forças deste tipo não têm uma origem física e não obedecem ao princípio da ação e reação. Para Newton, entretanto, elas eram uma manifestação (indireta) da existência do espaço absoluto. A tentativa de atribuir-lhes uma origem física leva ao princípio de Mach que tanta influência teve na formulação da relatividade geral de Albert Einstein.



Figura 25: J.B.-L. Foucault (1819-1868), e G. de Coriolis (1792-1843). (Ilustrações Wikipédia)

**Exemplo 3** Como exemplo de aplicação da Eq. (56) consideremos o caso de uma partícula lançada de um ponto arbitrário do referencial girante, isto é:  $z(0) = x_0 + iy_0$ , com velocidade inicial  $\tilde{v}(0) = v_{0x'} + iv_{0y'}$ , livre de forças, isto é:  $\tilde{F}' = 0$ . A equação de movimento se escreve:

$$\frac{d^2 z'(t)}{dt^2} + 2i\Omega \frac{dz'(t)}{dt} - \Omega^2 z'(t) = 0.$$

A solução geral desta equação é:

$$z'(t) = (C_1 + C_2 t) e^{i\Omega t},$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes complexas. Fazendo uso das condições iniciais obtemos:

$$z'(t) = (z'_0 + \tilde{v}'_0 t - i\Omega z'_0 t) e^{i\Omega t}.$$

Extraindo a parte real e a parte imaginária obtemos:

$$x' = (x'_0 + v'_{0x'} t + \Omega y'_0 t) \cos \Omega t - (y'_0 + v'_{0y'} t - \Omega x'_0 t) \sin \Omega t,$$

e,

$$y' = (y'_0 + v'_{0y'} t - \Omega x'_0 t) \cos \Omega t + (x'_0 + v'_{0x'} t + \Omega y'_0 t) \sin \Omega t.$$

A Figura 26 mostra a trajetória da partícula livre de forças reais vista do referencial girante. Observe que no referencial fixo, a trajetória observada é retilínea.

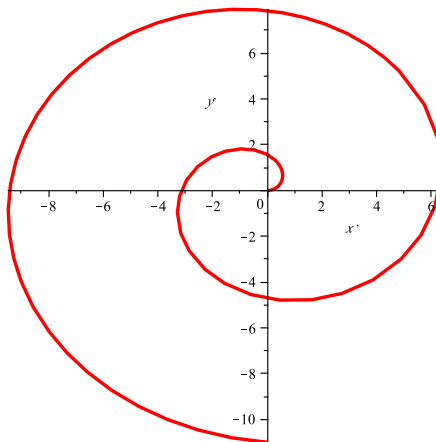


Figura 26: Trajetória de uma partícula vista do referencial girante. As condições iniciais são:  $x'_0 = y'_0 = 0$ ,  $v'_{0x'} = 1$  m/s,  $v'_{0y'} = 0$ . O módulo da velocidade angular vale  $\Omega = 1$  rad/s.

Uma aplicação importante da Eq. (56) é ao **pêndulo de Foucault** que permite visualizar os efeitos da rotação da Terra. Para pequenos afastamentos da vertical local, o pêndulo de Foucault é um caso particular de um pêndulo cônico visto do referencial girante, e a Eq. (56) neste caso se lê:

$$\frac{d^2 z'(t)}{dt^2} + 2i\Omega \frac{dz'(t)}{dt} + (\omega^2 - \Omega^2) z'(t) = 0,$$

onde, como antes,  $\Omega$  é o módulo da velocidade angular do referencial girante em relação ao referencial fixo (fixo, por exemplo, em relação às estrelas distantes) e  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ , é a frequência angular do pêndulo cônico. A solução desta equação diferencial é imediata:

$$z'(t) = C_1 e^{i(\omega-\Omega)t} + C_2 e^{-i(\omega+\Omega)t},$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são duas constantes complexas. Convém rescrever a solução na forma:

$$z'(t) = e^{-i\Omega t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) = e^{-i\Omega t} z(t).$$

Identificando as partes reais e imaginárias em ambos os lados desta equação escrevemos:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & \text{sen } \Omega t \\ -\text{sen } \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad (59)$$

onde  $x(t)$  e  $y(t)$  são as soluções que obtivemos anteriormente para o pêndulo cônico em um referencial inercia, a saber:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_{0x}}{\omega} \text{sen } \omega t,$$

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} \text{sen } \omega t.$$

Consideremos agora as condições iniciais contidas nas soluções acima:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{x}(0) = v_{0x}, \quad \dot{y} = v_{0y}.$$

Observe que a Eq. (59) mostra que  $x'(0) = x(0) = x_0$ , e  $y'(0) = y(0) = y_0$ , pois os dois referenciais estão coincidindo quando  $t = 0$ . Por outro lado, o leitor poderá demonstrar que as velocidades iniciais nos dois sistemas estão relacionadas por:

$$\dot{x}'(0) = \Omega y(0) + \dot{x}(0),$$

e

$$\dot{x}'(0) = -\Omega x(0) + \dot{y}(0).$$

**Exercício 29** Comprove esta última afirmação. **Sugestão:** derive a Eq. (59) em relação ao tempo e faça  $t = 0$ . ■

Para o pêndulo de Foucault escolheremos as seguintes condições iniciais:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 = 0 \quad \dot{x}(0) = v_{0x} = 0, \quad \dot{y} = v_{0y} = 0.$$

As soluções no referencial girante então assumem a forma particular:

$$x'(t) = x_0 \cos \Omega t \cos \omega t, \quad (60)$$

e

$$y'(t) = -x_0 \sin \Omega t \cos \omega t. \quad (61)$$

A Figura 27 ilustra as soluções para três casos especiais. Para a trajetória superior,  $\omega = 2$  rads/s e  $\Omega = 0,5$  rads/s. As trajetórias inferiores correspondem a um pêndulo de Foucault na latitude  $90^\circ$  (pólo Norte) com  $\ell = 24$  m, e tempos de observação iguais a 60 e 84600 s. Em todos os casos,  $x_0 = 1$  m.

O módulo da velocidade angular do referencial girante depende da latitude e é dado por:

$$\Omega = \frac{360^\circ}{24 \text{ h}} \sin \lambda = \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} \sin \lambda,$$

onde  $\lambda$  é a latitude na qual o pêndulo é posto a oscilar. Esta é a rapidez com que o “chão” gira em torno da vertical local. Por outro lado, o plano vertical de oscilação do pêndulo permanece invariável em relação ao referencial fixo (digamos, as estrelas distantes) somente nos pólos. No equador da Terra, o plano horizontal  $x'y'$  não gira. Em latitudes intermediárias, o plano de oscilação precessa no sentido horário no hemisfério norte, e no sentido anti-horário no hemisfério sul.

O deslocamento angular do plano  $x'y'$  é dado por:

$$\Delta \varphi = \frac{360^\circ}{24 \text{ h}} \sin \lambda \Delta t.$$

Se supusermos que  $\Delta \varphi = 360^\circ$ , então um giro completo do plano  $x'y'$ , que corresponde a um giro completo no sentido angular oposto do plano de oscilação do pêndulo, se dá em um intervalo de tempo igual a:

$$\Delta t = \frac{24 \text{ h}}{\sin \lambda}.$$



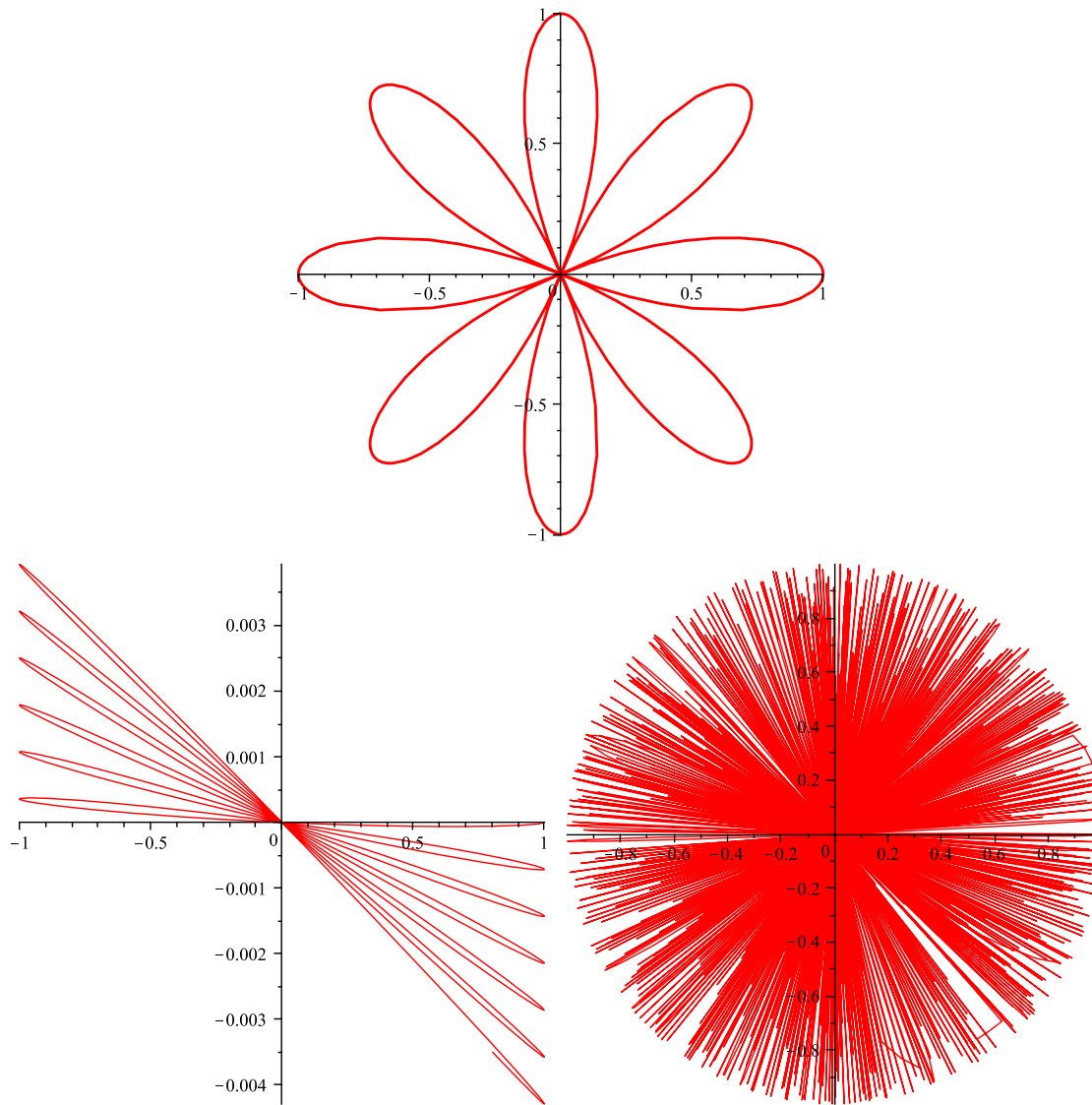


Figura 27: Trajetórias de um pêndulo de Foucault do ponto de vista do referencial girante construídas com as Eqs. (60) e (61).

No enlace a seguir, o leitor encontrará um pequeno filme de um pêndulo de Foucault que se encontra no *Houston Museum of Natural Science*, em Houston, Texas, EE.UU.: [Pêndulo de Foucault](#)



Figura 28: Cláudio Ptolomeu (c 90 A.D. - 168 A.D.) . (Ilustração Wikipedia)

### 3 O Sistema Solar e o problema de Kepler

#### 3.1 De Ptolomeu às leis de Kepler

Durante aproximadamente mil anos o *Almagesto* (A Grande Compilação) escrito pelo matemático, astrônomo, geógrafo, e astrólogo alexandrino Cláudio Ptolomeu (c 90 A.D. - 168 A.D.) serviu de referência obrigatória no Islã e na Europa medieval no que diz respeito ao funcionamento do Sistema Solar. O livro reúne as principais descobertas da astronomia grega e contribuições originais do autor. Grosso modo, no modelo cosmológico de Ptolomeu, a Terra é uma esfera imóvel que ocupa o centro do cosmos. O reino celeste, habitado por Deus e pelos eleitos, localiza-se na esfera mais externa. Os planetas ocupam esferas intermediárias na seguinte ordem a partir da Terra: Lua, Mercúrio, Vênus, o Sol, Marte, Júpiter e Saturno. O modelo é complementado pela esfera das estrelas distantes, fixas em relação à sua própria esfera, pois as estrelas, ao contrário dos planetas, movem-se conjuntamente e seu brilho é constante, veja a Figura 28. Na verdade, o modelo ptolomaico é mais complexo do que a sua cosmologia faz crer. O movimento dos planetas em relação à Terra parece errático. Em parte do ano um planeta parece mover-se para trás, movimento retrógrado, (veja uma animação em [Models of Planetary Motion](#)). O brilho não é igual para todos sugerindo que a distância à Terra varia de planeta para planeta. Para dar conta do brilho variável de um planeta, os astrônomos gregos postularam uma trajetória circular para este, a deferente, centrada em um ponto chamado excêntrico. A Terra fica deslocada em relação ao excêntrico de uma distância  $E$ . Para dar conta do movimento retrógrado, o astrônomo grego Híparco introduziu o conceito de epíclo. No modelo de Híparco, o planeta descreve um movimento circular em torno de um ponto

sobre a deferente e este ponto move-se sobre a deferente. A composição desses movimentos circulares é capaz de explicar as principais características do movimento retrógrado. Observe que esses modelos efetivamente tiram a Terra do centro do Cosmos. Para dar conta de observações posteriores mais precisas, Ptolomeu modificou estes modelos introduzindo um outro ponto, o equante, situado a uma distância igual a distância da Terra ao excêntrico, de modo tal que este passa ser o ponto médio entre a Terra e o equante, veja a Figura 30. Movimentos circulares com velocidade constante eram exigências comuns na astronomia grega. Em relação ao equante, o centro do epiciclo tem movimento circular uniforme. O modelo de Ptolomeu funciona dentro dos limites impostos pelas observações a olho nu disponíveis na época e teve vida longa.

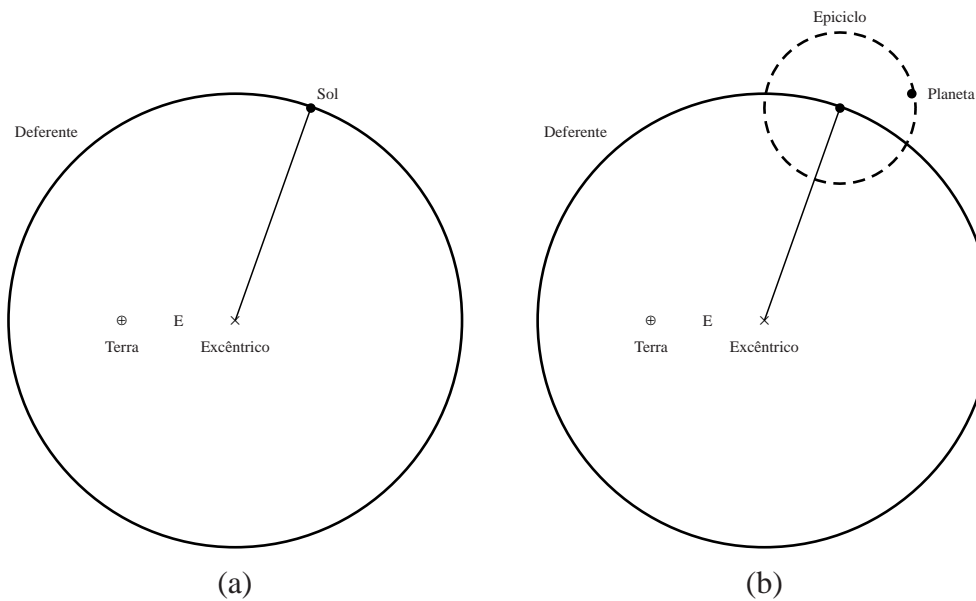


Figura 29: (a) Modelo do ponto excêntrico para o Sol. (b) Modificação de Híparco para dar conta do movimento de um planeta: o epiciclo.

A propósito, o modelo de Ptolomeu fornece um exemplo sofisticado da cinemática no plano complexo. É possível, por exemplo, descrever a órbita de Marte em relação à Terra e fazer um gráfico das soluções paramétricas das equações de movimento.

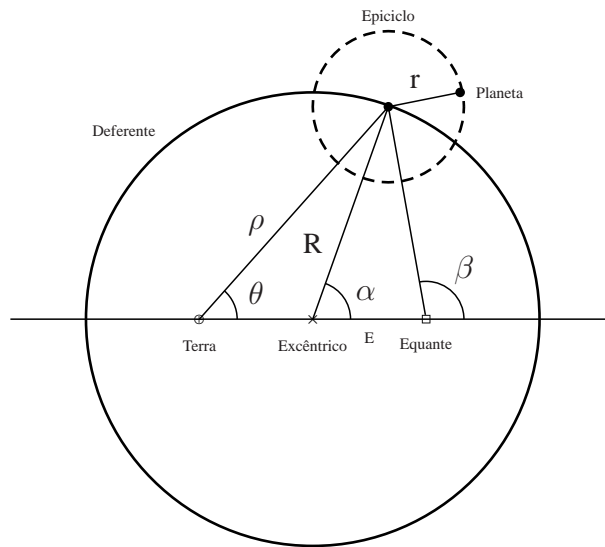


Figura 30: Modelo de Ptolomeu para o movimento dos planetas.

Nicolau Copérnico (1473-1543), astrônomo renascentista (entre outros ofícios), foi o primeiro a apresentar um sistema heliocêntrico, isto é, foi o primeiro a remover a Terra do centro do cosmos. Discrepâncias entre as observações e o modelo ptolomaico levaram-no a propor o modelo heliocêntrico. Copérnico apresenta seu modelo em duas obras: a primeira *Nicolai Copernici de hypothesibus motuum coelestium a se constitutis commentariolus* ou *Commentariolous* (Breves comentários) é uma descrição sucinta do modelo heliocêntrico, a segunda *De revolutionibus orbium coelestium* (Sobre as revoluções das esferas celestes) é uma descrição completa do modelo. Como no caso do modelo de Ptolomeu, apesar da sua cosmologia aparentemente simples, os detalhes do modelo de Copérnico são complexos, mais complexos do que o modelo de Ptolomeu, na opinião dos especialistas. O modelo de Copérnico também faz uso dos epíclitos e sua representação usual, veja a Figura 31, nos induz ao erro.

O modelo de Copérnico foi contestado pelo astrônomo norueguês/dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601). A grande contribuição de Brahe à astronomia foram os seus dados observacionais coletados ao longo dos anos. Os instrumentos encomendados por Brahe conjuntamente com seus esforços e meticulosidade elevaram a astronomia observacional a olho nu dos planetas e das estrelas ao seu ponto máximo. Graças aos dados de Brahe ficou claro que os modelos de Ptolomeu e de Copérnico não andavam de mãos dadas com as observações. Nos últimos anos

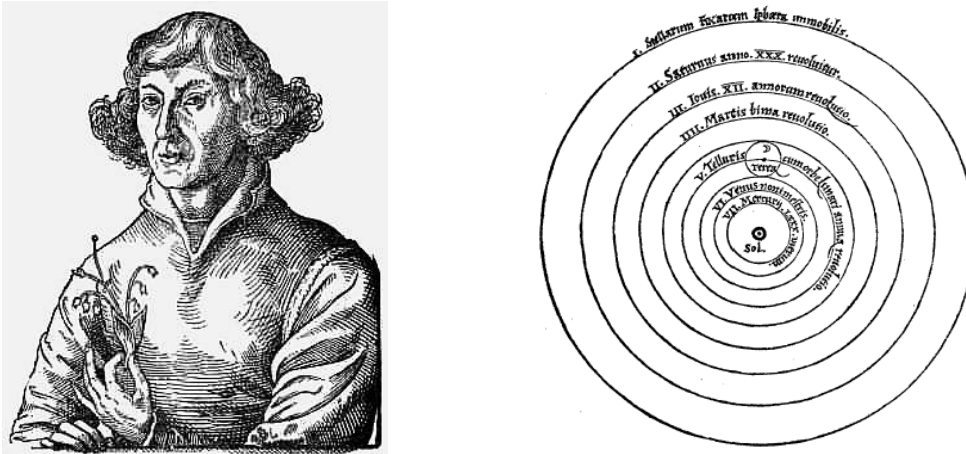


Figura 31: Nicolau Copérnico (1473-1543) e o modelo heliocêntrico. (Ilustrações Wikipédia)

de sua vida, Brahe contou com Johannes Kepler (1571-1630) cujas habilidades matemáticas eram necessárias para fazer avançar o seu próprio modelo. Kepler, defensor do heliocentrismo, aos 25 anos havia publicado um livro no qual apresentava um modelo heliocêntrico que relacionava as distâncias dos seis planetas do modelo de Copérnico: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno, com os cinco sólidos regulares. Os cinco sólidos regulares separavam as seis órbitas planetárias circulares. Impressionado com Kepler e seu trabalho, Brahe o convidou para participar de uma colaboração, embora visse nele um rival em potencial.

Após a morte de Brahe, Kepler conseguiu com muito esforço e habilidade ter acesso aos seus dados observacionais. Fiel à promessa que fizera a Brahe de implementar o modelo (geocêntrico) deste, dedicou-se a traçar círculos, epiciclos, equantes e excêntricos na tentativa de ajustar o modelo teórico aos dados experimentais que o grande observador havia registrado sobre o planeta Marte. Depois de várias tentativas, Kepler consegue um ajuste que está em desacordo com os dados de Brahe em apenas oito minutos de arco. Esta discrepância estava dentro dos limites aceitáveis na época para observações a olho nu, pois o telescópio ainda não era de uso corrente na astronomia. Mas Kepler conhecedor da qualidade dos dados de Brahe, e ele próprio um copernicano, renega o resultado final e dá um passo decisivo: deixa de lado as trajetórias circulares e suas combinações e tenta órbitas ovais e finalmente a elipse. Em 1609 enuncia duas das três leis do movimento planetário que levam o seu nome, a lei das órbitas e a lei das áreas, e em 1618 descobre a harmonia escondida das órbitas planetárias, a terceira lei ou lei harmônica, e a publica em 1619.



Figura 32: Tycho Brahe (1546-1601) e Johannes Kepler (1571-1630). (Ilustrações Wikipédia)

Eis então as leis empíricas de Kepler para o movimento planetário:

- (i) *Lei das órbitas (1609)* A órbita de um planeta em torno do Sol é uma elipse e o Sol está em um dos focos dessa elipse.
- (ii) *Lei das áreas (1609)* Um segmento de reta que une o Sol ao planeta em sua órbita em torno deste varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
- (iii) *A lei harmônica (1619)* O quadrado do período orbital do planeta é proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol.

$$T^2 = \kappa a^3.$$

A tabela 3.1 ilustra a terceira lei para alguns planetas.

Planeta	Raio da órbita (em U.A.)	Período (em dias)	$r^3/T^2 \times 10^{-6} \text{ (U.A.)}^3/(\text{dias})^2$
Mercúrio	0,389	87,77	7,64
Vênus	0,724	224,70	7,52
Terra	1,000	365,25	7,50
Marte	1,524	686,98	7,50
Júpiter	5,200	4 332, 62	7, 49
Saturno	9, 510	10 759,20	7,43

Tabela 1: Terceira lei de Kepler

Um dos grandes resultados da mecânica newtoniana obtidos pelo próprio Newton é a demonstração de que as leis de Kepler podem ser deduzidas a partir da mecânica e da gravitação universal newtonianas como veremos a seguir.

### 3.2 Forças centrais

Forças centrais são forças que dependem somente da distância  $r$  ao centro de força. Um ponto importante em relação às forças centrais é que elas conservam o momento angular. De fato, vetorialmente, uma força central se escreve:

$$\mathbf{F} = f(r) \hat{\mathbf{e}}_r.$$

Por outro lado, o momento angular de uma partícula de massa  $m$  que se move com velocidade  $\mathbf{v}$  nesse campo de força é dado por:

$$\boldsymbol{\ell} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

onde  $\mathbf{r}$  é vetor de posição da partícula em relação ao centro de força. Se agora calcularmos a variação temporal instantânea do momento angular veremos que esta é nula, isto é:

$$\frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} = 0.$$

Isto significa que o momento angular determina um plano invariável sobre qual a partícula se move, em outras palavras, a conservação do momento angular reduz o movimento sob a ação de uma força central a um problema bidimensional.

Em notação complexa, uma força central se escreve da seguinte maneira:

$$\tilde{F}(z) = f(|z|) \frac{z}{|z|},$$

ou ainda,

$$\tilde{F}(z) = f(|z|) e^{i\theta} = f(r) e^{i\theta}. \quad (62)$$

Fazendo uso da Eq. (13), as equações de movimento de uma partícula de massa  $m$  sob a ação de uma força central se escrevem:

$$m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] e^{i\theta} = f(r) e^{i\theta}, \quad (63)$$

e,

$$m \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] i e^{i\theta} = 0. \quad (64)$$

Multiplicando esta última equação por  $r$ ;

$$2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,$$

ou,

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0.$$

Segue que:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C, \quad (65)$$

onde  $C$ , como veremos em breve, é uma constante real positiva relacionada com o momento angular da partícula em relação ao centro de força. A lei das áreas de Kepler segue deste fato, como veremos a seguir.

### 3.3 A lei das áreas

A lei das áreas de Kepler é uma das consequências da simetria esférica da força central. Suponha que em um intervalo de tempo muito pequeno  $\Delta t$  um corpo esteja sob a ação de uma força central. Neste intervalo de tempo, o corpo descreve um pequeno arco de círculo que podemos aproximar por um segmento de reta, veja a Figura 33. A área do triângulo  $OPQ$  é dada por:

$$\Delta A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{r h}{2}.$$

Como  $h = (r + \Delta r) \sin \Delta\theta \approx (r + \Delta r) \Delta\theta$ , segue que:

$$\Delta A \approx \frac{r (r + \Delta r) \Delta\theta}{2}.$$

Dividindo ambos os lados desta equação por  $\Delta t$  e tomando o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtemos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Mas  $r^2 d\theta/dt$  é uma constante de movimento, o momento angular por unidade de massa, como veremos mais adiante. Portanto,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}.$$



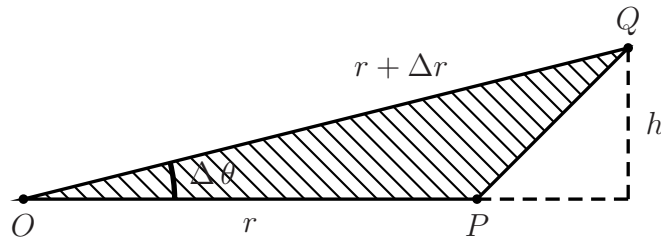


Figura 33: Lei das áreas.

Dados dois intervalos de tempo  $t_2 - t_1$  e  $t_4 - t_3$ , as áreas varridas pelo segmento de reta que une o Sol fixo em um dos focos da elipse ao planeta em movimento são, respectivamente:

$$\Delta A_1 = C(t_2 - t_1), \quad \Delta A_2 = C(t_4 - t_3).$$

Portanto, se os intervalos de tempo forem iguais, segue imediatamente que  $\Delta A_1 = \Delta A_2$ . Note que este resultado não depende da forma explícita da força central.

### 3.4 Momento angular em notação complexa

Como se escreve o momento angular em notação complexa? A resposta é simples: fazemos uso da definição de produto vetorial entre duas grandezas complexas:

$$\tilde{\ell} = \frac{m}{2i} (z^* \tilde{v} - z \tilde{v}^*). \tag{66}$$

Para que esta definição esteja em concordância com a dinâmica da força central, o momento angular em notação complexa deve ser, como seu análogo vetorial, uma constante de movimento. Vejamos:

$$\frac{d\tilde{\ell}}{dt} = \frac{m}{2i} (\tilde{v}^* \tilde{v} + z^* \tilde{a} - \tilde{v} \tilde{v}^* - z \tilde{a}^*) = \frac{m}{2i} (z^* \tilde{a} - z \tilde{a}^*).$$

A equação de movimento para uma partícula de massa  $m$  sob a ação uma força central se escreve:

$$m\tilde{a} = f(r) \frac{z}{|z|},$$

Observe que  $f(r)$  é uma função real da variável real  $r = |z|$ . O complexo conjugado da equação de movimento se escreve:

$$m\tilde{a}^* = f(r) \frac{z^*}{|z|}.$$

Segue imediatamente que:

$$\frac{d\tilde{\ell}}{dt} = 0.$$

Na representação polar, a Eq. (66) se escreve:

$$\tilde{\ell} = mr^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Se a força for central,  $\tilde{\ell}$  é uma constante de movimento, logo:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C = \frac{\ell}{m}. \quad (67)$$

**Exercício 30** Mostre que na representação cartesiana:

$$\tilde{\ell} = m(xy - \dot{x}y),$$

■

### 3.5 A órbita elíptica e a lei do inverso do quadrado

Relembremos os aspectos mais importantes da geometria da elipse. Considere a Figura 34. A elipse é definida pela relação:

$$r + r' = 2a,$$

onde  $a$  é o semi-eixo maior da elipse. Os pontos  $F$  e  $F'$  são os **focos** da elipse e a distância entre eles vale:

$$\overline{FF'} = 2\epsilon a,$$

onde  $\epsilon$ , a **excentricidade**, é um número real positivo entre 0 e 1 que mede o quanto a elipse<sup>2</sup> se afasta de um círculo. Considere agora o triângulo  $FPF'$ . Fazendo uso da lei dos cossenos temos

---

<sup>2</sup>A elipse enquanto curva suave e fechada é uma curva de Jordan.

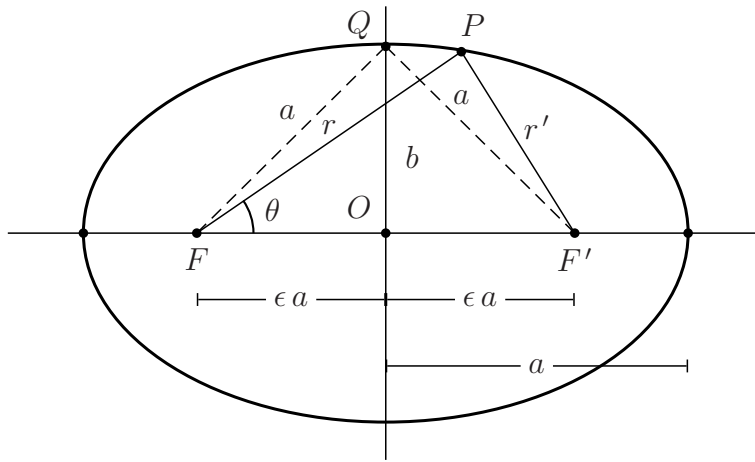


Figura 34: A geometria da elipse.

$$r'^2 = r^2 + (2\epsilon a)^2 - 4\epsilon ar \cos \theta.$$

Por outro lado,

$$(r + r')^2 = 4a^2.$$

Com essas duas relações e a relação que define a elipse podemos eliminar  $r'$  e obter a equação da elipse como uma relação entre  $r$  e  $\theta$ :

$$r(\theta) = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos \theta}. \tag{68}$$

A Eq. (68) nos dá a representação em coordenadas plano-polares da elipse. Observe que a origem está no foco  $F$  (onde mais tarde colocaremos o Sol!).

**Exercício 31** Obtenha a relação acima. ■

Considere agora o triângulo  $FOQ$ . Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$a^2 = b^2 + (\epsilon a)^2,$$

ou ainda:

$$b^2 = a^2 (1 - \epsilon^2).$$

Segue que podemos escrever também:

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2} (1 - \epsilon \cos \theta).$$

Fazendo uso desta relação podemos mostrar que se um planeta move-se em uma órbita elíptica sob a influência de uma força central gerada pelo Sol que está em um dos focos da elipse, digamos  $F$ , esta força central é proporcional ao inverso do quadrado da distância entre o planeta e o Sol. De fato, é possível mostrar que a aceleração radial (ver **Problema 7**) em uma órbita elíptica é dada por:

$$a_r = -\frac{aC^2}{b^2 r^2},$$

onde, como vimos anteriormente,  $C = \ell/m$ , é o momento angular por unidade de massa.

**Exercício 32** Mostre que a excentricidade pode ser escrita nas formas:

$$\epsilon = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}},$$

e

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

com  $b \leq a$ . ■

### 3.6 A energia mecânica e a órbita elíptica

$$E = \frac{1}{2}m |\tilde{v}|^2 + U(|z|). \quad (69)$$

Para o oscilador harmônico isotrópico a energia potencial se escreve:

$$U(|z|) = \frac{1}{2}\kappa |z|^2 = \frac{1}{2}\kappa zz^*,$$

e para o problema de Kepler:

$$U(|z|) = -\frac{GMm}{|z|} = -\frac{GMm}{zz^*}.$$

A força complexa associada com a energia potencial é:

$$\tilde{F}(z) = -2 \frac{\partial U(z)}{\partial z^*}, \quad (70)$$

e o seu complexo conjugado:

$$\tilde{F}(z)^* = -2 \frac{\partial U(z)}{\partial z}. \quad (71)$$

Lembrando que:

$$|\tilde{v}|^2 = \tilde{v}\tilde{v}^* = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

podemos escrever a energia mecânica como:

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + U(r).$$

Lembrando também que:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\ell}{m},$$

podemos rescrever a energia mecânica na forma:

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r). \quad (72)$$

É conveniente definir a energia potencial efetiva:

$$U_{ef}(r) := \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r). \quad (73)$$

A Figura 35 mostra o gráfico da energia potencial efetiva.

No caso de uma órbita elíptica, o potencial efetivo se escreve:

$$U_{ef} = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r},$$

onde  $r = |z|$ . Quando  $r = r_{\text{máx}}$ , a velocidade radial é nula, isto é:  $dr/dt = 0$ . Portanto, a energia mecânica se escreve:

$$E = \frac{\ell^2}{2mr_{\text{máx}}^2} - \frac{GMm}{r_{\text{máx}}}.$$

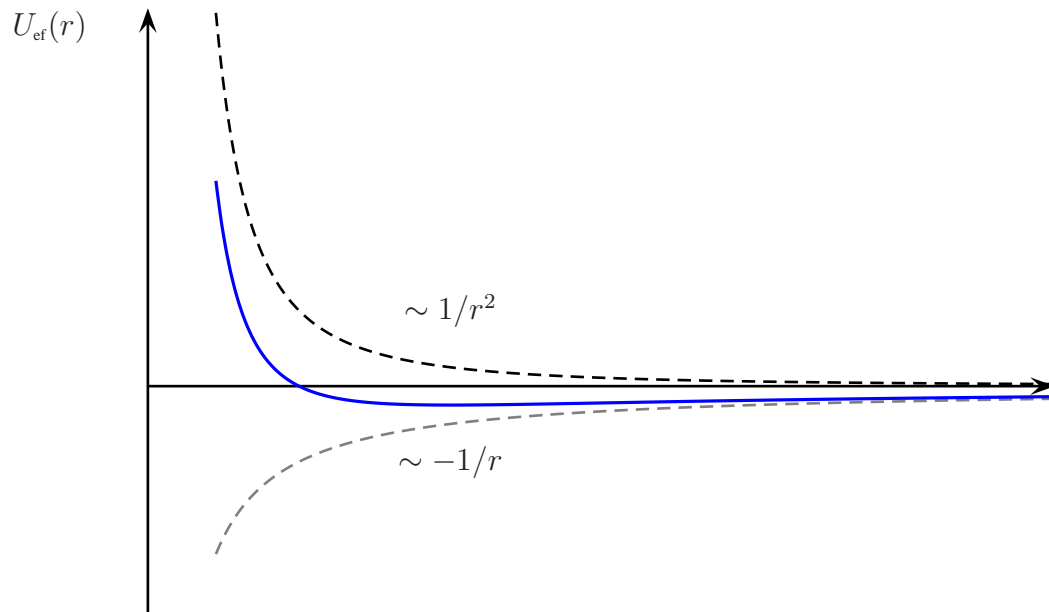


Figura 35: Energia potencial efetiva (curva em azul).

Como  $r_{\text{máx}} = a(1 + \epsilon)$ , podemos escrever:

$$U(r_{\text{máx}}) = -\frac{GMm}{a(1 + \epsilon)},$$

e

$$U_{\text{centrifugo}}(r_{\text{máx}}) = \frac{\ell^2}{2ma^2(1 + \epsilon)}.$$

Por outro lado, a área da elipse pode ser escrita como:

$$\pi ab = \frac{\ell}{2m} T,$$

onde T é o período do corpo na órbita elíptica. Segue que:

$$\ell = \frac{2m\pi ab}{T}.$$

Lembrando também que:  $b^2 = a^2(1 - \epsilon^2)$ , obtemos:

$$U_{\text{centrífugo}}(r_{\text{máx}}) = \frac{GMm}{2a}.$$

Segue que a energia na órbita elíptica se escreve:

$$E = -\frac{GMm}{2a}. \quad (74)$$

**Exercício 33** Obtenha a Eq. (74). ■

O resultado dado pela Eq. (74) significa que todas as órbitas elípticas de mesmo eixo maior  $2a$  e o círculo de raio  $2a$  têm a mesma energia.

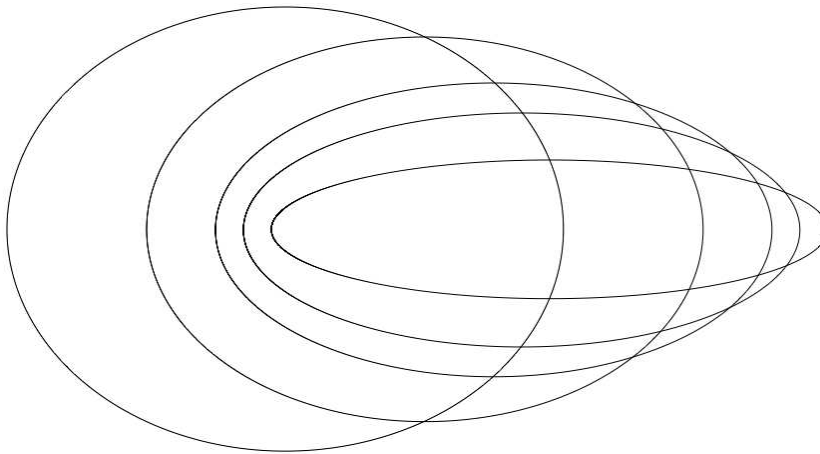


Figura 36: Órbitas elípticas e circular com a mesma energia mecânica.

**Exercício 34** A excentricidade da órbita da Terra em torno do Sol vale 0,0167. Calcule a razão entre as velocidades máxima e mínima da Terra em sua órbita. **Resposta:**  $v_{\text{máx}}/v_{\text{mín}} \approx 1,034$ . ■

### 3.7 A terceira lei de Kepler e a Gravitação Universal

O conhecimento de que a aceleração radial é proporcional ao inverso do quadrado da distância ao centro de força é suficiente para deduzir a terceira lei de Kepler. Vejamos como isto acontece.

A área de uma elipse é dada por:

$$A = \pi ab.$$

Por outro lado, a lei das áreas pode ser escrita como:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2},$$

logo,

$$\pi ab = \frac{C}{2} T, \Rightarrow C = \frac{2\pi ab}{T}.$$

A aceleração radial (ver **Problema 7**) em uma órbita elíptica é dada por:

$$a_r = -\frac{a C^2}{b^2 r^2},$$

assim, substituindo  $C$  nessa expressão:

$$a_r = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2 r^2}.$$

De acordo com a terceira lei de Kepler:

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = K,$$

onde  $K$  é uma constante real positiva. Portanto, pela segunda lei de Newton:

$$F_r = m a_r = -m \frac{K}{r^2}.$$

A terceira lei de Newton do movimento exige que  $K$  seja proporcional à massa  $M$  que podemos considerar como o centro de força da força que atua sobre  $m$  desde que a condição  $M \gg m$  seja obedecida. Escrevendo  $K = GM$ , temos:

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2},$$

onde  $G$  é uma nova constante, a constante de Gravitação Universal cujo valor aproximado é:

$$G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{ kg}^{-2}.$$

Segue imediatamente que:

$$a_r = -\frac{GM}{r^2}.$$



Portanto, ao igualar as duas expressões que temos para a aceleração radial obtemos:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

Portanto, a constante K na terceira lei de Kepler vale  $GM/(4\pi^2)$ .

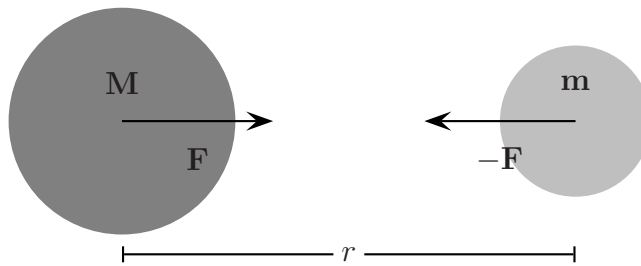


Figura 37: Gravitação Universal.

**Exercício 35** Observações astronômicas revelaram a existência de um novo planeta no Sistema Solar, o planeta X a uma distância de 4 U.A. do Sol. Calcule em anos terrestres a duração do ano no planeta X. **Resposta:** 8 anos terrestres. ■

**Exercício 36** O período de revolução de um planeta em torno do Sol é de 125 anos terrestres. Calcule sua distância ao Sol. **Resposta:** 25 U.A. ■

### 3.8 A dinâmica da órbita elíptica

Fazendo uso da conservação do momento angular, a equação de movimento radial se escreve:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{\ell^2}{mr^3} = -\frac{GMm}{r^2},$$

ou ainda:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\ell^2}{m^2 r^3} - \frac{GM}{r^2}.$$

Introduzindo a mudança de variável:  $s = 1/r$ , temos:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{s} \right) = -\frac{1}{s^2} \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{s^2} \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}.$$

Mas da conservação do momento angular temos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2},$$

logo;

$$\frac{dr}{dt} = -C \frac{ds}{d\theta}.$$

Da mesma forma:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -C \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{d\theta} \right) = -C \frac{d}{d\theta} \left( \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) = -C^2 s^2 \frac{d^2s}{d\theta^2}.$$

Lembrando que  $C = \ell/m$ , segue que a equação de movimento radial pode ser rescrita como:

$$\frac{d^2s(\theta)}{d\theta^2} + s(\theta) = \frac{GMm^2}{\ell^2}. \quad (75)$$

**Exercício 37** Complete os detalhes e obtenha a Eq. (75). ■

A solução da Eq. (75) é dada pela combinação linear da solução da equação diferencial homogênea associada e da solução particular, isto é:

$$s(\theta) = s_h(\theta) + s_p(\theta),$$

onde:

$$s_h(\theta) = B \cos(\theta + \beta),$$

e

$$s_p(\theta) = \text{constante} = \frac{GMm^2}{\ell^2}.$$

Portanto,

$$s(\theta) = \frac{GMm^2}{\ell^2} + B \cos(\theta + \beta),$$

ou ainda:

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{GMm^2}{\ell^2} + B \cos(\theta + \beta)}.$$

A forma da solução remete-nos à equação da elipse na forma polar com a origem em um dos focos:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos \theta}.$$

Escrevamos nossa solução para  $r(\theta)$  de uma forma mais apropriada para a comparação que faremos:

$$r(\theta) = \frac{(\ell^2/GMm^2)}{1 + \frac{B\ell^2}{GMm^2} \cos(\theta + \beta)}.$$

A simetria da elipse sugere que façamos  $\beta = 0$ . Para determinar a constante  $B$  e a excentricidade  $\epsilon$  em função das constantes físicas que temos ao nosso dispor fazemos:

$$a(1 - \epsilon^2) = \frac{\ell^2}{GMm^2},$$

e,

$$-\epsilon = \frac{B\ell^2}{GMm^2}.$$

Segue que:

$$B = -\frac{\epsilon GMm^2}{\ell^2},$$

e,

$$\epsilon^2 = 1 - \frac{\ell^2}{GMm^2 a}.$$

É mais conveniente eliminar o semi-eixo maior  $a$  da elipse e expressar a excentricidade em função das constantes de movimento do problema, o momento angular e a energia do problema. Lembrando que para a elipse  $0 < \epsilon < 1$ , e que o módulo da energia mecânica na órbita elíptica se escreve:

$$|E| = \frac{GMm}{2a},$$

podemos escrever a excentricidade como:

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{2\ell^2 |E|}{G^2 M^2 m^3}}. \quad (76)$$

A equação da órbita elíptica se escreve:

$$r(\theta) = \frac{(\ell^2/GMm^2)}{1 - \epsilon \cos \theta}, \quad (77)$$

com  $\epsilon$  dado pela Eq. (76). A órbita circular ( $\epsilon = 0$ ) é um caso particular da Eq. (77).

O tratamento dado aqui à órbita elíptica pode também ser dado às órbitas parabólicas ( $\epsilon = 1$ ) e hiperbólicas ( $\epsilon > 1$ ), como você poderá mostrar resolvendo os **Problemas 17, 18**, e o **Problema 26**.

**Exercício 38** Obtenha a Eq. 76). ■

Este resultado vale para  $M \gg m$ . Se  $M$  e  $m$  são comparáveis temos que lidar com o **problema de dois corpos** e algumas modificações devem ser feitas. Por enquanto estamos pensando em problemas em que  $M$  ocupa um dos focos da elipse e  $m$  é um corpo de prova como por exemplo, o sistema Sol-Terra, ou o sistema Terra-satélite artificial.

## Problemas

### Alguns aspectos formais

**Problema 1** *Força e energia potencial no plano complexo* Suponha que a energia potencial do sistema que você está estudando seja uma função de  $x$  e  $y$ , isto é:  $U = U(x, y)$ . Como  $x$  e  $y$  podem ser expressos em função de  $z$  e  $z^*$ , você pode fazer uma mudança de variáveis tal que:

$$U(x, y) \rightarrow U(z).$$

Esse será o nosso ponto de partida para obter a força (complexa) a partir da energia potencial (real).

(i) Mostre que:

$$x = \frac{z + z^*}{2}, \quad y = \frac{z - z^*}{2i}.$$

(ii) Mostre que o gradiente de  $U(z)$  se escreve:

$$\nabla U = \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z^*} \right) \hat{\mathbf{x}} + i \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z^*} \right) \hat{\mathbf{y}}.$$

(iii) Aplique o resultado acima à energia potencial do oscilador harmônico isotrópico bidimensional:

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \kappa (x^2 + y^2),$$

e mostre que  $F_x = -\kappa x$ , e  $F_y = -\kappa y$ .

(iv) Agora suponha que você queira escrever a força (complexa) como:

$$\tilde{F} = -\tilde{\nabla} U(z).$$

Faça as substituições  $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow 1$  e  $\hat{\mathbf{y}} \rightarrow i$  na expressão obtida no item (i) e mostre que:

$$\tilde{F}(z) = -2 \frac{\partial U(z)}{\partial z^*},$$

e

$$\tilde{F}^*(z) = -2 \frac{\partial U(z)}{\partial z}.$$

(v) Aplique os resultados do item anterior à energia potencial do problema de Kepler:

$$U(z) = -\frac{GMm}{|z|},$$

**Problema 2** Use os resultados do penúltimo item do problema anterior para mostrar que:

$$-\int_A^B (F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy) = [U(B) - U(A)]$$

onde  $A$  e  $B$  são dois pontos fixos do plano complexo.

**Problema 3** Na teoria clássica de campos, um campo de forças  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  é conservativo se:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0.$$

Qual será o análogo no plano complexo dessa relação? Mostre que dada uma força complexa  $\tilde{F}(z)$  esta será conservativa se:

$$\frac{\partial \tilde{F}(z)}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{F}^*(z)}{\partial z^*}.$$

Sugestão: use o resultado do problema anterior e o teorema de Green no plano. Aplique o resultado às forças:

$$\tilde{F}(z) = -\kappa z, \quad \text{O.H. isotrópico;}$$

e,

$$\tilde{F}(z) = -\frac{GMm z}{|z|^3}, \quad \text{Gravitação Universal.}$$

**Problema 4** O teorema trabalho-energia cinética no plano complexo Mostre que no plano complexo, o teorema-trabalho-energia cinética se escreve:

$$\mathcal{W}_{AB} = \frac{m}{2} (|\tilde{v}_B|^2 - |\tilde{v}_A|^2),$$

onde:

$$\mathcal{W}_{AB} = \int_A^B (\tilde{F}(z) dz^* + \tilde{F}^*(z) dz).$$

Agora mostre que se  $\tilde{F}(z)$  é obtida a partir de uma função potencial  $U(z)$ , a energia mecânica no plano complexo é uma constante de movimento.

**O oscilador harmônico simples**

**Problema 5** Na Figura 38 temos alguns exemplos de sistemas que podem apresentar oscilações periódicas: um tubo em U, um trilho circular, trilho parabólico, trilho em forma de V, e uma partícula que se move no fundo de uma tigela. Em que condições haverá oscilações harmônicas simples?

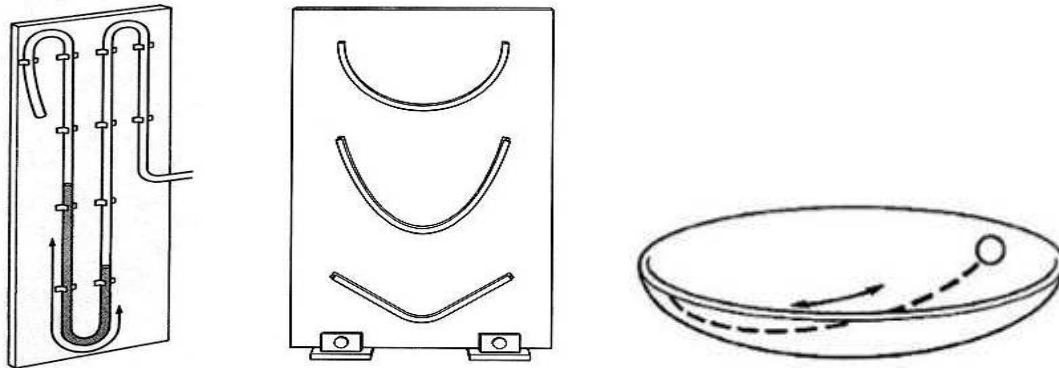


Figura 38: Exemplos de sistemas que podem apresentar movimentos periódicos.

**Problema 6** *Uma abordagem alternativa ao oscilador harmônico* Considere a equação diferencial linear de segunda ordem que governa o movimento de um oscilador harmônico de massa  $m$  e constante elástica  $\kappa$  sob a ação de uma força resistiva linear na velocidade da forma  $-b\dot{x}$ .

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

onde  $2\gamma := b/m$  e  $\omega_0^2 := \kappa/m$ .

(a) Escreva uma solução da forma

$$x(t) = e^{\beta t} y(t),$$

onde  $\beta$  é uma constante a ser determinada, substitua na equação diferencial acima e elimine o termo em  $\dot{y}$  impondo uma relação entre  $\beta$  e  $\gamma$ . O resultado deve ser uma equação mais simples da forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ay = 0,$$

onde  $a$  é uma constante real que depende de  $\omega_0^2$  e  $\gamma$ .

- (b) Agora obtenha a solução  $x(t)$  para o oscilador subamortecido,  $a > 0$ .
- (c) Idem para o caso amortecido,  $a < 0$ .
- (d) Idem para o caso superamortecido,  $a = 0$ .

**Problema 7** Uma partícula de massa  $m$  move-se ao longo do eixo cartesiano  $x$  sob a influência do potencial hiperbólico (veja a Figura 39):

$$U(x) = \frac{F_0}{a} \cosh(ax),$$

onde  $F_0$  e  $a$  são constantes reais positivas.

- (i) Calcule a força que age sobre a partícula.
- (ii) Obtenha uma expressão aproximada para o potencial para pequenos afastamentos da posição de equilíbrio.
- (iii) Calcule o período das pequenas oscilações em torno do ponto de equilíbrio.
- (iv) Ainda na aproximação para pequenos afastamentos da posição de equilíbrio, calcule os pontos de retorno para um valor dado  $E$  da energia mecânica.

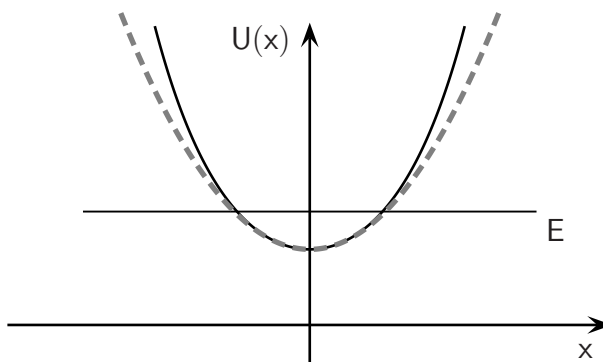


Figura 39: Aproximação parabólica: a curva tracejada é uma parábola.



**Problema 8** Considere o sistema massa-mola e o fato de que na ausência de atrito, a energia mecânica é uma constante de movimento.

- (i) Suponha que o afastamento máximo da posição, isto é, a amplitude, seja igual  $A$ . Mostre que  $E = \kappa A^2/2$ , onde  $\kappa$  é a constante de mola.
- (ii) Calcule o período das oscilações do sistema usando a energia mecânica como constante de movimento.

**Problema 9** *O.H.S.* Uma carga elétrica puntiforme de valor  $q$  e massa  $m$  é forçada a mover-se ao longo do eixo cartesiano  $y > 0$  sob a ação do seu peso e de uma força coulombiana gerada pela interação com uma carga puntiforme  $Q$  de mesmo sinal, fixa na origem.

- (a) Calcule a altura de equilíbrio da carga  $q$ .
- (b) Suponha que a carga  $q$  sofra um pequeno deslocamento  $\delta y$  a partir do equilíbrio. Determine o período das pequenas oscilações da carga e  $y(t)$ .

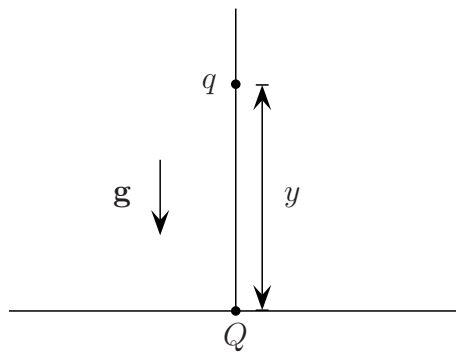


Figura 40:

**Problema 10** *O oscilador inverso* Considere um sistema dinâmico que obedece às equações de movimento:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 y,$$

onde  $\omega^2$  é uma constante. Este sistema peculiar é chamado ‘oscilador inverso’.

(a) Mostre que a equação de movimento do oscilador inverso no plano complexo se escreve:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \omega^2 z = 0.$$

(b) Mostre que para as condições iniciais:  $z(0) = x_0 + iy_0$ ,  $\tilde{v}(0) = v_{0x} + iv_{0y}$ , a solução da equação de movimento se escreve:

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

onde:

$$x(t) = x_0 \cosh \omega t + \frac{v_{0x}}{\omega} \sinh \omega t,$$

e,

$$y(t) = y_0 \cosh \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} \sinh \omega t,$$

**Problema 11** Resolva o problema de uma partícula de massa  $m$  submetida à lei de Hooke  $-\kappa z$ , e a um amortecimento é *negativo*, isto é:  $f = +bm\dot{z}$ , onde  $b$  é uma constante real positiva, usando a notação complexa. Depois de obter  $z(t)$ , obtenha a velocidade e a aceleração da partícula.

**Problema 12** Considere um pêndulo simples constituído por uma massa  $m$  suspensa por um fio inextensível de massa desprezível. A outra extremidade do fio está presa a um ponto fixo, veja a Figura 41. Despreze o atrito no ponto fixo e a resistência do ar. As condições iniciais são:  $\theta(0) = \theta_0$ , e  $\dot{\theta}(0) = 0$ . Suponha pequenos afastamentos da vertical.

(a) Determine  $\theta(t)$ .

(b) Obtenha  $\theta(t)$  para o caso em que o pêndulo está submetido a uma força resistiva dada por:

$$f = -b \frac{d\theta}{dt},$$

onde  $b$  é uma constante real positiva.

**Problema 13** *O.H. forçado sem atrito* Uma carga puntiforme de valor  $q$  e massa  $m$  é obrigada mover-se ao longo do eixo  $x$ . Uma segunda carga puntiforme de valor igual a  $-q'$  é mantida fixa a uma distância perpendicular  $D$  do eixo  $x$ . Desconsidere os efeitos do atrito.

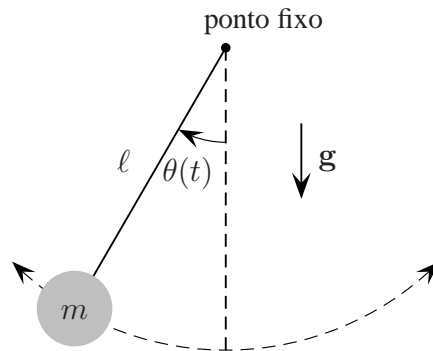


Figura 41: Pêndulo gravitacional.

- (a) Escreva a equação de movimento para a carga  $q$ .
- (b) Mostre que a equação de movimento da carga  $q$  para pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio da carga  $q$  se escreve:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

onde

$$\omega^2 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 mD^3}.$$

- (c) Um campo elétrico uniforme no espaço, mas variável no tempo dado por:

$$\mathbf{E}(t) = E_0 \cos \omega t \hat{\mathbf{x}},$$

é aplicado à carga oscilante. Determine  $x(t)$  e a potência média fornecida à carga pelo campo elétrico.

- (d) Faça um esboço do gráfico da potência média fornecida.

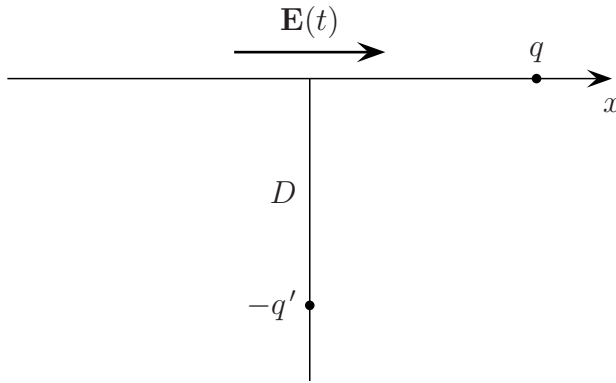


Figura 42:

**Figuras de Lissajous e o pêndulo de Foucault**

**Problema 14** Mostre que no problema do pêndulo de Foucault, as componentes das velocidades no referencial girante  $v'_x, v'_y$ , e no referencial fixo,  $v_x, v_y$ , se relacionam de acordo com:

$$\begin{pmatrix} v'_x(t) \\ v'_y(t) \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} -\text{sen } \Omega t & \text{cos } \Omega t \\ -\text{cos } \Omega t & -\text{sen } \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{cos } \Omega t & \text{sen } \Omega t \\ \text{sen } \Omega t & \text{cos } \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}.$$

Relacione as condições iniciais nos dois sistemas e mostre que para as condições iniciais discutidas no texto:

$$\begin{aligned} v'_x(0) &= \Omega y(0) + v_x(0), \\ v'_y(0) &= -\Omega x(0) + v_y(0). \end{aligned}$$

**Problema 15** No texto, obtivemos as soluções das equações de movimento para o pêndulo de Foucault no referencial girante relacionando-as com as soluções no referencial fixo. Outro modo de obter essas soluções é resolver até o fim a equação diferencial:

$$\frac{d^2 z'(t)}{dt^2} + 2i\Omega \frac{dz'(t)}{dt} + (\omega^2 - \Omega^2) z'(t) = 0,$$

que descreve o sistema no referencial girante. É o que você deve fazer nos itens a seguir.

- (a) Mostre explicitamente que a solução complexa da equação de movimento no referencial girante é dada por:
- (b) Mostre que dadas as condições iniciais no referencial girante:  $z'(0) = z'_0 = x'_0 + iy'_0$ , e  $\tilde{v}'(0) = \tilde{v}'_0 = v'_{0x} + iv'_{0y}$ , as constantes complexas se escrevem:

$$C_1 = \left( \frac{\omega + \Omega}{2\omega} \right) z'_0 - i \frac{\tilde{v}'_0}{2\omega},$$

$$C_2 = \left( \frac{\omega - \Omega}{2\omega} \right) z'_0 + i \frac{\tilde{v}'_0}{2\omega}.$$

- (c) Mostre que as partes real e imaginária da solução da equação de movimento no referencial girante se escrevem:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \left( \frac{\omega_+}{2\omega} x'_0 + \frac{v'_{0y}}{2\omega} \right) \cos \omega_+ t + \left( -\frac{\omega_+}{2\omega} y'_0 + \frac{v'_{0x}}{2\omega} \right) \text{sen } \omega_+ t \\ &+ \left( \frac{\omega_-}{2\omega} x'_0 - \frac{v'_{0y}}{2\omega} \right) \cos \omega_- t + \left( \frac{\omega_-}{2\omega} y'_0 + \frac{v'_{0x}}{2\omega} \right) \text{sen } \omega_- t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= \left( \frac{\omega_+}{2\omega} y'_0 + \frac{v'_{0x}}{2\omega} \right) \cos \omega_+ t + \left( -\frac{\omega_+}{2\omega} x'_0 + \frac{v'_{0y}}{2\omega} \right) \text{sen } \omega_+ t \\ &+ \left( \frac{\omega_-}{2\omega} y'_0 + \frac{v'_{0x}}{2\omega} \right) \cos \omega_- t + \left( -\frac{\omega_-}{2\omega} x'_0 + \frac{v'_{0y}}{2\omega} \right) \text{sen } \omega_- t, \end{aligned}$$

onde  $\omega_+ := \omega + \Omega$ , e  $\omega_- := \omega - \Omega$ .

## Gravitação newtoniana

**Problema 16** Mostre explicitamente que as forças centrais:

$$\tilde{F}z = -\frac{GMm}{r^2} \frac{z}{|z|} = -\frac{GMm}{r^3} z,$$

e

$$\tilde{F}(z) = -\kappa z,$$

conservam o momento angular complexo em relação ao centro de força.

**Problema 17** Mostre que a aceleração da gravidade na superfície do Sol é aproximadamente 28 vezes maior do que a aceleração da gravidade na superfície da Terra. Uma erupção solar pode atingir alturas colossais pelos padrões terrestres. Foi observado que uma dessas erupções atingiu uma altura de 161.000 km. Estime a ordem de grandeza da velocidade com que a matéria foi ejetada da superfície do Sol. **Resposta:**  $\approx 185$  km/s.

**Problema 18** *órbitas elípticas e a lei do inverso do quadrado* Suponha que você, como Kepler, por meio de medidas cuidadosas tenha chegado a conclusão que a órbita do planeta que você está estudando é uma elipse e que o Sol está em um dos focos dessa elipse. Suponha também que a força que o Sol exerce sobre o planeta dependa somente da distância  $r$  do planeta ao Sol. Mostre que a aceleração radial do planeta é proporcional a  $1/r^2$ . **Sugestão:** use a relação:

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2} (1 - \epsilon \cos \theta),$$

e a expressão para a aceleração radial dada no texto. Calcule  $d^2r/dt^2$  e use o fato de que para uma força central, a velocidade areal é constante para subtrair o termo  $r(d\theta/dt)^2$ .

**Problema 19** *órbitas elípticas e a lei do inverso do quadrado* Suponha que você, como Kepler, por meio de medidas cuidadosas tenha chegado a conclusão que a órbita do planeta que você está estudando é uma elipse e que o Sol está em um dos focos dessa elipse. Suponha também que a força que o Sol exerce sobre o planeta dependa somente da distância  $r$  do planeta ao Sol. Mostre que a aceleração radial do planeta é proporcional a  $1/r^2$ . **Sugestão:** use a relação:

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2} (1 - \epsilon \cos \theta),$$

e a expressão para a aceleração radial dada no texto. Calcule  $d^2r/dt^2$  e use o fato de que para uma força central, a velocidade areal é constante para subtrair o termo  $r(d\theta/dt)^2$ .

**Problema 20** *Órbitas parabólicas* Por definição, uma parábola é um conjunto de pontos do plano que são simultaneamente equidistantes de um ponto fixo  $F$ , o **foco** da parábola, e de uma reta fixa  $DE$ , chamada **diretriz** da parábola, isto é:  $r = r'$ , veja a figura abaixo.

(a) Mostre que a equação da parábola em coordenadas plano polares  $r, \theta$ , com origem no foco  $F$  se escreve:

$$r(\theta) = \frac{2a}{1 - \cos \theta},$$

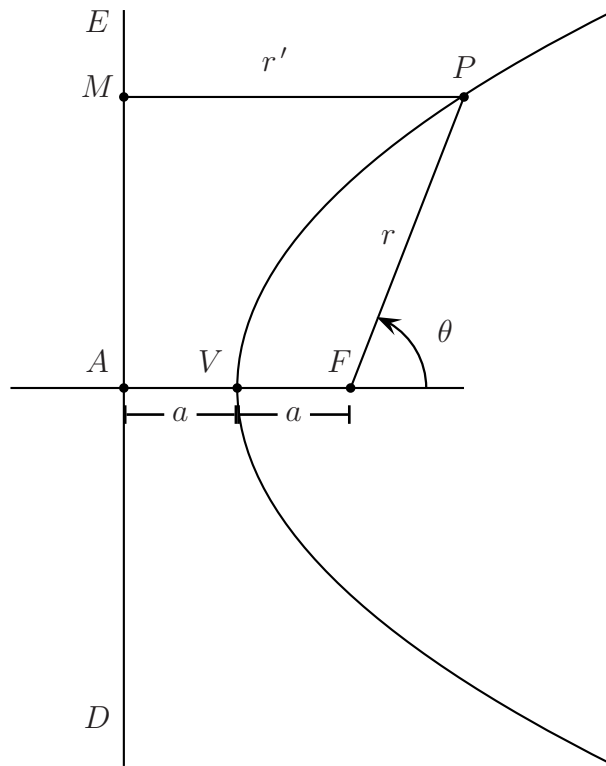


Figura 43: A parábola: o ponto  $P$  está a uma mesma distância do foco da parábola e de sua diretriz

onde  $a$  é a distância entre o vértice da parábola e o foco  $F$ . Observe que pela definição de parábola,  $|VF| = |AF|$ .

- (b) Se a parábola é uma órbita compatível com a Gravitação Universal, ela deve ser um caso particular da solução geral para  $s(\theta) = 1/r(\theta)$ . Mostre que ajustando as constantes de integração, a órbita parabólica se escreve:

$$r(\theta) = \frac{\ell^2 / (GMm^2)}{1 - \cos \theta}.$$

- (c) Mostre que a energia mecânica  $E$  na órbita parabólica é zero. Observe que a excentricidade da parábola,  $\epsilon$ , é igual a um.

**Problema 21** *Órbitas hiperbólicas I* Por definição, uma hipérbole é um conjunto de pontos do plano que satisfazem a relação  $|r' - r| = 2a$ . Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são os **focos** da hipérbole, e estão separados por uma distância igual a  $2\epsilon a$ , onde  $\epsilon > 1$  é a excentricidade da hipérbole, veja a Figura 44.

- (a) Mostre que a equação da hipérbole (ramo à esquerda) em coordenadas plano polares  $r, \theta$ , com origem no foco  $F_1$  se escreve:

$$r(\theta) = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

- (b) Se a hipérbole é uma órbita compatível com a Gravitação Universal, ela deve ser um caso particular da solução geral para  $s(\theta) = 1/r(\theta)$ . Mostre que ajustando as constantes de integração, a órbita hiperbólica se escreve:

$$r(\theta) = \frac{\ell^2/(GMm^2)}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

onde:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{GMm^2 a}} > 1.$$

- (c) Mostre que a energia mecânica  $E$  na órbita hiperbólica é maior do que zero e se escreve:

$$E = + \frac{GMm}{2a}.$$

- (d) Mostre que a excentricidade da órbita pode ser escrita na forma:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{m(GMm)^2}}.$$

**Problema 22** Um satélite geostacionário é um satélite artificial que tem o mesmo período de rotação da Terra e uma órbita aproximadamente circular na latitude do equador terrestre. Sabendo que a distância Terra-Lua vale aproximadamente 60 raios terrestres e que o período de revolução da Lua em torno da Terra é de 27 dias, calcule a que altura  $H$  acima de um ponto  $P$  sobre a linha do equador terrestre o satélite deve ser posicionado. Explique por que o satélite deve ser colocado em órbita na latitude zero. **Resposta:**  $H = 17/3R_{\oplus}$ .



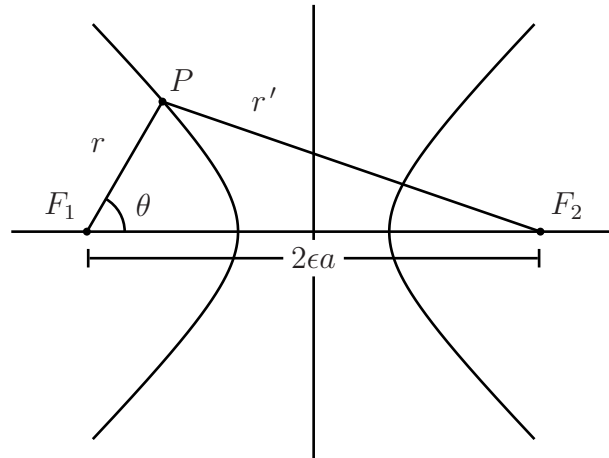


Figura 44: A hipérbole: o ponto  $P$  é tal que a relação  $r' - r = 2a$  é satisfeita.

**Problema 23**<sup>3</sup> Considere um planeta esférico de massa  $M$  e raio  $R$ . Um foguete é lançado com velocidade inicial igual a  $3/4$  da sua velocidade de escape. Calcule a maior distância acima da superfície que o foguete é capaz de atingir nas seguintes situações:

- (a) o lançamento é radial;
- (b) o lançamento é tangencial à superfície do planeta;
- (c) Faça os gráficos do potencial efetivo e da energia total nos dois casos.

**Sugestão:** use o fato que a energia mecânica e o momento angular são constantes de movimento. Despreze os efeitos da rotação e da atmosfera do planeta. **Respostas:** (a)  $(9/7)R$ ; (b)  $(2/7)R$ .

**Problema 24**<sup>4</sup> Considere um planeta esférico de massa  $M$  e raio  $R$ . Despreze os efeitos da rotação e da atmosfera do planeta. Um satélite é lançado da superfície do planeta com uma velocidade inicial de magnitude  $v_0$  formando um ângulo de  $30$  graus com a vertical local. Já em órbita, o satélite atinge a distância máxima de  $5R/2$  do centro do planeta. Use o fato que a energia mecânica e o momento angular são constantes de movimento e mostre que:

<sup>3</sup>Adaptado de [7]

<sup>4</sup>Adaptado de [7]

$$v_0 = \sqrt{\frac{5GM}{4R}}.$$

**Problema 25** *A equação de Binet* Mostre que de modo geral, para uma força central  $F_r(r)$ :

$$F_r(1/s) = -m C^2 s^2 \left( \frac{d^2 s(\theta)}{d\theta^2} + s(\theta) \right),$$

onde  $s = 1/r$  e  $C = \ell/m$ . Esta equação é chamada de **Equação de Binet**. Teste a equação para uma força que varia com o inverso do quadrado da distância radial ao centro de força.

**Problema 26** Suponha que graças a uma ação mágica que não nos cabe discutir, metade da massa do Sol desapareça instantaneamente. Suponha também que a órbita do planeta X em torno do Sol antes deste evento espantoso seja circular. Mostre que a órbita do planeta após o evento passa a ser parabólica.

**Problema 27** Resolva a equação de Binet e determine o movimento de uma planeta de massa  $m$  que orbita em torno de uma estrela de massa  $M$ , onde  $m \ll M$ , sob a ação da força central:

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2} - \frac{A}{r^3},$$

onde  $A$  é uma constante real positiva.

**Problema 28** Resolva a equação de Binet e determine o movimento de uma planeta de massa  $m$  que orbita em torno de uma estrela de massa  $M$ , onde  $m \ll M$ , sob a ação da força central:

$$F(r) = -\frac{K}{r^3},$$

onde  $K$  é uma constante real positiva.

**Problema 29** *Órbitas hiperbólicas II* Como vimos antes, uma hipérbole é um conjunto de pontos do plano que satisfazem a relação  $|r' - r| = 2a$ . Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são os **focos** da hipérbole, e estão separados por uma distância igual a  $2\epsilon a$ , onde  $\epsilon > 1$  é a excentricidade da hipérbole, veja a Figura 45. Mostre que a equação da hipérbole em coordenadas plano polares  $r, \theta$ , com origem no foco  $F_1$  se escreve:

$$r(\theta) = \frac{a(\epsilon^2 - 1)}{-1 + \epsilon \cos \theta},$$

Em que classe de problemas teríamos que considerar esta solução? Qual a energia associada com esta órbita? Como se calcula a excentricidade?

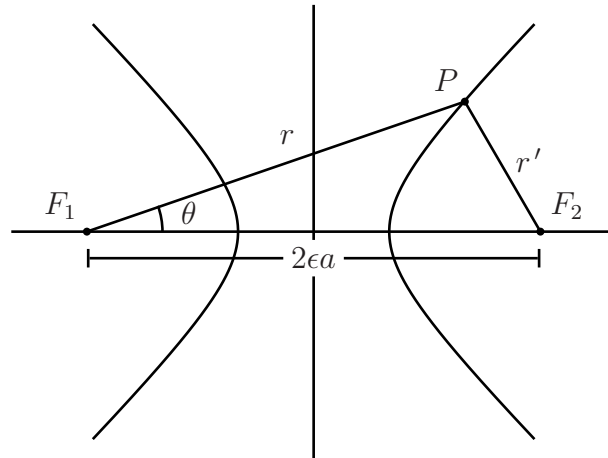


Figura 45: A hipérbole: o ponto  $P$  é tal que a relação  $r - r' = 2a$  é satisfeita.

**Problema 30** *O vetor de Runge-Lenz-Laplace no plano complexo* O vetor de Runge-Lenz-Laplace é definido por:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell}}{m} - \kappa \hat{\mathbf{e}}_r,$$

onde  $\mathbf{p}$  é o momento linear do corpo de prova de massa  $m$  (ou massa reduzida  $\mu$ ),  $\boldsymbol{\ell}$  é o seu momento angular, e  $\kappa = GMm$ .

- (a) Mostre que  $\mathbf{A}$  é uma constante de movimento do problema de Kepler.
- (b) O análogo do vetor de Runge-Lenz-Laplace no plano complexo se escreve:

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{\mathbf{p}} \times \tilde{\boldsymbol{\ell}}}{m} + \kappa \frac{(z + z^*)}{|z|}.$$

Mostre que  $\tilde{A}$  é uma constante de movimento na formulação do problema de Kepler no plano complexo.

## Referências

- [1] Paul J. Nahim 1998 *An imaginary tale: The story of  $\sqrt[2]{-1}$* , (Princeton: Princeton)
- [2] Gilberto G. Garbi 2007 *O romance das equações algébricas* (Livraria da Física: São Paulo)
- [3] Francisco Martín Casalderrey 2000 *Cardano y Tartaglia: Las Matemáticas en el Renacimiento Italiano* (Nivola: Madrid)
- [4] Murray R. Spiegel 1981 *Theory and Problems of Complex Variables* (McGraw-Hill: Singapore)
- [5] A. P. French 1965 *Vibrations and Waves* (New York: Norton)
- [6] I. Bernard Cohen 1992 *The Birth of a New Physics* (London: Penguin)
- [7] A. P. French 1965 *Newtonian Mechanics* (New York: Norton)
- [8] Stephen T. Thornton e Jerry B. Marion 2004 *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 5th edn, (Belmont: Brooks/Cole – Thomson)