

Problemas e Soluções em Eletrostática

A C Tort

Esta página está intencionalmente em branco.

PROBLEMAS E SOLUÇÕES EM ELETROSTÁTICA

versão beta

A C Tort ¹
Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Caixa Postal 68.528; CEP 21941-972 Rio de Janeiro, Brazil

23 de Dezembro de 2009

¹e-mail: tort@if.ufrj.br.

Conteúdo

Introdução	3
1 Lei de Coulomb	4
2 Campo Elétrico	13
3 Lei de Gauss	37
4 Potencial Elétrico	55
5 Energia Eletrostática; Capacitores	68
6 Movimento de partículas carregadas em campo elétrico prescrito	79
7 Problemas adicionais	87
Constantes físicas selecionadas	124

Introdução

Os problemas foram mais ou menos agrupados por assunto.

Capítulo 1

Lei de Coulomb

PROBLEMA 1.1 Uma certa carga Q deve ser dividida em duas partes $q_1 = Q - q$ e $q_2 = q$. As cargas q_1 e q_2 são fixas e separadas por uma distância d . Mostre que a magnitude da força entre as cargas pode ser escrita na forma:

$$F(x) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} (1-x)x,$$

onde $x = q/Q$ e $0 \leq x \leq 1$. Para que valores de x a força é nula? Para que valores de x a força é máxima?

SOLUÇÃO 1.1 :

A intensidade da força repulsiva entre as duas cargas é uma função de q' e se escreve:

$$F(q') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'(q-q')}{r^2}.$$

A condição necessária para que a repulsão seja máxima é dada por:

$$\frac{dF(q')}{dq'} = 0.$$

Segue então facilmente que:

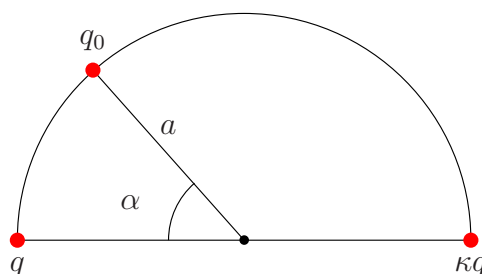
$$q' = \frac{q}{2}.$$

O leitor poderá mostrar facilmente que:

$$\frac{d^2 F(q')}{dq'^2} = -2,$$

logo, $q' = q/2$ é um ponto de máximo da função $F(q')$. ■

PROBLEMA 1.2 Considere o arranjo formado pelas três cargas puntiformes q , κq ($\kappa > 0$) e q_0 mostrados na figura abaixo. As cargas q e κq são fixas, mas q_0 pode mover-se sobre o semicírculo de raio a . Determine em função dos dados do problema o valor do ângulo α para o qual a carga q_0 permanece em equilíbrio e calcule o valor numérico de α para $\kappa = 8$.



SOLUÇÃO 1.2 :

(a) A força de vínculo – a força que o fio exerce sobre a carga – é perpendicular ao fio. Para que a carga q_0 fique em equilíbrio $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_v = 0$. Da geometria do triângulo retângulo em cujos vértices estão as cargas segue que:

$$2\beta + \pi - \alpha = \pi, \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\alpha}{2},$$

e

$$2\gamma + \alpha = \pi \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\pi - \alpha}{2}.$$

As projeções de \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 sobre plano tangente Π devem cancelar-se mutuamente:

$$F_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = F_2 \cos \beta.$$

Ou ainda:

$$\frac{q_0 \kappa q}{4\pi\epsilon_0 y^2} \text{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{q_0 q}{x^2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Usando a lei dos senos duas vezes:

$$x = a \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$y = a \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \frac{\alpha}{2}}.$$

Substituindo e simplificando obtemos finalmente:

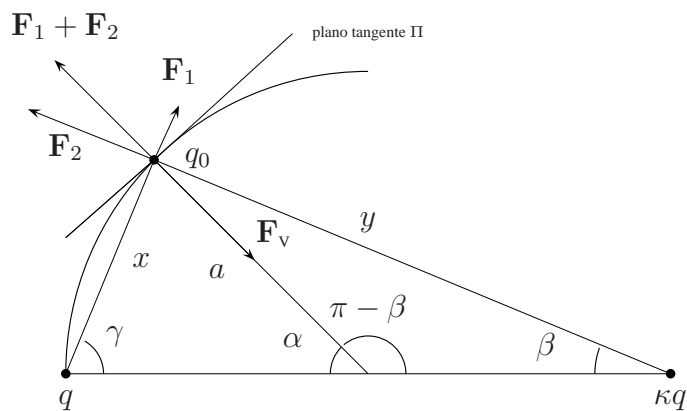
$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{\kappa}}.$$

Para testar esta relação fazemos $\kappa = 1$. Neste caso obtemos $\alpha = \pi/2$, como deveríamos esperar.

(b) Para $\kappa = 8$, temos $\sqrt[3]{8} = 2$, logo:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

Segue que $\alpha/2 \approx 27$ graus e $\alpha \approx 57$ graus.



PROBLEMA 1.3 Alguns dos problemas que encontramos em eletrostática podem ser resolvidos com uma combinação de resultados analíticos e métodos numéricos. Eis um exemplo: suponha quatro cargas de mesma magnitude q e mesmo sinal algébrico. Suponha que queiramos colocar as cargas em equilíbrio sobre uma reta de comprimento $2a$. A simetria do problema pode ser-nos útil. Escolhendo a origem no ponto mediano da reta evidentemente podemos colocar um par de cargas, o par externo, nos pontos $x = \pm a$, respectivamente, e o outro par, o par interno, nos pontos $\pm x$.

(a) Comece mostrando que a força sobre a carga colocado no ponto $+x$ é dada por:

$$F(x) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(2x)^2} - \frac{1}{(x-a)^2} \right]$$

(b) Mostre que a exigência de que a carga esteja em equilíbrio leva à equação algébrica de quarta ordem:

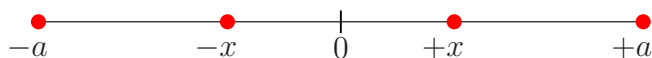
$$(a^2 - x^2)^2 = 16 a x^3.$$

(c) Mostre que uma solução numérica nos dá $x = 0,36148 a$. **Sugestão:** rescreva a equação acima na forma

$$(1 - u^2)^2 = 16 u^3,$$

onde $u := x/a$. Dessa forma, a sua solução não dependerá do comprimento a . Agora considere o lado esquerdo e o lado direito como duas funções distintas. Nesse caso, a igualdade vale para um ou alguns valores de u apenas. Faça os gráficos correspondentes e determine os pontos de intersecção. Sinta-se a vontade no uso de softwares de computação algébrica ou dos recursos da sua calculadora científica, mas não deixe de apresentar os detalhes da sua solução.

(d) O par interno pode ser posto em equilíbrio mecânico por meios de forças puramente coulombianas, mas o par externo não. Como você explica o equilíbrio mecânico das cargas em $x = \pm a$?



SOLUÇÃO 1.3 :

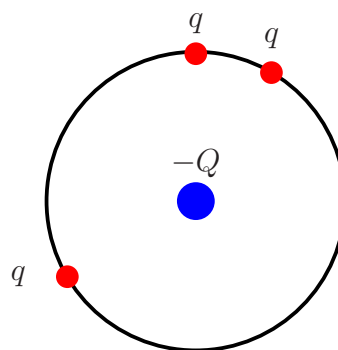
(d) Evidentemente são necessárias forças mecânicas adicionais para manter as cargas nas extremidades em equilíbrio mecânico. ■

PROBLEMA 1.4 Considere um aro circular e três contas esféricas de raio desprezível, carregadas com cargas positivas de magnitude q e inicialmente dispostas em pontos arbitrários sobre o aro. As contas podem deslizar livremente ao longo do anel até que o equilíbrio se estabeleça. Quando isto acontece, para cada uma das contas carregadas, a força de vínculo, a força que o aro exerce sobre a conta, e a repulsão coulombiana devido às outras duas contas cancelam-se mutuamente. Entretanto, se colocarmos uma carga puntiforme adicional $-Q$ no centro geométrico do aro é possível estabelecer o equilíbrio *e ao mesmo tempo anular as forças de vínculo que impedem que as cargas escapem do anel!*. Ou seja: o aro poderia ser removido e a configuração permaneceria em equilíbrio (instável). Isto acontecerá para um dado valor da carga central, ver N. H. Pasqua e P. D. Emmel, Rev. Bras. Ens. Física **23** (2001) 184. Neste caso, o equilíbrio (instável) ficará determinada por forças puramente eletrostáticas.

- (a) Faça uso de argumentos de simetria e refaça o desenho da figura ao lado mostrando as contas carregadas sobre o aro já na configuração de equilíbrio.
- (b) Represente por meio de flechas orientadas e notação apropriada a força que atua sobre uma conta no anel no caso em que a carga central não está presente.
- (c) Mostre que para que as forças que o aro exerce sobre as cargas sejam nulas, a magnitude da carga central $|Q|$ deve valer:

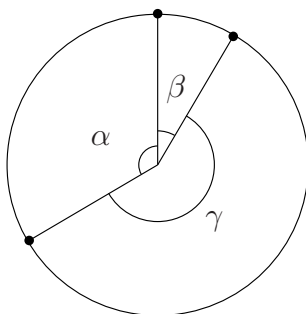
$$|Q| = \frac{q\sqrt{3}}{3}.$$

Observe que o resultado independe do raio do aro.



SOLUÇÃO 1.4:

(a) Considere a figura abaixo:



A soma dos ângulos α , β e γ deve ser igual a 2π . Como as cargas são idênticas, por simetria teremos obrigatoriamente $\alpha = \beta = \gamma$. Portanto, $3\alpha = 2\pi$, e conseqüentemente:

$$3\alpha = 2\pi \quad \text{logo,} \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

(b) Os vetores \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 representam as forças coulombianas repulsivas exercidas pelas cargas puntiformes. Observe que os módulos de \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 são iguais, i.e.: $\|\mathbf{F}_1\| = \|\mathbf{F}_2\|$. O vetor \mathbf{F}_3 representa a força de vínculo que o aro exerce sobre a carga em questão. Naturalmente,

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0.$$

Diagramas similares podem ser feitos para as outras duas cargas sobre o aro.

(c) O papel exercido pela força de vínculo será exercido agora pela força de atração coulombiana que se deve à carga central $-Q$, pois a idéia é substituir a força de vínculo por esta força. O diagrama de forças a é o mostrado na Figura ??, *mas agora \mathbf{F}_3 deve ser interpretada como representando a força de atração coulombiana entre a carga central negativa e a carga puntiforme positiva sobre o aro*. Para que a conta carregada fique em equilíbrio sob a ação de forças puramente eletrostáticas devemos novamente impor a condição:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0.$$

Fazendo uso da geometria mostrada na figura, a condição acima pode ser escrita na forma:

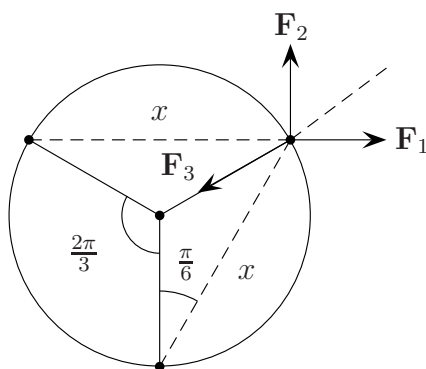
$$2 \times \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{q|Q|}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

onde x é o comprimento da corda da circunferência de raio R . Da geometria vemos que:

$$x = 2R \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}R.$$

Elevando ao quadrado e substituindo na condição de equilíbrio, obtemos:

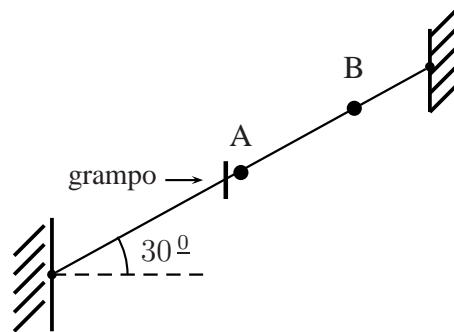
$$|Q| = \frac{\sqrt{3}q}{3}.$$



■

PROBLEMA 1.5 Duas pequenas contas idênticas de matéria plástica A e B, de massa $m = 10^{-4}$ kg e carga $q = \sqrt{2} \times 10^{-8}$ C, podem deslizar sem atrito ao longo de um arame esticado e preso a dois suportes fixos. O arame forma um ângulo de 30° graus com a horizontal, conforme mostrado na figura. Um grampo fixo impede que a conta A deslize fio abaixo.

- Suponha o sistema em equilíbrio mecânico e calcule a separação entre as duas contas carregadas.
- Calcule a intensidade da força que o grampo exerce sobre a conta A.



SOLUÇÃO 1.5 :

(a) A força resultante sobre B deve ser nula, logo, veja a figura (a):

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = mg \operatorname{sen} 30^\circ,$$

segue que:

$$r = \sqrt{\frac{2}{4\pi\epsilon_0 mg}} q.$$

Substituindo os valores dados obtemos $r = 6 \text{ cm}$.

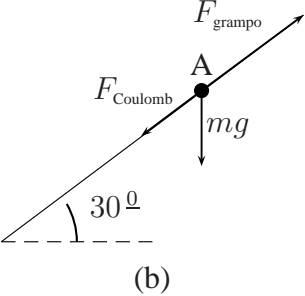
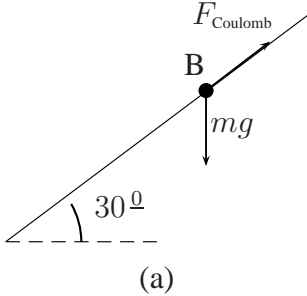
(b) Como A está em equilíbrio estático, veja o diagrama, temos:

$$F_{\text{grampo}} = F_{\text{Coulomb}} + mg \operatorname{sen} 30^\circ,$$

ou

$$F_{\text{grampo}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{mg}{2}.$$

Substituindo os valores dados obtemos $F_{\text{grampo}} = 1 \times 10^{-3} \text{ N}$.



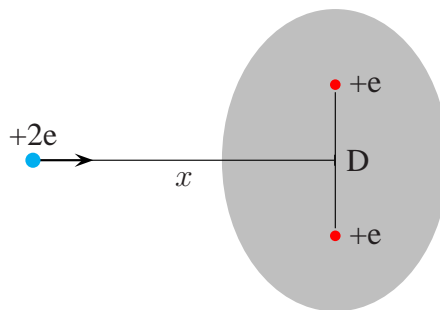
■

Capítulo 2

Campo Elétrico

PROBLEMA 2.1 A figura abaixo representa um modelo clássico simples para a colisão entre uma partícula α (alfa), isto é, um núcleo de hélio, $q_\alpha = +2e$, e uma molécula de hidrogênio, H_2 (não faça confusão com o hidrogênio atômico!). A partícula α move-se sobre em uma trajetória que corta em duas partes iguais o segmento de reta que une os dois prótons puntiformes separados por uma distância D . Os elétrons da molécula são representados por uma nuvem simétrica de carga igual a $-2e$. Suponha que a velocidade da partícula α seja muito alta, despreze a sua interação com a nuvem eletrônica. Considere os prótons fixos.

- (a) Determine uma expressão para o campo elétrico que atua sobre a partícula α quando esta está a uma distância x do centro da molécula.
- (b) Determine a força sobre a partícula α nas condições descritas no item anterior.
- (c) Para que valor de x esta força é um extremo?



SOLUÇÃO 2.1 :

- (a) Por simetria considere apenas a projeção do campo elétrico na direção da velocidade da partícula alfa incidente:

$$E_x = -2 E \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \frac{x}{r},$$

ou,

$$E_x = -\frac{2e}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3},$$

onde:

$$r = (x^2 + D^2/4)^{1/2}.$$

Segue que

$$E_x = -\frac{2e}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + D^2/4)^{3/2}}.$$

- (b) A força resultante sobre a partícula alfa é:

$$F_x = -2e E_x = -\frac{4e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + D^2/4)^{3/2}}.$$

- (c) Para determinar o extremo calculamos:

$$\frac{dF_x}{dx} = -\frac{4e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dx} \frac{x}{(x^2 + D^2/4)^{3/2}}.$$

Efetuada o cálculo da derivada obtemos:

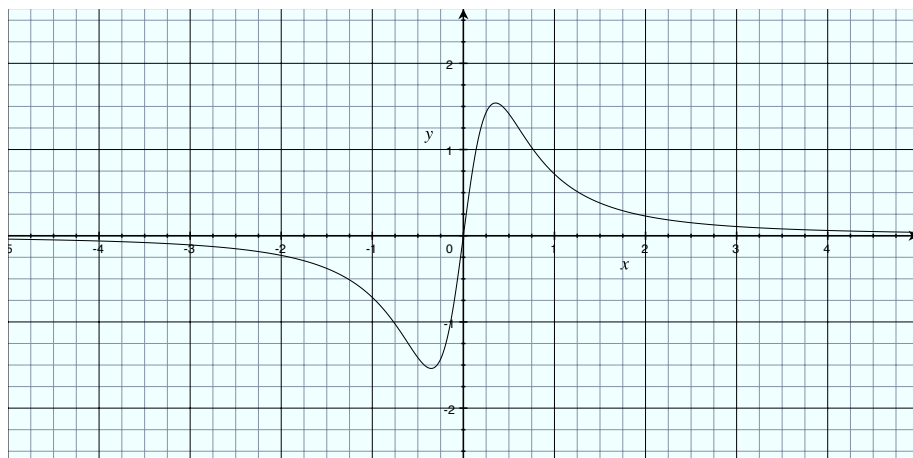
$$\frac{dF_x}{dx} = -\frac{4e^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x^2 + D^2/4)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2 + D^2/4)^{5/2}} \right].$$

Fazendo:

$$\frac{dF_x}{dx} = 0,$$

obtemos finalmente:

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{4} D.$$



PROBLEMA 2.2 Duas cargas puntiformes de mesmo sinal e mesma magnitude estão separadas por uma distância igual a $2a$. A meia distância entre as cargas e perpendicularmente ao segmento de reta que as une temos um plano.

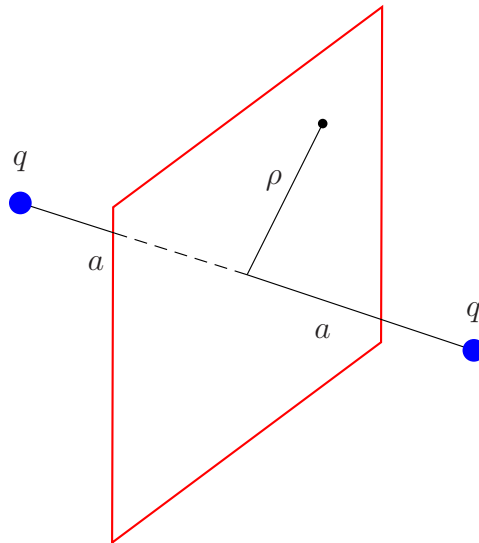
- (a) Mostre que o lugar geométrico dos pontos do plano nos quais o campo elétrico é um extremo é uma circunferência de raio igual a $a/\sqrt{2}$.
- (b) Mostre que o extremo encontrado no item anterior é um máximo.
- (c) Faça um gráfico do campo elétrico sobre o plano em função da distância radial à origem.

SOLUÇÃO 2.2 :

(a) A componente radial do campo elétrico sobre o plano se escreve:

$$E_\rho = 2E \sin \theta = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Para determinar os extremos calculamos:



$$\frac{dE_\rho}{d\rho} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}} - \frac{3\rho^2}{(a^2 + \rho^2)^{5/2}} \right].$$

Agora fazemos:

$$\frac{dE_\rho}{d\rho} = 0.$$

Segue então que:

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

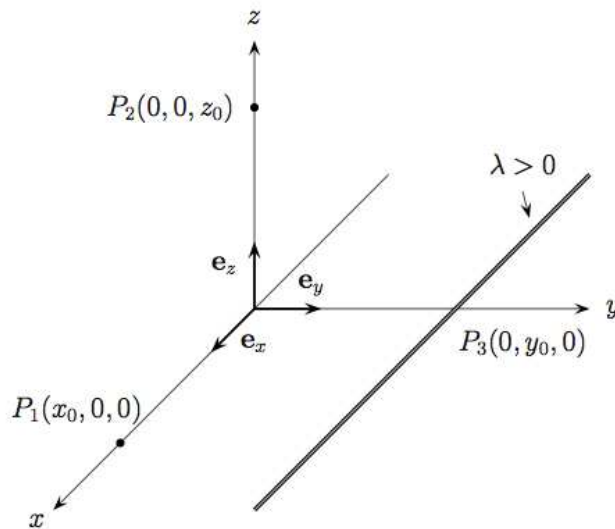
(b) Basta calcular a derivada segunda do campo em relação a ρ .

■

PROBLEMA 2.3 Uma distribuição linear uniforme de carga positiva λ de extensão infinita jaz no plano xy paralelamente ao eixo x a uma distância y_0 desse eixo, veja a figura ao lado.

(a) Calcule o vetor o campo elétrico \mathbf{E} no ponto de observação $P_1(x_0, 0, 0)$.

(b) Calcule o vetor o campo elétrico \mathbf{E} no ponto de observação $P_2(0, 0, z_0)$.



SOLUÇÃO 2.3 :

(a) O campo elétrico de um fio infinito uniformemente carregado pode ser calculado com a lei de Coulomb, ou mais facilmente com a lei de Gauss. O resultado é:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_{\perp}}, \quad (\text{módulo!})$$

onde r_{\perp} é a distância perpendicular ao fio. Adaptando o resultado ao caso em tela obtemos:

$$\mathbf{E} = E_y \hat{\mathbf{y}} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y_0} \hat{\mathbf{y}}$$

(b)

$$\mathbf{E} = E_y \hat{\mathbf{y}} + E_z \hat{\mathbf{z}}$$

Denotando por θ o ângulo entre o vetor campo elétrico e o eixo y :

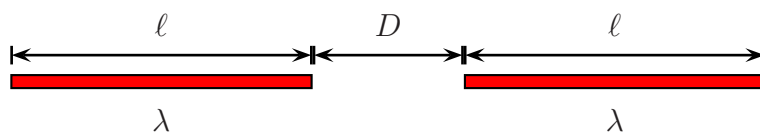
$$E_y = E \cos \theta = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{y_0}{y_0^2 + z_0^2}$$

$$E_z = E \sen \theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{z_0}{y_0^2 + z_0^2}$$

Note que se fizermos $z_0 = 0$, obtemos o resultado do item (a)! ■

PROBLEMA 2.4 Considere dois bastões idênticos de material plástico de comprimento ℓ uniformemente carregados com uma densidade de carga λ . Os dois bastões jazem sobre o eixo x positivo e suas extremidades mais próximas uma da outra estão separadas por uma distância fixa D , veja a figura.

- (a) Determine a força eletrostática entre os dois bastões.
- (b) Determine a força eletrostática entre os dois bastões no limite $D \gg \ell$.



SOLUÇÃO 2.4 :

(a) Considere o primeiro bastão, o que está a esquerda. Então:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(x - x')^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{(x - x')^2},$$

onde $x > \ell$ é o ponto de observação e $x' \in [0, \ell]$ é um ponto dentro da distribuição.

Integrando

$$E_x(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\ell \frac{dx'}{(x - x')^2}.$$

Fazendo $u = x - x'$ temos

$$E_x(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_x^{x-\ell} \frac{(-du)}{u^2}.$$

Efetutando a integral

$$E_x(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x-\ell} - \frac{1}{x} \right) \quad x > \ell.$$

Agora podemos calcular a força sobre um elemento de carga dq do segundo bastão:

$$dF_x = dq E_x = \lambda dx E_x.$$

Integrando

$$F_x = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell+D}^{2\ell+D} \left(\frac{1}{x-\ell} - \frac{1}{x} \right) dx.$$

Integrando e simplificando

$$F_x = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(\ell+D)^2}{D(2\ell+D)} \right].$$

(b) Queremos o limite $D \gg \ell$. Rescrevemos F_x na forma

$$\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \left[2 \ln \left(1 + \frac{\ell}{D} \right) - \ln \left(1 + \frac{2\ell}{D} \right) \right].$$

Usando

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots, \quad -1 < x \leq 1.$$

obtemos

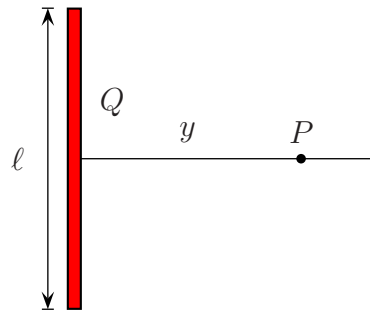
$$F_x \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda^2 \ell^2}{D^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 D^2},$$

com $q = \lambda\ell$. Para $D \gg \ell$, os bastões comportam-se como cargas puntiformes.

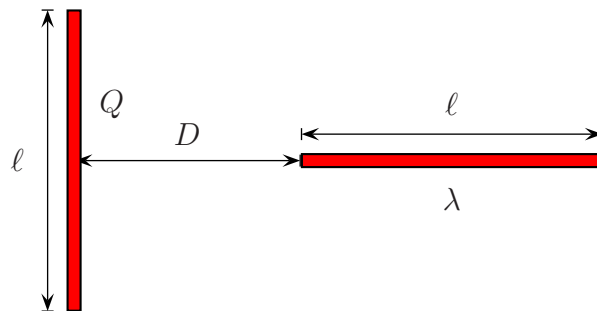
■

PROBLEMA 2.5 Considere um bastão fino de plástico de comprimento ℓ uniformemente carregado com uma carga Q .

(a) Calcule o campo elétrico gerado pela distribuição em um ponto P sobre a mediana, isto é: a reta cujos pontos são equidistante dos extremos do bastão, a uma distância $y > 0$ do seu centro geométrico.

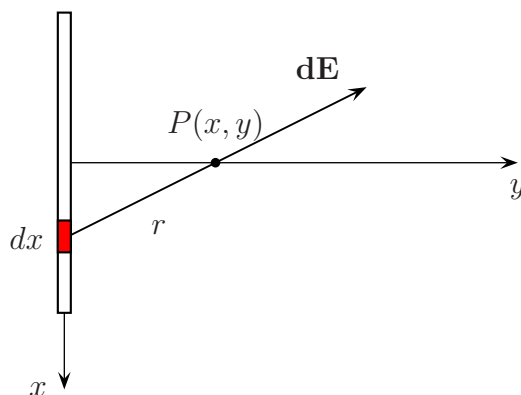


- (b) Um segundo bastão de mesmo comprimento ℓ e uniformemente carregado com uma densidade linear de carga λ é colocado perpendicularmente ao primeiro bastão, sobre a mediana. A extremidade mais próxima ao primeiro bastão fica a uma distância D do mesmo. Calcule a força que o primeiro bastão exerce sobre o segundo. Dê sua resposta na forma de uma integral.



SOLUÇÃO 2.5 :

- (a) Convém começar calculando a contribuição ao campo elétrico de um elemento de carga dq no ponto arbitrário P da mediana. Considere a figura a seguir. Levando em conta a simetria vemos que é suficiente calcular a componente de $d\mathbf{E}$ perpendicular ao bastão. Portanto, começaremos escrevendo:



$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \frac{y}{r},$$

onde $\lambda = Q/\ell$. Como $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda y dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Pelo princípio da superposição:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda y \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Efetuando a integral com o auxílio da fórmula:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$

obtemos

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{y \sqrt{\ell^2/4 + y^2}}.$$

- (b) Considere um elemento de carga dq do bastão horizontal. A força eletrostática sobre este elemento se escreve:

$$dF_y = dq E_y = \lambda dy E_y,$$

ou, mais explicitamente:

$$dF_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy Q}{y \sqrt{\ell^2/4 + y^2}}.$$

A força eletrostática sobre o bastão horizontal será:

$$F_y = \int dF_y,$$

ou,

$$F_y = \frac{\lambda Q}{4\pi\epsilon_0} \int_D^{D+\ell} \frac{dy}{y \sqrt{\ell^2/4 + y^2}}.$$

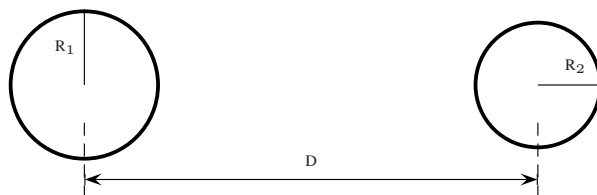
Efetuada a integral obtemos:

$$F_y = \frac{2}{\ell} \frac{\lambda Q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(\ell/2 + \sqrt{\ell^2/4 + D^2}) / D}{(\ell/2 + \sqrt{\ell^2/4 + (D + \ell)^2}) / (D + \ell)} \right].$$

■

PROBLEMA 2.6 Duas superfícies esféricas não-condutoras de raios R_1 e $R_2 < R_1$ são uniformemente carregadas com distribuições eletrostáticas de mesma densidade superficial de carga σ . A distância entre os seus centros é $d > R_1 + R_2$.

- Determine o campo elétrico resultante no centros geométricos respectivos das superfícies esféricas.
- Determine o campo elétrico resultante no ponto médio do segmento de reta que une os centros geométricos das superfícies.
- Determine a intensidade da força elétrica entre as duas esferas.



SOLUÇÃO 2.6:

- (a) Como as esferas são não-condutoras, não temos que levar em conta rearranjos de cargas devido à indução. No centro da esfera 1, o campo elétrico se escreve:

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 D^2} \hat{\mathbf{e}}_r = -\frac{\sigma 4\pi R_2^2}{4\pi\epsilon_0 D^2} \hat{\mathbf{e}}_r = -\frac{\sigma R_2^2}{\epsilon_0 D^2} \hat{\mathbf{e}}_r.$$

No centro da esfera 2, o campo é dado por:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 D^2} \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\sigma 4\pi R_1^2}{4\pi\epsilon_0 D^2} \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\sigma R_1^2}{\epsilon_0 D^2} \hat{\mathbf{e}}_r.$$

- (b) Pelo princípio da superposição:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma (R_1^2 - R_2^2)}{\epsilon_0 D^2} \hat{\mathbf{e}}_r.$$

O campo resultante jaz sobre a reta que une as duas esferas. Como $R_1 > R_2$, o campo resultante aponta da esquerda para a direita.

- (c)

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{41\sigma^2 R_1^2 R_2^2}{\epsilon_0 D^2}.$$

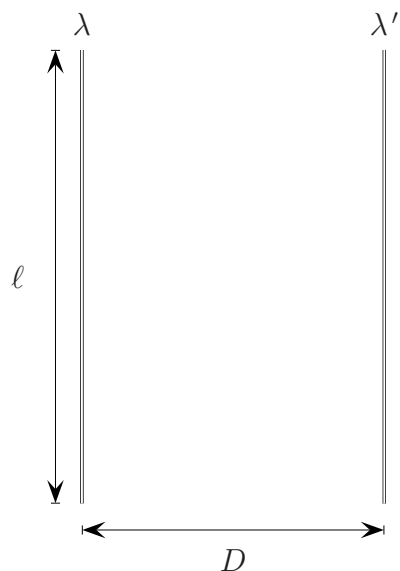
■

PROBLEMA 2.7 Considere dois bastões finos de mesmo comprimento finito ℓ , paralelos e separados por uma distância D , veja a figura. Um dos bastões é uniformemente carregado com uma densidade linear de carga λ e o outro com uma densidade linear de carga λ' , ambas medidas em coulombs por metro.

- (a) Mostre que a magnitude da força entre os bastões é dada por:

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{\lambda \lambda'}{2\pi\epsilon_0} \left[\sqrt{1 + \frac{\ell^2}{D^2}} - 1 \right],$$

- (b) Analise a situação em que $\ell/D \ll 1$ e mostre que recuperamos a lei de Coulomb.



SOLUÇÃO 2.7 :

- (a) Por simetria, a força resultante que um bastão exerce sobre o outro será perpendicular aos mesmos, logo, na direção do eixo x . Portanto, um modo de resolver o problema é calcular a componente perpendicular do campo elétrico do bastão em um ponto P , usar este resultado para calcular a força sobre um elemento infinitesimal do segundo bastão e depois usar o princípio da superposição e integrar.

Suponha o bastão uniformemente carregado com a densidade de carga λ sobre o eixo y com uma extremidade em $y = -\ell/2$ e a outra em $y = \ell/2$. Considere um ponto arbitrário P de coordenadas $(x, y, 0)$. Seja y' a coordenada que descreve o bastão. Um elemento de carga $dq = \lambda dy'$ contribui com $d\mathbf{E}$ ao campo elétrico total \mathbf{E} em P . A projeção de $d\mathbf{E}$ perpendicular ao bastão se escreve, veja a figura:

$$dE_{\perp}(P) = dE_x(x, y) = \|\mathbf{E}(x, y)\| \cos \theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{x}{r},$$

onde,

$$r = \sqrt{[(y - y')^2 + x^2]}^{1/2},$$

logo,

$$dE_x(x, y) = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \frac{dy'}{[(y - y')^2 + x^2]^{3/2}}.$$

Usando o princípio da superposição:

$$E_x(x, y) = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dy'}{[(y - y')^2 + x^2]^{3/2}}.$$

Convém fazer a mudança de variáveis:

$$u = y - y', \quad \therefore du = -dy',$$

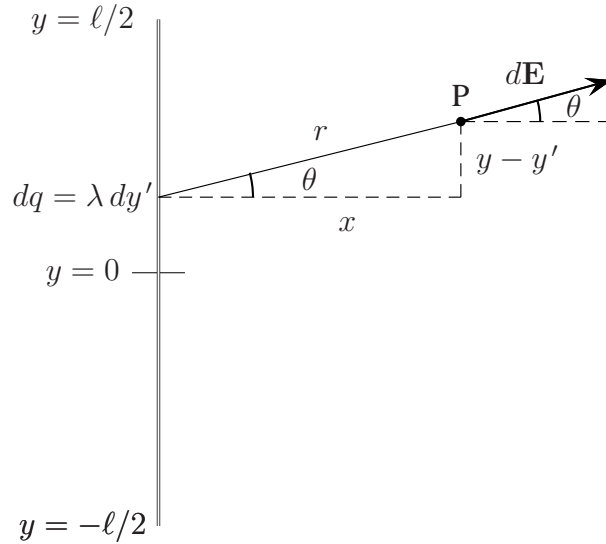
e rescrever:

$$E_x(x, y) = -\frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{y+\ell/2}^{y-\ell/2} \frac{du}{(u^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{y-\ell/2}^{y+\ell/2} \frac{du}{(u^2 + x^2)^{3/2}}.$$

A integral pode ser facilmente efetuada com o auxílio de uma tabela de integrais. Segue então que:

$$\begin{aligned} E_x(x, y) &= \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{u}{x^2 \sqrt{u^2 + x^2}} \right]_{y-\ell/2}^{y+\ell/2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \left[\frac{y + \ell/2}{\sqrt{(y + \ell/2)^2 + x^2}} - \frac{y - \ell/2}{\sqrt{(y - \ell/2)^2 + x^2}} \right] \end{aligned}$$

Este é o campo elétrico do primeiro bastão em um ponto P do plano xy . O segundo bastão carregado é colocado em $x = \text{constante}$, com as extremidades em $y = \ell/2$ e $y = -\ell/2$. A força sobre um elemento de carga $dq = \lambda' dy$ do segundo bastão é:



$$dF_x(x, y) = \lambda' E_x(x, y) dy,$$

e a força total:

$$F_x(x) = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dq E_x(x, y) = \frac{\lambda \lambda'}{4\pi\epsilon_0 x} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left[\frac{y + \ell/2}{\sqrt{(y + \ell/2)^2 + x^2}} - \frac{y - \ell/2}{\sqrt{(y - \ell/2)^2 + x^2}} \right] dy.$$

Convém introduzir a variável $\omega = y \pm \ell/2$; o sinal de negativo para a primeira integral e o positivo para a segunda. Neste caso, teremos

$$F_x(x) = \frac{\lambda \lambda'}{4\pi\epsilon_0 x} \left[\int_0^\ell \frac{\omega d\omega}{\sqrt{\omega^2 + x^2}} - \int_{-\ell}^0 \frac{\omega d\omega}{\sqrt{\omega^2 + x^2}} \right].$$

Agora uma segunda mudança de variável: $\omega = -\omega'$, permite escrever:

$$F_x(x) = \frac{\lambda \lambda'}{4\pi\epsilon_0 x} \left[\int_0^\ell \frac{\omega d\omega}{\sqrt{\omega^2 + x^2}} - \int_\ell^0 \frac{(-\omega')(-d\omega')}{\sqrt{\omega'^2 + x^2}} \right].$$

Como ω' é uma variável muda podemos reunir as duas integrais em uma única:

$$F_x(x) = \frac{\lambda \lambda'}{2\pi\epsilon_0 x} \int_0^\ell \frac{\omega d\omega}{\sqrt{\omega^2 + x^2}}$$

Efetuada a integral obtemos finalmente

$$F_x(x) = \frac{\lambda \lambda'}{2\pi\epsilon_0 x} \left(\sqrt{\ell^2 + x^2} - x \right),$$

resultado que pode ser reescrito na forma:

$$F_x(x) = \frac{\lambda \lambda'}{2\pi\epsilon_0} \left(\sqrt{\frac{\ell^2}{x^2} + 1} - 1 \right).$$

A força que o primeiro bastão exerce sobre o segundo é:

$$\mathbf{F}(x) = F_x(x) \hat{\mathbf{x}},$$

e o seu módulo:

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{\lambda \lambda'}{2\pi\epsilon_0} \left[\sqrt{1 + \frac{\ell^2}{D^2}} - 1 \right].$$

(b) Como $x^2 \gg \ell^2$, podemos escrever

$$\sqrt{1 + \frac{\ell^2}{D^2}} \approx 1 + \frac{\ell^2}{2x^2},$$

logo,

$$F_x(x) \approx \frac{\lambda \lambda'}{2\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{\ell^2}{2x^2} - 1 \right) = \frac{\lambda \lambda'}{2\pi\epsilon_0} \frac{\ell^2}{2x^2}.$$

Como os bastões são finitos, as cargas de cada um deles são: $q = \lambda \ell$ e $q' = \lambda' \ell$, respectivamente. Portanto:

$$F_x(x) \approx \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 x^2}.$$

Quando os bastões estão muito afastados um do outro os mesmos comportam-se como cargas puntiformes. ■

PROBLEMA 2.8 Considere dois anéis finos, concêntricos, de raios $a = 1$ cm e $b = 2$ cm, uniformemente carregados com cargas $q_a = -q$ e $q_b = \sqrt{27}q$, respectivamente.

- (a) Determine os pontos críticos, isto é: pontos para os quais o campo elétrico é nulo, desta configuração.
- (b) Refaça o item anterior supondo que $a = 1$ cm, $q_a = -q$, $q_b = \sqrt{27}q$ e $\lambda_a = \lambda_b$; onde λ_j são as densidades lineares de carga em cada anel.

SOLUÇÃO 2.8 :

- (a) Por simetria, os pontos críticos estarão sobre o eixo perpendicular ao plano que contém os anéis e que passa pelo centro geométrico comum dos mesmos. Façamos o eixo z das coordenadas cartesianas coincidir com esse eixo de simetria da configuração e coloquemos a origem no centro geométrico comum dos anéis. Sabemos que para um único anel fino de raio a e carga q , o campo elétrico sobre o eixo de simetria é dado por:

$$E_z(0, 0, z) = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Aqui, pelo princípio da superposição, teremos

$$E_z(0, 0, z) = E_{az}(0, 0, z) + E_{bz}(0, 0, z),$$

onde,

$$E_{az}(0, 0, z) = -\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}},$$

e,

$$E_{bz}(0, 0, z) = \frac{\sqrt{27}qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Portanto,

$$E_z(0, 0, z) = -\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{\sqrt{27}qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Os pontos críticos são determinados com a condição $E_z(0, 0, z) = 0$. Evidentemente, $z = z_1 = 0$ é um dos pontos críticos outros dois são determinados pelas raízes da equação:

$$-\frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{\sqrt{27}}{(z^2 + b^2)^{3/2}} = 0.$$

Manipulações simples permitem rescrever a equação acima na forma:

$$2z^2 = b^2 - 3a^2 = 4 \text{ cm}^2 - 3 \text{ cm}^2.$$

Segue então que:

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ cm}, \quad e \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

são os outros dois pontos críticos.

- (b) Observe que b , o raio do anel maior, não é dado, mas podemos calculá-lo da seguinte forma: como $\lambda_a = -\lambda_b$, temos:

$$\frac{q}{2\pi a} = \frac{\sqrt{27} q}{2\pi b}.$$

Segue que:

$$b^2 = 27 a^2.$$

Como (veja o item anterior):

$$2z^2 = b^2 - 3a^2,$$

temos,

$$2z^2 = (27 - 3)a^2 = 24a^2,$$

logo,

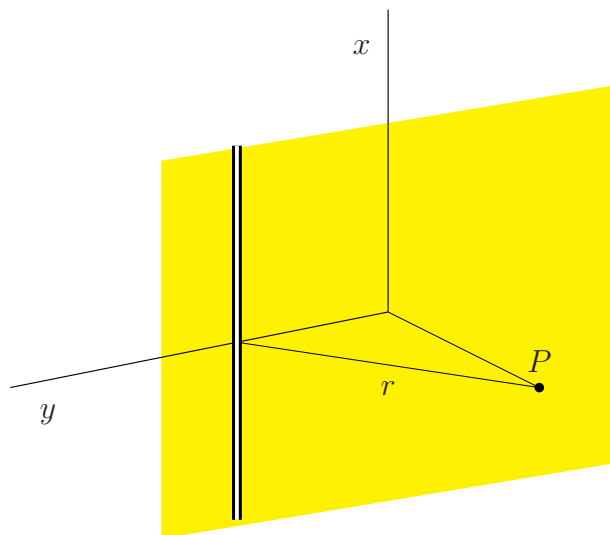
$$z = \pm\sqrt{12} \text{ cm}.$$

Assim, os pontos críticos agora são: $z_1 = 0$, como antes, $z_2 = \sqrt{12} \text{ cm}$ e $z_3 = -\sqrt{12} \text{ cm}$. ■

PROBLEMA 2.9 Considere um plano de extensão infinita, uniformemente carregado com uma densidade superficial de carga σ , medida em coulombs por metro quadrado.

- (a) Calcule o campo elétrico gerado por essa distribuição de carga usando a lei de Coulomb e o princípio da superposição. **Sugestão:** divida o plano em tiras de comprimento infinito e largura infinitesimal dy , veja a Figura ??, e adapte o resultado obtido para o campo de um fio infinito uniformemente carregado.

- (b) Refaça o cálculo com a lei de Gauss.
- (c) Como você calcularia o campo elétrico se a superfície em questão fosse finita?



SOLUÇÃO 2.9 :

- (a) Consideremos o semi-espço $z > 0$. Por simetria o campo elétrico em P deve ser perpendicular ao plano infinito carregado e no máximo ser uma função de z , a coordenada sobre o eixo perpendicular ao plano. Podemos escrever então:

$$\mathbf{E}(x, y, z) \rightarrow \mathbf{E}(z) = E_z(z) \hat{\mathbf{z}}.$$

Para calcular $E_z(z)$ faremos uso do resultado obtido para o campo de um fio infinito uniformemente carregado com uma densidade linear de carga λ :

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{e}}_r,$$

onde r aqui é a distância perpendicular ao fio. Considere a tira carregada de comprimento infinito e largura dy mostrada na Figura ???. Como somente a componente do campo perpendicular ao plano é relevante, temos:

$$dE_z(P) = \|d\mathbf{E}\| \cos \theta = \frac{\sigma dy}{r} \frac{z}{r},$$

onde fizemos a substituição $\lambda \rightarrow \sigma dy$, escrevemos:

$$\cos \theta = \frac{z}{r},$$

veja a Figura 2.1. Como $r = \sqrt{z^2 + y^2}$. Segue que,

$$dE_z(z) = \frac{\sigma z dy}{z^2 + y^2}.$$

Portanto,

$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{z^2 + y^2}.$$

Convém rescrever a integral acima na forma:

$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{\pi\epsilon_0} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_0^{\ell} \frac{dy}{z^2 + y^2},$$

onde também levamos em conta a paridade do integrando. Fazendo uso da integral:

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{u}{a} \right),$$

obtemos:

$$E_z(z) = \frac{\sigma z}{\pi\epsilon_0} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \arctan \left(\frac{\ell}{z} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

O campo elétrico em todo o espaço se escreve:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}, & z > 0; \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}, & z < 0. \end{cases}$$

Observe que o campo é descontínuo em $z = 0$.

- (b) A lei de Gauss leva facilmente ao resultado acima. De fato, este é um dos primeiros exemplos da aplicação da lei de Gauss que os livros de texto apresentam. Convém salientar que isso só é possível em razão do alto grau de simetria da distribuição.

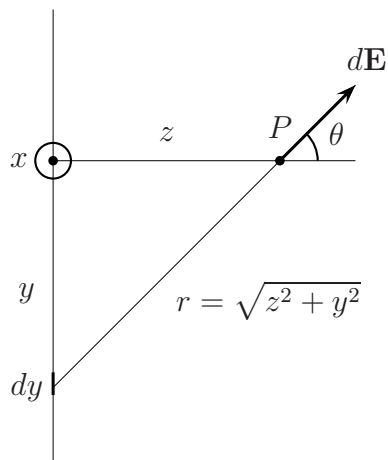


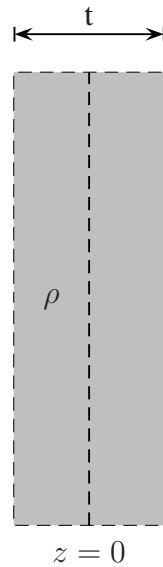
Figura 2.1: Geometria para o cálculo do campo elétrico gerado por uma distribuição planar de carga.

(c) A lei de Gauss embora válida não é uma ferramenta útil para calcular o campo. A razão é a diminuição do grau de simetria quando a distribuição se torna finita. O campo ainda apresentará simetria, mas não o suficiente para que a lei de Gauss possa ser aplicada facilmente.



PROBLEMA 2.10 Considere uma distribuição laminar de carga descrita por uma densidade uniforme ρ . A espessura da distribuição vale t e o plano $z = 0$ divide a distribuição em duas partes simétricas, veja a figura. Exceto na direção OZ , a distribuição estende-se até ao infinito.

- (a) Calcule o campo elétrico \mathbf{E} no interior da distribuição, i.e.: para $\|z\| < t/2$.
- (b) Calcule o campo elétrico \mathbf{E} fora da distribuição, i.e.: para $\|z\| > t/2$.



SOLUÇÃO 2.10 :

(a) Por simetria,

$$\mathbf{E} = E(z)\hat{\mathbf{z}}, \quad \text{e} \quad \mathbf{E}(z = 0) = 0.$$

Aplicando a lei de Gauss a uma superfície gaussiana cilíndrica com uma tampa contida no plano $z = 0$ e a outra no plano $z = \| \text{constante} \| < \| t/2 \|$, teremos:

$$E(z) A = \frac{\rho A z}{\epsilon_0},$$

onde A é a área da tampa. Segue então que:

$$E(z) = \frac{\rho z}{\epsilon_0},$$

para $-t/2 < z < t/2$.

(b) Aplicando a lei de Gauss a uma superfície gaussiana cilíndrica com uma tampa contida no plano $z = -t/2 - \Delta$ e a outra no plano $z = t/2 + \Delta$ com $\Delta > 0$, teremos:

$$2 E(z) A = \frac{\rho A t}{\epsilon_0}.$$

Segue que,

$$E(z) = \frac{\rho t}{2 \epsilon_0}.$$

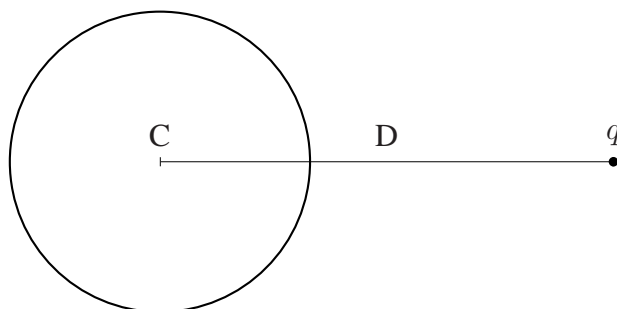
Portanto, podemos escrever:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho t}{2 \epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}, & z > t/2; \\ -\frac{\rho t}{2 \epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}, & z < -t/2. \end{cases}$$

■

PROBLEMA 2.11 Uma carga puntiforme positiva de magnitude q é levada até um ponto P próximo a uma esfera condutora neutra e isolada. A distância entre o ponto P e o centro da esfera é D . A carga puntiforme induzirá um rearranjo na distribuição de carga da esfera.

- Determine o campo elétrico criado pela carga puntiforme no centro da esfera.
- Determine o campo elétrico criado pelo rearranjo da distribuição de cargas na superfície da esfera no centro da mesma.



SOLUÇÃO 2.11 :

(a) Obviamente,

$$\mathbf{E}_q = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{D^2} \hat{\mathbf{e}}_r,$$

onde supusemos que a origem do sistema de referência está no centro da esfera.

(b) Como o campo resultante dentro da esfera condutora deve ser zero, em qualquer ponto interior:

$$\mathbf{E}_q + \mathbf{E}_e = 0.$$

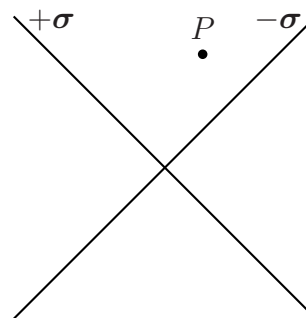
Em particular, o campo criado pelo rearranjo da distribuição de cargas na superfície da esfera no centro da mesma será:

$$\mathbf{E}_e = -\mathbf{E}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{D^2} \hat{\mathbf{e}}_r.$$

■

PROBLEMA 2.12 Considere duas distribuições planas da carga de extensão infinita e densidades uniformes de mesmo valor absoluto σ , mas de sinais algébricos diferentes. As distribuições interceptam-se formando ângulos retos, veja a figura ao lado.

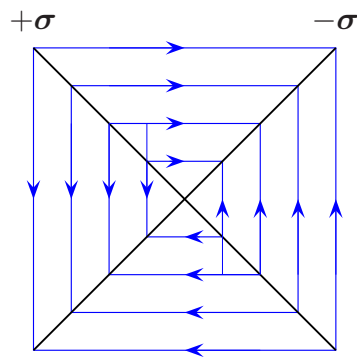
- (a) Calcule a intensidade do campo elétrico no ponto P indicado na figura ao lado.
- (b) Faça um esboço das linhas de força associadas com este sistema. (Você não precisa criar uma obra de arte, mas faça um desenho claro, bem feito!)

**SOLUÇÃO 2.12 :**

- (a) Pelo princípio da superposição, o campo elétrico em P é igual a $\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_+(P) + \mathbf{E}_-(P)$, com $\mathbf{E}_\pm(P) = \pm\sigma/(2\epsilon_0) \hat{\mathbf{n}}$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o versor unitário normal à distribuição. Segue que:

$$\|\mathbf{E}(P)\| = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right)^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{2}.$$

(b) Algumas das linhas de força do campo elétrico estão representadas abaixo:



Capítulo 3

Lei de Gauss

PROBLEMA 3.1 *Exemplo de distribuição não-uniforme.* Uma distribuição esférica de carga é descrita pela densidade volumar:

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{e^{-x}}{x}, \quad 0 < x < \infty,$$

onde $x = \kappa r$, com $\kappa = 3 \text{ m}^{-1}$, $\rho_0 = 30 \times 10^{-12} \text{ C/m}^3$ e r , a distância radial ao centro da distribuição, em metros. Calcule a carga total associada com essa distribuição.

SOLUÇÃO 3.1 : A distribuição dada não é uniforme, logo, temos que considerar a carga dq em um volume infinitesimalmente pequeno $d^3\mathbf{r}$:

$$dq = \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r},$$

e integrar, isto é: somar sobre a distribuição contínua. A carga q será portanto dada pela integral de volume:

$$q = \int \int \int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}.$$

Como temos simetria esférica:

$$d^3\mathbf{r} = 4\pi r^2 dr,$$

que é como fica o elemento de volume em coordenadas esféricas após a integração sobre os ângulos polar (θ) e azimutal (ϕ), já que a distribuição só depende de r . Assim:

$$q = \int_0^\infty \rho_0 \frac{e^{-\kappa r}}{\kappa r} 4\pi r^2 dr$$

Como $x = \kappa r$, temos $dx = \kappa dr$. Logo, a integral se rescreve

$$q = \frac{4\pi \rho_0}{\kappa^3} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} x^2 dx = \frac{4\pi \rho_0}{\kappa^3} \int_0^\infty e^{-x} x dx.$$

Efetuada a integral obtemos finalmente:

$$q = 4\pi \rho_0 \kappa^3.$$

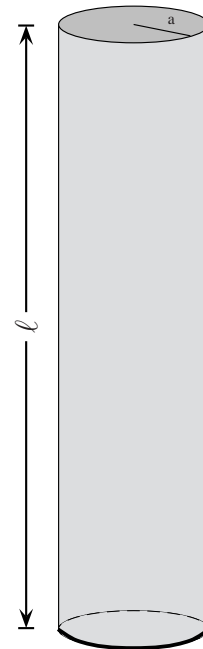
A integral pode ser efetuada consultando uma tabela ou empregando o seguinte truque: rescreva-a na forma:

$$\int_0^\infty e^{-x} x dx = \int_0^\infty \left[-\frac{d}{d\lambda} e^{-\lambda x} dx \right]_{\lambda=1} = -\frac{d}{d\lambda} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \right]_{\lambda=1} = 1.$$



PROBLEMA 3.2 Considere inicialmente uma distribuição cilíndrica uniforme de carga de raio a e comprimento ℓ . Suponha $\ell \gg a$. A densidade volumar de carga é ρ .

- (a) Determine o campo elétrico \mathbf{E} em um ponto no **interior** da distribuição.
- (b) Determine o campo elétrico \mathbf{E} em um ponto no **exterior** da distribuição.
- (c) O campo é contínuo sobre a superfície da distribuição? Agora suponha que a distribuição seja substituída por um cilindro metálico de mesmas dimensões carregado com uma densidade superficial de carga σ . Como antes suponha que $\ell \gg a$. O campo é contínuo sobre a superfície do cilindro? **Justifique as suas respostas.**



SOLUÇÃO 3.2 :

(a) A lei de Gauss + simetria axial + suposição de que $\ell \gg a$ levam a:

$$E 2\pi s\ell = \frac{\rho\pi s^2\ell}{\epsilon_0}$$

onde s é a distância perpendicular ao eixo do cilindro. Segue que:

$$E = \frac{\rho s}{2\epsilon_0}, \quad 0 \leq s \leq a$$

(b) Da mesma forma:

$$E 2\pi s\ell = \frac{\rho\pi R^2\ell}{\epsilon_0}$$

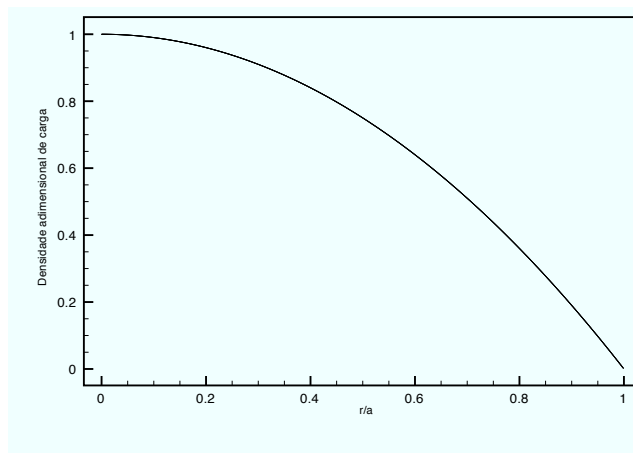
Segue que

$$E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 s}, \quad a \leq s < \infty$$

(c) O campo da distribuição é contínuo como pode ser facilmente verificado fazendo $s = a$ em (a) e (b). No entanto, se a distribuição for trocada por um cilindro metálico haverá uma discontinuidade na superfície do cilindro, pois o campo deste é nulo para $0 \leq s < a$. ■

PROBLEMA 3.3 Considere uma distribuição esférica de carga de raio a cuja densidade volumar de carga é descrita por $\rho(r) = \rho_0(1 - r^2/a^2)$, para $0 \leq r \leq a$, e por $\rho(r) = 0$ para $a < r < \infty$, onde ρ_0 é uma constante com dimensões de carga/volume. A figura ilustra o comportamento da densidade adimensional de carga, $\rho(r)/\rho_0$, como função de r/a .

- (a) Calcule a carga total da distribuição.
- (b) Calcule o campo elétrico em um ponto dentro da distribuição.
- (c) Calcule o campo elétrico em um ponto fora da distribuição.



SOLUÇÃO 3.3 :

(a)

$$Q = \int \int \int \rho dV = 4\pi\rho_0 \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr.$$

Efetuada a integra, segue que:

$$Q = \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\rho_0 \frac{4}{3} \pi a^3\right),$$

i.e.: a carga total vale 2/5 da carga que a esfera teria se a densidade de carga fosse uniforme e valesse ρ_0 .

(b) A simetria esférica do problema recomenda o uso da lei de Gauss como o meio mais simples de calcular o campo:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon_0},$$

onde $Q(r)$ é a carga encerrada por uma superfície esférica hipotética de raio $r < a$, (a gaussiana). Um cálculo similar ao anterior mostra que :

$$Q(r) = \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3\right).$$

Segue então que:

$$E(r) = \frac{2}{5} \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}, \quad 0 \leq r \leq a.$$

Compare este resultado com o caso em que a distribuição de carga é uniforme.

(c) Neste caso, a superfície esférica gaussiana envolve a carga total calculada no item (a), logo:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{\left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\rho_0 \frac{4}{3} \pi a^3\right)}{\epsilon_0}.$$

Segue que:

$$E(r) = \frac{2}{5} \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2}, \quad a \leq r < \infty.$$



PROBLEMA 3.4 Considere uma distribuição esférica de carga descrita pela densidade volumar de carga

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\kappa}{r^2} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

onde κ é uma constante com as dimensões apropriadas e r é a distância radial ao centro geométrico da distribuição. Determine o campo elétrico criado por esta distribuição em todo o espaço.

SOLUÇÃO 3.4 : Para $r < a$, o campo elétrico é nulo. Isto pode ser provado com a lei de Gauss e a simetria esférica do problema. Para $a < r < b$, a lei de Gauss e a simetria esférica nos dão:

$$E4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0},$$

onde

$$Q(r) = \int_a^r \frac{\kappa}{r'^2} 4\pi r'^2 dr'.$$

Segue que

$$\mathbf{E} = \frac{\kappa (r - a)}{\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r.$$

para $a < r < b$. Para $r > b$, novamente, usando a lei de Gauss e simetria esférica:

$$\mathbf{E} = \frac{\kappa (b - a)}{\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r.$$

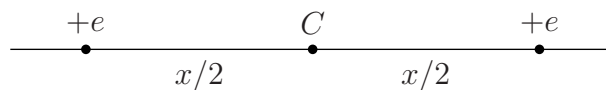


PROBLEMA 3.5 Considere uma esfera de raio R uniformemente preenchida com uma carga elétrica de valor igual à carga de dois elétrons. Imersos nesse “pudim” de carga negativa temos dois prótons. Suponhamos que a densidade de carga da esfera seja uniforme, apesar da presença dos dois prótons.

- (a) De que modo devemos dispor os dois prótons para que a força sobre cada um deles seja nula?
- (b) Qual será a distância de equilíbrio entre os dois prótons?
- (c) O equilíbrio é estável? **Justifique suas respostas!**

SOLUÇÃO 3.5 :

- (a) Sobre o diâmetro, equidistante do centro da distribuição.



- (b) A intensidade da repulsão coulombiana é:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{x^2},$$

onde $x > 0$ é a distância entre os prótons. A intensidade da força atrativa sobre um próton exercida pela distribuição é:

$$F' = e E(r).$$

Vetorialmente,

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F} + \mathbf{F}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{x^2} \hat{\mathbf{e}}_r + eE(r) \hat{\mathbf{e}}_r.$$

Mas, usando a lei de Gauss, sabemos que o campo no interior de uma distribuição de carga esférica uniforme é dado por:

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{(-2e)}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{x}{2} = -\frac{e x}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Segue que,

$$\mathbf{F}_R(x) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{R^3} \right) \hat{\mathbf{e}}_r.$$

Esta força será nula se e somente se $x = 0$.

- (c) Instável, pois um sistema puramente eletrostático não pode estar em equilíbrio estável sob a ação de forças puramente eletrostáticas, teorema de Earnshaw, problema 5.10, aula 5 do texto.

■

PROBLEMA 3.6 Um dos primeiros modelos do átomo consistia em considerá-lo como uma carga puntiforme positiva de valor igual a Ze , colocada no centro de uma distribuição uniforme de carga negativa esfericamente simétrica de raio R e valor igual a $-Ze$. Aqui Z é o número atômico e e é a carga fundamental.

- (a) Determine o campo elétrico \vec{E} em um ponto P no interior do átomo.
- (b) Determine o fluxo do campo elétrico através de uma superfície esférica de raio $r > R$ cujo centro coincide com o centro do átomo.
- (c) Quanto vale o campo elétrico em um ponto fora do átomo? Justifique cuidadosamente a sua resposta.

SOLUÇÃO 3.6:

- (a) O campo elétrico resultante é igual ao campo de uma carga puntiforme mais o campo de uma distribuição contínua:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r + \mathbf{E}_d$$

Por causa de simetria esférica, o campo \mathbf{E}_d pode ser facilmente calculado com a lei de Gauss, a saber:

$$\epsilon_0 E_d 4\pi r^2 = -\frac{Ze}{4\pi R^3} \frac{4\pi r^3}{3}$$

ou

$$E_d = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}, \quad 0 < r \leq R$$

Segue que

$$\mathbf{E} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right) \hat{\mathbf{e}}_r, \quad 0 < r \leq R$$

(b) Como o átomo é neutro, $q_{\text{átomo}} = 0$, logo, pela lei de Gauss, o *fluxo* do campo elétrico é zero

$$\oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0$$

(c) Fluxo zero não implica necessariamente em campo zero! Mas, no caso, como o átomo está isolado não há outras fontes para o campo a não ser o próprio; por outro lado temos a simetria esférica. Combinando tudo isso temos

$$E4\pi r^2 = 0$$

Como a S. G. é hipotética, segue que $E = 0$ para $r > R$.

■

PROBLEMA 3.7 Em um modelo clássico mais sofisticado no que diz respeito à distribuição da carga elétrica, um átomo de hidrogênio pode ser considerado como formado por uma carga puntiforme positiva $+e$, o próton, e uma nuvem eletrônica esfericamente simétrica descrita pela densidade de carga elétrica:

$$\rho_e(r) = -\frac{e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}, \quad r \in (0, \infty),$$

onde r é a distância radial ao núcleo que vamos supor fixo. A constante a_0 é o raio de Bohr e seu valor é igual a $0,53 \times 10^{-10}$ m.

- Mostre que o átomo de hidrogênio é eletricamente neutro.
- O campo elétrico efetivo $\mathbf{E}_{\text{efetivo}}$ do átomo é dado pela superposição do campo elétrico do próton com o campo elétrico da nuvem eletrônica. Determine o campo elétrico efetivo em um ponto arbitrário do espaço.
- Mostre que no limite $r \rightarrow 0$, o campo efetivo tende ao campo do próton.
- Mostre que no limite $r \rightarrow \infty$, o campo efetivo tende a zero.

SOLUÇÃO 3.7:

(a) A carga q_{nuvem} associada com a nuvem eletrônica é dada por:

$$\begin{aligned} q_{\text{nuvem}} &= \int \rho d^3\mathbf{r} \\ &= -\frac{e}{\pi a_0^3} \int_0^\infty e^{-2r/a_0} 4\pi r^2 dr \\ &= -\frac{4e}{a_0^3} \int_0^\infty e^{-2r/a_0} r^2 dr. \end{aligned}$$

A integral pode ser calculada com o auxílio de uma tabela de integrais:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}},$$

onde $\alpha > 0$ e n é um inteiro positivo. No nosso caso, $n = 2$ e $\alpha = 2/a_0$, logo:

$$q_{\text{nuvem}} = -\frac{4e}{a_0^3} \frac{2!}{\left(\frac{2}{a_0}\right)^3} = -e.$$

A carga do próton é $q_{\text{próton}} = +e$, logo, a carga total do átomo é:

$$q_{\text{próton}} + q_{\text{nuvem}} = e + (-e) = 0,$$

isto é: o átomo de hidrogênio é eletricamente neutro!

(b) Como o problema apresenta simetria esférica, o campo elétrico da nuvem eletrônica é radial e a componente radial do campo em um ponto arbitrário P do espaço pode ser calculada com a lei de Gauss:

$$\begin{aligned} E_{\text{nuvem}}(r) &= \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_0^r \left(-\frac{e}{\pi a_0^3}\right) e^{-2r'/a_0} 4\pi r'^2 dr' \\ &= -\frac{e}{\pi\epsilon_0 a_0^3 r^2} \int_0^r e^{-2r'/a_0} r'^2 dr'. \end{aligned}$$

A integral pode ser efetuado com a fórmula:

$$\int x^2 e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \left(x^2 - \frac{2x}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} \right).$$

Efetuada a integral obtemos:

$$E_{\text{nuvem}}(r) = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 a_0^2 r^2} \left[e^{-2r/a_0} \left(r^2 + a_0 r + \frac{a_0^2}{2} \right) - \frac{a_0^2}{2} \right].$$

O campo elétrico efetivo em um ponto P é a combinação linear do campo do próton com o campo da nuvem eletrônica:

$$\mathbf{E}_{\text{efetivo}} = \mathbf{E}_{\text{próton}} + \mathbf{E}_{\text{nuvem}},$$

ou,

$$\mathbf{E}_{\text{efetivo}}(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{e}{2\pi\epsilon_0 a_0^2 r^2} \left[e^{-2r/a_0} \left(r^2 + a_0 r + \frac{a_0^2}{2} \right) - \frac{a_0^2}{2} \right] \hat{\mathbf{e}}_r.$$

(c) No limite em que $r \rightarrow \infty$, o campo da nuvem eletrônica tende ao campo de uma carga negativa puntiforme:

$$\mathbf{E}_{\text{nuvem}} \approx -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r,$$

que anula o campo do próton de modo que nesse limite:

$$\mathbf{E}_{\text{efetivo}}(r) \approx 0.$$

(d) No limite $r \rightarrow 0$, o campo da nuvem tende a zero e ficamos com somente o campo do próton, logo:

$$\mathbf{E}_{\text{efetivo}}(r) \approx \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r.$$

■

PROBLEMA 3.8 O campo elétrico nas vizinhanças da superfície da Terra é dado pela fórmula empírica:

$$\mathbf{E}(z) = -E_0 (ae^{-\alpha z} + be^{-\beta z}) \hat{\mathbf{z}}$$

onde $z \geq 0$ é a altura acima da superfície da Terra, e E_0 , a , α , b e β são constantes reais e positivas cujos valores dão, respectivamente, $E_0 = 130 \text{ V m}^{-1}$, $a = 0,69$, $\alpha = 3,5 \text{ km}^{-1}$, $b = 0,31$ e $\beta = 0,23 \text{ km}^{-1}$.

- (a) Mostre inicialmente que o campo elétrico dado acima obedece à equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$-\frac{dE_z(z)}{dz} = \frac{\rho(z)}{\epsilon_0}$$

onde $\rho(z)$ é a densidade volumar de carga. Esta equação representa uma forma local da lei de Gauss.

- (b) Obtenha uma expressão para $\rho(z)$ a partir do campo dado.
 (c) Faça o gráfico da densidade volumar de carga em função da altura z acima da superfície da Terra.

SOLUÇÃO 3.8:

- (a) Consideremos localmente a Terra como um condutor plano e a superfície gaussiana mostrada na Figura ???. Aplicando a lei de Gauss temos:

$$\mathbf{E}(z + dz) \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 A + \mathbf{E}(z) \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 A = \frac{dq(z)}{\epsilon_0},$$

onde A é a área da ‘tampa’ da superfície gaussiana e $dq(z) = \rho(z)Adz$ é a carga encerrada pela mesma. Levando em conta as orientações da superfície gaussiana e do campo elétrico temos:

$$-E_z(z + dz) + E_z(z) = \frac{\rho(z)}{\epsilon_0} dz$$

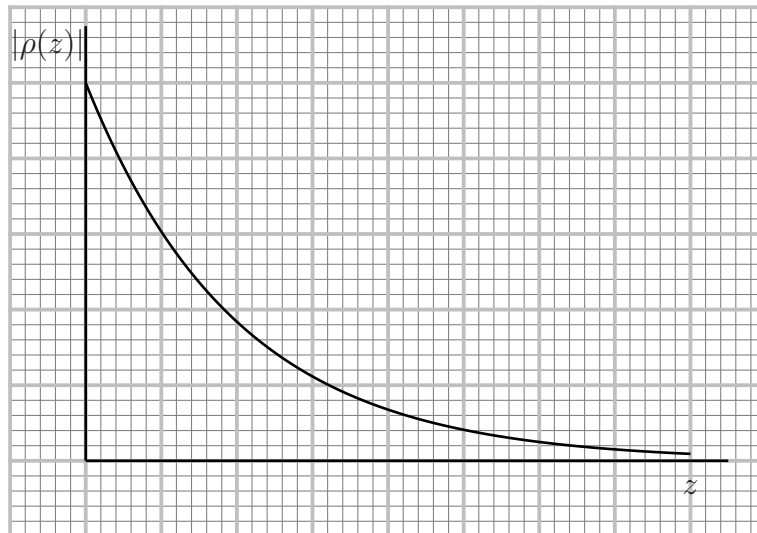
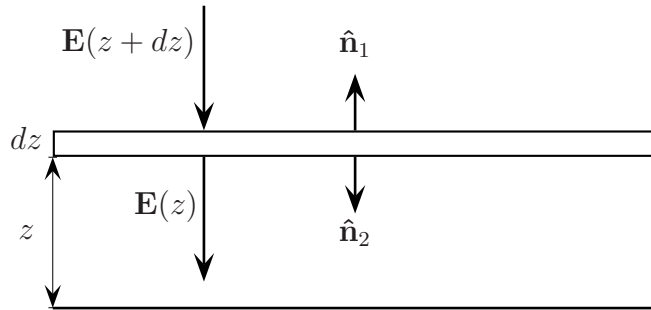
Segue que

$$-\frac{dE_z(z)}{dz} = \frac{\rho(z)}{\epsilon_0}$$

- (b) A densidade volumar de carga é:

$$\rho(z) = -\epsilon_0 \frac{dE_z(z)}{dz} = -\epsilon_0 E_0 (a \alpha e^{-\alpha z} + b \beta e^{-\beta z})$$

- (c) É fácil ver que em razão das exponenciais decrescentes, a carga concentra-se à próximo à superfície da Terra. O leitor poderá traçar um gráfico preciso com um programa algébrico como, por exemplo, o MAPLE, MATHCAD, MATHEMATICA ou equivalentes. O gráfico abaixo nos dá uma idéia do comportamento do módulo da densidade de carga com a altura.



PROBLEMA 3.9 Uma distribuição esférica de carga é descrita pela densidade de carga $\rho(r) = \kappa r^\alpha$, onde κ e α são constantes e r é a distância radial ao centro da distribuição.

- (a) Determine uma expressão geral para o campo elétrico $\mathbf{E}(r; \alpha)$ válida em todos os pontos do espaço.
- (b) Faça um gráfico do módulo do campo elétrico para $\alpha = -1$, $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$.

SOLUÇÃO 3.9 :

(a) Para uma distribuição de carga esféricamente simétrica, a lei de Gauss se escreve:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$

onde r é o raio da superfície esférica hipotética que encerra a carga $q(r)$, a superfície gaussiana. A carga $q(r)$ é calculada por meio de:

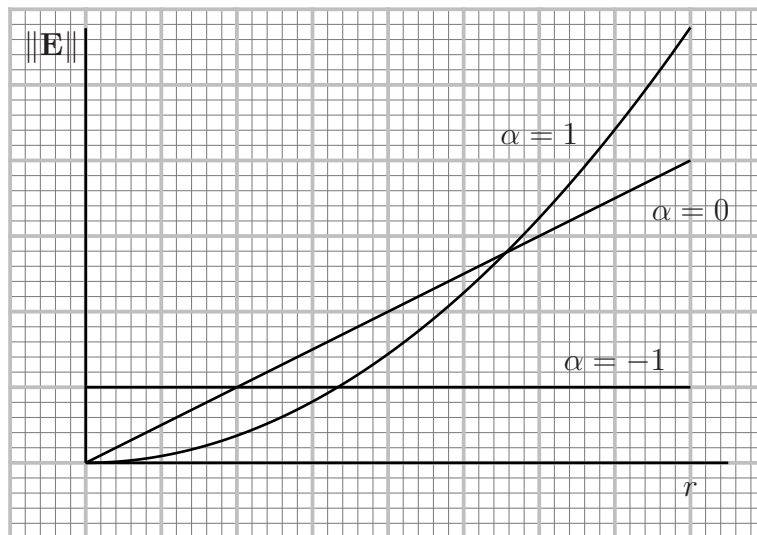
$$q(r) = \int \rho dV = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'.$$

Segue que:

$$E(r) = \frac{\kappa}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r r'^{2+\alpha} dr' = \kappa \frac{r^{1+\alpha}}{\epsilon_0 (\alpha + 3)},$$

com $r \in [0, \infty)$.

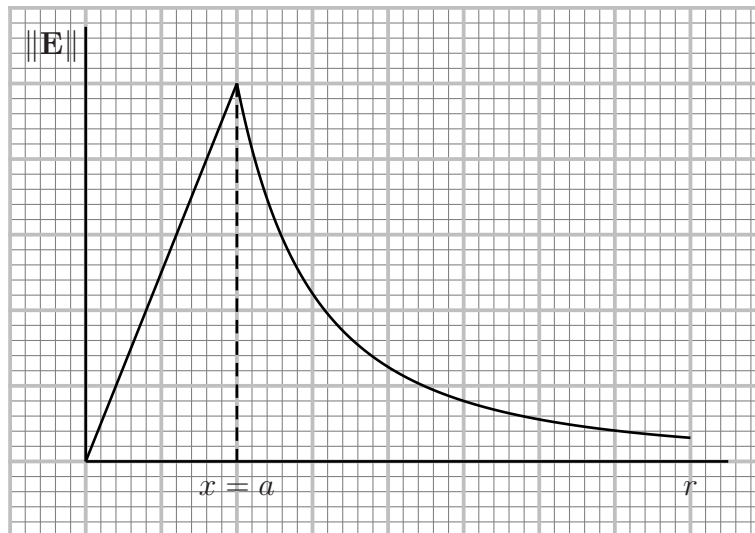
(b) A figura abaixo representa os gráficos pedidos.



PROBLEMA 3.10 Considere uma distribuição esférica e uniforme de carga elétrica. descrita pela função:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & 0 \leq r \leq a; \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Mostre que a densidade superficial de carga da esfera é nula.



SOLUÇÃO 3. 10 :

Como a distribuição apresenta um alto grau de simetria, convém fazer uso da lei de Gauss. A simetria esférica permite escrever então:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0}.$$

Mas,

$$q(r) = \frac{\rho_0 4\pi r^3}{3}.$$

Segue que

$$\mathbf{E}_1(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_r,$$

para $0 \leq r \leq a$. Para $r > a$, a lei de Gauss conduz a:

$$\mathbf{E}_2(r) = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r.$$

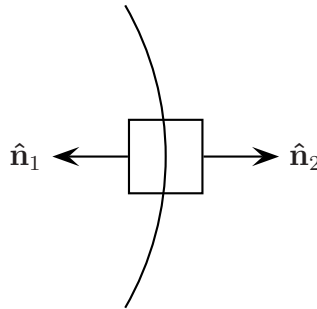
Vemos assim que o campo elétrico é contínuo no intervalo $0 \leq r < \infty$, em particular, o campo é contínuo em $r = a$, onde poderíamos pensar que uma densidade superficial de carga faria sentido, veja o gráfico mostrado na figura. Aplicando novamente a lei de Gauss considerando como superfície gaussiana a superfície de um pequeno cilindro de altura Δh com centro geométrico em $r = a$, temos:

$$\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 A + \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 A = \frac{\rho_0 A \Delta h / 2}{\epsilon_0},$$

onde A é a área da tampa do cilindro. Como $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{\mathbf{n}}_2$, segue que

$$-E_1 + E_2 = \frac{\rho_0 \Delta h}{2\epsilon_0}.$$

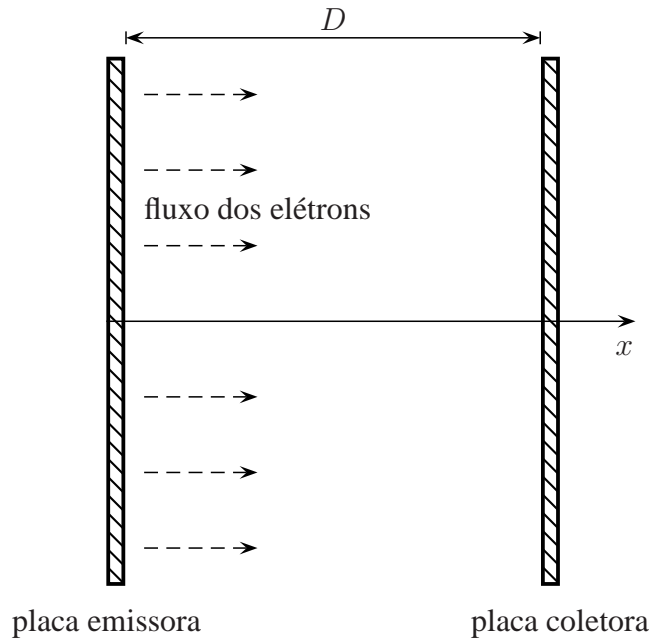
Mas $E_1 = E_2$, logo, $\rho_0 \Delta h = 0$, o que implica que a densidade superficial de carga é nula em $r = a$, de fato, a densidade superficial de carga é nula para qualquer valor de r .



■

PROBLEMA 3.11 Em uma determinada válvula eletrônica, os elétrons são emitidos por uma superfície plana metálica aquecida (a placa emissora) e coletados por uma outra superfície plana metálica paralela à primeira (a placa coletora) colocada a uma distância D , veja a figura ilustrativa abaixo. A diferença de potencial elétrico entre as placas é dada por $V(x) = \kappa x^{4/3}$. Suponha que as dimensões lineares das placas sejam muito maiores do que a distância que as separa.

- Faça o gráfico do campo elétrico entre as placas.
- Use a lei de Gauss na forma diferencial e calcule a densidade volumar de carga $\rho(x)$ para $0 < x < D$. Faça o gráfico da densidade volumar de carga obtida.
- Calcule a densidade superficial de carga σ da placa coletora. Repita o cálculo para a placa emissora.

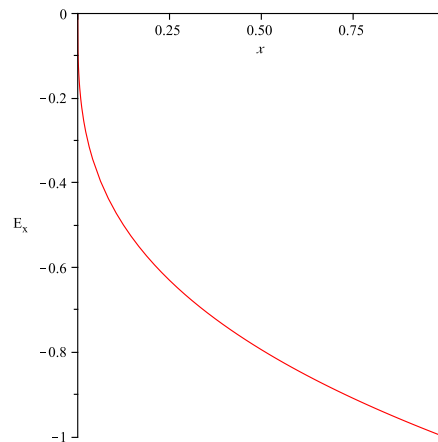


SOLUÇÃO 3. 11 :

- (a) Como as dimensões lineares das placas são muito maiores do que a distância que as separa, podemos considerar as mesmas como tendo extensão infinita. Neste caso, o campo elétrico dependerá somente de x . De fato, é por esta mesma razão que o potencial depende somente de x ! O campo elétrico é:

$$E_x(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{4}{3} \kappa x^{1/3}.$$

A figura acima mostra o gráfico do campo elétrico entre as placas:



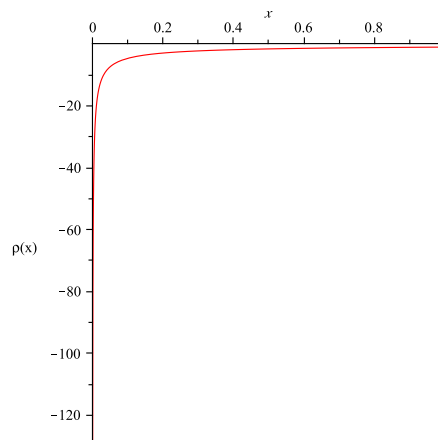
Por simplicidade, fizemos $\kappa = 3/4$ e $D = 1$ (unidades arbitrárias).

- (b) Para calcular a densidade volumar de carga entre as placas, fazemos uso da lei de Gauss na forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

No caso,

$$\rho(x) = \epsilon_0 \frac{\partial E_x(x)}{\partial x} = -\frac{4\kappa \epsilon_0}{9 x^{2/3}}, \quad 0 < x \leq D.$$



- (c) Usando a lei de Gauss na forma integral, podemos ver que o fluxo é nulo muito próximo da placa emissora, pois o campo é nulo em $x = 0$. Mas, próximo da placa coletora, o fluxo vale:

$$\Phi = E_x(D)A = -\frac{4}{3}\kappa D^{1/3} A.$$

Como $\Phi = q/\epsilon_0 = \sigma A/\epsilon_0$, segue que:

$$\sigma = -\frac{4}{3}\kappa \epsilon_0 D^{1/3}.$$

Outro modo de obter a densidade superficial de carga é calcular:

$$\sigma = \int_0^D \rho(x)dx,$$

verifique!

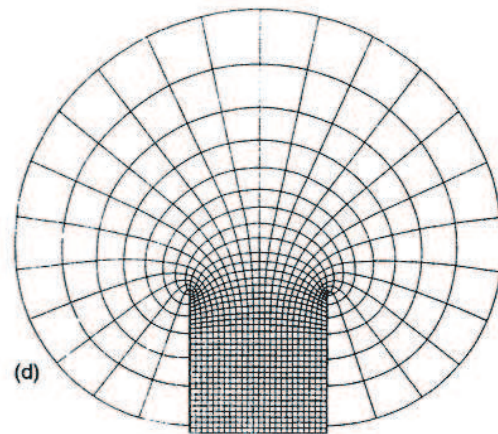


Capítulo 4

Potencial Elétrico

PROBLEMA 4.1 A figura abaixo mostra linhas de força e superfícies equipotenciais associadas com um capacitor de placas paralelas em equilíbrio eletrostático. O desenho foi feito por James Clerk Maxwell (1831-1879), o grande teórico do eletromagnetismo do século 19, e aparece no seu tratado sobre o assunto publicado em 1873. Note que no desenho, os efeitos de borda foram tomados em conta.

- (a) Reproduza o desenho de Maxwell no caderno de respostas identificando de modo claro pelo menos 3 linhas de força e 3 superfícies equipotenciais.
- (b) Explique porque as linhas de força devem ser perpendiculares às superfícies equipotenciais.



SOLUÇÃO 4.1 :

- (a) A curva marcada pela letra (d) representa uma linha de força. Você pode identificar outras? As curvas perpendiculares às curvas quase aninhadas representam as superfícies equipotenciais.

- (b) Se o campo elétrico não for perpendicular à superfície equipotencial, haveria uma componente do campo ao longo dessa superfície. Portanto, esta não seria equipotencial. ■

PROBLEMA 4.2 Considere um plano de extensão infinita uniformemente carregado com uma densidade de carga σ medida em coulombs/(metro)². Um furo circular de raio a é feito no plano carregado. **Sugestão:** lembre-se que o potencial de um disco de raio a uniformemente carregado sobre um ponto no eixo principal de simetria é dado por:

$$V_{\text{disco}}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + a^2} - |z| \right).$$

- (a) Calcule o potencial elétrico num ponto P a uma altura $z > 0$, situado sobre o eixo perpendicular ao plano e que passa pelo centro geométrico do furo.
- (b) Calcule o campo elétrico em P .
- (c) Obtenha uma expressão aproximada para o campo elétrico para $z \gg a$. Interprete o resultado.

SOLUÇÃO 4.2 :

- (a) Pelo princípio da superposição:

$$V_{\text{plano}} = V_{\text{plano c/ furo}} + V_{\text{disco}},$$

logo,

$$V_{\text{plano c/ furo}} = V_{\text{plano}} - V_{\text{disco}},$$

ou,

$$V_{\text{plano c/ furo}} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + C - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + a^2} - z \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{z^2 + a^2} + C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

- (b)

$$E_z(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}, \quad z > 0.$$

(c) Para $z \gg a$,

$$E_z \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

isto é, nesse limite o furo “desaparece”, e o campo elétrico é o campo do plano sem o furo. ■

PROBLEMA 4.3 *Potencial eletrostático e campo elétrico* Dez partículas puntiformes de cargas iguais q ocupam os vértices de um polígono regular de dez lados, *i.e.*: um hendecágono, inscrito em uma circunferência de raio R .

- Determine o potencial elétrico ao longo do eixo de simetria ortogonal ao plano que contém o hendecágono e que passa por seu centro geométrico.
- Determine a diferença de potencial entre o centro geométrico da distribuição e um ponto arbitrário P sobre o eixo de simetria em questão.
- Determine o campo elétrico em um ponto arbitrário sobre esse mesmo eixo.

SOLUÇÃO 4.3 :

(a) Pelo princípio da superposição temos:

$$V(z) = \frac{10}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

(b)

$$V(P) - V(0) = \frac{10q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{1}{R} \right)$$

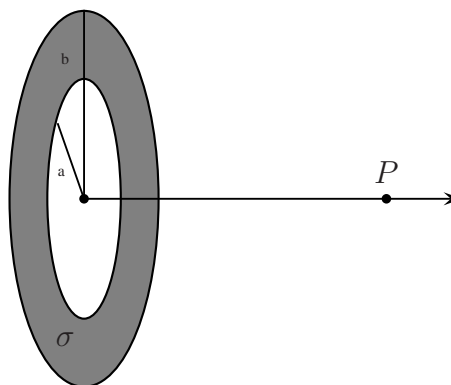
(c)

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{10q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)}$$

■

PROBLEMA 4.4 Considere um disco de plástico perfurado de raio menor a e raio maior b uniformemente carregado com uma densidade de carga σ .

- (a) Calcule o potencial elétrico gerado por esta distribuição em um ponto P sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o disco e passa por seu centro geométrico.
- (b) Calcule o campo elétrico em P .
- (c) Calcule o trabalho realizado para trazer uma carga puntiforme Q_0 do infinito até o ponto P .
- (d) Calcule a energia potencial do sistema disco perfurado + carga puntiforme.
- (e) Calcule a força coulombiana que Q_0 exerce sobre o disco.



Obs.: a integral

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{bx^2 + c^2}} = \frac{1}{b} \sqrt{bx^2 + c^2},$$

poderá ser-lhe útil.

SOLUÇÃO 4.4 :

- (a) Seja ρ a distância perpendicular ao eixo de simetria em questão, e x a posição do ponto P à origem. Então o potencial gerado por um disco de raio ρ e carga dQ será:

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma 2\pi \rho d\rho}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\rho^2 + x^2}}.$$

Pelo princípio da superposição:

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_a^b \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{b^2 + x^2} - \sqrt{a^2 + x^2} \right)$$

- (b)

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}} \right)$$

- (c) Como a diferença de potencial é o trabalho por unidade de carga, e como o potencial no infinito é nulo, temos:

$$\mathcal{W} = Q_0 V = \frac{Q_0 \sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{b^2 + x^2} - \sqrt{a^2 + x^2} \right).$$

- (d) Como o trabalho fica armazenado sob forma de energia potencial eletrostática:

$$\mathcal{U} = Q_0 V = \frac{Q_0 \sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{b^2 + x^2} - \sqrt{a^2 + x^2} \right).$$

- (e) A força coulombiana que o disco exerce sobre Q_0 é dada por:

$$\mathbf{F} = Q_0 E \hat{\mathbf{x}}.$$

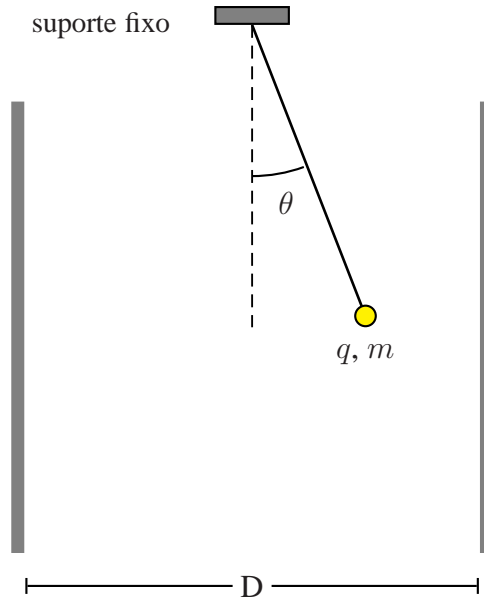
Como a força coulombiana obedece à terceira lei de Newton, a força que Q_0 exerce sobre o disco é

$$\mathbf{F}' = -\mathbf{F} = -Q_0 E \hat{\mathbf{x}}.$$

■

PROBLEMA 4.5 Uma pequena esfera de massa m e carga q está suspensa por um fio isolante entre duas distribuições superficiais de carga planas, paralelas, separadas por uma distância D .

- Calcule o campo elétrico na região entre as distribuições para que fio forme um ângulo θ com a vertical, como mostra a figura abaixo.
- Calcule a diferença de potencial entre as distribuições planas.
- Calcule a densidade de carga de cada uma das distribuições.



SOLUÇÃO 4.5 :

(a) Se θ for o ângulo que o fio faz com a vertical, temos

$$qE = T \text{sen } \theta,$$

e

$$mg = T \text{cos } \theta,$$

Segue que

$$E = \frac{mg}{q} \tan \theta.$$

(b)

$$\Delta V = ED = \frac{mgD}{q} \tan \theta.$$

(c) Como, em módulo, o campo entre as distribuições planas deve valer $E = \sigma/\epsilon_0$, segue que

$$\sigma = +\epsilon_0 \frac{mg}{q} \tan \theta,$$

para a distribuição da esquerda, e

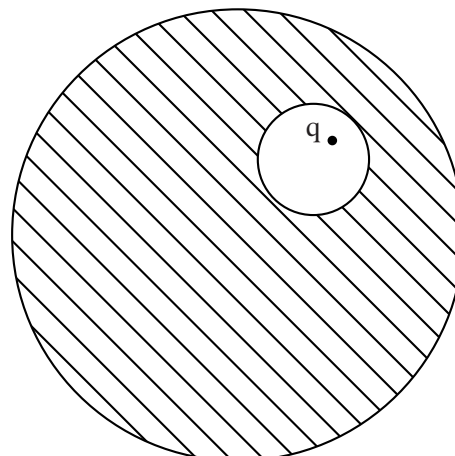
$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{mg}{q} \tan \theta,$$

para a distribuição da direita.



PROBLEMA 4.6 Uma esfera condutora de raio R é carregada com uma carga Q e isolada. No interior da esfera há uma cavidade esférica excêntrica dentro da qual uma carga $q = Q/3$ é colocada em um ponto arbitrário.

- (a) Calcule a densidade superficial de carga da esfera condutora.
- (b) Calcule o potencial eletrostático na superfície da esfera condutora.
- (c) Calcule o campo elétrico \mathbf{E} em um ponto arbitrário exterior à esfera.



SOLUÇÃO 4.6 :

- (a) A carga q induz uma carga $-q$ na superfície interior da cavidade esférica e uma carga $+q$ na superfície da esfera. Portanto,

$$\sigma = \frac{q + Q}{4\pi R^2} = \frac{Q/3 + Q}{4\pi R^2} = \frac{(4/3)Q}{4\pi R^2} = \frac{Q}{3\pi R^2}.$$

- (b)

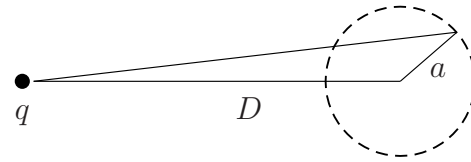
$$V = \frac{q + Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{3\pi\epsilon_0 R}.$$

(c)

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{3\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r, \quad r > R.$$

■

PROBLEMA 4.7 *Valor médio sobre a superfície de uma esfera, versão simples.* Considere uma carga puntiforme de valor q a uma distância D do centro de uma esfera hipotética de raio a . Mostre que o valor médio do potencial eletrostático sobre a superfície esférica é igual ao potencial gerado pela carga puntiforme no centro da esfera, i.e.:



$$\bar{V} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D}.$$

SOLUÇÃO 4.7 :

O valor médio do potencial sobre uma superfície S de área A é dado por:

$$\bar{V} = \frac{1}{A} \int_S V da.$$

No caso,

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

onde r é a distância entre q e um ponto da esfera (veja a figura). Escrevendo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{D} + \mathbf{a},$$

vemos que $r = \|\mathbf{r}\|$ vale:

$$r = \sqrt{D^2 + a^2 + 2 D a \cos \theta},$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{D} e \mathbf{a} . Segue então que:

$$\bar{V} = \frac{q}{(4\pi)^2 \epsilon_0 a^2} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{D^2 + a^2 + 2 D a \cos \theta}} a^2 d\Omega,$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido subtendido pelo ponto no centro da esfera. Como o integrando só depende de θ , podemos fazer substituição $d\Omega \rightarrow 2\pi \sin \theta d\theta$ e depois de simplificações simples obtemos:

$$\bar{V} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{D^2 + a^2 + 2Da\cos\theta}} \sin\theta d\theta.$$

Fazendo a substituição $x = \cos\theta$:

$$\bar{V} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{D^2 + a^2 + 2Dax}} dx.$$

Efetuando a integral:

$$\bar{V} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 D}.$$

Este resultado mostra que o valor médio do potencial sobre a superfície da esfera (hipotética) é igual ao valor do potencial no centro da esfera. Usando o princípio da superposição pode-se estender este resultado a uma distribuição arbitrária de carga. Entretanto, convém ressaltar que há um modo mais elegante de demonstrar o teorema do valor médio e que faz uso da equação de Laplace para o potencial. ■

PROBLEMA 4.8 Considere uma distribuição esfericamente simétrica de carga descrita pela densidade volumar de carga:

$$\rho(r) = \kappa r^n, \quad r \in (0, \infty).$$

No contexto, r é a distância radial ao centro da distribuição e n é um inteiro maior do que -3 .

- Calcule o campo elétrico como função de r .
- Calcule a diferença de potencial entre o centro da distribuição e um ponto arbitrário P .

SOLUÇÃO 4.8 :

- A lei de Gauss e a simetria esférica permitem escrever:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0},$$

onde r é o raio da superfície gaussiana que encerra $q(r)$. Por outro lado,

$$q(r) = \int \rho(r) d^3x.$$

Em razão da simetria esférica $d^3x = 4\pi r^2 dr$, logo:

$$q(r) = \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0} \int_0^r \bar{r}^{n+2} d\bar{r}.$$

Segue que:

$$E(r) = \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{r^{n+1}}{n+3}, \quad n > -3.$$

(b)

$$\Phi(P) - \Phi(0) = - \int_0^{r_p} E(r) dr.$$

Substituindo o campo obtido no item (a) e efetuando a integral obtemos:

$$\Phi(P) - \Phi(0) = - \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{r_p}{(n+3)(n+2)}.$$

■

PROBLEMA 4.9 O campo elétrico de uma determinada configuração eletrostática esfericamente simétrica é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{E_0 R^2}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r,$$

para $r \geq R$, e por

$$\mathbf{E} = \frac{E_0 r^2}{R^2} \hat{\mathbf{e}}_r,$$

para $r \leq R$, onde E_0 e R são constantes e $\hat{\mathbf{e}}_r$ é o vetor unitário radial.

(a) Calcule o potencial elétrico dessa configuração para $r \geq R$.

(b) Calcule o potencial elétrico dessa configuração para $r \leq R$.

Sugestão: na região exterior, o potencial deve tender a zero no infinito. Sobre a superfície $r = R$, o potencial deve ser contínuo.

SOLUÇÃO 4.9:(a) $r > R$:

$$V(r) = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + C_1 = -E_0 R^2 \int \frac{dr}{r^2} + C_1.$$

Efetuando a integral teremos:

$$V(r) = \frac{E_0 R^2}{r} + C_1.$$

Fazendo $V(\infty) = 0$, obtemos $C_1 = 0$. Portanto,

$$V(r) = \frac{E_0 R^2}{r}, \quad r \geq R.$$

(b) $r < R$:

$$V(r) = -\frac{E_0}{R^2} \int r^2 dr + C_2 = -\frac{E_0}{3 R^2} r^3 + C_2.$$

Como o potencial deve ser contínuo,

$$-\frac{E_0}{3 R^2} r^3 + C_2 = E_0 R.$$

Segue que

$$C_2 = \frac{4}{3} E_0 R.$$

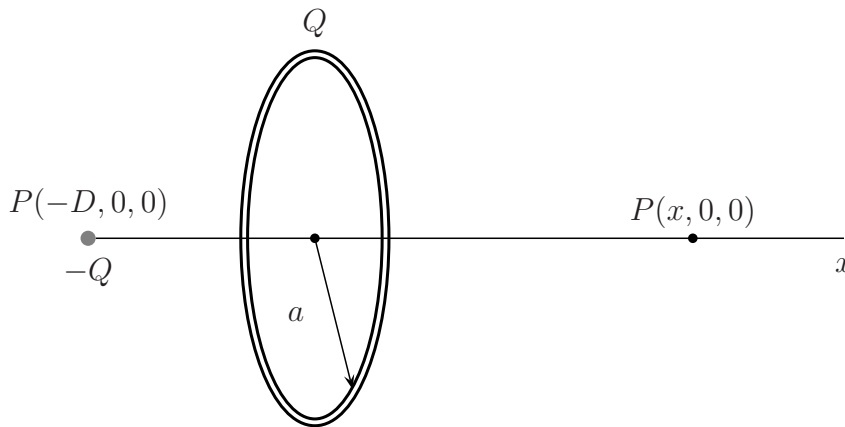
e

$$V(r) = \frac{E_0}{3 R^2} (4 R^3 - r^3), \quad r \leq R.$$



PROBLEMA 4.10 Considere o sistema eletrostático mostrado na figura abaixo. O sistema é formado por uma carga puntiforme $-Q$ e um anel de raio a uniformemente carregado com uma carga Q . A distância entre a carga puntiforme e o centro geométrico do anel é D . Considere um ponto arbitrário $P(x, 0, 0)$ sobre o eixo de simetria do sistema com $x \neq -D$.

- (a) Calcule o potencial eletrostático no ponto $P(x, 0, 0)$.
- (b) Calcule o campo elétrico no ponto $P(x, 0, 0)$ usando o potencial obtido em (a).
- (c) Suponha que o ponto $P(x, 0, 0)$ situe-se sobre o eixo x positivo e muito distante da distribuição, i.e.: $x > 0$, e $x \gg a, D$. Calcule o potencial de dipolo elétrico nesse ponto.



Sugestão: use convenientemente a expansão $(1+x)^p = 1 + \frac{p}{1!}x + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 \dots$

SOLUÇÃO 4.10:

(a) Pelo princípio da superposição:

$$V(P) = V_{\text{carga puntiforme}}(P) + V_{\text{anel}}(P),$$

ou,

$$V(x) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x + D)} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + a^2}}.$$

(b) O campo elétrico é o gradiente do potencial obtido em (a):

$$E_x(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x+D)^2} + \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}.$$

(c) Usando a expansão de Taylor de $(1+x)^p$ obtemos:

$$V_{\text{dipolo}}(x) = \frac{QD}{4\pi\epsilon_0 x^2},$$

que é o potencial gerado por um dipolo de magnitude QD .



Capítulo 5

Energia Eletrostática; Capacitores

PROBLEMA 5.1 Uma bolha de sabão eletrostaticamente isolada é mantida a um potencial de 100 V. Suponha que a bolha possa ser modelada por uma casca esférica de raio igual a 1 cm.

- (a) Calcule a carga eletrostática da bolha de sabão.
- (b) Suponha agora que a bolha colapse e que o seu novo raio seja igual a 1 mm. Calcule a variação da energia eletrostática.

Para cálculos numéricos use: $\pi \approx 3,14$, e $\epsilon_0 \approx 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$.

SOLUÇÃO 5.1 :

- (a) O potencial na superfície da bolha é dado por:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

logo,

$$Q = 4\pi\epsilon_0 VR.$$

Substituindo os valores vem que:

$$Q = 4 \times 3,14 \times 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \times 1,00 \times 10^2 \text{ V} \times 1,00 \times 10^{-2} \text{ m} = 1,1 \times 10^{-10} \text{ C}.$$

(b) A energia eletrostática de uma casca esférica de raio R uniformemente carregada é dada por:

$$U = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

A variação da energia eletrostática da bolha é então:

$$\Delta U = U_{\text{final}} - U_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

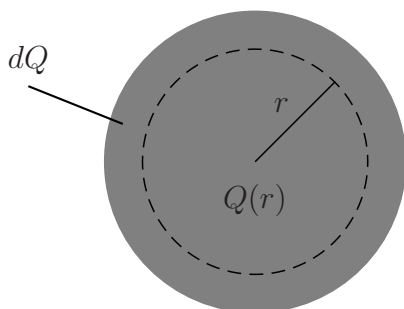
Substituindo os valores pertinentes:

$$\Delta U = 5,00 \times 10^{-8} \text{ C}.$$

Como a $\Delta U > 0$, a energia eletrostática aumenta.

■

PROBLEMA 5.2 Calcule a energia eletrostática de uma bola de carga uniformemente carregada de raio R e carga total Q . *Sugestão:* lembre-se que para uma distribuição localizada de carga, o potencial eletrostático pode ser interpretado como o trabalho realizado por unidade de carga trazida do infinito até a sua posição atual. Comece com uma bola de carga de raio r . Para acrescentar uma camada esférica adicional de carga dQ à bola, o trabalho realizado é $dW = V(r) dQ$. Daqui em diante é com você.



SOLUÇÃO 5.2 :

$$dU = V(r)dQ = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r}dQ.$$

Mas

$$Q(r) = \frac{Q}{(4/3)\pi R^3} (4/3)\pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3},$$

logo,

$$dQ = 3 \frac{Q}{R^3} r^2 dr.$$

Segue que

$$dU = \frac{Qr^3}{4\pi\epsilon_0 r R^3} 3 \frac{Q}{R^3} r^2 dr = 3 \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^6} r^4 dr,$$

ou ainda

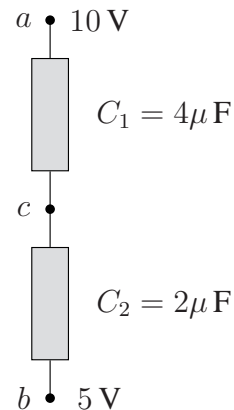
$$U = 3 \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^6} \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

■

Capacitores

PROBLEMA 5.3 A figura ao lado mostra dois capacitores, 1 e 2, ligados em série e conectados a uma fonte de voltagem constante. A figura mostra também os valores do potencial nos pontos a e b assim como os valores C_1 e C_2 das capacitâncias dos capacitores

- Calcule em μC a carga elétrica armazenada em cada um dos capacitores.
- Calcule o potencial do ponto c em relação ao ponto a
- Calcule a carga armazenada pelo capacitor equivalente. Relacione o resultado com o obtido no item (a).



SOLUÇÃO 5.3 :

(a) Definindo $C = 2 \mu\text{F}$, temos:

$$V_{ac} + V_{cb} = V_{ab}$$

Como capacitores em série adquirem a mesma carga

$$Q = 2CV_{ac}$$

e

$$Q = CV_{cb}$$

segue que:

$$\frac{Q}{2C} + \frac{Q}{C} = V_{ab}$$

ou ainda:

$$Q = \frac{2CV_{ab}}{3} = \frac{20}{3}\mu\text{C}$$

em cada capacitor!

(b)

$$V_c = V_a - V_{ac} = V_a - \frac{V_{ab}}{3}$$

Substituindo os valores pertinentes obtemos:

$$V_c = \frac{20}{3} \text{ V}$$

(c) O cálculo da capacitância equivalente é imediato:

$$C_{eq} = \frac{4}{3} \mu\text{C}$$

Segue que:

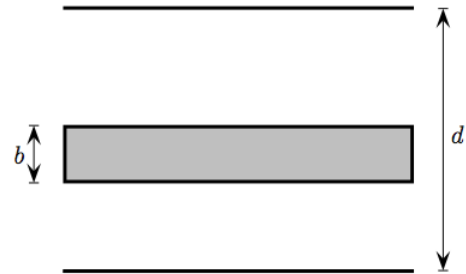
$$Q' = C_{eq}V_{ab}$$

ou

$$Q' = Q = \frac{20}{3}\mu\text{C}$$

como deve ser. ■

PROBLEMA 5.4 Considere um capacitor de placas paralelas quadradas de lado ℓ separadas por uma distância d . O capacitor é carregado até que a diferença de potencial entre as placas atinja o valor V_0 . A seguir ele é desconectado da fonte externa e um condutor na forma de uma placa metálica de espessura b e área igual a área do capacitor é introduzido entre as suas placas, veja a figura ao lado. Despreze os efeitos de borda, o que é razoável se a condição $\ell \gg d, b$ for satisfeita.



- (a) Calcule a variação da energia eletrostática do sistema depois da introdução da lâmina metálica em função de b, d, V_0 e C_0 , onde $C_0 = \epsilon_0 \ell^2/d$.
- (b) A energia eletrostática aumentou ou diminuiu? Justifique a sua resposta.

SOLUÇÃO 5.4 :

(a) Observando que o campo elétrico de um capacitor ideal de placas paralelas é uniforme:

$$U_0 = \mu_E Ad = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} Ad$$

$$U_1 = \mu_E Ad = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} A(d - b)$$

Segue que

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{d - b}{d} = 1 - \frac{b}{d}$$

Segue que

$$\Delta U = U_1 - U_0 = \left(1 - \frac{b}{d}\right) U_0 - U_0 = -\frac{b}{d} U_0$$

Mas

$$U_0 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} Ad = \frac{\varepsilon_0 V_0^2}{2d^2} \ell^2 d = \frac{\varepsilon_0 V_0^2}{2d} \ell^2 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

Portanto:

$$\Delta U_0 = -\frac{b}{d} \left(\frac{1}{2} C_0 V_0^2 \right)$$

(b) A energia **diminui**, pois uma parte do campo correspondente ao volume Ab desapareceu com a introdução do condutor.

Solução alternativa: este problema pode ser feito de outro modo. Podemos calcular a variação da energia eletrostática por meio da equação:

$$U_f - U_0 = \frac{1}{2} C_{eq} V^2 - \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

Mas isto implica em calcular a capacitância equivalente e o novo potencial V . A capacitância do sistema depois da introdução da placa entre o capacitor original é:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

onde

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{\ell^2}{x}$$

e

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{\ell^2}{d - (x + b)}$$

já que não sabemos distância da placa introduzida às placas do capacitor. Efetuando o cálculo da capacitância equivalente obtemos:

$$C_{eq} = \varepsilon_0 \frac{\ell^2}{d - b}$$

Agora calculamos V :

$$V = Ex + E[d - (x + b)]$$

Mas note que o campo elétrico é uniforme, i.e.: não depende do ponto e vale:

$$E = \frac{V_0}{d}$$

Logo:

$$V = \frac{V_0}{d} (d - b)$$

Assim, a energia eletrostática final:

$$U_f = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \left(1 - \frac{b}{d}\right)$$

Segue que:

$$U_f - U_0 = \left(-\frac{b}{d}\right) \frac{1}{2} C_0 V_0^2 < 0$$

■

PROBLEMA 5.5 Considere duas esferas condutoras de raios a e b com $a \neq b$. A distância entre os centros das esferas é D . Suponha que $D \gg a, b$ e despreze os efeitos da indução eletrostática. Mostre que a capacitância dessa configuração é dada por:

$$C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}\right)^{-1}.$$

SOLUÇÃO 5.5 :

A capacitância é dada por:

$$C = \frac{q}{|V_b - V_a|},$$

O potencial total da esfera condutora de raio b é a superposição do potencial gerado pela própria esfera com o potencial gerado pela esfera de raio a ; este último potencial pode ser calculado com o teorema do valor médio. Portanto, supondo a esfera de raio b com carga $-q$, podemos escrever:

$$4\pi\epsilon_0 V_b = -\frac{q}{b} + \frac{q}{d}.$$

Da mesma forma, para a esfera de raio a escrevemos:

$$4\pi\epsilon_0 V_a = \frac{q}{b} - \frac{q}{d}.$$

Logo,

$$4\pi\epsilon_0 (V_a - V_b) = \frac{q}{a} + \frac{q}{b} - 2\frac{q}{d}.$$

Substituindo este resultado na definição de capacitância:

$$C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d} \right)^{-1}$$

■

PROBLEMA 5.6 Um capacitor ideal de placas paralelas circulares de raio R separadas por uma distância $d_0 \gg R$ é conectado a uma bateria e carregado até que a diferença de potencial entre as suas placas seja igual a V . O capacitor é então desconectado da bateria e mantido eletricamente isolado. Em seguida um agente externo aumenta a separação entre as suas placas para uma distância d_1 .

- (a) O campo elétrico entre as placas do capacitor aumenta ou diminui? A energia eletrostática armazenada aumenta ou diminui? **Justifique as suas respostas.**
- (b) Calcule a variação da energia eletrostática armazenada em função de R , d_0 , d_1 e V .

SOLUÇÃO 5.6:

- (a) A energia armazenada no capacitor é:

$$U = \text{densidade de energia} \times \text{volume entre as placas} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \pi R^2 d.$$

Como o campo entre as placas de um capacitor ideal é uniforme, a energia armazenada aumenta porque o volume entre as placas aumenta.

- (b) A energia do estado inicial é:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2,$$

e a do estado final é:

$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2.$$

Como o campo é uniforme, podemos escrever:

$$\frac{V_0}{d_0} = \frac{V_1}{d_1}.$$

Por outro lado:

$$\frac{C_0}{C_1} = \frac{d_1}{d_0}.$$

Portanto:

$$\Delta U = U_1 - U_0 = \left(\frac{d_1}{d_0} - 1 \right) \frac{\epsilon_0 \pi R^2 V_0^2}{2d_0}.$$

■

PROBLEMA 5.7 Um capacitor de placas paralelas quadradas de lado ℓ e separação d entre elas é conectado a uma fonte de voltagem V_0 . Suponha $\ell \gg d$ e despreze os efeitos de borda.

- Determine a energia eletrostática armazenada no capacitor.
- Ainda conectadas à fonte de voltagem, as placas do capacitor são gradualmente aproximadas uma da outra até que a distância entre elas passa a valer $d/3$. Calcule a energia eletrostática armazenada nessa nova configuração.
- Calcule a variação de energia eletrostática. A energia eletrostática aumenta ou diminui? Em qualquer caso explique a razão.
- Ainda na configuração do item (b), a fonte de voltagem é desconectada e as placas do capacitor são lentamente aproximadas e repostas na configuração inicial do item (a). Calcule a variação da energia eletrostática armazenada. A energia eletrostática aumenta ou diminui? Explique.

SOLUÇÃO 5.7 :

- (a) A energia eletrostática armazenada entre as placas de um capacitor pode ser calculada a partir da equação:

$$U = \frac{1}{2} C V^2,$$

que é a mais conveniente porque a voltagem aqui é mantida constante. Para o capacitor de placas paralelas em questão:

$$C = C_0 = \epsilon_0 \frac{\ell^2}{d},$$

Portanto,

$$U_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\ell^2}{d} V_0^2.$$

- (b) Como a voltagem é mantida constante e a capacitância agora é

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{\ell^2}{d/3} = 3 C_0,$$

vemos que

$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 = \frac{3}{2} C_0 V_0^2 = 3 U_0.$$

- (c)

$$\Delta U = U_1 - U_0 = 2 U_0 > 0,$$

logo, energia eletrostática aumenta. A razão é :

$$\|\mathbf{E}_0\| = \frac{V_0}{d}$$

$$\|\mathbf{E}_1\| = \frac{V_0}{d/3}$$

logo,

$$\|\mathbf{E}_1\| = 3 \|\mathbf{E}_0\|$$

Como a distância entre as placas fica dividida por 3, o volume correspondente também fica dividido por 3,

$$V_0 \rightarrow V_0/3 = \frac{1}{3} \ell^2 d.$$

Por outro lado, a densidade de energia é proporcional ao quadrado da intensidade do campo,

$$U_0 = \frac{\epsilon_0}{2} \|\mathbf{E}_0\|^2,$$

isto significa que ao final das contas a diminuição do volume é mais que compensada pelo aumento da densidade de energia já que

$$u_0 = \frac{\epsilon_0}{2} \|\mathbf{E}_1\|^2 = \frac{9\epsilon_0}{2} \|\mathbf{E}_0\|^2.$$

isto é, a nova densidade é 9 vezes a densidade inicial. O resultado final é o fator 3, pois como o campo elétrico em qualquer dessas configurações é uniforme, a energia eletrostática é a densidade vezes o volume.

- (d) Ao desconectarmos a fonte de voltagem e afastarmos as placas uma da outra, a diferença de potencial entre elas não será mais constante, mas como ficam isoladas, a carga q permanecerá inalterada! Nesse caso, convém calcular a energia eletrostática armazenada com a equação:

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

Como $q = CV$, temos inicialmente

$$q = q_1 = C_1 V_0 = 3 C_0 V_0,$$

onde q_1 é a carga do capacitor ao ser desconectado. A energia eletrostática que fica entre as placas do capacitor após a restauração da configuração final será:

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C_0} = \frac{1}{2} \frac{C_1^2 V_0^2}{C_0} = 9 \times \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = 9 U_0.$$

$$\Delta U = U_2 - U_0 = 9 U_0 > 0.$$

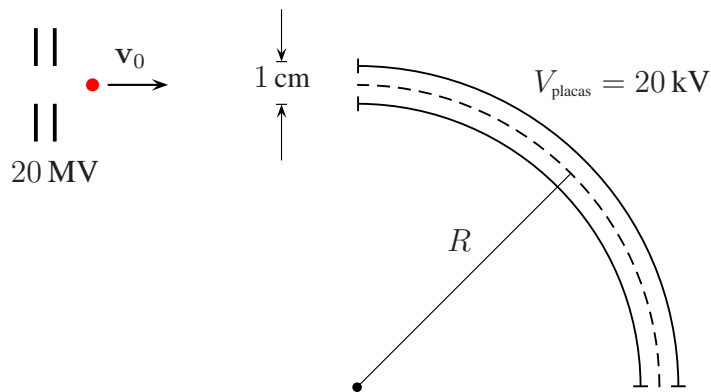
No processo completo, a energia eletrostática aumenta porque o agente externo que primeiro aumenta a separação entre as placas e depois as aproxima até que recomponham a configuração inicial e a fonte de voltagem realizam um trabalho líquido positivo. Lembre-se que há corrente em quanto as placas são movimentadas mantendo a voltagem constante. Somente depois de desconectada a fonte deixa de realizar trabalho.



Capítulo 6

Movimento de partículas carregadas em campo elétrico prescrito

PROBLEMA 6.1 Em um acelerador eletrostático, um próton é acelerado por uma diferença de potencial $V_0 = 2 \text{ MV}$ (dois megavolts=dois milhões de volts). Para defletir o próton, duas placas encurvadas são postas no seu caminho, como mostra a figura. A separação entre as placas é $d = 1 \text{ cm}$ e a diferença de potencial entre elas $V_{\text{placas}} = 20.000 \text{ V}$. **Suponha o que o campo elétrico entre as placas seja uniforme.** Calcule o raio médio de curvatura R das placas. A aproximação de campo uniforme é razoável? **Justifique a sua resposta.**



SOLUÇÃO 6.1 :

Para que o próton descreva um movimento circular (uniforme) entre as placas defletoras devemos ter:

$$F = \frac{mv_0^2}{R}$$

onde $F = eE$. Supondo o campo elétrico entre as placas defletoras uniforme temos:

$$E = \frac{V_P}{d}$$

Por outro lado:

$$\frac{mv_0^2}{2} = eV_0$$

Segue que:

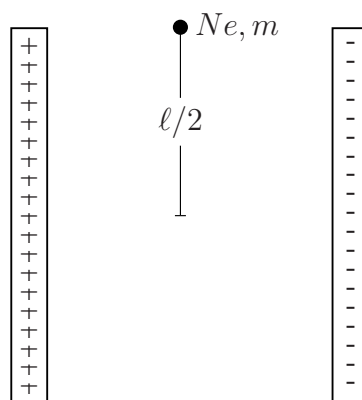
$$e \frac{V_P}{d} = 2e \frac{V_0}{R}$$

ou

$$R = d \frac{V_0}{V_P}$$

Substituindo os dados do problema obtemos $R = 2 \text{ m}$. Como $R \gg d$, a aproximação de campo uniforme é razoável. ■

PROBLEMA 6.2 Uma gotícula de água de massa m e carga Ne , onde N é um inteiro positivo e e é a carga do elétron, cai sob a ação de um campo gravitacional uniforme g entre as placas de um capacitor de placas paralelas de área $\ell \times \ell$ e carga q . A altura inicial da gotícula é $\ell/2$ e ela cai a partir do repouso. Obtenha a trajetória descrita pela gotícula entre as placas do capacitor. **Despreze os efeitos de borda.**



SOLUÇÃO 6.2 :

A gotícula está sujeita a uma força vertical (seu peso!):

$$F_y = -mg,$$

e a uma força eletrostática horizontal:

$$F_x = qE_x,$$

onde E_x é dado por:

$$E_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 \ell^2}.$$

Segue que,

$$y(t) = \frac{\ell}{2} - \frac{1}{2}gt^2.$$

Como

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{qQ}{m\epsilon_0\ell^2},$$

temos

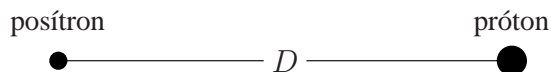
$$x(t) = \frac{1}{2}a_x^2 = \frac{qQ}{2m\epsilon_0\ell^2}t^2.$$

Eliminando t^2 , obtemos a equação da trajetória da partícula entre as placas:

$$y(x) = \frac{\ell}{2} - \frac{m g \epsilon_0 \ell^2}{q Q} x.$$

Portanto, a trajetória entre as placas é retilínea, pois temos uma equação linear da forma $y = ax + b$, que representa a equação da reta. ■

PROBLEMA 6.3 Considere um pósitron de carga $+e$ e massa m_e e um próton de carga $+e$ e massa m_p , inicialmente em repouso e separados por uma distância D , veja a figura. Calcule as velocidades \vec{v}_e e \vec{v}_p do pósitron e do próton, respectivamente, quando a distância entre eles for infinitamente grande.



SOLUÇÃO 6.3 :

A conservação de energia permite escrever:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 D} = \frac{m_e \vec{v}_e^2}{2} + \frac{m_e \vec{v}_p^2}{2},$$

e a conservação do momentum linear:

$$m_e \vec{v}_e + m_p \vec{v}_p = 0.$$

Segue que:

$$\vec{v}_e = \sqrt{\frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 D m_e} \left(\frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_p}} \right)},$$

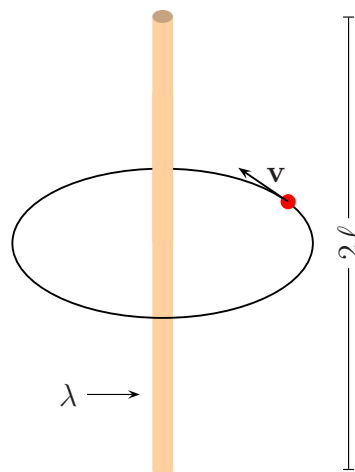
e

$$\vec{v}_p = \frac{m_e}{m_p} \sqrt{\frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 D m_e} \left(\frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_p}} \right)}.$$

■

PROBLEMA 6.4 Considere um elétron de massa m e carga $-e$ que descreve uma órbita circular em torno de uma distribuição filiforme de carga com uma densidade linear uniforme λ . O plano da órbita é perpendicular à distribuição. Calcule a magnitude da velocidade orbital do elétron nos casos seguintes:

- A distribuição se estende de $-\infty$ até $+\infty$;
- A distribuição é finita e de comprimento igual a 2ℓ . Nesse caso, suponha que o plano que contém a órbita do elétron divide a distribuição em duas partes iguais. Tome o limite $\ell \rightarrow \infty$ e compare o seu resultado com o resultado anterior.

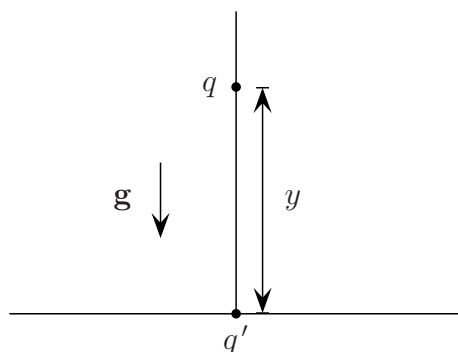


SOLUÇÃO 6.4 :

■

PROBLEMA 6.5 Uma carga puntiforme de valor q e massa m é forçada a mover-se ao longo do eixo cartesiano $y > 0$ sob a ação do seu peso e de uma força coulombiana gerada pela interação com uma carga puntiforme q' de mesmo sinal, fixa na origem.

- Calcule a altura de equilíbrio da carga q .
- Suponha que a carga q sofra um pequeno deslocamento a partir do equilíbrio. Calcule o período das oscilações subsequentes.

**SOLUÇÃO 6.5 :**

(a) A equação de movimento se escreve:

$$m\ddot{y} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 y^2} - mg.$$

No equilíbrio temos $m\ddot{y} = 0$, logo, a repulsão coulombiana deve igualar-se à atração gravitacional,

$$\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 y^2} = mg,$$

segue então que:

$$y_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 mg}}.$$

(b) Para examinar o movimento entorno da posição de equilíbrio escrevemos: $y = y_{\text{eq}} + \delta y$, e substituímos na equação de movimento obtendo, após um rearranjo simples:

$$m \delta \ddot{y} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 y_{\text{eq}}^2} \left(1 + \frac{\delta y}{y_{\text{eq}}}\right)^{-2} - mg.$$

Como, por hipótese, $\delta y/y_{\text{eq}} \ll 1$, podemos escrever:

$$\left(1 + \frac{\delta y}{y_{\text{eq}}}\right)^{-2} \approx 1 - \frac{\delta y}{y_{\text{eq}}},$$

Segue que,

$$m \delta \ddot{y} \approx = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 y_{\text{eq}}^3} \delta y,$$

onde usamos a aproximação $(1+x)^n \approx 1+nx$ e a condição de equilíbrio do item anterior. Para concluir, rescrevemos a equação de movimento resultante na forma:

$$\delta \ddot{y} + \omega^2 \delta y = 0,$$

onde

$$\omega^2 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 m y_{\text{eq}}^3}.$$

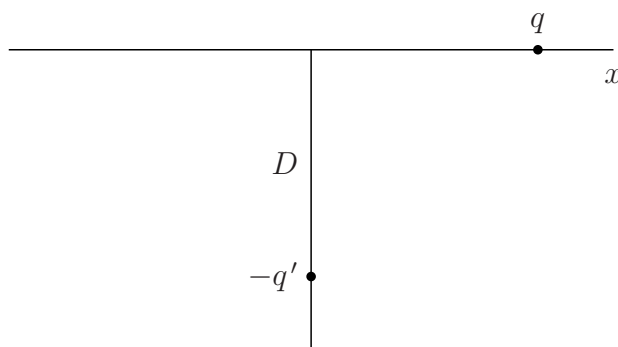
Segue que o período é dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m y_{\text{eq}}^3}{qq'}}.$$

■

PROBLEMA 6.6 Uma carga puntiforme de valor q e massa m é obrigada mover-se ao longo do eixo x . Uma segunda carga puntiforme de valor igual a $-q'$ é mantida a uma distância perpendicular D fixa do eixo x .

- Escreva a equação de movimento para a carga q .
- Calcule o período de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio da carga q .



SOLUÇÃO 6.6 :

- (a) Como o movimento acontece somente ao longo do eixo x , temos que escrever a componente x da força de atração coulombiana entre as duas cargas puntiformes. Da Figura ??, vemos que,

$$F_x = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{x}{r},$$

onde r é a distância entre q e q' :

$$r = \sqrt{D^2 + x^2}.$$

Portanto,

$$F_x = -\frac{qq' x}{4\pi\epsilon_0 (D^2 + x^2)^{3/2}}.$$

A equação de movimento se escreve:

$$m \ddot{x} = -\frac{qq' x}{4\pi\epsilon_0 (D^2 + x^2)^{3/2}}.$$

- (b) Como $x^2 \ll D^2$,

$$m \ddot{x} = -\frac{qq' x}{4\pi\epsilon_0 D^3},$$

ou ainda

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

onde

$$\omega^2 = \frac{qq' x}{4\pi\epsilon_0 m D^3}.$$

Segue então que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m D^3}{qq'}}.$$

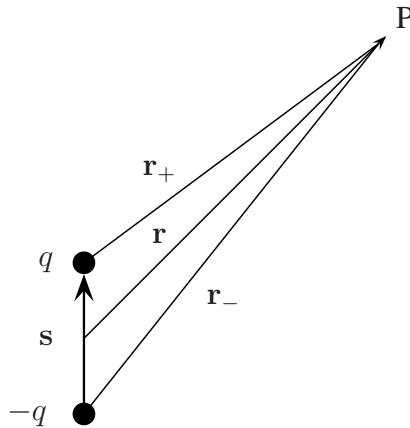
■

Capítulo 7

Problemas adicionais

O dipolo elétrico

PROBLEMA 7.1 *O campo elétrico de um dipolo elétrico* Considere duas cargas puntiformes de mesmo valor q , porém de sinais opostos. Seja s o vetor que une $-q$ a q , r_+ o vetor que une a carga positiva ao ponto de observação P , r_- , o vetor que une $-q$ ao mesmo ponto e r o vetor que une o ponto mediano O da reta suporte de s ao ponto P . Veja a figura abaixo. Um arranjo de cargas estáticas deste tipo é denominado *dipolo elétrico*. Determine o campo elétrico dessa configuração no ponto de observação P cujo endereço é dado pelo vetor r , mas com a condição de que a separação entre as cargas seja muito menor do que a distância da origem ao ponto de observação, isto é: $s \ll r$ onde $s \equiv \|s\|$ e $r \equiv \|r\|$.



SOLUÇÃO 7.1:

De acordo com o princípio da superposição, o campo elétrico em P se escreve:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-,$$

ou fazendo uso de lei de Coulomb:

$$\mathbf{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_+}{r_+^3} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_-}{r_-^3}.$$

Da geometria mostrada na Figura ?? vemos que podemos escrever as relações vetoriais:

$$\mathbf{r}_+ = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2},$$

e

$$\mathbf{r}_- = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}.$$

Isto nos permitirá eliminar \mathbf{r}_+ e \mathbf{r}_- em favor de \mathbf{r} (lembre-se que \mathbf{s} é um vetor fixo). De fato, eliminando \mathbf{r}_+ e \mathbf{r}_- obtemos¹

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}/2}{\left(r^2 + \frac{s^2}{4} - rs \cos \theta\right)^{3/2}} - \frac{\mathbf{r} + \mathbf{s}/2}{\left(r^2 + \frac{s^2}{4} + rs \cos \theta\right)^{3/2}} \right]$$

Este resultado representa o campo elétrico em P de modo exato. Por hipótese o ponto de observação está muito distante do dipolo elétrico, convém então rescrever a relação acima de um modo que a deixe pronta para efetuarmos uma expansão binomial na variável adimensional s/r :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}/2}{r^3 \left(1 + \frac{1}{4} \frac{s^2}{r^2} - \frac{s}{r} \cos \theta\right)^{3/2}} - \frac{\mathbf{r} + \mathbf{s}/2}{r^3 \left(1 + \frac{1}{4} \frac{s^2}{r^2} + \frac{s}{r} \cos \theta\right)^{3/2}} \right].$$

A expansão binomial é dada por:

$$(1 + u)^p = 1 + \frac{p}{1!}u + \frac{p(p-1)}{2!}u^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}u^3 + \dots,$$

onde p é um número inteiro ou fracionário, positivo ou negativo, isto é: $p \in \{\pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2, \dots\}$. No caso, desprezaremos o termo quadrático em s/r no denominador e faremos as identificações:

$$u \equiv \frac{s}{r} \cos \theta,$$

¹Lembre-se que se $\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$ é a soma ou diferença dos vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} , então o módulo ou norma dessa soma ou diferença é dada por $\sqrt{A^2 + B^2 \pm 2AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})}$.

e $p = -3/2$. Mantendo apenas os dois primeiros termos da expansão binomial temos,

$$\left(1 \pm \frac{s}{r} \cos \theta\right)^{-3/2} \approx \left(1 \pm \frac{3s}{2r} \cos \theta\right).$$

Segue então, após algumas simplificações imediatas, que:

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3s \cos \theta \hat{\mathbf{r}}}{r^3} - \frac{\mathbf{s}}{r^3} \right).$$

Podemos rescrever este resultado de modo mais compacto se introduzirmos o *momento de dipolo elétrico* \mathbf{p} que é definido por:

$$\mathbf{p} := qs.$$

Observe que de acordo com a definição $q > 0$. O momento de dipolo é medido no S.I. em unidades de coulomb vezes metro, $C \cdot m$.

Como $s \cos \theta = \mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{r}}$, é fácil ver que o campo do dipolo elétrico pode ser posto na forma:

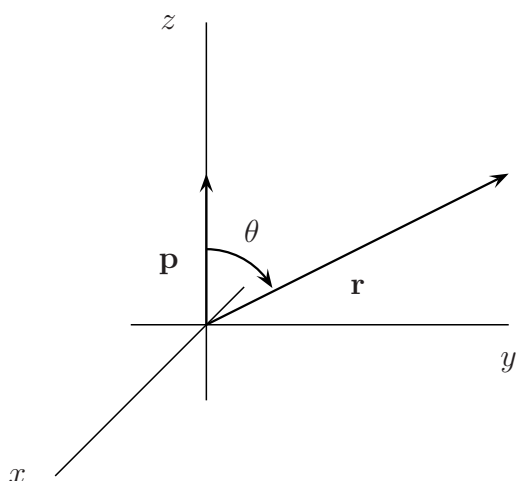
$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}].$$

Observe que o campo do dipolo elétrico cai em intensidade com o inverso do cubo da distância e não com o inverso do quadrado como no caso da carga puntiforme. O campo de dipolo elétrico na forma dada acima é independente da escolha de um sistema de coordenadas particular desde que o dipolo \mathbf{p} se encontre na origem. ■

PROBLEMA 7.2 Mostre que, em coordenadas polares, se colocarmos um dipolo elétrico na origem e fizermos o seu momento de dipolo \mathbf{p} apontar no sentido positivo do eixo z , então o campo elétrico do dipolo se escreve:

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta)$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{p} e o vetor $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r$ que dá a posição do ponto de observação em relação à origem, $\hat{\mathbf{e}}_r$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ são vetores unitários associados às coordenadas polares, veja a figura.



SOLUÇÃO 7.2 :

Para obter o resultado pedido escreva primeiro:

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{r^3} [3(p \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_r - p\hat{\mathbf{z}}]$$

Agora expresse o vetor unitário $\hat{\mathbf{z}}$ como combinação linear de $\hat{\mathbf{e}}_r$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, isto é:

$$\hat{\mathbf{z}} = c_1 \hat{\mathbf{e}}_r + c_2 \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

A seguir mostre que $c_1 = \cos \theta$ e $c_2 = -\sin \theta$, portanto:

$$\hat{\mathbf{z}} = \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Agora complete o cálculo e obtenha o resultado pedido. ■

PROBLEMA 7.3 Considere um campo elétrico uniforme no espaço e constante no tempo E_0 . Suponha que um dipolo elétrico ideal \mathbf{p} seja introduzido no campo. Suponha ainda que o dipolo fique alinhado paralelamente ao campo elétrico inicial. Mostre que o dipolo é envolvido por uma superfície eqüipotencial esférica de raio:

$$r = \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{1/3},$$

onde $p = \|\mathbf{p}\|$ e $E_0 = \|\mathbf{E}_0\|$.

SOLUÇÃO 7.3 :

O potencial de um dipolo se escreve:

$$V_{\text{dipolo}}(r) = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

e o potencial de um campo uniforme se escreve:

$$V_{\text{campo. uni.}}(r) = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + C,$$

onde C é uma constante. Pelo princípio da superposição:

$$V(r) = V_{\text{dipolo}}(r) + V_{\text{campo. uni.}}(r),$$

ou ainda:

$$V(r) = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} + C.$$

Supondo \mathbf{p} e \mathbf{E}_0 paralelos e apontando no sentido positivo do eixo z , e \mathbf{p} na origem temos:

$$V(r) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 \cos \theta + C,$$

onde θ é o ângulo polar, i.e.: o ângulo entre o vetor de posição \mathbf{r} e o eixo z . Segue que:

$$V(r) = \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \right) \cos \theta + C.$$

Para que a superfície equipotencial que queremos determinar seja esférica, o potencial total não pode depender do ângulo θ . Portanto,

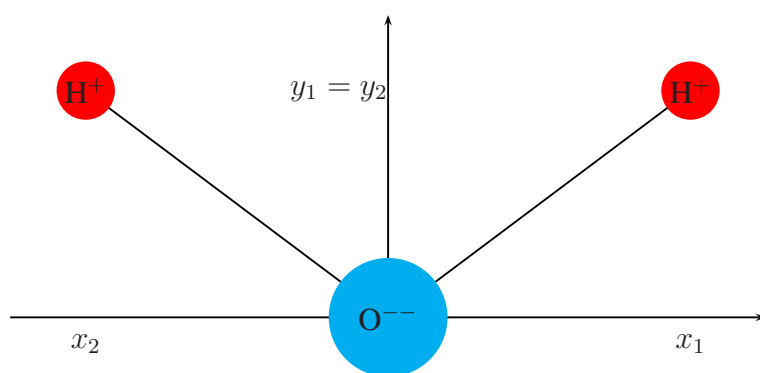
$$\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r = 0,$$

ou:

$$r = \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{1/3}.$$

■

PROBLEMA 7.4 A molécula de água, H_2O , é pode ser vista como uma distribuição eletrostática de carga com carga total Q nula, mas momento de dipolo elétrico $\mathbf{p}_{\text{H}_2\text{O}}$ diferente de zero. Suponha que os átomos da molécula estejam contidos no mesmo plano. Suponha também o átomo de oxigênio na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Um dos átomos de hidrogênio tem coordenadas $x_1 = 0,077 \text{ nm}$, $y_1 = 0,057 \text{ nm}$. O outro átomo de hidrogênio tem coordenadas $x_2 = -0,077 \text{ nm}$ e $y_2 = y_1$. Calcule o momento de dipolo elétrico $\mathbf{p}_{\text{H}_2\text{O}}$ da molécula de água. Calcule também o ângulo entre os segmentos de reta que unem o oxigênio a cada um dos dois hidrogênios.



SOLUÇÃO 7.4 :

Sejam θ o ângulo entre o segmento de reta que une a origem ao ponto de coordenadas (x_1, y_1) , p a intensidade do dipolo formado pelo átomo de oxigênio e um dos átomos de hidrogênio, e $e = 1,6 \times 10^{-6} \text{ C}$, a carga fundamental. Então, em módulo:

$$p_{\text{H}_2\text{O}} = 2p \sin \theta = 2e \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = 2e y_1.$$

Substituindo os valores dados obtemos,

$$p_{\text{H}_2\text{O}} \approx 5,56 \text{ D},$$

onde $1 \text{ D} = 1 \text{ debye} \approx 3,36 \times 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$. Vetorialmente,

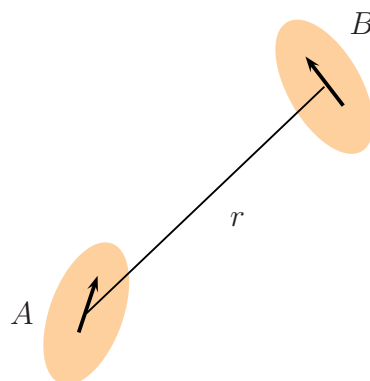
$$\mathbf{p}_{\text{H}_2\text{O}} = 5,56 \hat{\mathbf{y}}.$$

O ângulo θ definido acima vale:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{58}{77} \right) \approx 37^\circ.$$

Portanto, o ângulo entre os segmentos de reta que unem o oxigênio na origem a cada um dos hidrogênios vale $180^\circ - 2 \times 37^\circ \approx 106^\circ$. ■

PROBLEMA 7.5 Considere duas moléculas polares, separadas por uma distância fixa r . Denote uma das moléculas por A e a outra por B , e suponha os momentos de dipolo respectivos como ideais, i.e.: puntiformes, veja a figura.



Mostre que a energia de interação entre a molécula A e a molécula B , de momentos de dipolo \mathbf{p}_A e \mathbf{p}_B , respectivamente, é dada por:

$$U_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B - 3 \frac{(\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_B \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right].$$

SOLUÇÃO 7.5 :

A energia de interação é dada por:

$$U_{AB} = -\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{E}_B,$$

onde \mathbf{E}_B é o campo elétrico criado pelo dipolo B na posição do dipolo A . Esta expressão é simplesmente a energia de um dipolo em campo externo adaptada ao problema em questão. O campo elétrico de um dipolo ideal por sua vez é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) \hat{\mathbf{e}}_r - \mathbf{p}].$$

Substituindo esta expressão (com os índices apropriados) na energia de interação obtemos o resultado pedido. Note que poderíamos ter começado com:

$$U_{BA} = -\mathbf{p}_B \cdot \mathbf{E}_A,$$

mas chegaríamos ao mesmo resultado, ou seja: $U_{AB} = U_{BA}$ ■

PROBLEMA 7.6 Considere uma carga puntiforme q colocada no ponto P de coordenadas $(0, 0, s)$. Mostre que o campo elétrico gerado por essa carga num ponto arbitrário P' de coordenadas (x, y, z) é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_{\text{punti}}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r) \hat{\mathbf{e}}_r - \mathbf{p}], \end{aligned}$$

onde r é a distância à origem e \mathbf{p} é o momento de dipolo elétrico da carga puntiforme em relação à origem.

SOLUÇÃO 7.6 : ■

Problemas adicionais

PROBLEMA 7.7 *Validade da lei de Gauss 1* Suponha que o potencial de uma carga puntiforme de valor q seja dado por:

$$V(r) = \frac{q e^{-\alpha r}}{4\pi\epsilon_0 r},$$

onde r é a distância radial entre o ponto de observação e a carga puntiforme e α é uma constante real e positiva.

(a) Quais são as dimensões de α ?

- (b) Determine o campo elétrico \mathbf{E} associado com esse potencial.
- (c) Discuta a validade da lei de Gauss para o campo elétrico que você obteve a partir do potencial dado.
- (d) O campo elétrico obtido é conservativo?

SOLUÇÃO 7.7 :

- (a) Como o argumento da função exponencial deve ser adimensional, a constante α deve ter dimensões de inverso de comprimento.
- (b) O campo elétrico é dado por:

$$\mathbf{E} = -\nabla V(r).$$

Com a representação para o gradiente em coordenadas esféricas obtemos:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\alpha r + 1) e^{-\alpha r} \hat{\mathbf{e}}_r$$

- (c) Considere uma superfície esférica de raio R no centro da qual está a carga puntiforme. A lei de Gauss aplicada ao resultado anterior nos dá:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_{\Omega} \mathbf{E}(R) \cdot \hat{\mathbf{e}}_r R^2 d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} (\alpha R + 1) e^{-\alpha R}.$$

Vemos que o fluxo através da superfície esférica depende do raio da mesma. Logo, a lei de Gauss não se aplica ao campo da carga puntiforme. Podemos imaginar que em situações mais complexas, o fluxo através de superfícies fechadas arbitrarias dependa da geometria dessas superfícies.

- (d) Como o campo pode ser obtido a partir do gradiente de uma função escalar, podemos afirmar de imediato que este campo é conservativo. Ou ainda, como $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, como pode ser facilmente verificado, segue que este campo elétrico é conservativo.

■

PROBLEMA 7.8 Em um modelo clássico mais sofisticado no que diz respeito à distribuição da carga elétrica, um átomo de hidrogênio pode ser considerado como formado por uma carga

puntiforme positiva $+e$, o próton, e uma nuvem eletrônica esfericamente simétrica descrita pela densidade de carga elétrica:

$$\rho_e(r) = -\frac{e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}, \quad r \in (0, \infty),$$

onde r é a distância radial ao núcleo que vamos supor fixo. A constante a_0 é o raio de Bohr e seu valor é igual a $0,53 \times 10^{-10}$ m.

- Mostre que o átomo de hidrogênio é eletricamente neutro.
- O campo elétrico efetivo $\mathbf{E}_{\text{efetivo}}$ do átomo é dado pela superposição do campo elétrico do próton com o campo elétrico da nuvem eletrônica. Determine o campo elétrico efetivo em um ponto arbitrário do espaço.
- Mostre que no limite $r \rightarrow 0$, o campo efetivo tende ao campo do próton.
- Mostre que no limite $r \rightarrow \infty$, o campo efetivo tende a zero.

SOLUÇÃO 7.8:

- A carga q_{nuvem} associada com a nuvem eletrônica é dada por:

$$\begin{aligned} q_{\text{nuvem}} &= \int \rho d^3\mathbf{r} \\ &= -\frac{e}{\pi a_0^3} \int_0^\infty e^{-2r/a_0} 4\pi r^2 dr \\ &= -\frac{4e}{a_0^3} \int_0^\infty e^{-2r/a_0} r^2 dr. \end{aligned}$$

A integral pode ser calculada com o auxílio de uma tabela de integrais:

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}},$$

onde $\alpha > 0$ e n é um inteiro positivo. No nosso caso, $n = 2$ e $\alpha = 2/a_0$, logo:

$$q_{\text{nuvem}} = -\frac{4e}{a_0^3} \frac{2!}{\left(\frac{2}{a_0}\right)^3} = -e.$$

A carga do próton é $q_{\text{próton}} = +e$, logo, a carga total do átomo é:

$$q_{\text{próton}} + q_{\text{nuvem}} = e + (-e) = 0,$$

isto é: o átomo de hidrogênio é eletricamente neutro!

- (b) Como o problema apresenta simetria esférica, o campo elétrico da nuvem eletrônica é radial e a componente radial do campo em um ponto arbitrário P do espaço pode ser calculada com a lei de Gauss:

$$\begin{aligned} E_{\text{nuvem}}(r) &= \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_0^r \left(-\frac{e}{\pi a_0^3} \right) e^{-2r'/a_0} 4\pi r'^2 dr' \\ &= -\frac{e}{\pi\epsilon_0 a_0^3 r^2} \int_0^r e^{-2r'/a_0} r'^2 dr'. \end{aligned}$$

A integral pode ser efetuada com a fórmula:

$$\int x^2 e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \left(x^2 - \frac{2x}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} \right).$$

Efetuada a integral obtemos:

$$E_{\text{nuvem}}(r) = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 a_0^3 r^2} \left[e^{-2r/a_0} \left(r^2 + a_0 r + \frac{a_0^2}{2} \right) - \frac{a_0^2}{2} \right].$$

O campo elétrico efetivo em um ponto P é a combinação linear do campo do próton com o campo da nuvem eletrônica:

$$\mathbf{E}_{\text{efetivo}} = \mathbf{E}_{\text{próton}} + \mathbf{E}_{\text{nuvem}},$$

ou,

$$\mathbf{E}_{\text{efetivo}}(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{e}{2\pi\epsilon_0 a_0^3 r^2} \left[e^{-2r/a_0} \left(r^2 + a_0 r + \frac{a_0^2}{2} \right) - \frac{a_0^2}{2} \right] \hat{\mathbf{e}}_r.$$

- (c) No limite em que $r \rightarrow \infty$, o campo da nuvem eletrônica tende ao campo de uma carga negativa puntiforme:

$$\mathbf{E}_{\text{nuvem}} \approx -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r,$$

que anula o campo do próton de modo que nesse limite:

$$\mathbf{E}_{\text{efetivo}}(r) \approx 0.$$

- (d) No limite $r \rightarrow 0$, o campo da nuvem tende a zero e ficamos com somente o campo do próton, logo:

$$\mathbf{E}_{\text{efetivo}}(r) \approx \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r.$$

■

PROBLEMA 7.9 Considere uma casca esférica condutora de raio R isolada e (uniformemente) carregada com uma carga q . Divida a casca em dois hemisférios, o hemisfério norte e o hemisfério sul.

- (a) Calcule a força que o hemisfério sul exerce sobre o hemisfério norte. **Sugestão:** lembre-se que a pressão eletrostática sobre uma superfície condutora é dada por $p_{\text{eletrostática}} = \sigma^2/(2\epsilon_0)$, onde σ é densidade superficial (local) de carga.
- (b) Calcule a força que o hemisfério norte exerce sobre o hemisfério sul.

SOLUÇÃO 7.9:

- (a) A força sobre um elemento de carga dq do condutor é dada por:

$$d\mathbf{F} = p_{\text{eletrostática}} \hat{\mathbf{n}} da = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} da,$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal (exterior) ao elemento de área da e σ é a densidade superficial local de carga. Para uma casca esférica condutora isolada em equilíbrio eletrostático σ é uniforme. Por simetria, a força eletrostática resultante sobre o hemisfério norte deve ter a direção do eixo z e apontar para z positivo. Portanto, temos que calcular apenas a componente F_z dessa força, logo:

$$dF_z = d\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = p_{\text{eletrostática}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} da.$$

Como $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_r$, temos: $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{z}} = \cos \theta$, onde θ é o ângulo polar. Portanto:

$$F_z = \int dF_z = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \int \int \cos \theta da.$$

O elemento de área da em coordenadas esféricas pode ser escrito como $da = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$, onde ϕ é o ângulo azimutal. Para o hemisfério norte, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, e $0 \leq \theta \leq \pi/2$, logo:

$$F_z = \frac{\sigma^2 R^2}{2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

Efetuada a integração sobre o ângulo azimutal e fazendo a mudança de variável $x = \cos \theta$ na integral sobre o ângulo polar temos:

$$F_z = \frac{\sigma^2 R^2}{2\epsilon_0} 2\pi \int_0^1 x dx.$$

Efetuada a última integração e lembrando que:

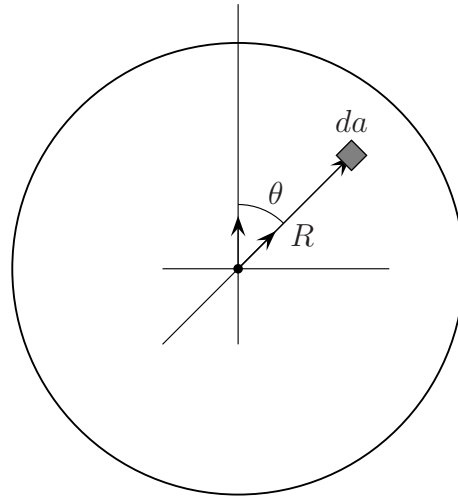
$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2},$$

obtemos finalmente:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \frac{(q/2)^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{z}}.$$

(b) De acordo com o princípio de ação e reação:

$$\mathbf{F}' = -\frac{1}{2} \frac{(q/2)^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{z}}.$$



■

PROBLEMA 7.10 *Validade da lei de Gauss 2* Considere uma distribuição de carga contínua e uniforme que preenche todo o espaço sem restrições.

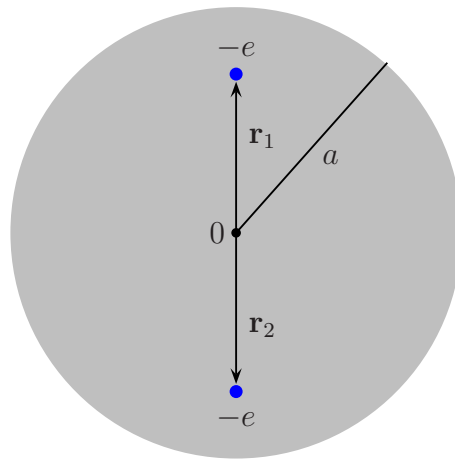
- (a) Quanto vale o campo elétrico em um ponto qualquer dessa distribuição? Não faça contas, pense na simetria!
- (b) Se considerarmos uma superfície fechada qualquer, qual será o valor do fluxo do campo elétrico através dessa superfície? Que se pode afirmar sobre a validade da lei de Gauss? Uma solução é afirmar que a lei de Gauss não se aplica a um espaço infinito.

SOLUÇÃO 7.10 :

- (a) Por simetria, o campo elétrico em qualquer ponto do espaço deve ser zero.
- (b) Pela lei de Gauss, o fluxo do campo elétrico deve ser igual à carga encerrada pela superfície gaussiana, o que significa que o campo não é nulo em todos os pontos do espaço, isto está em desacordo com o resultado anterior.

■

PROBLEMA 7.11 *O modelo do pudim de ameixas de Thomson.* No modelo de Thomson do átomo, o modelo do pudim de ameixas, os elétrons (as ameixas) são cargas puntiformes imersas em uma distribuição contínua, uniforme e esfericamente simétrica de carga positiva (o pudim). A carga de cada ameixa vale $-e$ e a carga total da distribuição contínua vale Ze , onde $e = +1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ é o *quantum* de carga elétrica e $Z > 0$ é o número atômico do átomo. Vamos aplicar o modelo ao átomo mais complexo depois do átomo de hidrogênio, o átomo de hélio, $Z = 2$. Suponha que os elétrons localizam-se sempre simetricamente em relação a origem, como mostra a figura abaixo. O raio da distribuição é a .



(a) Mostre que a equação de movimento do elétron 1 se escreve:

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} - \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a^3} \mathbf{r}_1,$$

onde $\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2)$ é o vetor posição do elétron 1(2) em relação ao centro geométrico da configuração, e m_e é a massa do elétron.

(b) Mostre agora que a equação de movimento do elétron 2 se escreve:

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} - \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a^3} \mathbf{r}_2,$$

(c) Suponhamos que os elétrons girem em torno do centro de massa da configuração (que coincide, por simetria, com o seu centro geométrico). Podemos transformar o problema em tela em um problema equivalente, a saber: o de uma partícula de massa reduzida $m_e/2$ movendo-se em um campo de forças central. Com esta finalidade, introduza o vetor posição relativa:

$$\mathbf{r} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

e o vetor de posição do centro de massa de um sistema de duas partículas em relação ao centro geométrico da configuração:

$$\mathbf{r}_{\text{C.M.}} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

A seguir mostre que no caso em tela $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2$, e logo: $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}/2$.

- (d) Agora mostre que as equações de movimento dos itens (a) e (b) são equivalentes a uma única equação, a saber:

$$\frac{m_e}{2} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \alpha \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r^2}{a^3} \right) \hat{\mathbf{e}}_r,$$

onde $r := \|\mathbf{r}\|$, e definimos $\alpha := e^2/(4\pi\epsilon_0)$.

- (e) Suponha que inicialmente que os elétrons fiquem fixos em suas posições de equilíbrio estático. Nesse caso mostre que:

$$r_{1,\text{eq.}} = \frac{a}{2}.$$

- (f) Suponha agora os elétrons em órbita circular em torno do centro de massa, uma das soluções possíveis da equação de movimento do item (d). Mostre agora que a posição de equilíbrio dinâmico é dada por:

$$r_{1,\text{eq.}} = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{m_e \omega^2 a}{2\alpha} \right)^{-1/3}.$$

- (g) Suponha que o diâmetro do átomo de hélio seja da ordem de 10^{-10} m. Calcule a frequência angular máxima de permitida. O que acontecerá se esse limite for ultrapassado?

SOLUÇÃO 7. 11 :

- (a) A força sobre o elétron 1 é dada pela superposição linear de duas forças. Uma é a repulsão coulombiana devido ao elétron 2:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3},$$

a outra é a força atrativa que a distribuição contínua exerce sobre o elétron 1:

$$-e\mathbf{E}(\mathbf{r}_1),$$

onde $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1)$ é o campo elétrico da distribuição na posição do elétron 1. Pela lei de Gauss sabemos que o campo elétrico dentro de uma distribuição de carga uniforme é dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0},$$

onde ρ é a densidade (uniforme) de carga. No caso,

$$\rho = \frac{2e}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3e}{2\pi a^3},$$

logo, a força resultante sobre o elétron 1 é:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} - \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a^3} \mathbf{r}_1.$$

Aplicando a segunda lei do movimento de Newton, força resultante = massa \times aceleração obtemos o resultado pedido.

- (b) Aplicando a terceira lei de Newton ao termo coulombiano e reconhecendo que a força que a distribuição faz sobre o elétron 2 é $-e\mathbf{E}(\mathbf{r}_2)$, obtemos o resultado pedido.
- (c) Como em relação ao centro geométrico da distribuição $\mathbf{r}_{\text{C.M.}} = 0$ e como $m_1 = m_2 = m_e$, segue imediatamente que $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2$, e logo $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}/2$.
- (d) Subtraindo as equações de movimento para os elétrons uma da outra:

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} - m_e \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = 2 \times \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} - \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Introduzindo o vetor posição relativa e definindo $\alpha := e^2/(4\pi\epsilon_0)$, obtemos

$$\frac{m_e}{2} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \alpha \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r^2}{a^3} \right) \hat{\mathbf{e}}_r,$$

onde $r := \|\mathbf{r}\|$ e $\hat{\mathbf{e}}_r := (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) / \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$. Lembrando que a massa reduzida é definida por:

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

e como $m_1 = m_2 = m_e$, vemos que a massa reduzida do sistema é $\mu = m_e/2$.

(e) No equilíbrio estático:

$$F(r_{\text{equil.}}) = 0,$$

logo:

$$\frac{1}{r^2} - \frac{r}{a^3} = 0,$$

segue que $r = a$. Como em módulo $r_1 = r/2$, temos:

$$r_{1,\text{equil.}} = \frac{a}{2}.$$

(f) A aceleração radial em coordenadas plano-polares é dada por:

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

Como a órbita é circular, $r = \text{constante}$, logo,

$$a_r = r \omega^2,$$

onde por conveniência fizemos $\omega := d\theta/dt$. Assim, para a órbita circular temos:

$$-\frac{m_e}{2} r \omega^2 = \alpha \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r^2}{a^3} \right).$$

Segue desta equação que:

$$r = a \left(1 - \frac{m_e \omega^2 a^3}{2\alpha} \right)^{-1/3},$$

e como $r = 2r_1$, temos finalmente que:

$$r_{1,\text{eq.}} = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{m_e \omega^2 a^3}{2\alpha} \right)^{-1/3}.$$

(g) A frequência máxima é determinada pela condição:

$$r_{1,\text{eq.}} = a.$$

Combinando esta condição com o resultado do item anterior obtemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{7\alpha}{4m_e a^3}}.$$

■

PROBLEMA 7.12 *Linhas de força.* Considere duas cargas puntiformes, uma de valor igual a $q_1 = q$ colocada no ponto $P_1(a, 0, 0)$ e outra de valor igual a $q_2 = \pm q$ colocada no ponto $P_2(-a, 0, 0)$. Queremos determinar a equação que governa as linhas de força desta configuração. Para isto proceda como indicado abaixo.

(a) Escreva as componentes E_x e E_y do campo elétrico da configuração.

(b) Agora introduza as transformações:

$$u = \frac{x+a}{y}, \quad e, v = \frac{x-a}{y},$$

e mostre que:

$$4\pi\epsilon_0 E_x = \frac{qv}{y^2(1+v^2)^{3/2}} \pm \frac{qu}{y^2(1+u^2)^{3/2}},$$

e

$$4\pi\epsilon_0 E_y = \frac{q}{y^2(1+v^2)^{3/2}} \pm \frac{q}{y^2(1+u^2)^{3/2}}.$$

(c) Mostre que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{(1+v^2)^{3/2} \pm (1+u^2)^{3/2}}{u(1+v^2)^{3/2} \pm (1+u^2)^{3/2}}.$$

(d) Mostre agora que usando as transformações definidas em (b) temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv - du}{udv - vdu}.$$

e, portanto, comparando este resultado com o obtido em (c), temos:

$$\frac{du}{dv} = \pm \left(\frac{1 + u^2}{1 + v^2} \right),$$

(e) Usando o método da separação de variáveis para a integrar a equação diferencial acima obtemos:

$$\frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \pm \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}} = C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Esta é a equação que determina as linhas de força desta configuração de cargas estáticas. Com um *software* de programas algébricos como por exemplo, o MAPLE ou o Mathematica, é possível traçar estas curvas. Para isto devemos atribuir valores à constante C e pedir ao programa que resolva a equação implícita.

SOLUÇÃO 7.12 :



PROBLEMA 7.13 Consideremos o campo elétrico gerado por duas cargas puntiformes de mesmo valor e sinal, por exemplo, dois prótons separados por uma distância R . Pelo princípio da superposição, o campo elétrico resultante em um ponto P do espaço será dado por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2,$$

onde \mathbf{E}_1 é o campo associado com uma das partículas e \mathbf{E}_2 é o campo associado com a outra. A energia eletrostática armazenada no campo é dada por:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} d^3x.$$

No caso, teremos:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 d^3x + \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2 d^3x + \epsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d^3x.$$

O primeiro termo representa a auto-energia da carga 1 e o segundo a auto-energia da carga 2. A auto-energia é o trabalho necessário para criar a carga *ex nihilo*. Se supusermos as cargas sem estrutura interna. i.e.: puntiformes, estas duas integrais são divergentes resultando em auto-energias infinitas. Este é um resultado que assombra a teoria clássica e a teoria moderna (quântica) do eletromagnetismo. Na teoria clássica varremos essas divergências para baixo do tapete redefinindo o zero da energia e afirmando que o termo importante é o terceiro, já que ele representa a interação entre as duas cargas. Se isto for verdade, então devemos ter:

$$\epsilon_0 \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 d^3x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Agora é com você.

- (a) Mostre que se supusermos as cargas 1 e 2 puntiformes as auto-energias respectivas serão infinitas!
- (b) Agora o resultado principal: mostre que o termo que representa a interação entre as duas cargas é igual ao resultado que obteríamos se utilizássemos a fórmula deduzida no livro-texto para a energia eletrostática de duas cargas puntiformes separadas por uma distância fixa R :

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

SOLUÇÃO 7.13 :

■

PROBLEMA 7.14 A dimensionalidade de um problema eletrostático pode levar a resultados surpreendentes. Eis um exemplo: considere um disco de raio a uniformemente carregado com uma densidade superficial uniforme de carga σ . Suponha o disco contido no plano xy com o centro geométrico no ponto $C = (a, a)$. Suponha que se queira calcular o campo elétrico no ponto $P(a, 2a)$. Um procedimento de cálculo é calcular o campo sobre uma reta contida no plano xy , paralela ao eixo y , e que passa pelo centro geométrico, i.e.: $x = a, \forall y > a$, e depois fazer $y = 2a$. Para **Sugestão**: divida o disco em faixas paralelas ao eixo x de largura dy e adapte o resultado obtido para o campo elétrico de um bastão uniformemente carregado sobre a mediana.

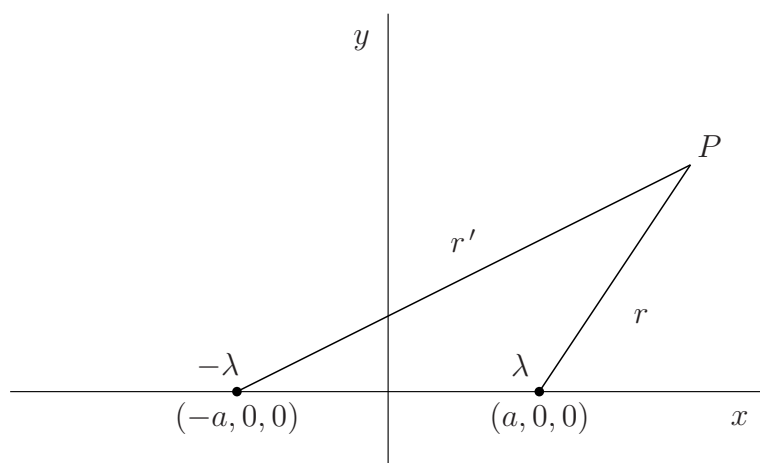
SOLUÇÃO 7.14 :



PROBLEMA 7.15 Mostre que as superfícies equipotenciais geradas por dois fios de comprimento infinito, uniformemente carregados com densidades de carga lineares iguais em magnitude mas de sinais algébricos diferentes, λ e $-\lambda$, separados por uma distância igual a $2a$ são superfícies cilíndricas circulares. **Sugestão:** suponha os fios perpendiculares ao plano $z = 0$ e os pontos de interceptação em $(-a, 0, 0)$ e $(a, 0, 0)$, veja a figura abaixo. Você deve obter uma equação da forma:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

onde x_0 e y_0 são as coordenadas do centro geométrico de uma circunferência de raio R contida no plano $z = 0$. Faça um gráfico cuidadoso mostrando algumas superfícies equipotencias.



SOLUÇÃO 7.15 :

Para um único fio de comprimento infinito, uniformemente carregado com uma densidade linear de carga λ o potencial é dado por:

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right),$$

onde r é a distância perpendicular ao fio e r_0 é a distância perpendicular ao potencial de referência ($V = 0$ para $r = r_0$). No problema em questão, pelo princípio da superposição temos:

$$V(r) = V_+(r) + V_-(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r'_0}{r'}\right).$$

Fazendo $r_0 = r'_0$, e usando as propriedades dos logaritmos podemos escrever:

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r'}{r}\right).$$

Da geometria da figura a seguir vemos que:

$$r = \sqrt{(x-a) + y^2},$$

e

$$r' = \sqrt{(x+a) + y^2}.$$

Segue que:

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(x+a) + y^2}{(x-a) + y^2} \right]^{1/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(x+a) + y^2}{(x-a) + y^2} \right].$$

Para determinar as superfícies equipotenciais impomos a condição $V = V_0 = \text{constante}$, que aqui se escreve:

$$\ln \left[\frac{(x+a) + y^2}{(x-a) + y^2} \right] = \frac{4\pi\epsilon_0}{\lambda} V_0.$$

Podemos escrever ainda,

$$\frac{(x+a) + y^2}{(x-a) + y^2} = e^{\frac{4\pi\epsilon_0}{\lambda} V_0} = K.$$

Efetuando a álgebra segue que:

$$x^2 - 2xa \left(\frac{K+1}{K-1} \right) + a^2 + y^2 = 0.$$

O passo seguinte é completar o quadrado perfeito. Como:

$$(x - x_0)^2 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2,$$

fazemos a identificação:

$$x_0 = a \frac{K+1}{K-1},$$

cujo quadrado é:

$$x_0^2 = a^2 \left(\frac{K+1}{K-1} \right)^2.$$

Somando e subtraindo x_0^2 temos:

$$x^2 - 2xa \left(\frac{K+1}{K-1} \right) + a^2 \left(\frac{K+1}{K-1} \right)^2 - a^2 \left(\frac{K+1}{K-1} \right)^2 + a^2 + y^2 = 0,$$

ou

$$\left[x - a \left(\frac{K+1}{K-1} \right) \right]^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{K+1}{K-1} \right)^2 - a^2,$$

ou ainda, efetuando e simplificando o lado direito:

$$\left[x - a \left(\frac{K+1}{K-1} \right) \right]^2 + y^2 = \frac{4a^2 K}{(K-1)^2}.$$

Esta equação pode ser interpretada como a equação de uma circunferência de raio:

$$R = \frac{2a\sqrt{K}}{K-1},$$

com centro em:

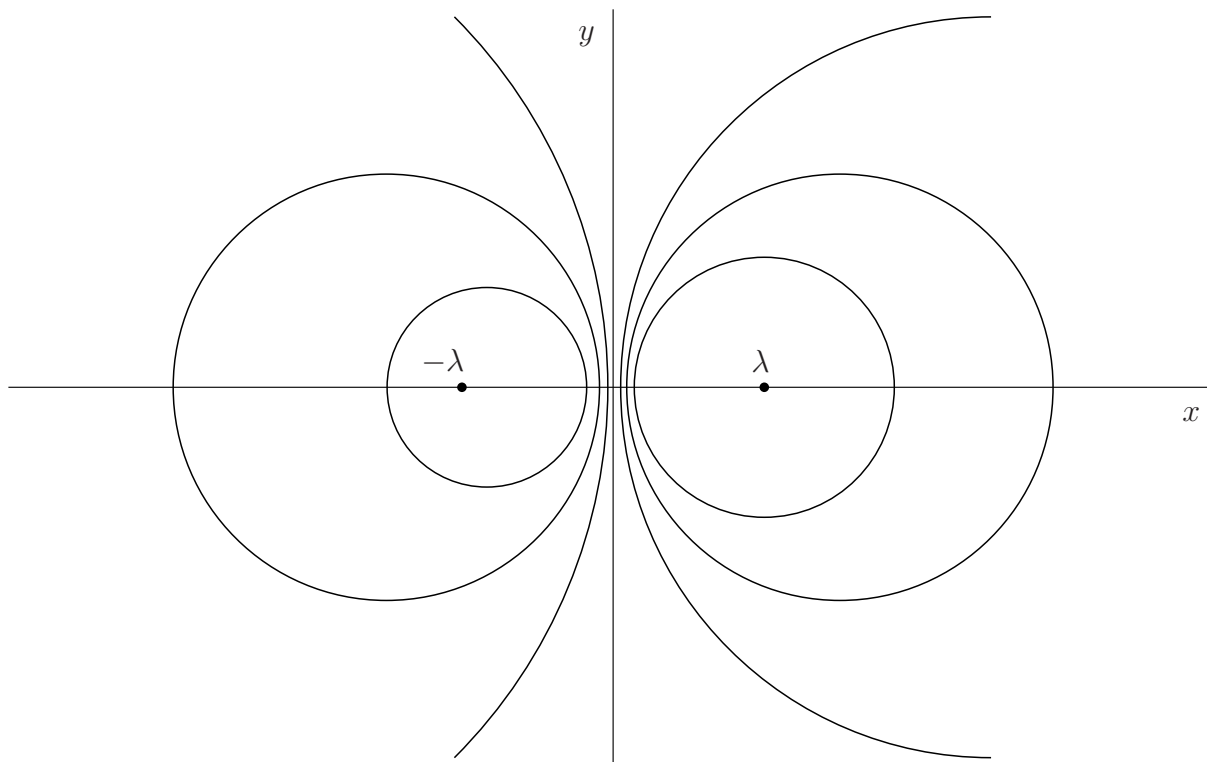
$$x_1 = a \frac{K+1}{K-1}, \quad y_1 = 0.$$

Observando que $K > 0$, vemos que $0 < K < 1$ para $V_0 < 0$ e $1 < K < \infty$ para $V_0 > 0$. Para $V_0 = 0$, $K = 1$.

Vejam então alguns limites importantes:

1. Se $V_0 < 0$, então $0 < K < 1$, isto significa que $x_1 < 0$, i.e.: o centro da circunferência está sobre o eixo $x < 0$. No limite $K \rightarrow 0$, o centro da circunferência localiza-se em $x_1 = -a$ e $y_1 = 0$ e seu raio R tende a zero.
2. Se $V_0 = 0$, $K = 1$, neste caso $x_1 \rightarrow \infty$ e o raio R tende ao infinito.
3. Se $V_0 > 0$, então $1 < K < \infty$, isto significa que $x_1 > 0$, i.e.: o centro da circunferência está sobre o eixo $x > 0$. No limite $K \rightarrow \infty$, o centro da circunferência localiza-se em $x_1 = a$ e $y_1 = 0$ e seu raio R tende a zero.

A figura abaixo representa algumas superfícies equipotenciais. Elas foram construídas com os dados da Tabela 7.



K	$x_1 = (K + 1)/(K - 1)$	$R = 2\sqrt{K}/(K - 1)$
0	-1.0	0
0.25	-1.67	1.33
0.50	-3.0	2.83
0.75	-7.0	6.93
1.00	∞	∞
1.50	5	4.9
2.00	3	2.83
3.00	2	1.73
∞	1	0

Tabela 7.1: Valores utilizados para construir as superfícies equipotenciais da figura. Os valores de K entre 0 e 1 correspondem às equipotenciais de valor negativo, $V < 0$. Para $K = 0$, $V = 0$. Os valores de K maiores do que 1 correspondem às equipotenciais de valor positivo, $V > 0$.



PROBLEMA 7.16 *Um exemplo simples de expansão em multipolos.* Em eletrostática, o objetivo principal é calcular o campo elétrico. Com o conhecimento do campo elétrico podemos calcular várias quantidades físicas importantes, por exemplo, a energia armazenada por um sistema eletrostático. Para calcular o campo elétrico podemos empregar a lei de Coulomb, a lei de Gauss ou calculá-lo por meio do potencial eletrostático. Este último é talvez o mais indicado, exceto nos casos em que o alto grau de simetria do sistema permite um uso simples e direto da lei de Gauss. Há vários modos, tanto analíticos como numéricos de calcular o potencial, o exemplo a seguir ilustra o método da expansão em multipolos, muito útil para distribuições localizadas de carga. O exemplo também mostra que **neutralidade elétrica não significa necessariamente ausência de interação eletrostática**, muito depende da geometria da distribuição.

Considere um bastão fino de comprimento ℓ que jaz sobre o eixo z com uma extremidade em $z = -\ell/2$ e a outra em $z = +\ell/2$. O bastão está carregado com uma densidade de carga $\lambda(z)$ dada por:

$$\lambda(z) = \begin{cases} -\lambda_0, & -\ell/2 < z < 0, \\ +\lambda_0, & 0 < z < +\ell/2. \end{cases}$$

Seu objetivo será calcular o potencial elétrico em um ponto P arbitrário distante da distribuição. No contexto, “distante” significa $\|\mathbf{r}\| \gg \ell$, onde \mathbf{r} é o vetor de posição do ponto P em relação à origem, veja a figura. Como a distribuição de carga ocupa uma região finita, localizada, podemos colocar o zero do potencial eletrostático no infinito. Uma vez calculado o potencial podemos calcular o campo elétrico \mathbf{E} . Onde necessário, sinta-se a vontade em utilizar *softwares* de cálculo algébrico como o MAPLE, MATHEMATICA, DERIVE, MATHCAD, MAXIMA² etc. **Se você não tem acesso a esses recursos, lápis e papel serão suficientes.**

- (a) Primeiro a dedução de algumas fórmulas. Para calcular o potencial em P proceda da seguinte forma: (i) divida o bastão em elementos de carga de valor dq , (ii) calcule a contribuição de cada elemento ao potencial em P e (iii) use o princípio da superposição para mostrar que o potencial em P é dado por:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \frac{\lambda(z) dz}{\left(1 + \frac{z^2}{r^2} - 2\frac{z}{r} \cos \theta\right)^{1/2}},$$

onde $r = \|\mathbf{r}\|$ e θ é o ângulo polar, o ângulo entre \mathbf{r} e o eixo z , veja a Figura 1.

- (b) Agora expanda o denominador no integrando em série de Taylor na variável:

$$u := \frac{z^2}{r^2} - 2\frac{z}{r} \cos \theta,$$

²Software gratuito para Linux, equivalente ao MAPLE.

até segunda ordem em u e mantenha apenas os termos até segunda ordem em z/r , e mostre que o potencial gerado pelo bastão pode ser escrito como uma soma:

$$V(P) = V_{\text{monopolo}} + V_{\text{dipolo}} + V_{\text{quadrupolo}} + \mathcal{O}(1/r^4),$$

onde

$$V(P)_{\text{monopolo}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \lambda(z) dz,$$

$$V(P)_{\text{dipolo}} = \frac{\cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} z \lambda(z) dz,$$

$$V(P)_{\text{quadrupolo}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} z^2 \lambda(z) dz.$$

O primeiro termo representa o potencial do bastão como se toda a sua carga estivesse concentrada na origem, este termo é o termo coulombiano ou de monopolo e varia com $1/r$. O termo de monopolo não depende das características geométricas da distribuição já que ele representa a contribuição de uma carga puntiforme. O segundo termo é chamado potencial de dipolo elétrico e representa o potencial de um dipolo colocado na origem. Note que este termo é proporcional a $1/r^2$. Este termo dependerá da estrutura interna da distribuição. Finalmente, o último termo é chamado de termo de quadrupolo elétrico. Ele varia com $1/r^3$ e também depende da estrutura interna da distribuição. Se você tivesse incluído mais termos na expansão em série de potências da função:

$$\left(1 + \frac{z^2}{r^2} - 2 \frac{z}{r} \cos \theta \right)^{1/2},$$

teríamos mais termos. Mas note que o n -ésimo termo varia com $1/r^n$, logo se r for suficientemente grande, as contribuições individuais são cada vez menores. Note também que a expansão em multipolos, como esta técnica é chamada, mostra que a distribuição pode ser neutra (termo de monopolo nulo), mas em razão da sua estrutura interna gerar um potencial e um campo elétrico $\mathbf{E} = -\nabla V$ em P .

- (c) Calcule agora **explicitamente** para a distribuição dada os termos de monopolo, dipolo e quadrupolo.
- (d) Calcule o campo elétrico no ponto P a partir dos seus resultados anteriores.

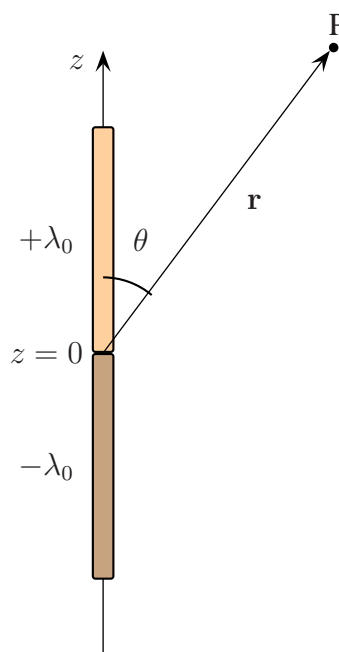
- (e) Para a distribuição do item anterior identifique o momento de dipolo elétrico da distribuição e compare o seu resultado com o do livro de texto.
- (f) Suponha que o bastão seja carregado com uma densidade de carga uniforme $\lambda(z) = \lambda_0$ para $z \in [-\ell/2, +\ell/2]$. Calcule novamente o potencial e o campo elétrico na mesma ordem de aproximação do caso anterior. **Compare os dois casos.**
- (g) A expansão de Taylor em de potências de u da função:

$$G(u, \theta) := \frac{1}{(1 + u^2 - 2u \cos \theta)^{1/2}},$$

leva a uma série infinita (convergente para $\|u\| < 1$) da forma:

$$G(u, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n P_n(\cos \theta).$$

Os coeficientes $P_n(\cos \theta)$ são funções de $\cos \theta$ e são denominados **polinômios de Legendre**. A função $G(u, \theta)$ é chamada de **função geradora**. Você aprenderá mais sobre esses polinômios em cursos mais avançados. Aqui eles apareceram de forma muito natural. Faça expansão de Taylor da função geradora até quarta ordem em u e identifique os cinco primeiros polinômios de Legendre.



SOLUÇÃO 7.16 :

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)

■

PROBLEMA 7.17 *Definição alternativa de dipolo elétrico* Uma definição mais geral de momento de dipolo elétrico é a que a segue: dado um sistema de N cargas puntiformes, q_1, q_2, \dots, q_N cujos vetores de posição em relação a um ponto fixo são $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$, respectivamente, o momento de dipolo \mathbf{p} da configuração é definido por:

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^N q_k \mathbf{r}_k.$$

- (a) Mostre que para uma configuração constituída por duas cargas puntiformes de mesma magnitude, mas sinais algébricos opostos, a definição geral dada acima reduz-se à definição elementar dos livros de texto.
- (b) Considere $N = 8$ cargas puntiformes idênticas simetricamente dispostas sobre uma circunferência de raio a . Mostre que o momento de dipolo desta configuração é zero. O que acontece se uma das cargas puntiformes for removida do conjunto?
- (c) A generalização da definição de momento de dipolo elétrico é para uma distribuição contínua é imediata:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} dq = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

Agora use esta definição para mostrar que o momento de dipolo elétrico de uma distribuição esfericamente simétrica de carga é nulo.

- (d) Considere uma distribuição superficial de carga sobre uma esfera de raio R dada por:

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo polar. Adapte a definição do item anterior para o caso de distribuições superficiais e calcule o momento de dipolo dessa distribuição particular.

SOLUÇÃO 7.17 :

(a) Para $N = 2$

$$\mathbf{p} = q_1 \mathbf{r}_1 + q_2 \mathbf{r}_2.$$

Fazendo $q_1 = q$ e $q_2 = -q$:

$$\mathbf{p} = q \mathbf{r}_1 - q \mathbf{r}_2 = q (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Definindo, veja a Figura 7.1:

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

temos:

$$\mathbf{p} = q \mathbf{s}.$$

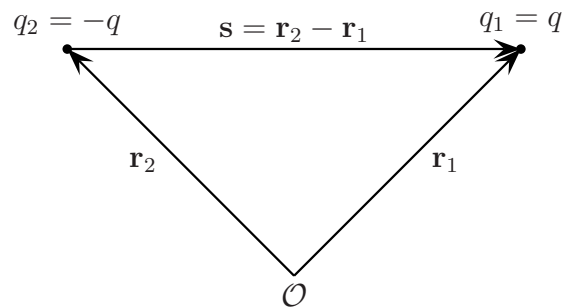


Figura 7.1: Definição de momento de dipolo elétrico.

(b) Como

$$\sum_{k=1}^N q_k \mathbf{r}_k = 0,$$

o momento de dipolo é nulo. No entanto, se uma carga puntiforme for removida,

$$\sum_{k=1}^N q_k \mathbf{r}_k \neq 0,$$

e haverá um momento de dipolo elétrico resultante.

(c) Para uma distribuição de carga com simetria esférica:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r),$$

onde $r = \|\mathbf{r}\|$. Por outro lado, em coordenadas polares:

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r,$$

Ao contrário dos vetores unitários associados com as coordenadas cartesianas $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$, o vetor unitário $\hat{\mathbf{e}}_r$ não é fixo e depende dos ângulos polar (θ) e azimutal (ϕ) e sua relação com a base cartesiana é:

$$\hat{\mathbf{e}}_r(\theta, \phi) = \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \sin \theta \hat{\mathbf{z}}.$$

O elemento de volume em coordenadas polares se escreve:

$$d^3\mathbf{r} = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr.$$

Portanto,

$$\mathbf{p} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r) \hat{\mathbf{e}}_r(\theta, \phi) r^3 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr.$$

Segue então que:

$$\mathbf{p} = \int_0^\infty \rho(r) r^3 \, dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \hat{\mathbf{e}}_r(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi.$$

Substituindo $\hat{\mathbf{e}}_r(\theta, \phi)$ por sua transformação para a base cartesiana e usando o fato de que:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi \, d\phi = 0,$$

ficamos com apenas um termo:

$$\mathbf{p} = 2\pi \int_0^\infty \rho(r) r^3 \, dr \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \, d\theta.$$

Fazendo $x = \cos \theta$ temos:

$$\mathbf{p} = 2\pi \int_0^\infty \rho(r) r^3 dr \int_{-1}^1 x dx.$$

Mas a integral de uma função ímpar sobre um domínio simétrico em relação à origem é nula:

$$\int_{-1}^1 x dx = 0,$$

logo, para uma distribuição de carga com simetria esférica:

$$\mathbf{p} = 0.$$

- (d) Para uma distribuição superficial de carga a definição de momento de dipolo elétrico assume a forma:

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} dq = \int \mathbf{r} \sigma dA,$$

onde σ é a densidade superficial de carga e dA é o elemento de área em coordenadas polares:

$$dA = R^2 \sin \theta d\theta d\phi.$$

Por outro lado, o vetor de posição sobre a esfera se escreve:

$$\mathbf{r} = R \hat{\mathbf{e}}_r(\theta, \phi),$$

logo,

$$\mathbf{p} = R^3 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \phi) \hat{\mathbf{e}}_r(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi.$$

Para a distribuição particular dada há somente simetria azimutal, pois a densidade superficial de carga não depende do ângulo azimutal ϕ . Procedendo como o item anterior vemos que o momento de dipolo é dado por:

$$\mathbf{p} = 2\pi R^3 \sigma_0 \left(\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right) \hat{\mathbf{z}}.$$

Novamente, fazendo a substituição $x = \cos \theta$, ficamos com:

$$\mathbf{p} = 2\pi R^3 \sigma_0 \left(\int_{-1}^1 x^2 dx \right) \hat{\mathbf{z}}.$$

Efetuando a integral obtemos:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{3} q_{\text{efetiva}} R \hat{\mathbf{z}},$$

onde

$$q_{\text{efetiva}} = \sigma_0 4\pi R^2.$$

■

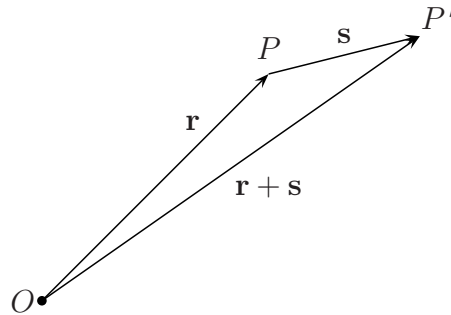
PROBLEMA 7.18 *Dipolo elétrico em campo não-uniforme* Neste problema calcularemos a força e o torque sobre um dipolo elétrico colocado em um campo eletrostático *não-uniforme*. Os resultados que você obterá generalizarão os resultados que normalmente nos textos de física básica.

- (a) O primeiro passo é mostrar que se $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ é o valor de um campo eletrostático não-uniforme no ponto P cujo endereço em relação a um referencial válido é \mathbf{r} , então o valor do campo em um ponto vizinho P' cujo endereço é $\mathbf{r} + \mathbf{s}$ com $\|\mathbf{s}\| \ll \|\mathbf{r}\|$ é dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{s}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

onde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ é o operador nabla. **Sugestão:** use coordenadas cartesianas e desenvolva as componentes cartesianas do campo $E_i(x + s_x, y + s_y, z + s_z)$ onde $i = x, y, z$, em série de Taylor em torno do ponto P de coordenadas (x, y, z) , mantendo apenas os termos de primeira ordem em s_x, s_y e s_z .

- (b) Para calcular a força sobre considere o seguinte modelo para o dipolo elétrico: duas cargas puntiformes de mesma magnitude q , porém de sinais algébricos opostos; coloque a carga negativa em P e a carga positiva em P' , veja a figura a seguir.



Agora use o resultado do item anterior e mostre que a força sobre o dipolo $\mathbf{p} = qs$ é dada por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

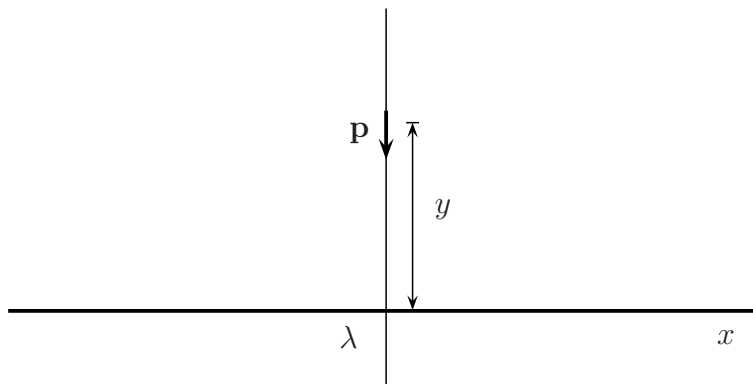
(c) Agora mostre que torque \mathbf{M} é dado por:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

(d) Particularize os resultados para o caso em que o campo externo é uniforme.

(e) Como aplicação considere um dipolo elétrico \mathbf{p} colocado a uma distância radial y de um fio infinito uniformemente carregado com uma densidade linear de carga λ , veja a figura abaixo. Calcule a força e o torque sobre o dipolo supondo que este esteja perpendicular ao fio. Considere as duas possibilidades de perpendicularidade.

(f) Repita o item anterior para o caso em que o dipolo é paralelo ao fio uniformemente carregado.



SOLUÇÃO 7.18:

- (a) Considere a componente E_x do campo elétrico no ponto cujo vetor de posição é $\mathbf{r} + \mathbf{s}$ e suponha que $\|\mathbf{s}\|$ seja pequeno. Então:

$$\begin{aligned} E_x(x + s_x, y + s_y, z + s_z) &= E_x(x, y, z) + s_x \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + s_y \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial y} + s_z \frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial z} \\ &= E_x(\mathbf{r}) + (\mathbf{s} \cdot \nabla) E_x(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Da mesma forma obtemos para as outras componentes:

$$E_k(\mathbf{r} + \mathbf{s}) = E_k(\mathbf{r}) + (\mathbf{s} \cdot \nabla) E_k(\mathbf{r}),$$

onde $k = x, y, z$. Em notação vetorial:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{s}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

- (b) A força será:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{s}) - q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q(\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= q(\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

- (c) O torque \mathbf{M} é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\mathbf{r} + \mathbf{s}) \times q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{s}) - q\mathbf{r} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= q(\mathbf{r} + \mathbf{s}) \times [\mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})] - q\mathbf{r} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= q\mathbf{r} \times (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\mathbf{s} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &\approx \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

onde deixamos de lado termos de segunda ordem em \mathbf{s} . Portanto:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

(d) Se o campo elétrico não depende de r , segue imediatamente que:

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

(e) Com relação à Figura ??:

$$\mathbf{r} = y \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{p} = -p \hat{\mathbf{y}}.$$

O campo elétrico gerado por um fio infinito uniformemente carregado com uma densidade linear de carga λ é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \hat{\mathbf{y}}.$$

A força sobre o dipolo será:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} = -p \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \right) \hat{\mathbf{y}} \\ &= \frac{p\lambda}{2\pi\epsilon_0 y^2} \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Suponha que $\lambda > 0$. Então a força entre o fio e o dipolo será repulsiva. Tendo em mente o modelo em que o dipolo consiste em uma carga negativa e uma carga positiva separadas por uma distância s , pode-se pensar que isto acontece por que a carga negativa está mais próxima do fio do que a carga positiva. Entretanto, se $\mathbf{p} = p \hat{\mathbf{y}}$, a força será atrativa. O torque é nulo porque \mathbf{p} é paralelo a \mathbf{E} e \mathbf{r} também é paralelo ao campo \mathbf{E} . Portanto,

$$\mathbf{M} = 0$$

(f) Se o dipolo for paralelo ao fio a força sobre o dipolo devido ao fio carregado será nula, mas o torque não. De fato:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Como (por exemplo):

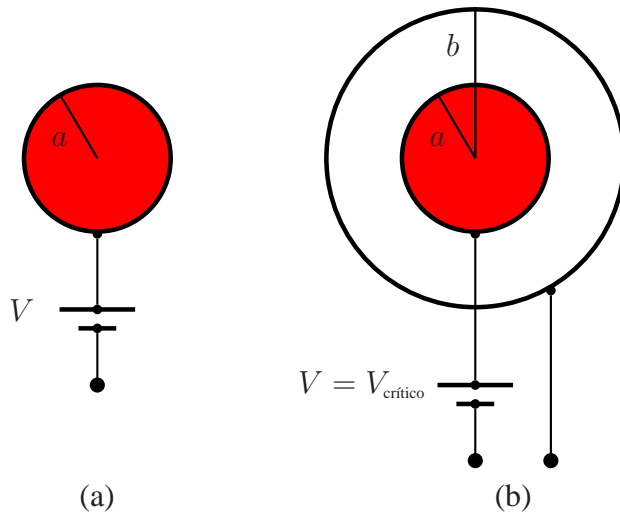
$$\mathbf{r} = y \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{p} = p \hat{\mathbf{x}},$$

então:



PROBLEMA 7.19 Quando o meio que circunda um condutor é o ar, o valor máximo do campo elétrico muito próximo à superfície deste é 3×10^6 V/m, se esse valor for ultrapassado o condutor descarregará produzindo centelhas. Considere inicialmente um condutor esférico de raio $a = 10$ cm. O condutor está conectado a uma fonte de alta tensão de valor V .

- (a) Determine o valor crítico $V_{\text{crítico}}$ da tensão V para que o condutor mantenha a sua carga e não descarregue no ar.
- (b) O condutor esférico é mantido sob a tensão crítica, mas é envolto por uma casca esférica condutora aterrada de raio igual ao dobro do raio do condutor. Calcule o valor do campo elétrico próximo à superfície do condutor interno.



SOLUÇÃO 7.19 :

- (a)
- (b)



Constantes Físicas Seleccionadas

Constante eletrostática:

$$K_e := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

Permissividade do vácuo:

$$\epsilon_0 \approx 8,9 \times 10^{12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

Inverso da constante eletrostática:

$$4\pi\epsilon_0 \approx 1,11 \times 10^{-10} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

Carga elementar:

$$e \approx 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Massa de repouso do elétron:

$$m_e \approx 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Massa de repouso de próton:

$$m_p \approx 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Campo elétrico crítico no ar:

$$\|\mathbf{E}_{\text{crítico}}\| \approx 3 \frac{\text{M V}}{\text{m}} = 3 \times 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Campo elétrico nas proximidades da superfície da Terra:

$$\|\mathbf{E}_{\text{superfície da Terra}}\| \approx 100 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Bibliografia

- [1] H. Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica 3 – Eletromagnetismo*, Editora Edgard Blücher, São Paulo 1997.
- [2] P. A. Tipler, *Física para Cientistas e Engenheiros*, quarta edição, Vol. 2, LTC Editora, Rio de Janeiro (2000).
- [3] H. D. Young, R. A. Freedman, T. R. Sandin e A. L. Ford, *Sears e Zemansky – Física III Eletromagnetismo*, 10ª edição, Person Education do Brasil, São Paulo 2004.
- [4] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Física III – Eletromagnetismo*, 5ª ed., Vol. 3, LTC Editora, Rio de Janeiro (2000).
- [5] E. Purcell, *Electricidad y Magnetismo – Berkeley Physics Course volumen 2*, 2ª edição, Editorial Reverté Barcelona 1988.
- [6] A. Shadowitz, *The Eletromagnetic Field*, Dover New York 1988.
- [7] R. Becker, *Eletromagnetic Fields and Interactions*, Dover New York 1982.
- [8] Feynman R. P. Feynman, R. B. Leighton e M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 2, Addison-Wesley, Reading 1963.
- [9] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River 1989.
- [10] P. Lorrain, D. R. Corson e F. Lorrain, *Fundamentals of Electromagnetic Phenomena*, Freeman, New York 2000.
- [11] O. D. Jefimenko, *Electricity and Magnetism*, 2nd ed., Electret Scientific Company, Star City 1989.
- [12] G. Bruhat e G. Goudet, *Curso de Física Geral – Eletricidade I*, 7ª edição, Difusão Européia do Livro, São Paulo 1961.

- [13] Marion J. B. Marion, *Classical Eletromagnetic Radiation*, 3rd ed., Saunders, Fort Worth 1995.
- [14] M. R. Spiegel, J. Liu e L. Abellanas, *Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*, McGraw-Hill/Interamericana de España, Madrid 2000.