



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## O Pêndulo de Kapitza: Equilibrando o Instável

Tiago Paulino dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientadores:  
Reinaldo Faria de Melo e Souza  
Germano Maioli Penello

Rio de Janeiro  
Maio de 2023

# O Pêndulo de Kapitza: Equilibrando o Instável

Tiago Paulino dos Santos

Orientadores:

Reinaldo Faria de Melo e Souza  
Germano Maioli Penello

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Dr. Reinaldo Faria de Melo e Souza (UFF-interno)  
(Presidente)

---

Dr. Takeshi Kodama (UFRJ-externo)

---

Dr. Carlos Farina de Souza (UFRJ-interno)

---

Dr. Vitor Luiz Bastos de Jesus (IFRJ-externo)

Rio de Janeiro  
Maio de 2023

## CIP - Catalogação na Publicação

S237p Santos, Tiago Paulino dos  
O Pêndulo de Kapitza: Equilibrando o Instável /  
Tiago Paulino dos Santos. -- Rio de Janeiro, 2023.  
185 f.

Orientador: Reinaldo Faria de Melo e Souza.  
Coorientador: Germano Maioli Penello.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do  
Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós  
Graduação em Ensino de Física, 2023.

1. Ensino de Física. 2. Pêndulo de Kapitza. 3.  
Tracker. 4. Videoanálise. 5. Impressão 3D. I.  
Souza, Reinaldo Faria de Melo e , orient. II.  
Penello, Germano Maioli, coorient. III. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Dedico esta dissertação aos amigos e familiares que me apoiaram durante toda a minha jornada no mestrado.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Edileuza e Pedro, por terem me dado toda a educação que me tornou a pessoa que sou hoje.

À minha inestimável esposa, Giselle Lucio, pelo apoio, compreensão e companheirismo que foram fundamentais para que eu me mantivesse firme durante o mestrado.

Aos meus orientadores, Reinaldo e Germano, pelo suporte, dicas e conselhos que me deram.

Ao professor Fernando, meu chefe, pelo apoio e por disponibilizar os equipamentos que foram fundamentais para a construção de parte do material presente neste trabalho.

Aos amigos, Wellington e Carol, pelo suporte que deram à minha família em momentos difíceis durante o período do mestrado.

Ao técnico Paulo, por me ajudar com a construção de uma das peças da bancada experimental.

Ao amigo Diego, pelas dicas sobre o código feito no Arduino.

Ao amigo David, pelas conversas enriquecedoras sobre física.

Aos professores do MPEF.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## RESUMO

### O Pêndulo de Kapitza: Equilibrando o Instável

Tiago Paulino dos Santos

Orientadores:  
Reinaldo Faria de Melo e Souza  
Germano Maioli Penello

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

A experimentação é essencial no ensino-aprendizagem de física, pois, dentre outros benefícios, desperta a curiosidade do aluno. Experimentos com efeitos poucos intuitivos podem ser utilizados para instigar ainda mais a curiosidade dos alunos. Neste trabalho apresentamos um material didático construído com o objetivo de auxiliar o professor a tornar uma aula que envolve conceitos de mecânica newtoniana e física ondulatória mais interessante e motivadora, fugindo da abordagem tradicional, em que o professor apenas escreve no quadro e o aluno copia. Deste modo, propomos o estudo de um fenômeno muito intrigante, o Pêndulo de Kapitza. Este fenômeno consiste em conseguir manter um pêndulo invertido em equilíbrio estável ao impormos uma vibração de frequência suficientemente alta em seu suporte. Para o estudo do mesmo, apresentamos duas propostas de construção do experimento. Um dos experimentos foi construído com peças impressas por uma impressora 3D, utilizando uma eletrônica de controle baseada no Arduino e circuitos periféricos. O outro foi construído utilizando uma máquina de cortar cabelo, uma forma mais barata e fácil de visualizar o fenômeno. Por se tratar de um fenômeno que possui oscilações muito rápidas, uma câmera de alta velocidade foi utilizada para gravar vídeos. Os vídeos foram utilizados em propostas de atividades de videoanálise com o *software Tracker*. Na abordagem teórica, utilizamos um modelo que explora as duas escalas de tempo presentes no fenômeno, separando o movimento do pêndulo em um movimento rápido de baixa amplitude e um lento de alta amplitude. Devido à pandemia de COVID-19, o material desenvolvido foi aplicado em uma oficina na modalidade EaD (Ensino à Distância). Obtivemos *feedbacks* positivos por parte dos alunos em relação ao material utilizado. Embora esse trabalho tenha como público alvo os estudantes do ensino superior e professores do ensino médio, o experimento pode ser apresentado a alunos do ensino básico, com o objetivo de fornecer a eles uma breve explicação sobre o fenômeno.

Palavras chave: Ensino de Física, Pêndulo de Kapitza, Tracker, Videoanálise, Impressão 3D.

Rio de Janeiro  
Maio de 2023

# ABSTRACT

## The Kapitza's Pendulum: Balancing the unstable.

Tiago Paulino dos Santos

Supervisors:

Reinaldo Faria de Melo e Souza

Germano Maioli Penello

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

Experiments are essentials in the teaching-learning of physics because, among other benefits, it arouses the student's curiosity. Counter-intuitive experiments can be used to further instigate the students. In this paper we present a didactic material developed with the purpose of aiding the teacher to prepare a class avoiding the traditional approach, in which the teacher just writes on the board and the students copy. Our proposal involves concepts of newtonian mechanics and oscillations. More specifically, we present the so-called Kapitza's pendulum, an intriguing experiment where an inverted pendulum is kept stable through a fast oscillation on its support. We present two approaches for building Kapitza's Pendulum experiment. One of the experiments was built with its parts printed by a 3D printer, using control electronics based on Arduino and peripheral circuits. The other was built using a hair cutting machine, a cheaper and easier way to visualize the phenomenon. Since this is a phenomenon that involves very fast oscillations, a high speed camera was used to record the videos. The videos were used in video analyses activity proposals with the software Tracker. In the theoretical approach, we used a model that explores the two time scales present in the phenomenon, separating the pendulum's motion into a fast low-amplitude motion and a slow high-amplitude motion. Due to the COVID-19 pandemic, the material developed was applied in a workshop in EaD (Distance Learning) modality. We obtained positive feedback from the students regarding the material used. Although this work is focused on college students and high school teachers, the experiment can be presented to elementary school students in order to provide them with a brief explanation of the phenomenon.

Keywords: Physics education, Kapitza's pendulum, Tracker, Video analysis, 3D printing.

Rio de Janeiro  
Maio de 2023

# Sumário

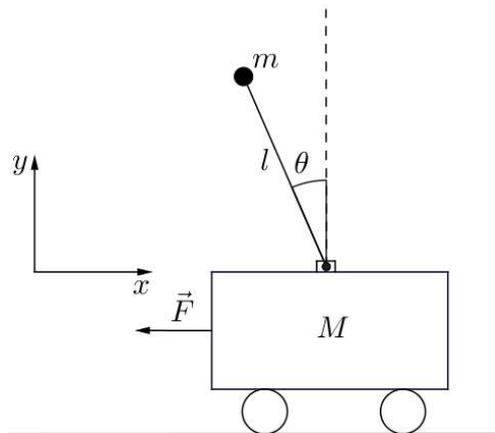
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>ASPECTOS TEÓRICOS</b>	<b>4</b>
2.1	Experimento e motivação no ensino de Física . . . . .	5
2.2	O Pêndulo de Kapitza . . . . .	7
2.2.1	Abordagem via média temporal . . . . .	8
2.3	Videoanálise e o <i>software Tracker</i> . . . . .	18
2.4	Impressão 3D no ensino de ciências . . . . .	22
<b>3</b>	<b>O EXPERIMENTO PÊNDULO DE KAPITZA</b>	<b>28</b>
3.1	Bancada experimental . . . . .	28
3.2	Experimento de baixo custo . . . . .	55
3.3	Gravação dos vídeos . . . . .	57
<b>4</b>	<b>VIDEOANÁLISE COM O <i>SOFTWARE TRACKER</i></b>	<b>62</b>
4.1	Análise do vídeo Pêndulo de Kapitza 1 . . . . .	63
4.1.1	Frequência angular e amplitude de oscilação do pivô . . . . .	63
4.1.2	Momento de inércia e condição de estabilidade . . . . .	68
4.1.3	Aproximação para a frequência angular do movimento lento da barra	70
4.2	Análise do vídeo Pêndulo de Kapitza 2 . . . . .	76
4.2.1	Frequência angular e amplitude de oscilação do pivô. . . . .	76
4.2.2	Momento de inércia e condição de estabilidade . . . . .	77
4.2.3	Aproximação para a frequência angular do movimento lento da barra	77
4.3	Discussão de outros resultados . . . . .	79
4.4	Aplicação do produto educacional . . . . .	84
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>88</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>91</b>
	<b>APÊNDICE A - OUTRAS VERSÕES DA BANCADA EXPERIMENTAL PÊNDULO DE KAPITZA</b>	<b>95</b>
	<b>APÊNDICE B - MATERIAL INSTRUCIONAL</b>	<b>97</b>

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

Inicialmente, quando pensamos no tema para esta dissertação a palavra motivação foi uma das mais mencionadas. Então foi nessa palavra que nos baseamos para tentar desenvolver algo que servisse para estimular os alunos a aprender física, mas antes de motivar é preciso estar motivado. Desta forma, apresentamos a seguir algumas motivações nossas para o desenvolvimento deste trabalho.

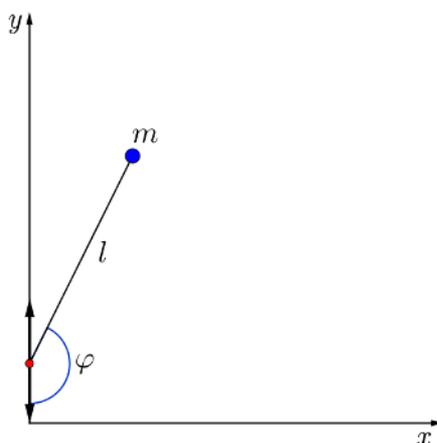
A primeira motivação é que o tema do Pêndulo de Kapitza é pouquíssimo conhecido na área de ensino de física aqui no Brasil. Ao pesquisar por pêndulo invertido no *Google*, o que mais aparece é um pêndulo preso a um carrinho que possui um sistema de controle eletrônico e um sensor usado para medir o seu desvio angular (Fig. 1.1). O carrinho funciona como um atuador que serve para manter o pêndulo estável na posição vertical superior se o sensor indicar que ele sofreu um pequeno deslocamento angular. Esse tipo de pêndulo invertido é bastante explorado nas engenharias de controle e automação, eletrônica e mecânica.



**Figura 1.1:** Esquema do pêndulo preso a um carrinho, bastante explorado em engenharias. O pêndulo é mantido na posição invertida por deslocamentos laterais no carrinho que acontecem através de uma eletrônica de controle.

O Pêndulo de Kapitza é um tipo de pêndulo invertido que não depende de controle

eletrônico. Trata-se de uma massa  $m$  presa na extremidade de uma haste de comprimento  $l$  e massa desprezível, fixa a um pivô que oscila verticalmente com amplitude e frequência suficientes para manter o pêndulo estável na posição invertida, conforme esquematizado na Figura 1.2. Diferente do primeiro, ele quase não aparece na pesquisa mencionada anteriormente.



**Figura 1.2:** Esquema do Pêndulo de Kapitza. O pêndulo é mantido na vertical (i.e  $\varphi$  próximo de  $180^\circ$ ), pela rápida vibração vertical do pivô.

Fazendo uma pesquisa utilizando as palavras Pêndulo de Kapitza, Pêndulo de Kapitza<sup>1</sup> e pêndulo invertido, nas principais revistas de ensino de física brasileiras (Revista Brasileira em Ensino de Física, A Física na Escola, Experiências em Ensino de Ciências e Investigações em ensino de Ciências), foram encontrados apenas dois artigos na Revista Brasileira em Ensino de Física [1,2]. Ambos falam do pêndulo invertido preso a um pivô que oscila verticalmente (Pêndulo de Kapitza), todavia nenhum explora a parte experimental, tampouco propõem atividades didáticas, focando apenas nos modelos teóricos ou simulações numéricas. O que nos leva à segunda motivação: a falta de atividades didáticas experimentais voltadas para o estudo dos conceitos que envolvem a estabilização do Pêndulo de Kapitza. Assim, pensamos em uma bancada experimental na qual pudéssemos visualizar o fenômeno e obter dados sobre o mesmo, bem como em atividades didáticas que pudessem ser aplicados à distância devido à pandemia de COVID-19. Desta forma, elaboramos a bancada experimental Pêndulo de Kapitza, um experimento de baixo custo e atividades experimentais nas quais o aluno podem realizar a tomada e análise de dados sem precisar ir a um laboratório. Para a elaboração da atividade, gravamos vídeos do experimento com uma câmera de alta velocidade e introduzimos a videoanálise neste trabalho. Para realização da videoanálise escolhemos o *software* livre *Tracker* [3]. Com certeza será de grande valia para docentes e discentes aprender a utilizar uma ferramenta tão incrível e de grande potencial didático.

Além da motivação experimental, que pode ser apresentada como elemento desafiador

<sup>1</sup>Uma outra grafia para o nome do cientista soviético.

e estimulante em qualquer estágio do ensino de física, temos uma outra motivação pela perspectiva teórica. A compreensão tradicional do fenômeno [4] por trás do Pêndulo de Kapitza envolve ferramentas matemáticas avançadas até mesmo para um graduando em física. Contudo através dos artigos do Butikov [5,6] torna-se possível compreender a sua essência conceitual, empregando conceitos de referencial não inercial. Assim, chegamos à nossa terceira motivação: o fenômeno possui uma abordagem utilizando um referencial não inercial de uma forma que normalmente não é visto em livros de física básica voltados para o ensino superior [7–10]. A utilização do referencial não inercial permitirá que possamos trabalhar com os conceitos de força de inércia e torque inercial. Conceitos quase nunca vistos por alunos cursando física básica na graduação. Baseados nisso, desenvolvemos uma discussão que pode ser levada para a sala de aula por docentes ministrando disciplinas de ondulatória.

A quarta e última motivação foi mostrar não só para alunos como também para professores, que é possível fazer ótimos experimentos utilizando impressão 3D e Arduino. A nossa sociedade está vivenciando uma quarta revolução industrial em que os processos estão sendo cada vez mais automatizados devido ao avanço da robótica, inteligência artificial, internet das coisas (IoT), entre outros. O Arduino e a impressão 3D estão inseridos dentro do contexto de automação e fazem parte dessa revolução. É essencial levar as novas tecnologias para a sala de aula pois, desta forma, os docentes podem ter contato direto com o que há de novo, o que pode levá-los a pensar sobre as possibilidades do uso dessas tecnologias. Assim, a bancada experimental ganha outro objetivo, que é o de demonstrar aos alunos e professores o potencial da utilização da impressão 3D junto com Arduino.

Diante dessas motivações, preparamos um material didático para que professores possam abordar conceitos de mecânica newtoniana e física ondulatória através do estudo do Pêndulo de Kapitza. Ele é composto por um material instrucional onde encontram-se instruções para a construção e montagem da bancada experimental Pêndulo de Kapitza e do experimento de baixo custo, atividades propostas envolvendo videoanálise e seus respectivos gabaritos, dois vídeos da bancada experimental filmados à 1200 fps (*frames per second*) e um manual para o uso do *software Tracker*.

## Capítulo 2

# ASPECTOS TEÓRICOS

Neste capítulo apresentamos os referenciais teóricos que nortearam este trabalho. Ele está dividido em quatro seções. Na primeira seção é discutido o papel do experimento no ensino de física e como a prática experimental pode despertar motivação intrínseca nos alunos. Na segunda seção apresentamos um breve histórico sobre a descoberta e modelagem do fenômeno da estabilidade do pêndulo invertido sob a ação de um pivô que oscila verticalmente denominado Pêndulo de Kapitza. É apresentada uma modelagem em que obtemos uma equação aproximada para o movimento do pêndulo invertido utilizando a média do movimento em um período de oscilação do pivô. Na terceira seção falamos sobre videoanálise e da utilização dela no ensino de física, também apresentamos o *software* de análise de vídeo *Tracker*. Na quarta seção discutimos o papel da impressão 3D no ensino de ciências e são apresentadas as potencialidades desta tecnologia na construção de materiais didáticos.

## 2.1 Experimento e motivação no ensino de Física

A Física é uma ciência experimental que tenta explicar os fenômenos naturais a partir de modelos. Um modelo em física é uma simplificação do fenômeno que traz suas principais características e permite que se possa obter detalhes quantitativos e previsões do mesmo. Símbolos e desenhos simplificados são utilizados em livros didáticos para representar conceitos físicos, contudo há uma grande dificuldade por parte do aluno em relacionar a imagem que está no livro didático ao objeto no mundo real. Um exemplo muito simples é quando se pretende ensinar sobre circuitos elétricos sem mostrar ao aluno um circuito real com seus componentes montados.

Ministrar aulas de uma ciência experimental apenas expondo o conteúdo em um quadro, em geral, não torna a física uma disciplina interessante de se aprender e não desperta motivação no aluno. Além disso, as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Física preveem o planejamento e o desenvolvimento de experiências didáticas em física como habilidades específicas desenvolvidas por um professor [11]. Assim, espera-se que o professor esteja preparado para desenvolver atividades experimentais com seus alunos.

A prática experimental no ensino de física é essencial para que o discente possa realizar a conexão entre a teoria e o mundo real e consiga dar significado ao que está aprendendo. De acordo com Hodson citado em [12], as práticas laboratoriais experimentais têm, entre outras, as seguintes potencialidades:

- motivar o aluno,
- permitir a aprendizagem de procedimentos e técnicas laboratoriais,
- permitir a aprendizagem do método científico, em que o aluno precisa observar, formular e testar hipóteses sobre o fenômeno.

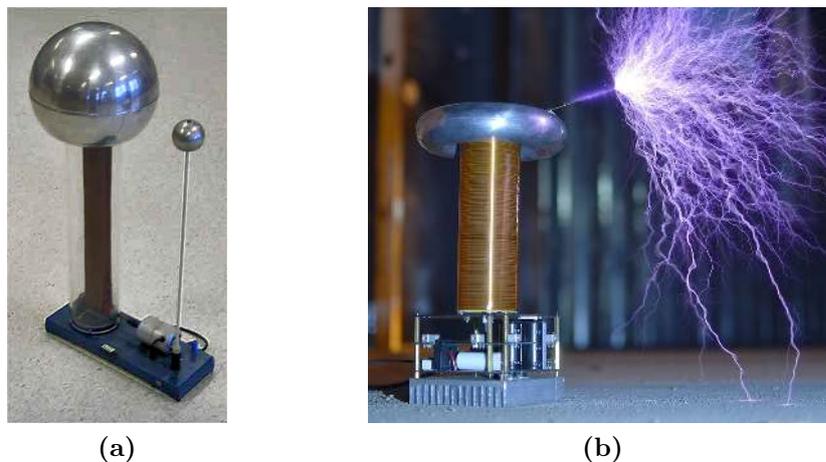
A motivação é essencial para o desempenho do aluno. De acordo com Guimarães [13], ela pode ser dividida em motivação extrínseca e motivação intrínseca. A primeira surge à partir de um estímulo externo, por exemplo: ganhar um certificado após terminar um curso, receber uma remuneração após um mês de trabalho, ganhar um ponto extra por realizar alguma tarefa escolar. A segunda é interna ao sujeito, pois a realização da tarefa será por achá-la atraente e/ou interessante. O sujeito motivado intrinsecamente acredita que a execução da atividade lhe trará satisfação. Alguns exemplos são: construir algo com suas próprias mãos, desvendar um enigma por pura satisfação pessoal, etc.

Despertar a motivação intrínseca nos alunos é, com certeza, uma tarefa muito difícil para os professores. Normalmente o que se vê nas escolas é a tentativa de motivação extrínseca, pois os alunos são estimulados por recompensas externas como ganhar um ponto extra e receber um diploma. Uma aula de física puramente tradicional, em que o docente fala e o discente apenas escuta de forma passiva, dificilmente despertará motivação

intrínseca. Um aluno motivado intrinsecamente, em geral, procura e aceita novos desafios, tem um melhor desempenho nas aulas, é mais participativo, almeja aprender mais sobre determinados assuntos, busca satisfação na realização de tarefas e procura desenvolver novas habilidades. Alguns experimentos podem servir para motivar intrinsecamente os alunos.

De acordo com Laburú [14], as atividades experimentais que buscam cativar o aluno precisam explorar duas dimensões do interesse. São as dimensões por apelo à satisfação de baixo nível e apelo à satisfação de alto nível. A dimensão por apelo à satisfação de baixo nível é explorada por atividades, que para gerar motivação, recorrem ao inesperado, permitem trabalho mecânico e atuam na gratificação sensorial (visão, audição, tato, paladar). Como exemplo podemos citar o Gerador de Van de Graaff (Fig. 2.1a) e bobinas de Tesla (Fig. 2.1b).

A dimensão do interesse por apelo à satisfação do alto nível é explorada por atividades experimentais que buscam gerar motivação instigando intelectualmente os alunos. Tais atividades devem entusiasmar o aluno a buscar compreendê-las e resolvê-las. Laburú ressalta que não se deve buscar apenas atingir a dimensão de interesse de baixo nível pois, desta forma, o aluno ficará sujeito apenas a um interesse superficial e momentâneo. Ainda, para que o processo de ensino-aprendizagem ocorra e haja desenvolvimento cognitivo, é preciso que a atividade experimental tenha um toque desafiador e desperte nos alunos o interesse em aprender sobre o fenômeno, fazendo-os refletirem sobre os “porquês” e “comos” envolvidos no experimento. Ou seja, é preciso que a atividade contemple a dimensão de apelo a satisfação de alto nível. Sendo assim, uma atividade experimental que contempla as duas dimensões do interesse citadas por Laburú, precisa instigar motivação no aluno explorando tanto a gratificação sensorial quanto a intelectual.



**Figura 2.1:** (a) Gerador de Van de Graaff. **Fonte:** [15]. (b) Bobina de Tesla. **Fonte:** [16].

Acreditamos que o experimento Pêndulo de Kapitza desperte motivação intrínseca no aluno e que, juntamente com as atividades de videoanálises propostas, possa contemplar

as dimensões de interesse por apelo à satisfação de baixo e alto nível, pois:

- o experimento mostra um fenômeno com alto apelo visual e contraintuitivo, em que o pêndulo fica em uma configuração que usualmente não imaginamos possível;
- permite que o aluno visualize elementos mecânicos encontrados em seu cotidiano, como um rolamento de esferas, parafusos, motor, entre outros;
- a bancada experimental Pêndulo de Kapitza deve despertar curiosidade devido à utilização da Arduino e das peças impressas em 3D;
- nas atividades de videoanálise os alunos têm a oportunidade de desenvolver novas habilidades com a utilização do *software Tracker* e refletir sobre o fenômeno através da tomada de dados e análise.

A proposta de videoanálise pode ser outro fator motivador devido ao contato com uma nova ferramenta, o *software Tracker*. A videoanálise do experimento tem a função não só de motivar, por ser algo extremamente interessante e com certeza será algo novo para muitos alunos, como também tem a função de tornar os alunos mais ativos durante o processo de aprendizagem, pois eles colocarão a mão na massa para fazer a tomada e análise dos dados.

## 2.2 O Pêndulo de Kapitza

O Pêndulo de Kapitza é uma massa presa a uma haste de massa desprezível, que não se deforma. A haste está presa a um pivô que oscila verticalmente com amplitude e frequência suficientes para tornar a posição vertical superior em um ponto de equilíbrio estável. O fenômeno foi descoberto teoricamente em 1908 por Andrew Stephenson [17]. No referido artigo, Stephenson não procura detalhar a causa do fenômeno, contudo ele chega a uma equação aproximada para a condição de estabilidade do pêndulo.

$$n > \frac{\mu}{\alpha} \sqrt{2}, \quad (2.1)$$

onde  $n$  é a frequência angular do pivô,  $\mu$  é a frequência natural para pequenas oscilações do pêndulo e  $\alpha$  é a razão entre a amplitude de oscilação do pivô e o comprimento do pêndulo. A Equação 2.1 está exatamente como consta no artigo de Stephenson. Mais adiante chegaremos à mesma condição, contudo usaremos uma notação de acordo com a usada em livros textos modernos.

Em 1951, P. L Kapitza [18] investigou o fenômeno experimentalmente e deu maiores detalhes sobre as suas causas. Kapitza propôs que o movimento do pêndulo fosse descrito como a soma de dois movimentos, um rápido de pequenas amplitudes devido às oscilações do pivô e um lento de grandes amplitudes devido ao movimento do pêndulo em torno da

posição de equilíbrio. Fazendo a média sobre as oscilações rápidas ele obteve a equação para o movimento lento do pêndulo.

Apesar de ser bem detalhista, a forma como Kapitza aborda o fenômeno é um pouco complicada, pois envolve métodos matemáticos normalmente não vistos por alunos que estão cursando as disciplinas de física básica do ensino superior. Eugene I. Butikov possui alguns artigos, onde ele tenta deixar mais simples a modelagem de um pêndulo preso a um pivô que oscila verticalmente e adquire estabilidade na posição invertida [5, 6]. Baseado nesses artigos, apresentaremos a abordagem da média temporal que, embora seja uma aproximação, permitirá que sejam obtidos detalhes importantes sobre o fenômeno. Nela, exploraremos as duas escalas de tempo diferentes do fenômeno devido ao período de oscilação do pivô ser muito menor que o período do pêndulo. Nestas circunstâncias, ricas aproximações podem ser feitas. Isto é muito comum em cursos avançados, mas pouco usado em física básica.

### 2.2.1 Abordagem via média temporal

Essa abordagem permitirá que obtenhamos mais detalhes sobre a causa física do fenômeno da estabilidade do pêndulo invertido. Ela explora a diferença entre as escalas de tempo dos dois movimentos presentes no fenômeno. Na escala de tempo em que o pêndulo varia sua posição apreciavelmente há muitas oscilações do pivô. Assim, não precisaremos acompanhar o movimento do pivô e poderemos ver apenas o efeito médio de sua oscilação, conforme veremos a seguir.

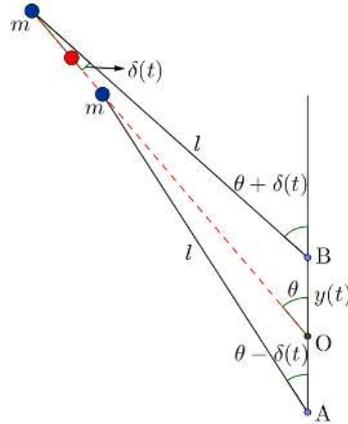
Tomemos uma massa  $m$  de dimensões desprezíveis, fixada na extremidade de uma haste rígida de comprimento  $l$  e massa desprezível, presa a um pivô que oscila verticalmente. O movimento desse pêndulo se dá em um plano. Partindo da perspectiva de um observador no referencial do laboratório, um referencial inercial, quando o pivô se desloca rapidamente, realizando um movimento oscilatório de um ponto **A** até o ponto **B** simétrico em relação ao ponto **O**, podemos obter a posição média do pêndulo em um período de oscilação do pivô, representada pela linha tracejada, na Figura 2.2.

Seja o ângulo  $\varphi$  a posição angular do pêndulo com relação à vertical superior, ela pode ser descrita como a soma de dois movimentos, um rápido de baixas amplitudes,  $\delta(t)$  e um lento de altas amplitudes,  $\theta(t)$ . Desta forma, o movimento do pêndulo tem a seguinte equação:

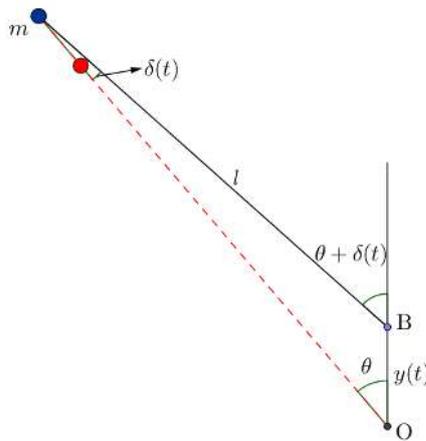
$$\varphi(t) = \theta(t) + \delta(t). \quad (2.2)$$

Para uma melhor visualização e compreensão, peguemos apenas o movimento que o pivô faz em um curto período de tempo, indo do ponto **O** até o ponto **B**, de acordo com uma função  $y(t)$  (Figura 2.3). Neste curto intervalo de tempo, o ângulo que o pêndulo faz

com a vertical vai de  $\theta$  para  $\theta + \delta(t)$ . Consideramos que o pivô executa um movimento harmônico simples (MHS) descrito pela equação  $y(t) = A \cos(\omega t)$ , onde  $A$  é a amplitude de oscilação,  $\omega$  é a frequência angular e  $t$  é o tempo.



**Figura 2.2:** Pêndulo realizando uma oscilação completa indo da posição **A** até a posição **B** simétrica em relação ao ponto **O**, visto a partir de um referencial inercial. A linha tracejada representa a posição média do pêndulo, que faz o ângulo  $\theta$  com a vertical e o ângulo  $\delta$  com o pêndulo real. **Fonte:** Adaptado de [5].



**Figura 2.3:** Movimento do pêndulo indo do ponto **O** ao ponto **B**. Considerando que  $\theta$  é constante em um período de oscilação do pivô. **Fonte:** Adaptado de [5].

Utilizando a Lei dos Senos, temos

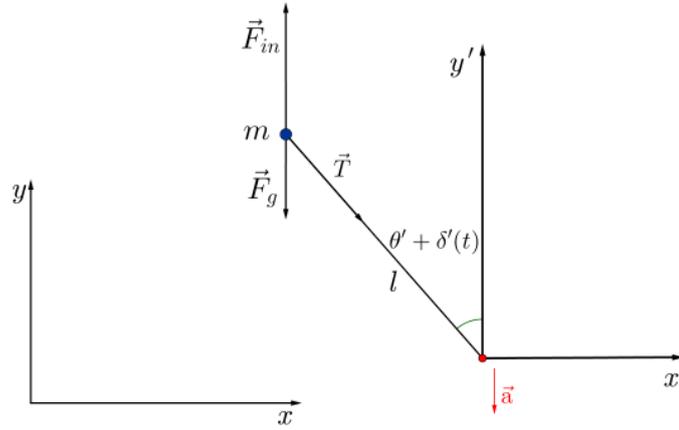
$$\frac{\text{sen } \theta}{l} = \frac{\text{sen } \delta}{A \cos(\omega t)}. \quad (2.3)$$

Supondo que  $A \ll l$ , vemos que  $\text{sen } \delta \ll 1$ , de modo que podemos utilizar a aproximação  $\text{sen } \delta \approx \delta$ . Obtemos, assim, uma aproximação para o movimento rápido do pêndulo, dada por

$$\delta(t) \approx \frac{A \cos(\omega t)}{l} \text{sen } \theta. \quad (2.4)$$

Analisando a Equação 2.4, percebe-se que o movimento rápido do pêndulo tem a mesma frequência de oscilação que o pivô.

Para a próxima etapa da modelagem, usaremos o referencial do pivô, um referencial não inercial. As coordenadas cartesianas nesse referencial serão  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ . Por simplicidade, não consideraremos a força de atrito com o ar. Além da força peso  $\vec{F}_g$  e da tração  $\vec{T}$ , age na massa  $m$  a força de inércia  $\vec{F}_{in}$ , pois estamos tentando descrever o fenômeno a partir de um referencial acelerado. O diagrama de forças é mostrado na Figura 2.4.



**Figura 2.4:** Diagrama de forças do Pêndulo de Kapitza, no referencial do pivô. O pivô possui uma aceleração  $\vec{a}$  em relação ao referencial do laboratório.

A força de inércia possui sentido contrário à aceleração do pivô. Deste modo, ela é dada por

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}. \quad (2.5)$$

Como consideramos anteriormente que o pivô executa MHS dado pela função  $y(t) = A \cos(\omega t)$ , a aceleração é dada pela segunda derivada da posição

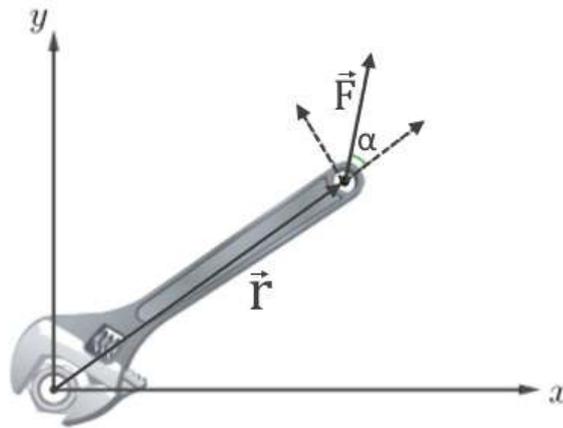
$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t) \hat{y}. \quad (2.6)$$

A força de inércia que age na massa  $m$  é, portanto

$$\vec{F}_{in} = m\omega^2 A \cos(\omega t) \hat{y}'. \quad (2.7)$$

De acordo com a Equação 2.7, quando  $y(t) > 0$ , o pivô está acima da origem no referencial inercial e a força de inércia aponta para cima no referencial não inercial. Se  $y(t) < 0$ , o pivô está abaixo da origem e a força de inércia aponta para baixo.

Para definição de torque, usaremos o desenho esquemático da Figura 2.5.



**Figura 2.5:** Desenho esquemático para definição de torque.  $\vec{r}$  é o vetor posição que vai da origem até ponto de aplicação da força,  $\vec{F}$  é o vetor da força aplicada e  $\alpha$  é o ângulo ente os dois vetores. **Fonte:** Adaptado de [19].

Uma vez que definimos as forças que agem no pêndulo, calcularemos os torques realizados por elas e os utilizaremos na segunda lei de Newton para rotações, pois estamos interessados no deslocamento angular do pêndulo. A definição de torque é dada pela Equação 2.8, onde temos o produto vetorial entre  $\vec{r}$ , o vetor posição que vai da origem até ponto de aplicação da força, e  $\vec{F}$ , o vetor da força aplicada.

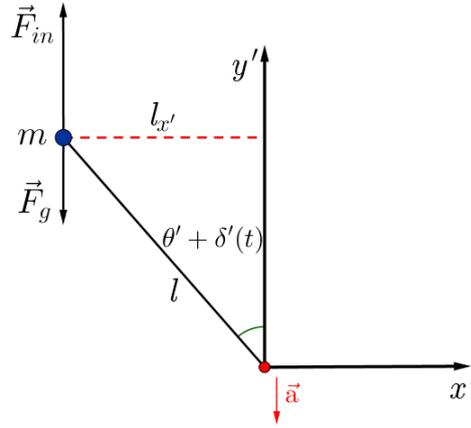
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.8)$$

A magnitude do torque é dado por

$$\tau = rF \sin \alpha, \quad (2.9)$$

onde  $r$  e  $F$  são os módulos do vetor posição e da força, respectivamente e  $\alpha$  é o ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ . Ainda, pela Equação 2.9,  $r \sin \alpha$  é a componente horizontal do vetor posição, perpendicular a  $\vec{F}$ . Uma vez definido o torque, podemos calcular o torque das forças que agem no Pêndulo de Kapitza.

No referencial do pivô, realizam torque no pêndulo a força de inércia e a força peso. Os vetores da posição e da força de tração são paralelos, logo o torque da tração é nulo. A Figura 2.6 mostra as forças que exercem torque no pêndulo.



**Figura 2.6:** Diagrama das forças que exercem torque no pêndulo, no referencial do pivô.

Tanto no referencial inercial quanto no referencial não inercial, o ângulo que o pêndulo faz com a vertical é o mesmo. Desta forma,  $\varphi = \varphi'$ , ou seja,  $\theta + \delta(t) = \theta' + \delta'(t)$ . Como utilizaremos mais o referencial não inercial devido à força de inércia, utilizaremos a notação com linha. Sendo o vetor posição, o vetor que sai da origem e vai até massa  $m$ , a sua componente horizontal que contribui para o torque é dada por,

$$\begin{aligned} l_{x'} &= l \operatorname{sen}(\theta' + \delta') \\ l_{x'} &= l(\operatorname{sen} \theta' \cos \delta' + \operatorname{sen} \delta' \cos \theta'). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Fazendo a aproximação  $\operatorname{sen} \delta' \approx \delta'$  e  $\cos \delta' \approx 1$ , temos

$$l_{x'} = l(\operatorname{sen} \theta' + \delta' \cos \theta'). \quad (2.11)$$

Substituindo a Equação 2.4 na 2.11, obtemos

$$l_{x'} = l \left( \operatorname{sen} \theta' + \frac{A \cos(\omega t)}{l} \operatorname{sen} \theta' \cos \theta' \right). \quad (2.12)$$

Tomemos o crescimento do ângulo  $\theta' + \delta'$  no sentido anti-horário e o torque positivo no mesmo sentido. A seguir podemos calcular a componente  $z$  dos torques. O torque da força peso é dado por

$$\begin{aligned} \tau'_g &= mgl_{x'} \\ \tau'_g &= mgl \left( \operatorname{sen} \theta' + \frac{A \cos(\omega t)}{l} \operatorname{sen} \theta' \cos \theta' \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

O torque da força de inércia é dado por

$$\begin{aligned}\tau'_{in} &= -m\omega^2 A \cos(\omega t) l_{x'} \\ \tau'_{in} &= -m\omega^2 A \cos(\omega t) l \left( \text{sen } \theta' + \frac{A \cos(\omega t)}{l} \text{sen } \theta' \cos \theta' \right).\end{aligned}\quad (2.14)$$

Agora será calculado o valor médio dos torques para um período de oscilação do pivô. O valor médio de uma função  $f(x)$  em um intervalo  $[a,b]$  [20] é dado por

$$\langle f(x) \rangle = \int_a^b \frac{f(x)}{b-a} dx. \quad (2.15)$$

A Equação 2.15 nos diz que deve-se calcular a área sob o gráfico no intervalo  $[a,b]$  e dividir por esse intervalo para encontrar o valor médio da função  $f(x)$ . Usando a definição de valor médio, podemos calcular o valor médio dos torques da força de inércia e da força peso em um período de oscilação do pivô,  $T$ .

$$\langle \tau'_g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T mgl \left( \text{sen } \theta' + \frac{A \cos(\omega t)}{l} \text{sen } \theta' \cos \theta' \right) dt \quad (2.16)$$

$$\langle \tau'_{in} \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^T m\omega^2 A \cos(\omega t) l \left( \text{sen } \theta' + \frac{A \cos(\omega t)}{l} \text{sen } \theta' \cos \theta' \right) dt. \quad (2.17)$$

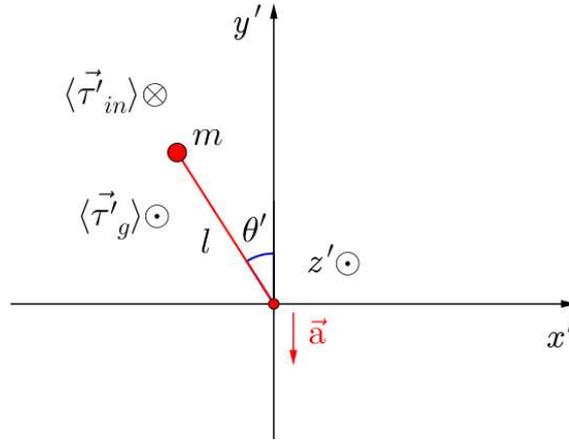
Realizar a integração das equações 2.16 e 2.17 é bem complicado, pois  $\theta'$  é uma função do tempo, mas se a frequência de oscilação do pivô for muito maior que a frequência natural para pequenas oscilações do pêndulo simples, ou seja,  $\omega \gg \omega_0$ , onde  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , em um período de oscilação do pivô  $\theta'$  não muda consideravelmente, de modo que podemos considerá-lo constante. Desta forma, os termos que contêm  $\theta'$  saem da integral e as equações 2.16 e 2.17 podem ser resolvidas facilmente,

$$\begin{aligned}\langle \tau'_g \rangle &= \frac{mgl \text{sen } \theta'}{T} \int_0^T dt + \frac{mgA \text{sen } \theta' \cos \theta'}{T} \overbrace{\int_0^T \cos(\omega t) dt}^{=0} \\ \langle \tau'_g \rangle &= mgl \text{sen } \theta'.\end{aligned}\quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}\langle \tau'_{in} \rangle &= -\frac{m\omega^2 l A \text{sen } \theta'}{T} \overbrace{\int_0^T \cos(\omega t) dt}^{=0} - m\omega^2 A^2 \text{sen } \theta' \cos \theta' \overbrace{\int_0^T \frac{\cos^2(\omega t)}{T} dt}^{=1/2} \\ \langle \tau'_{in} \rangle &= -\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \text{sen } \theta' \cos \theta' = -\frac{1}{4} m\omega^2 A^2 \text{sen}(2\theta').\end{aligned}\quad (2.19)$$

Na última passagem foi usada a identidade  $2 \text{sen } \theta' \cos \theta' = \text{sen}(2\theta')$ .

Utilizando as médias dos torques, é possível obter a equação aproximada para o movimento lento do pêndulo. Na média, o torque da força de inércia tentará restaurar o pêndulo pra sua posição de equilíbrio e o torque da força peso tentará girar o pêndulo para o lado oposto, afastando-o dela (Figura 2.7). Podemos agora perceber a razão física central para a estabilidade do pêndulo invertido, na média a força de inércia produz um torque restaurador, que se for intenso o bastante pode superar o torque gerado pela força peso, conforme detalharemos a seguir.



**Figura 2.7:** Diagrama com a média dos torques e o pêndulo do movimento médio.

Usando a soma da média dos torques na segunda lei de Newton para rotações e arrumando os termos, temos

$$\ddot{\theta}' + \frac{1}{4} \frac{A^2 \omega^2}{l^2} \text{sen}(2\theta') - \frac{g}{l} \text{sen} \theta' = 0. \quad (2.20)$$

Fazendo a aproximação para pequenos deslocamentos angulares em torno da vertical superior, usando  $\text{sen} \theta' \approx \theta'$  e  $\text{sen}(2\theta') \approx 2\theta'$ ,

$$\ddot{\theta}' + \left( \frac{1}{2} \frac{\omega^2 A^2}{l^2} - \frac{g}{l} \right) \theta' = 0. \quad (2.21)$$

A Equação 2.21 é a equação de um oscilador harmônico simples com frequência angular

$$\omega_{lenta} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\omega^2 A^2}{l^2} - \frac{g}{l}}, \quad (2.22)$$

ou, em termos da frequência natural de pequenas oscilações do pêndulo simples sob a ação da gravidade,

$$\omega_{lenta} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\omega^2 A^2}{l^2} - \omega_0^2}. \quad (2.23)$$

Para que a Equação 2.21 tenha uma solução oscilatória, a seguinte condição deve ser satisfeita

$$\frac{1}{2} \frac{\omega^2 A^2}{l^2} > \frac{g}{l}. \quad (2.24)$$

Ou seja, o termo do torque médio da força de inércia tem que ser maior que o termo do torque médio da força peso. Podemos concluir que, considerando pequenos desvios a partir da posição de equilíbrio, para que o pêndulo fique estável na posição vertical superior, o torque médio da força de inércia tem que ser maior que o torque médio da força peso. Rearranjando os termos da Equação 2.24, temos uma aproximação para a condição de estabilidade do Pêndulo de Kapitza,

$$\omega A > \sqrt{2gl}, \quad (2.25)$$

ou, ainda, em termos da frequência natural de oscilação

$$\omega A > \sqrt{2} l \omega_0 \quad (2.26)$$

A equação acima é a mesma condição de estabilidade mostrada na Equação 2.1 descoberta por Stephenson. A equação da condição de estabilidade com o termo do amortecimento devido ao atrito em um pêndulo físico, bem como um estudo do efeito de constantes de amortecimentos diferentes são apresentados por Smith, Poese e Carbo [21]. Trata-se de um estudo mais complexo sobre o fenômeno, mas qualitativamente não muda o que discutimos.

Ao adquirir estabilidade, o Pêndulo de Kapitza ganha dois pontos de equilíbrio instável simétricos em relação à vertical. Esses pontos delimitam o ângulo máximo no qual o pêndulo pode chegar, quando tirado da sua posição de equilíbrio estável. Nesses pontos, o torque médio total é nulo. Deste modo, podemos obter uma equação para o ângulo máximo no qual o pêndulo pode retornar se tirado da sua posição estável na vertical superior. Somando as equações (2.18 e 2.19), temos,

$$mgl \sin \theta' - \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin \theta' \cos \theta' = 0$$

$$\theta'_{m\acute{a}x} = \arccos \left( \frac{2gl}{\omega^2 A^2} \right). \quad (2.27)$$

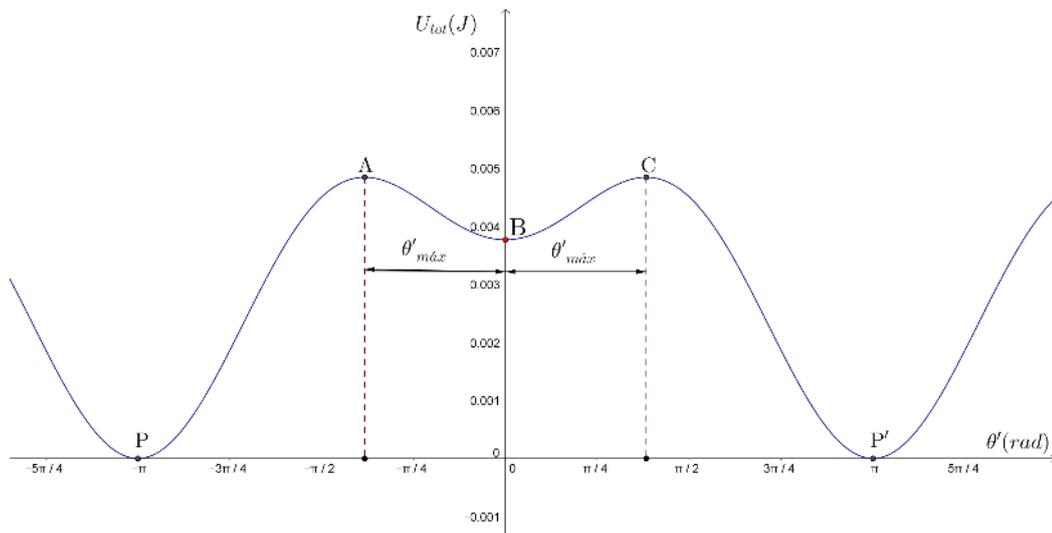
A Equação 2.27 não se restringe a ângulos pequenos. A energia do sistema não se conserva devido a força de inércia ser dependente do tempo, fisicamente isso quer dizer que o movimento do pivô está injetando energia no sistema. Contudo, como o torque médio da força de inércia depende apenas de  $\theta'$  (Eq. 2.17), podemos associar uma energia potencial ao torque médio, obtida ao integramos o torque total médio (Eq. 2.28) [6]. Desta forma, a soma desta energia com a energia cinética é conservada na média em um período do movimento do pivô.

$$\langle \tau'_{tot} \rangle = mgl \sin \theta' - \frac{1}{4}mA^2\omega^2 \sin(2\theta'). \quad (2.28)$$

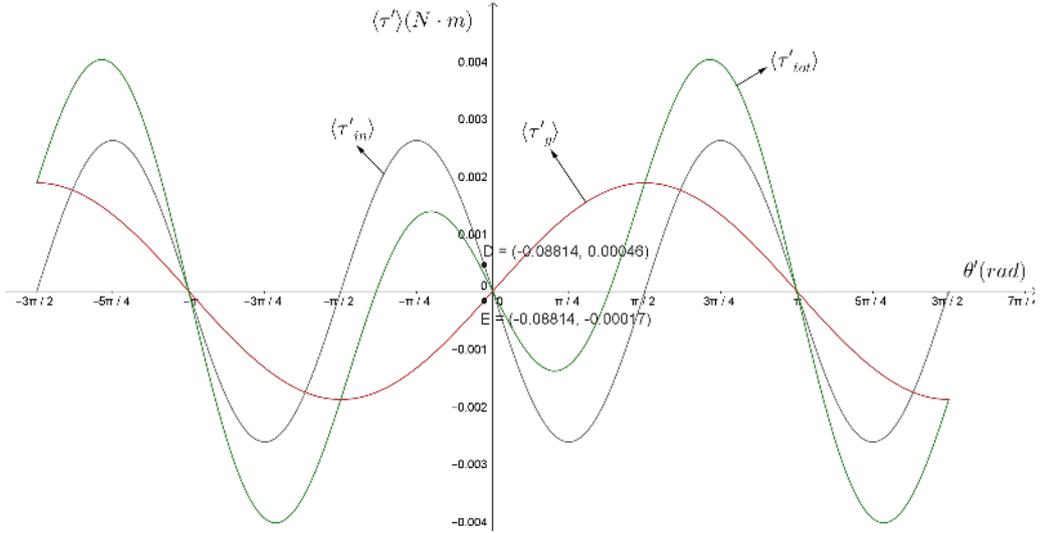
Integrando o torque total médio (Eq. 2.28), tomando o mínimo do potencial em  $\theta' = \pi$ , com  $\theta'$  sendo o ângulo que o pêndulo faz com a vertical superior (Fig 2.7), obtemos a energia potencial total do sistema, dada por

$$U_{tot} = mgl(1 + \cos \theta') + \frac{1}{8}mA^2\omega^2(1 - \cos(2\theta')). \quad (2.29)$$

As figuras 2.9 e 2.8 foram plotadas com o *software Geogebra* utilizando os parâmetros arbitrários  $A = 0,002$  m,  $\omega = 905$  rad/s,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>,  $l = 0,06$  m e  $m = 0,0032$  kg. A Figura 2.8 mostra o gráfico da energia potencial total. Os pontos de equilíbrio estão localizados onde o torque total médio é nulo (Fig. 2.9). Os pontos **A** e **C** são pontos de equilíbrio instável. **P** e **P'** são os pontos de equilíbrio estável na posição vertical inferior e **B** é um ponto de equilíbrio estável na posição vertical superior. Para que o pêndulo execute oscilações em torno da vertical superior, sua amplitude deve ser menor do que a amplitude máxima indicada na Figura 2.8.



**Figura 2.8:** Gráfico da energia potencial total. Os pontos **A** e **C** são pontos de equilíbrio instável. Os pontos **P**, **P'** e **B** são pontos de equilíbrio estável.



**Figura 2.9:** Gráficos da média do torque da força de inércia em cinza e média do torque da força peso em vermelho e torque médio total em verde. Os pontos **E** e **D** mostram os valores da média dos torques da força de inércia e peso nas proximidades do ponto  $\theta' = 0$ , ponto de estabilidade do pêndulo invertido. O valor da média do torque da força de inércia (ponto **D**) é maior que o da média do torque da força peso (ponto **E**).

As equações 2.22, 2.25 e 2.27 são para o pêndulo simples preso a um pivô que oscila verticalmente, para transformá-las em equações para o pêndulo físico, pode-se integrar ou utilizar o conceito de centro de oscilação [10, p. 73]. Desta forma, obtém-se a relação entre o comprimento de um pêndulo simples com os parâmetros de um pêndulo físico,

$$l = \frac{I_p}{Md}, \quad (2.30)$$

onde  $l$  é o comprimento do pêndulo simples,  $I_p$  é o momento de inércia do pêndulo físico em relação ao eixo que passa pelo pivô,  $M$  e  $d$  são, respectivamente, a massa e a distância do eixo que passa pelo centro de rotação ao eixo que passa pelo centro de massa. Substituindo a Equação 2.30 nas equações 2.21, 2.22, 2.25 e 2.27, temos para o pêndulo físico,

$$\ddot{\theta}' + \left( \frac{(\omega A M d)^2}{2I_p^2} - \frac{g M d}{I_p} \right) \theta' = 0, \quad (2.31)$$

$$\omega_{lenta}^{PF} = \sqrt{\frac{(\omega A M d)^2}{2I_p^2} - \frac{g M d}{I_p}}, \quad (2.32)$$

$$\omega A > \sqrt{\frac{2gI_p}{M d}}, \quad (2.33)$$

$$\theta_{m\acute{a}x}^{PF} = \arccos \left( \frac{2gI_p}{\omega^2 A^2 M d} \right), \quad (2.34)$$

onde,  $\omega_{lenta}^{PF}$  e  $\theta_{m\acute{a}x}^{PF}$  são, respectivamente, a frequência angular de oscilação do pêndulo físico e o ângulo máximo que ele pode alcançar sem que caia. Como o pêndulo do experimento proposto nesta dissertação trata-se de uma barra fina, de comprimento muito maior que a sua largura, será considerado seu momento de inércia com relação ao eixo de rotação dado pela Equação 2.35. A referida equação pode ser obtida através do Teorema dos eixos paralelos [7, p. 307-312].

$$I_p = \frac{ML^2}{12} + Md^2, \quad (2.35)$$

onde  $L$  é o comprimento do pêndulo físico. Os outros parâmetros já foram definidos anteriormente após a Eq. 2.30. Na equação para o momento de inércia não foi considerado o furo da barra pois ele não altera o valor do momento de inércia de forma significativa.

### 2.3 Videoanálise e o *software Tracker*

Um vídeo é uma sequência de imagens reproduzidas a uma determinada taxa. Cada imagem é chamada de quadro e a taxa de reprodução é chamada *frames per second* (fps) ou, em português, quadros por segundo. A videoanálise é um recurso que permite a análise quadro a quadro de um vídeo. De acordo com Allain [22], uma das primeiras constatações da ideia básica de videoanálise ocorreu em 1878. Na época pretendia-se comprovar se as quatro patas de um cavalo não encostavam no chão durante o galope. Durante o experimento foram utilizadas várias câmeras, que obtiveram imagens em instantes de tempo diferentes de um cavalo correndo. Em uma das fotos ficou nítido que as quatro patas do cavalo não encostavam no chão.

A análise de vídeo vem sendo usada como recurso didático no ensino de física há algum tempo. Trata-se de mais uma ferramenta para tornar as aulas mais dinâmicas e interativas, como mencionado a seguir.

Ultimamente, com a popularização das câmeras de vídeo e o advento de programas computacionais que reproduzem e editam vídeos com relativa facilidade, entramos numa fase em que se tornou possível a interação dos alunos de uma classe diretamente com os vídeos de uma forma mais ativa e participativa. A vídeo-análise se insere neste contexto de possibilidades, pois pode proporcionar uma interação desejável entre o aluno-pesquisador, o evento físico estudado e o vídeo produzido neste estudo, promovendo, portanto, uma maior dinamização da prática pedagógica e um maior poder de investigação da natureza das Ciências em nível escolar e também profissional [23].

Os vídeos normalmente são utilizados de forma passiva como recurso didático, o aluno não consegue interagir com ele. Mas isso muda completamente quando falamos de videoanálise. O aluno pode filmar seu próprio experimento e depois analisá-lo. Ao fazer isso, ele deixa de ser um agente passivo no processo de ensino-aprendizagem e passa a

ser ativo. O processo que vai desde a filmagem e análise de um vídeo não é tão simples, precisa-se de métodos e procedimentos para minimizar erros de medidas. Desta forma, o discente, ao realizar este processo, estará se envolvendo diretamente com o fazer científico e participando de uma aprendizagem mais significativa.

Alguns cuidados devem ser tomados durante a filmagem para videoanálise. A câmera precisa estar fixa para evitar trepidações durante a filmagem ou mudança de ângulo da câmera em relação ao objeto de estudo. Uma boa iluminação deve ser providenciada. A iluminação fraca demais pode ocasionar em perda de nitidez do objeto de estudo, por outro lado, se for forte demais, ela poderá ofuscar o objeto. A lente da câmera deve estar paralela ao plano do movimento do objeto. Deve-se providenciar algum objeto que tenha uma medida conhecida e colocá-lo no mesmo plano focal que o do objeto de estudo durante a filmagem. A medida conhecida servirá para calibrar a escala nos quadros analisados, o que permitirá obter medidas reais do experimento.

A videoanálise é muito usada no estudo de fenômenos físicos e pode ser bastante útil no estudo de fenômenos que envolvem altas velocidades. Vale ressaltar que quanto mais alta a velocidade do objeto de estudo maior terá que ser a taxa de gravação do vídeo, a fim de obter imagens mais nítidas nos quadros que serão analisados. A análise de vídeo é um recurso bem interessante pois necessita apenas de um computador, um *software* de análise de vídeo e um vídeo para ser analisado. Dependendo da velocidade do que se quer analisar, o vídeo pode ser feito com uma câmera de *smartphone* ou *tablet*. Atualmente existem aparelhos que filmam a taxas maiores que 30 fps. A facilidade em obter bons vídeos para análise devido ao avanço tecnológico desses aparelhos, faz com que a videoanálise seja bastante explorada para a obtenção e análise de dados em experimentos de laboratório didático, principalmente envolvendo mecânica. Para uma discussão cuidadosa com diversos exemplos, ver [24].

Além de tornar as aulas mais dinâmicas e interativas, a videoanálise pode possuir a vantagem de obtenção e visualização de dados de forma mais rápida do que em um laboratório convencional, fazendo com que reste mais tempo para discussões sobre os resultados experimentais. Experimentos com tomadas de dados, sem discussões dos resultados, podem não ter significado para o aluno.

Para fazer a análise de um vídeo, é preciso ter um programa para esta finalidade. Existem alguns programas pagos que servem para serem utilizados no ensino de física como o *Vernier Logger Pro 3*<sup>1</sup> e o *Vernier Video Analysis*<sup>2</sup>. Como programas gratuitos, podemos citar o *Tracker*<sup>3</sup> e o *Videoanalizando*<sup>4</sup>.

O *Videoanalizando* é um aplicativo para sistema Android, desenvolvido por brasileiros da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), que viram a necessidade de

---

<sup>1</sup><https://www.vernier.com/product/logger-pro-3/>

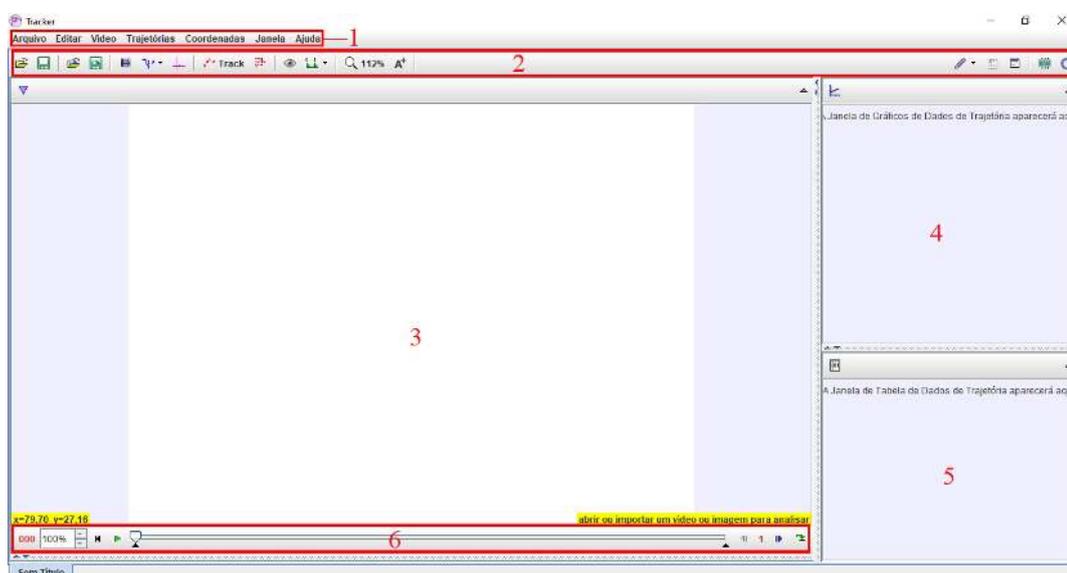
<sup>2</sup><https://www.vernier.com/product/video-analysis/>

<sup>3</sup><https://physlets.org/tracker/>

<sup>4</sup><http://videoanalizando.org/>

haver um programa em português na versão *mobile*, direcionado para ensino de física [25]. O fato de poder ser instalado em *tablets* e *smartphones*, faz com que o uso do Videoanalisando seja uma alternativa ao *Tracker* quando a escola não dispuser de computadores, pois a maioria dos alunos possuem *smartphones* hoje em dia. O Videoanalisando não foi testado neste trabalho. A escolha do *software Tracker* se deu devido a sua alta utilização em trabalhos no ensino de física. A seguir, apresentamos um pouco mais sobre o *Tracker*.

O *Tracker* é um *software* gratuito, de código aberto, multiplataforma (pode ser instalado no Windows, Linux e MacOS), projetado para fazer videoanálise e direcionado ao ensino de física [3]. Ele foi criado pelo projeto *Open Source Physics* (OSP) formado por físicos e educadores [26]. Seu *download* pode ser feito através do site <https://physlets.org/tracker/>. Na Figura 2.10, é apresentado o ambiente do programa.

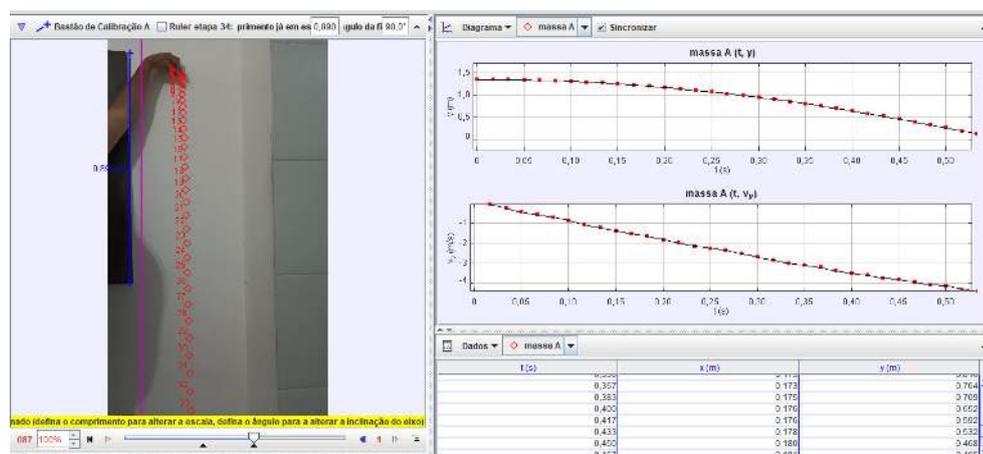


**Figura 2.10:** O ambiente do *Tracker*. 1 - Barra de Menu. 2 - Barra de Ferramentas. 3 - Área onde os *frames* dos vídeos são carregados. 4 - Área onde os gráficos são plotados. 5 - Área onde os dados aparecem em tabelas. 6 - Área de controle e ajuste de vídeo.

O *Tracker* é o programa de análise de vídeo mais difundido na área de ensino de física no Brasil, contudo ele não possui uma versão para dispositivos móveis (*mobile*). Existem diversos trabalhos em ensino de física nos quais o referido *software* foi utilizado para fazer videoanálise, Giulio Domenico [27] fez um boa revisão bibliográfica em que aponta muitos desses trabalhos. Ele também explora as potencialidades da utilização do *Tracker*, propondo oficinas para formação de professores.

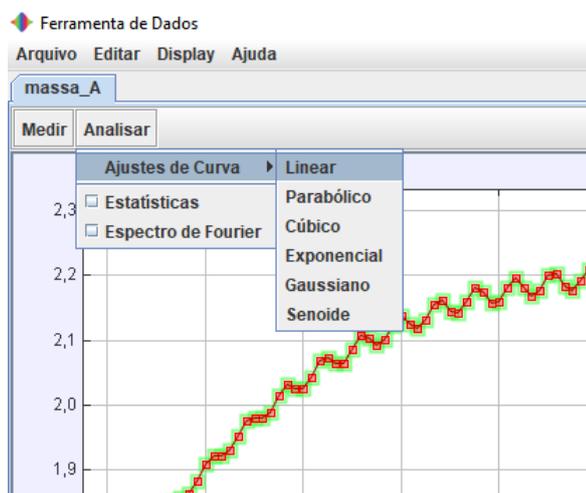
No *Tracker*, é possível fazer análise de vídeos que possuem as extensões .MP4, .AVI, .FLV e etc. Também há a possibilidade de analisar imagens nas extensões .PNG, .JPEG, .JPG, entre outras. O programa permite a análise quadro a quadro de um vídeo. Fazendo a marcação de um ponto de referência no objeto em cada quadro, é possível obter gráficos da posição em função do tempo, velocidade em função do tempo, posição em função da velocidade, entre outros. A Figura 2.11 mostra os gráficos  $y \times t$  e velocidade  $v_y \times t$  de um

objeto em queda livre.



**Figura 2.11:** Gráficos da posição e velocidade em função do tempo de um objeto em queda livre, feitos no *Tracker*.

Objetos podem ser medidos nos quadros do vídeo ou em um arquivo de imagem. Os dados obtidos podem ser exportados para serem analisados em outros programas como Excel, QtiPlot e LibreOffice Calc, todavia o próprio *Tracker* possui uma área para análise chamada “Ferramenta de dados”, onde é possível fazer ajustes de curvas (Fig. 2.12), deslocar o gráfico nas direções horizontal e vertical, visualizar o Espectro de Fourier e muito mais.



**Figura 2.12:** Menu com os ajustes de curvas disponíveis na janela “Ferramenta de Dados”.

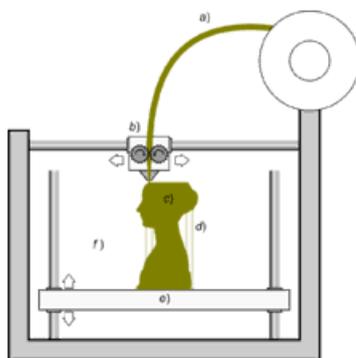
Devido ao que foi apresentado anteriormente sobre o *Tracker*, fica nítido o porquê de ele ser o *software* de análise de vídeo mais difundido na área de ensino de física. Apesar de o programa ser de fácil manuseio, algumas recursos utilizados na análise de vídeo do experimento Pêndulo de Kapitza podem não ser tão triviais de serem utilizadas por quem está tendo um primeiro contato com ele. Desta forma, foi construído um manual que serve tanto para o professor quanto para o aluno, com os principais recursos utilizados

para analisar os vídeos do experimento. O manual é voltado para análise dos vídeos do experimento Pêndulo de Kapitza, pois possui alguns dados inerentes à ele. Contudo o manual também pode ser utilizado por iniciantes para analisar qualquer outro vídeo, pois os recursos são utilizados da mesma forma.

## 2.4 Impressão 3D no ensino de ciências

A impressão 3D é uma tecnologia que permite a produção de objetos tridimensionais a partir de um modelo feito em um *software* CAD (*Computer Aided Design* - projeto assistido por computador). É possível encontrar diversos programas CAD na internet, tanto pagos quanto gratuitos, entre os quais vale citar: *SolidWorks*, *AutoCAD*, *Inventor*, *Fusion 360*, *FreeCAD*, *SketchUp* e *Blender*. Existem algumas tecnologias de impressão 3D como a *Fused Deposition Modeling* (FDM), também chamada de *Filament Fused Fabrication* (FFF), *Stereolithography Apparatus* (SLA) e *Selective Laser Sintering* (SLS).

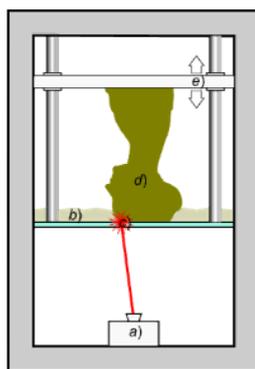
A tecnologia FFF consiste em um filamento de algum polímero que é empurrado para dentro de um bico quente, onde é derretido e sai de forma pastosa. O material é depositado em uma mesa e a construção da peça se dá camada por camada. Os materiais mais utilizados nesse tipo de impressora são o *Polylactic acid* (PLA), o *Acrylonitrile Butadiene Styrene* (ABS) e o *Polyethylene Terephthalate Glycol* (PETG). O desenho esquemático do funcionamento de uma impressora que utiliza filamento encontra-se na Figura 2.13 [28].



**Figura 2.13:** Desenho esquemático de uma impressora 3D que usa tecnologia FFF. a) Filamento de polímero. b) Bico extrusor. c) peça impressa. d) suportes de impressão. f) área de impressão. e) mesa de impressão. **Fonte:** [28].

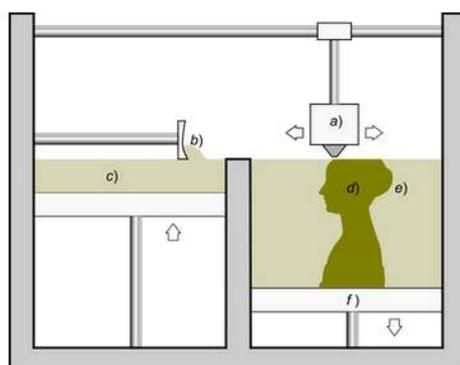
A tecnologia SLA consiste em colocar resina fotossensível<sup>5</sup> em um recipiente e curar partes específicas dela usando uma luz UV (ultravioleta) focalizada, com determinada frequência. O laser percorre apenas as partes da camada que será impressa. O processo se repete camada por camada. Em algumas impressoras a camada curada fica presa a uma base que se desloca para cima. A base tem aderência maior que o fundo do recipiente. O desenho esquemático pode ser visto na Figura 2.14 [28].

<sup>5</sup>Sensível à luz



**Figura 2.14:** Desenho esquemático de uma impressora 3D que usa tecnologia SLA. a) é o dispositivo emissor do laser. b) é a resina. c) é o laser curando a camada da peça. d) é a peça 3D impressa. e) é a plataforma onde a peça fica presa após ser curada. **Fonte:** [28].

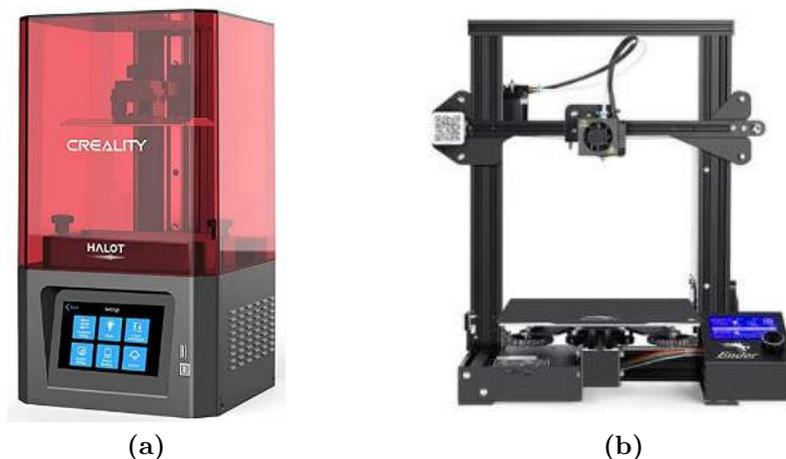
A tecnologia SLS consiste em depositar uma fina camada de pó de polímero em uma câmara de construção que contém uma plataforma móvel. O pó recebe calor por meio de um laser em locais específicos correspondentes a camada do modelo 3D que será impresso. No local por onde o laser passa acontece a sinterização<sup>6</sup>. A plataforma se desloca para baixo para que o processo se repita e seja feita outra camada. O processo é repetido até que termine a peça. O desenho esquemático encontra-se na Figura 2.15 [28].



**Figura 2.15:** Desenho esquemático de uma impressora 3D que usa tecnologia SLS. a) é o bico emissor do laser que esquenta o pó de polímero. b) é o braço móvel que leva o polímero para a área de impressão. c) é a plataforma que sobe com o polímero que será jogado na área de impressão. d) é a peça impressa. e) é a área de impressão. f) é a plataforma móvel que desce quando a camada é curada. **Fonte:** [28].

As impressoras 3D evoluíram muito na última década e também tiveram seu custo reduzido. Hoje em dia é possível encontrar impressoras com preço acessível no Brasil, que utilizam as tecnologias SLA e FFF. A Figura 2.16a mostra uma impressora de tecnologia SLA, da empresa Creality, que atualmente custa aproximadamente R\$ 1980,00 [29]. A figura 2.16b mostra uma impressora de tecnologia FFF, também da empresa Creality, custando aproximadamente R\$ 1330,00 [30]. As cotações das impressoras foram feitas em julho de 2022.

<sup>6</sup>Aglutinação das partículas por aquecimento



**Figura 2.16:** (a) Impressora Creality Halot One de tecnologia SLA. **Fonte:** [29]. (b) Impressora Creality Ender 3 de tecnologia FFF. **Fonte:** [30].

Em relação à matéria prima, 500 g das resinas mais baratas para impressão SLA, atualmente estão custando entre R\$ 140,00 e R\$ 180,00. Para impressão FFF, 1,0 kg de filamento PLA com diâmetro de 1,75 mm está custando entre R\$ 95,00 e R\$ 115,00.

Atualmente a impressão FFF é uma das mais utilizadas devido ao custo mais baixo em relação ao da SLA e à facilidade de impressão. Para realizar uma impressão utilizando uma impressora de tecnologia FFF ou SLA, primeiro desenha-se o modelo 3D em um *software* CAD. Em seguida ele é salvo, normalmente, em extensão .STL (*Standard Triangle Language* ou *Standard Tessellation Language*). O STL é aberto em outro programa para realizar o fatiamento da peça, que é o processo de dividi-la em várias camadas, uma em cima da outra. O arquivo gerado após a peça ser fatiada e salva tem extensão .gcode. É o arquivo .gcode que possui todas as instruções e parâmetros de impressão, como coordenadas, temperatura e velocidade, que a impressora usará para fazer a peça.

Alguns programas fatiadores gratuitos são o *Ultimaker-cura*<sup>7</sup> e o *Repetier Host*<sup>8</sup>, este último é um programa que permite o controle da impressora e possui três fatiadores, o *Slic3r*, o *PrusaSlicer* e o *CuraEngine*. Um *software* muito bom, porém pago, é o *Simplify3D*<sup>9</sup>.

Com a baixa dos preços, muitas pessoas passaram a comprar impressoras 3D para uso doméstico, seja para imprimir um projeto próprio ou projetos disponibilizados por terceiros. Isso aumentou a demanda por arquivos feitos em CAD, normalmente com extensão .STL. Devido a alta demanda pelos arquivos STLs, passaram a surgir sites que são repositórios desse tipo de arquivo, onde você pode baixá-los de forma gratuita. O

<sup>7</sup><https://ultimaker.com/software/ultimaker-cura>

<sup>8</sup><https://www.repetier.com/>

<sup>9</sup><https://www.simplify3d.com/>

*Thingiverse*<sup>10</sup>, o *MyMiniFactory*<sup>11</sup> e o *YouMagine*<sup>12</sup> são exemplos de sites com grande número de arquivos STL gratuitos.

Em alguns desses sites é possível encontrar peças que sirvam para fazer materiais didáticos ou até mesmo o material didático completo como é o caso do dispositivo encontrado no *thingiverse*, intitulado Paul's Orrery, feito por Paul Gilbertson<sup>13</sup> para visualizar as fases da lua. Paul disponibiliza um manual com instruções de fabricação e montagem. Ele também disponibiliza um link para o vídeo que mostra o aparato funcionando.



**Figura 2.17:** Paul's Orrery, aparato construído para demonstrar as fases da lua. **Fonte:** [31]

A facilidade que a impressão 3D proporciona em produzir peças de diferentes formas, faz dela uma tecnologia muito útil na construção de materiais didáticos. Onisaki e Vieira destacam a principal característica da tecnologia, que contribui para a construção de materiais educativos, a rapidez em fazer protótipos de objetos personalizáveis.

[...] as impressoras 3D viabilizam a prototipação rápida de objetos personalizáveis. Com a popularização da tecnologia nos dias atuais, essa característica favorece que professores produzam seus próprios materiais educativos, atendendo de forma mais assertiva às demandas que observam em suas práticas em sala de aula [32].

Apesar de ser possível encontrar modelos tridimensionais de materiais didáticos prontos na internet e de a impressão 3D ser muito versátil, deve-se ter em mente que o processo de produção de materiais didáticos com essa tecnologia não é tão simples quanto se imagina. Aguiar [33] fez uma pesquisa experimental buscando compreender o uso da impressão 3D para a construção de materiais didáticos voltados para o ensino de ciências, seu trabalho pode ser usado como um guia para professores que queiram usar a impressão 3D para a construção de instrumentos didáticos.

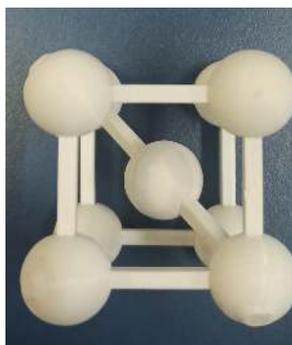
<sup>10</sup><https://www.thingiverse.com>

<sup>11</sup><https://www.myminifactory.com>

<sup>12</sup><https://www.youmagine.com>

<sup>13</sup><https://www.thingiverse.com/thing:5438641>

Objetos didáticos impressos podem ser utilizados de diversas formas em sala de aula. Podem ser usados como um recurso visual poderoso, já que existem muitas ilustrações em livros didáticos que são de difícil interpretação por parte do aluno, pois são representados em 2D. Como exemplo, podemos citar o arranjo de átomos formando uma estrutura cúbica de corpo centrado (Figura 2.18). A impressão desses tipos de objetos pode ajudar o aluno na assimilação dos conceitos.



**Figura 2.18:** Objeto impresso em 3D que ilustra a estrutura cúbica de corpo centrado, feito na disciplina Produção de Material para Laboratórios Didáticos.

Outro tipo de aplicação em sala de aula com peças impressas é a realização de atividades experimentais, tanto para análises qualitativas quanto quantitativas do fenômeno em estudo. Como exemplo, podemos citar o trabalho de Neto, Loubet e Albuquerque [34], no qual foram aplicados três materiais didáticos experimentais para o ensino de física em turmas do ensino médio: o “Pêndulo de Newton”, o “Motor Eletromagnético” e “Associação de Espelhos Planos”. Após a aplicação dessas atividades, os autores constataram, através das análises das respostas dos alunos aos questionários, que houve um aumento significativo na compreensão dos alunos em relação ao conteúdo abordado.

Há, ainda, o uso da impressão 3D dentro da metodologia de ensino STEAM (*Science, Technology, Engineering, Art e Math*). STEAM é uma metodologia baseada em projetos em que os alunos aprendem através do trabalho prático (*hands on*). Incluir os alunos em projetos que eles precisam projetar e construir suas peças pode ser um enorme desafio, tanto para os docentes quanto para os discentes, isso é constatado por Ledo e Silva [35] ao realizarem um projeto com seus alunos, em que eles projetaram e construíram um modelo de citoesqueleto celular para a disciplina de ciências biológicas.

A impressão 3D também ajuda em aulas inclusivas. O fato de poder tornar imagens de modelos encontrados em livros didáticos em objetos táteis, faz da impressão 3D uma ferramenta muito útil na construção de materiais didáticos para alunos não videntes. Toledo e Rizzatti [36] imprimiram os modelos de Dalton, Thompson e Bohr e o modelo do experimento de Rutherford. Os modelos construídos foram avaliados por dois professores e um aluno de baixa visão. Concluiu-se que, apesar de pequenos ajustes precisarem ser feitos nos modelos tridimensionais, eles são de grande valia para o processo de ensino aprendizagem de química, não só dos alunos com deficiência visual como também dos

sem deficiência. Uma das frases que chama a atenção neste artigo, é uma resposta dada pelo aluno com baixa visão quando ele é perguntado sobre o que achou dos modelos atômicos produzidos com a impressora 3D.

“Eu achei muito bacana. Se tivéssemos esses tipos de materiais em química e em outras disciplinas aprenderíamos melhor, até quem não é cego” [36].

A declaração anterior feita pelo aluno, reforça que ter um objeto tridimensional, que possa ser tocado ou visto, pode influenciar na aprendizagem de todos os alunos.

Concluí-se, por tudo que foi dito anteriormente nesta seção, que a impressão 3D tornou-se uma ferramenta muito importante na construção de materiais didáticos para o ensino de ciências e que dependendo da imaginação do professor, ela pode abrir diversas possibilidades para o ensino.

## Capítulo 3

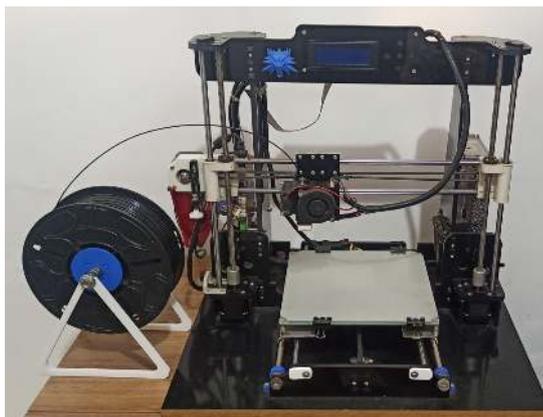
# O EXPERIMENTO PÊNDBULO DE KAPITZA

Neste capítulo serão abordados os detalhes da construção da bancada experimental Pêndulo de Kapitza e da gravação dos vídeos com a câmera de alta velocidade. Após a construção da bancada experimental, pensamos em montar um experimento de baixo custo e de fácil montagem que servisse para visualizar e fazer estudos qualitativos do fenômeno de estabilidade do pêndulo invertido. Assim, conseguimos montar um experimento utilizando uma máquina de cortar cabelo, cuja construção também será detalhada neste capítulo.

### 3.1 Bancada experimental

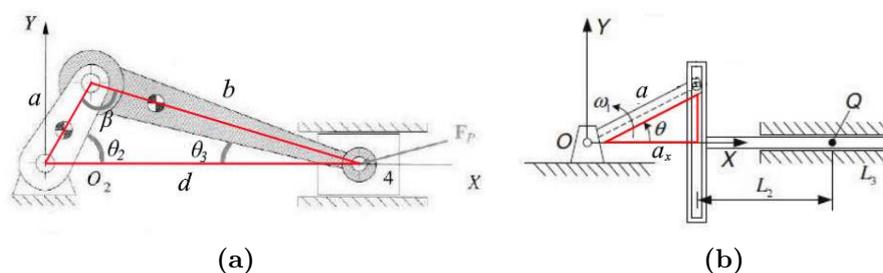
A construção da bancada experimental Pêndulo de Kapitza foi iniciada em meio à pandemia de COVID-19. A construção iniciou-se em casa devido à possibilidade de usar uma impressora 3D para a fabricação das peças. Se não houvesse tal recurso, certamente seria mais difícil produzir a bancada devido às restrições impostas pela pandemia, como o fechamento do comércio. A impressora 3D utilizada em todo o processo foi uma Anet A8 (Fig. 3.1). Trata-se de uma impressora de tecnologia FFF. Em todas as impressões foram utilizados filamentos com diâmetro de 1,75 mm, bico de impressão com 0,4 mm. As impressões com filamento PLA foram realizadas com a mesa aquecida a 60 °C e o bico a 195 °C. Nas impressões com o filamento PETG foi utilizada a mesa aquecida a 80 °C e o bico a 230 °C.

O *software SolidWorks* foi utilizado para o desenho dos modelos 3D de todas as versões da bancada experimental. Os modelos 3D das peças que seriam impressas foram salvos no formato .STL e utilizou-se o *software Repetier-Host*, com o fatiador *Slic3r* para gerar o arquivo .gcode.



**Figura 3.1:** Impressora usada para impressão das peças 3D.

Após decidir como seriam desenhadas e produzidas as peças da bancada experimental, iniciamos a etapa de projeto. O primeiro passo foi encontrar uma forma de transformar o movimento circular do eixo do motor em um movimento linear. Foram encontrados dois tipos de mecanismos, o conjunto biela-manivela (Fig. 3.2a) e o garfo escocês (Fig. 3.2b) [37].



**Figura 3.2:** (a) Conjunto biela-manivela. (b) Garfo escocês. **Fonte:** Adaptado de Norton (2010) citado em [37].

Utilizando a lei dos senos no conjunto biela-manivela, obtemos a Equação 3.1 para a distância  $d$  em termos do ângulo que  $\theta_2$ , o ângulo que o braço responsável pela amplitude do movimento faz com a horizontal. Esse braço é o que vai montado diretamente no eixo do motor.

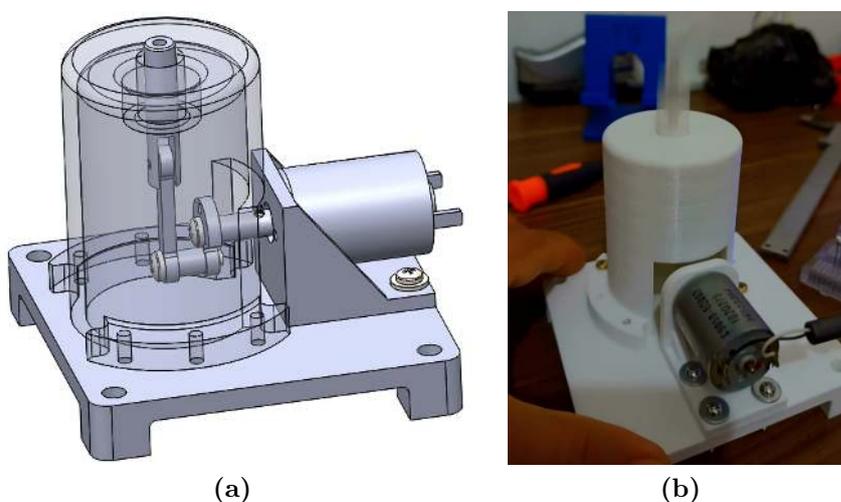
$$d = b \cos \left( \arcsen \left( \frac{a}{b} \sin \theta_2 \right) \right) + a \cos \theta_2. \quad (3.1)$$

Para o garfo escocês, a posição  $X_Q$  do ponto Q fixo nele é dado pela Equação 3.2

$$X_Q = a \cos \theta + L_2. \quad (3.2)$$

Tomando a variação de  $\theta_2$  e  $\theta$  com velocidade constante, o que indica o motor girando à uma rotação constante, a equação 3.1 não é um movimento harmônico simples, mas a Equação 3.2 é.

Primeiramente, decidimos que seria utilizado o conjunto biela-manivela, pois eram necessárias apenas peças impressas e alguns parafusos para a sua construção. As peças foram impressas com filamento PLA branco. As peças maiores foram impressas com 70% de preenchimento, altura de camada 0,25 mm e velocidade de impressão entre 40 e 45 mm/s. As peças menores foram impressas com 100% de preenchimento, altura de camada 0,2 mm e velocidade de impressão entre 20 e 25 mm/s. Foi utilizado um motor de corrente contínua (DC), retirado de uma impressora jato de tinta. O primeiro modelo 3D da bancada experimental feito com o *SolidWorks* é mostrado na Figura 3.3a e a bancada montada é mostrada na Figura 3.3b.



**Figura 3.3:** (a) Modelo 3D da primeira bancada experimental feito no *SolidWorks*. A carcaça foi colocada no modo transparente para melhor visualização do conjunto de peças. (b) Primeira bancada experimental produzida.

Foram encontrados alguns problemas após a construção. O conjunto biela-manivela travava de vez em quando e o motor não tinha torque o suficiente para mover o conjunto quando era fixado o suporte com a barra na parte superior do cilindro. Sendo assim, foi decidido fazer um outro projeto utilizando o garfo escocês e um motor com torque maior. Também foi necessário colocar um rolamento linear (3.4) na carcaça para a parte cilíndrica deslizar com menos atrito.



**Figura 3.4:** Rolamento linear. Fonte: [38]

Aperfeiçoaamos o projeto até chegar na versão que consta no produto educacional. Foram construídas duas versões da bancada experimental utilizando o novo motor, o garfo escocês e o rolamento linear antes de chegar na versão final. As fotos delas podem ser encontradas no Apêndice A, neste capítulo focaremos apenas na versão final que desenvolvemos para esse trabalho.

A Figura 3.5 mostra os tipos de parafusos, porcas e arruelas que são usadas na montagem do experimento. O valor do material para a construção da bancada experimental totalizou aproximadamente R\$ 510,00. Os valores dos itens são mostrados na Tabela 3.1. No custo não está incluso o serviço de fabricação, ou seja, é considerado apenas o material. A lista dos parafusos está na Tabela 3.2. O custo de construção desta bancada pode variar de acordo com o interesse da pessoa. Por exemplo, pode-se eliminar a placa Arduino e o *display* com a interface serial I2C, caso não se queira visualizar o valor da frequência de oscilação do pivô em tempo real.



**Figura 3.5:** Tipos de porcas, parafusos e arruelas usadas na montagem da bancada experimental.

**Tabela 3.1:** Material e custo. Os preços são referentes ao primeiro semestre do ano de 2021.

Quant.	Material	Preço
1 uni.	Motor DC 12 V 18200 RPM Akiyama - Ak555/390ml12s18200c	R\$ 33,45
1 uni.	Fonte Chaveada 10 A-12 V-120 W P/ CFTV Bivolt	R\$ 39,00
1 uni.	Arduino Uno R3 + Cabo Usb	R\$ 56,90
1 uni.	Display 1602 Backlight Azul	R\$ 17,00
1 uni.	Sensor de velocidade <i>encoder</i>	R\$ 8,90
1 uni.	Módulo interface serial I2C	R\$ 11,90
1 uni.	Controlador PWM de Velocidade p/ Motor DC 12 V a 40 V, 10 A	R\$ 38,85
1 uni.	Rolamento Linear Lm8uu	R\$ 10,90
1 uni.	Rolamento de esferas 623-2RS	R\$ 15,00
120 g	PLA	R\$ 15,10
400 g	PETG	R\$ 48,00
8 uni.	Borne p/ Plug Banana B10 4 mm - Médio	R\$ 16,00
8 uni.	Plug banana 4 mm	R\$ 16,00
54 uni.	Parafusos + porcas + arruelas	R\$ 15,20
1 uni.	Cabo Adaptador p/ Alimentação Arduino saída P4	R\$ 7,00
1 uni.	Tomada AC 10 A/250 VAC Tripolar para painel	R\$ 3,00
10 m	Fio 1,0 mm <sup>2</sup>	R\$ 15,00
1 uni.	Fusível 5 A, 5 × 20 mm	R\$ 0,50
1 uni.	Cabo de Força Tripolar 1,5 m para 10 A	R\$ 15,00
20 cm	Barra chata de alumínio 12,7 mm × 2,5 mm, 6061-T6	R\$ 3,00
1 uni.	Porta fusível 5 × 20	R\$ 2,00
22 g	Solda de Estanho em Fio Hikari HS-63	R\$ 13,00
5 m	Fita Isolante Preta, Anti-Chama, Kokay	R\$ 3,00
20 cm	Barra redonda de aço inox 304, diâmetro 3,0 mm	R\$ 15,00
20 cm	Guia linear, diâmetro 8,00 mm, retificado, H7	R\$ 15,00
5 cm	Barra chata de alumínio 1" × 7/16", 6061-T6	R\$ 7,00
1 uni.	Anel o'ring 2-327	R\$ 6,00
10 uni.	Jumpers Macho/Fêmea - 20 cm	R\$ 4,50
1 uni.	Chave Gangorra KCD1-106N	R\$ 3,25
1 uni.	Capacitor 1000 μF - 16 V	R\$ 0,50
1 uni.	Diodo 1N4007 - 1A	R\$ 0,10
1 uni.	Diodo 6A10	R\$ 0,65
20 g	Cola Tekbond 793	R\$ 7,50
1 uni.	Borracha 6 mm × 130 mm × 130 mm	R\$ 4,00
50 g	Graxa de silicone Allchem Premium	R\$ 28,70
2	Grampo Multiuso 6 pol (150 mm) Reforçado 7355 BRASFORT	R\$ 11,70
Total:		R\$ 507,60

**Tabela 3.2:** Especificação dos parafusos. O preço total dos parafusos, porcas e arruelas é encontrado na Tabela 3.1.

<b>Tampa da caixa PWM</b>
4 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M3 × 10 mm
<b>Placa PWM</b>
2 × Parafuso Phillips cabeça panela M4 × 10 mm
<b>Suporte porta fusível</b>
2 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M3 × 10 mm
<b>Tampa do Rolamento linear</b>
2 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M3 × 12 mm + 2 porcas M3
2 × Parafuso cabeça chata com fenda M4 × 12 mm
<b>Base do Motor</b>
2 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M4 × 35 mm + arruelas de pressão
2 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M4 × 20 mm + arruelas de pressão
<b>Base da Arduino</b>
2 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M2,5 × 6 mm
<b>Acabamento da Fonte</b>
3 × Parafuso cabeça chata com fenda M4 × 7 mm
2 × Parafuso Phillips cabeça panela M3 × 8 mm + 2 porca M3 - Tomada
1 × Parafuso Allen, cabeça cilíndrica M3 × 8 mm + Arruela lisa M3 + porca M3
<b>Sensor de velocidade encoder</b>
1 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda, M3 × 16 mm
<b>Base da carcaça porta rolamento linear</b>
4 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M3 × 12 mm + 4 arruela de pressão
<b>Suporte do Display LCD</b>
2 × Parafuso Phillips cabeça panela M4 × 16 mm + porca M4
4 × Parafuso Phillips cabeça panela M3 × 18 mm + porca M3
<b>Acoplamento do motor</b>
2 × Parafuso Allen sem cabeça M3 × 6 mm
<b>Fixação das peças do garfo escocês + fixação da barra</b>
1 × Parafuso Allen sem cabeça M4 × 16 mm
1 × Parafuso Allen sem cabeça M3 × 12 mm
1 × Porca M4
1 × Porca M3
1 × Porca M3 autotravante
1 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M3 × 13 mm

Para selecionar um novo motor, foram definidas as dimensões e o material da barra com a qual se pretendia realizar o experimento. A barra utilizada inicialmente foi impressa com filamento PETG preto e tinha comprimento  $L = 200$  mm, largura  $B = 10$  mm, espessura  $E = 3,0$  mm e massa  $M = 6,5$  g. Foi calculado o momento de inércia da barra com a Equação 2.35, considerou-se o centro de massa no meio do comprimento da barra. A medida do centro do furo ao centro de massa da barra era  $d = 93$  mm. O valor encontrado para o momento de inércia foi  $I \approx 7,79 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Utilizou-se a Equação 2.33, para calcular a frequência necessária para estabilizar a barra com uma amplitude de oscilação  $A = 3,0$  mm. Considerando o valor da gravidade como  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , encontramos o valor que frequência angular de oscilação do pivô tinha que ultrapassar para que a barra

ficasse estável,  $\omega > 530$  rad/s. Sabendo que a frequência de oscilação é dada por,

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (3.3)$$

temos,

$$f = \frac{530}{2\pi} \approx 84 \text{ Hz.}$$

A rotação do motor é dada por,

$$R_m = 60 \times 84 = 5040 \text{ rot/min.} \quad (3.4)$$

Baseados nos cálculos anteriores, escolhemos o motor DC 12 V, da marca Akiyama, modelo Ak555/390ml12s18200, que possui uma rotação de 18200 RPM. Ele atende o mínimo de rotação calculada anteriormente e tem um bom torque, 390 gf · cm. A Figura 3.6 mostra o motor.

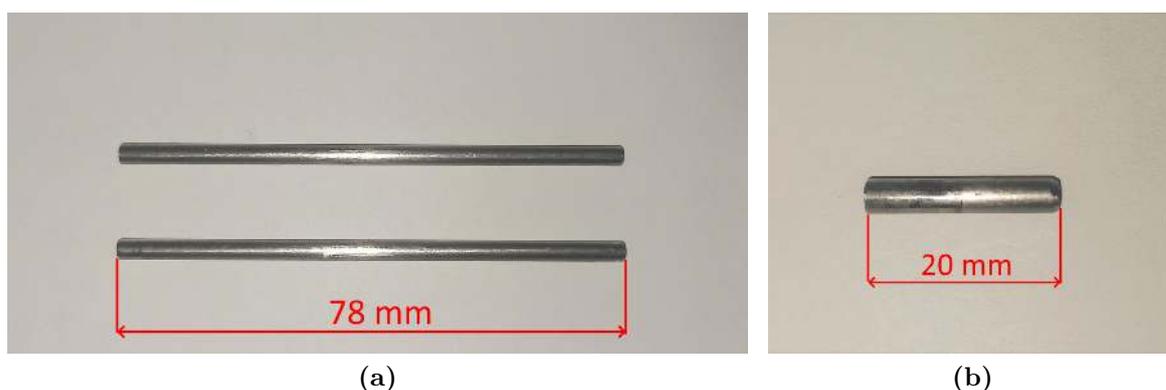


**Figura 3.6:** Motor Akiyama, modelo Ak555/390ml12s18200c.

Uma vez especificado o motor, foi feito um novo modelo 3D da bancada experimental no programa *SolidWorks*. A Figura 3.7 mostra o desenho da versão final. O projeto com o garfo escocês necessitou de guias de metal para que ele deslizasse. Utilizando uma barra de 3,0 mm de diâmetro e 200 mm de comprimento, foram cortados com uma serra de mão, dois pedaços com 78 mm de comprimento. Com o pedaço restante da barra foram feitos dois pinos de 20 mm. As figuras 3.8a e 3.8b mostram as guias e um dos pinos, respectivamente.

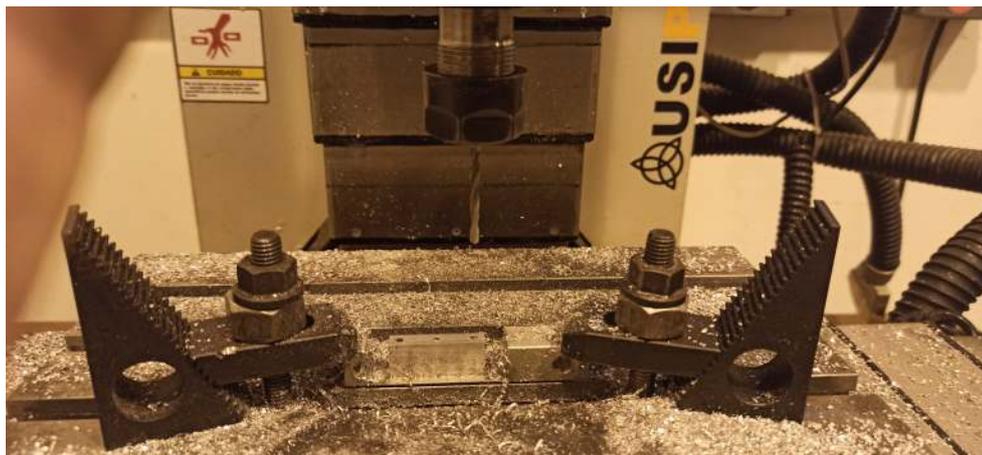


**Figura 3.7:** Modelo 3D da bancada experimental feito no *SolidWorks*.

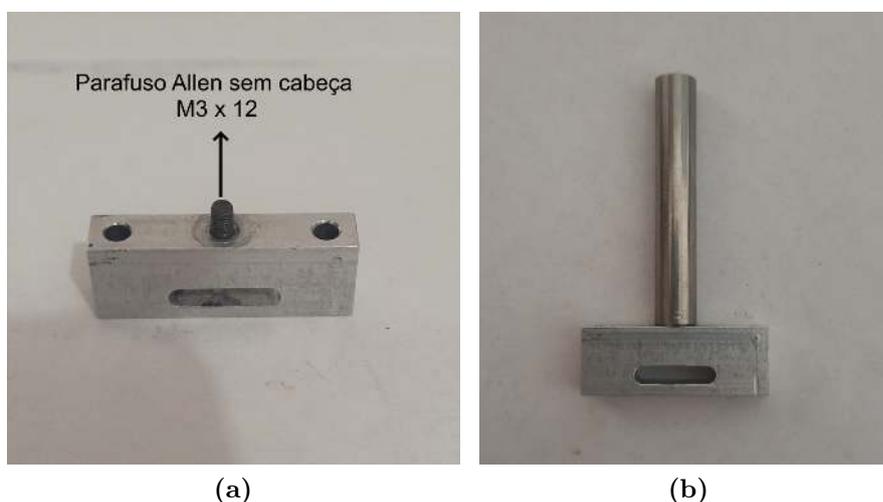


**Figura 3.8:** (a) Guias com comprimento de 78 mm (b) Pino com 20 mm de comprimento.

O garfo escocês foi dividido em duas peças para facilitar a produção, chamamos elas de cilindro e base do garfo escocês. O cilindro do garfo escocês foi feito utilizando uma barra redonda retirada de uma impressora jato de tinta, um material mais duro para aguentar o atrito com as esferas do rolamento linear. A base do garfo escocês foi feita de alumínio para o conjunto não ficar muito pesado. A peça cilíndrica foi feita em um torno mecânico com a ajuda do técnico Paulo, do Laboratório de Tecnologia Mecânica (LTM), um dos laboratórios do Programa de Engenharia Mecânica da UFRJ. A outra peça foi feita em uma fresadora CNC (*Computer Numeric Control*) (Figura 3.9), no Laboratório de Acústica e Vibrações (LAVI). Os desenhos de fabricação das duas peças encontram-se no manual do professor. As peças são unidas por um parafuso Allen sem cabeça  $M3 \times 12$  mm. A Figura 3.10a mostra a base do garfo escocês com o parafuso Allen sem cabeça e a Figura 3.10b mostra as duas peças montadas.



**Figura 3.9:** Base do garfo escocês sendo usinada na fresadora CNC.



**Figura 3.10:** (a) Base do garfo escocês com o parafuso Allen sem cabeça. (b) Garfo escocês montado.

Em uma das versões da bancada experimental foi usado o garfo escocês impresso em 3D. Diferente da versão usinada, é uma peça inteira (Figura 3.11). No produto, foi disponibilizado o arquivo STL do mesmo para a impressão. Ele foi impresso em PETG para resistir melhor ao atrito e com 100% de preenchimento. Foi necessário abrir uma rosca de 10 mm de profundidade com um parafuso M4, no furo da parte cilíndrica. A bancada experimental funcionou com ele, contudo o mesmo não aguenta muito esforço, rompendo quando o pêndulo era feito de barras de alumínio. É recomendado que, quando a bancada estiver funcionando com um garfo escocês impresso, seja usado como pêndulo as barras impressas que são disponibilizadas no produto educacional.



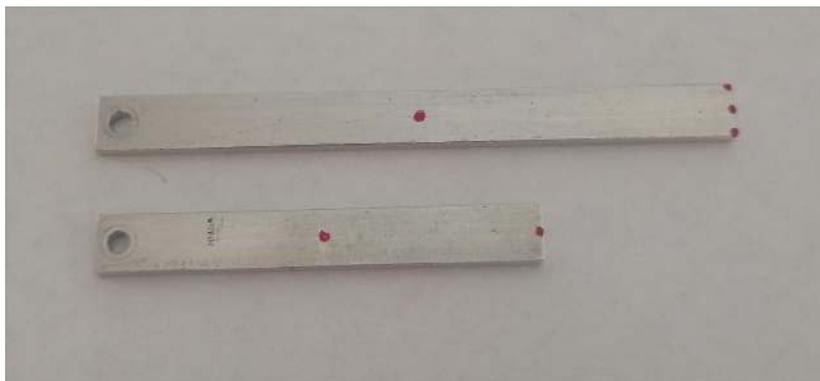
**Figura 3.11:** Garfo escocês impresso em 3D.

As barras da versão final foram feitas de alumínio, pois nós queríamos garantir uma melhor homogeneidade. Contudo, também foram disponibilizadas duas barras para impressão, uma de 60 mm de comprimento e outra de 90 mm. Elas podem ser impressas com PLA, PETG ou ABS, com 100% de preenchimento. As barras de alumínio foram feitas recortando uma barra de dimensões 100 mm  $\times$  20 mm  $\times$  2,45 mm, encontrada em uma sucata do LAVI. O corte foi feito com uma serra de mão e o ajuste das dimensões foi feito com uma lima. O furo foi feito com uma furadeira de bancada do LAVI (Figura 3.12). As barras de alumínio ficaram com as seguintes dimensões: 60,00 mm  $\times$  8,10 mm  $\times$  2,45 mm e 89,85 mm  $\times$  8,10 mm  $\times$  2,45 mm. As medidas foram feitas com um paquímetro de resolução 0,05 mm. Por simplicidade chamaremos a barra de comprimento 89,85 mm de 90 mm, mas nos cálculos usaremos o valor medido. O desenho de fabricação das guias encontram-se no manual do professor. A Figura 3.13 mostra as duas barras de alumínio.



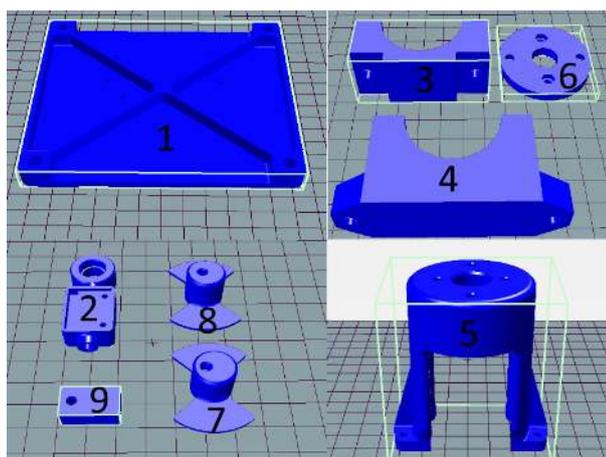
**Figura 3.12:** Barras de alumínio de 60,00 mm e 89,85 mm de comprimento.

A Figura 3.14 mostra os arquivos STLs das peças da parte mecânica que foram impressas. São mostrados dois acoplamentos que possuem furos com excentricidades diferentes,



**Figura 3.13:** Barras de alumínio de 60,00 mm e 89,85 mm de comprimento. As marcações em vermelho foram feitas para a filmagem.

peças 7 e 8. Um acoplamento possui excentricidade nominal de 3,0 mm e outro com 1,5 mm. Fizemos dois tipos de excentricidade pois queríamos explorar diferentes amplitudes de oscilação do pivô. Alguns furos das peças impressas possuem roscas feitas com o próprio parafuso da montagem.

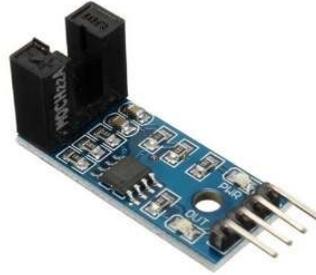


**Figura 3.14:** STLs das peças da parte mecânica nas suas posições sugeridas para impressão. 1 - base geral, 2 - base do pivô, 3 - base superior motor, 4 - base inferior motor, 5 - carcaça porta rolamento, 6 - tampa para rolamento linear, 7 - acoplamento excêntrico 3,0 mm, 8 - acoplamento excêntrico 1,5 mm, 9 - base sensor de velocidade *encoder*.

A base geral foi impressa com filamento PLA branco com 70% de preenchimento, 0,25 mm de altura de camada e velocidade de impressão de 45 mm/s. As outras peças foram impressas com filamento PETG preto, com no mínimo 70% de preenchimento, altura de camada entre 0,20 e 0,25 mm e velocidade de impressão entre 30 e 40 mm/s. O garfo escocês e os acoplamentos excêntricos foram impressos com 100% de preenchimento, com 0,15 mm de altura de camada e velocidade de impressão 20 e 25 mm/s, respectivamente.

Nós vimos a necessidade de colocar um sensor para poder medir a rotação do motor e conseguir obter a frequência de oscilação do pivô. Foi escolhido o sensor de velocidade *encoder* mostrado na Figura 3.15. Os acoplamentos excêntricos possuem duas pás que geram dois pulsos por volta quando passam pelo sensor. Os pulsos são lidos com uma placa Ar-

duino UNO (Figura 3.16) e é feito um cálculo para transformar o valor em frequência. Uma vez obtido o valor, ele é mostrado em um *display* LCD  $16 \times 2$  que é ligado à placa Arduino através de um módulo I2C (Figura 3.17). Atualização do valor ocorre a cada 3 segundos. O *script* feito na IDE (Integrated Development Environment) do Arduino faz parte do produto educacional. Ele pode ser acessado através do link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/Medidor\\_de\\_frequ%c3%aancia/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/Medidor_de_frequ%c3%aancia/).



**Figura 3.15:** Sensor de velocidade *encoder*. **Fonte:** [39]

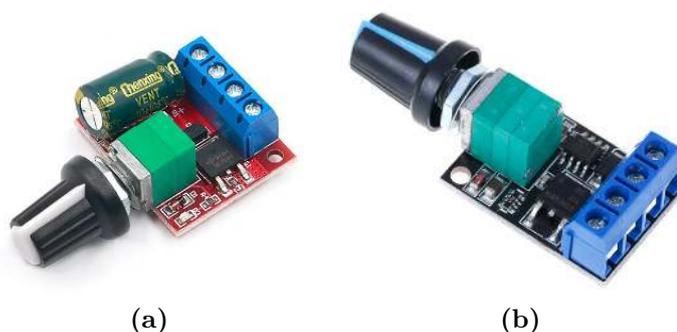


**Figura 3.16:** Placa Arduino UNO. **Fonte:** [40].



**Figura 3.17:** *Display* LCD  $16 \times 2$  e o módulo I2C. **Fonte:** [41]

Com o intuito de explorar diversas frequências de oscilação, adicionamos um controlador PWM (*Pulse Width Modulation*) para controlar a rotação do motor. Queimamos dois PWMs de 5 A (Fig. 3.18a) e dois de 10 A (Fig.3.18b). Eles queimaram quando o garfo escocês travou nas guias, devido ao aumento da corrente do motor. O PWM da versão final é mais potente do que os anteriores e possui um fusível de proteção próprio de 10 A, sua tensão de entrada é de 12 a 40 V DC (Fig.3.19).



**Figura 3.18:** (a) PWM 4,5 a 35 V DC, 5 A. **Fonte:** [42]. (b) PWM 5 a 12 V DC, 10 A. **Fonte:** [43].



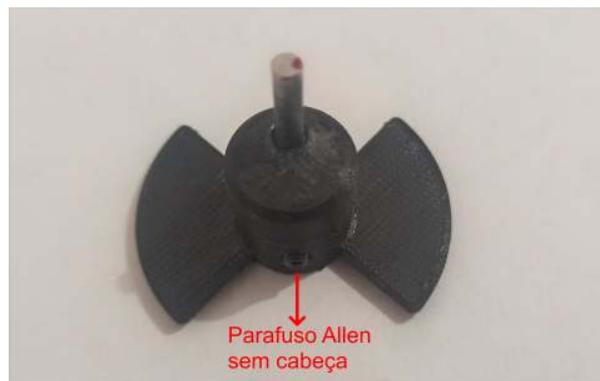
**Figura 3.19:** Controlador PWM 12 a 40 V DC, 10 A. **Fonte:** [44].

Para alimentação da placa Arduino e do motor foi usada uma fonte chaveada, com entrada de 127 V/ 220 V AC, saída de 12 V DC e corrente de 10 A (Figura 3.20).



**Figura 3.20:** Fonte de alimentação entrada 127 V/220 V AC, saída 12 V DC e corrente 10 A. **Fonte:** [45].

Após a produção do garfo escocês, guias, pinos, barras e das peças 3D mostradas na Figura 3.14, foi realizada a montagem da parte mecânica. Primeiro montamos os pinos nos acoplamentos com furos excêntricos. Para tal, passamos cola instantânea cianoacrilato no furo excêntrico dos acoplamentos e encaixamos o pino de comprimento 20 mm neles batendo com um martelo. Deixamos o pino o mais na vertical possível. Abrimos a rosca nos dois furos simétricos do acoplamento com o parafuso Allen sem cabeça M3 × 6 mm. Esses parafusos servem para fixar o acoplamento no eixo do motor. A Figura 3.21 mostra o acoplamento de excentricidade 3,0 mm com o pino montado.



**Figura 3.21:** Acoplamento com excentricidade de 3 mm impresso.

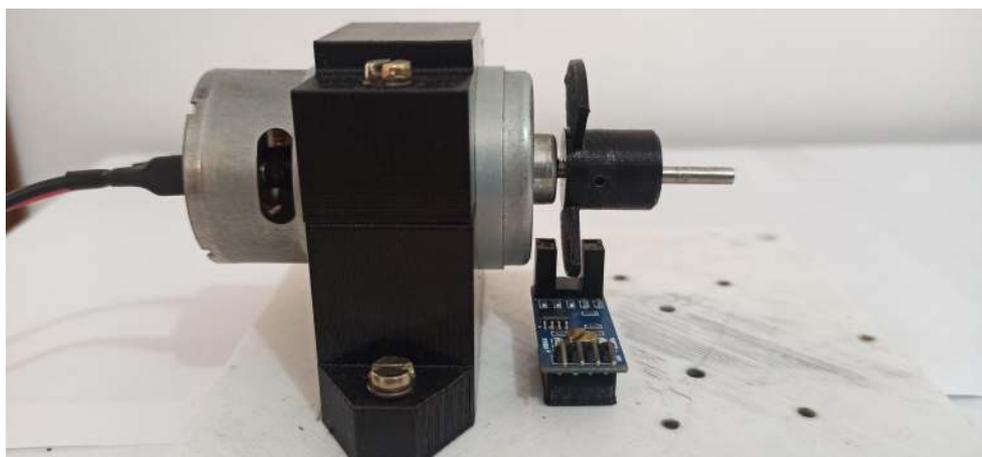
Cortamos dois pedaços de fio com 350 mm. Usamos solda de estanho para soldar os *plugs* banana em uma das pontas dos fios e a outra ponta no motor (Fig. 3.22). A solda no motor foi isolada com tubo termo retrátil, mas pode ser usada fita isolante. No manual do professor foi especificada a fita isolante. Montamos o acoplamento com excentricidade de 3 mm no motor.



**Figura 3.22:** Motor com cabo soldado e acoplamento com excentricidade de 3 mm montado.

Montamos o motor e o sensor de velocidade *encoder* na base geral conforme a Fig. 3.23. Certificamos que as paletas do acoplamento estavam passando no meio do sensor, para que elas não batessem no mesmo. Para unir as bases superior e inferior do motor, usamos

dois parafusos cabeça cilíndrica com fenda  $M4 \times 35$  mm e duas arruelas de pressão. A rosca nos furos da base inferior foram feitas com o próprio parafuso. A fixação da base do motor na base geral foi feita com dois parafusos cabeça cilíndrica com fenda  $M4 \times 20$  mm e duas arruelas de pressão. O sensor de velocidade *encoder* foi fixado na sua base e na base geral com um parafuso cabeça cilíndrica com fenda  $M3 \times 16$  mm. Para fixação das peças na base geral, as roscas são feitas nos furos da mesma.



**Figura 3.23:** Montagem do motor e do sensor de velocidade *encoder* na base geral.

Colamos duas porcas M3 nos furos hexagonais da peça tampa para rolamento linear (Fig. 3.24). Por essas porcas passam parafusos que servem para apertar as guias do garfo escocês. Desta forma, foi necessário ter uma rosca mais resistente, evitando a rosca diretamente na peça impressa.



**Figura 3.24:** Tampa para rolamento linear impressa.

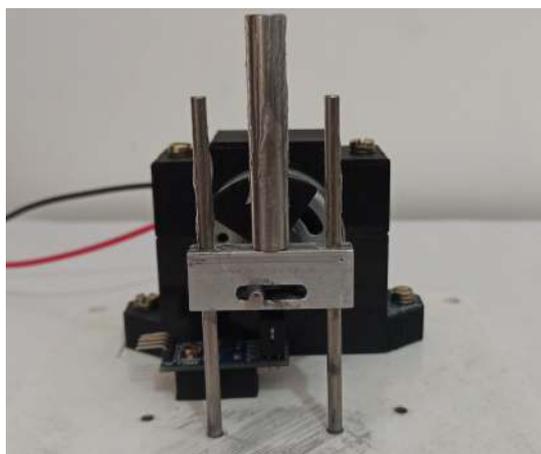
Montamos o rolamento linear na carcaça porta rolamento. Para não danificar o rolamento, usamos uma madeira em cima do mesmo e batemos com um martelo até que ele entrasse completamente no furo. Em seguida, montamos a tampa para rolamento linear e o anel *o'ring* (anel de borracha) (Fig. 3.25).

A tampa foi fixada na carcaça rosqueando dois parafusos cabeça chata com fenda  $M4 \times 12$  mm. Os dois parafusos cabeça cilíndrica com fenda  $M3 \times 12$  mm, que passam nas porcas da tampa, servem como batente para as guias.



**Figura 3.25:** Montagem do rolamento linear, tampa para rolamento linear e do anel *o'ring* (anel de borracha) na carcaça porta rolamento.

Passamos graxa de silicone nas guias, nos furos da peça de alumínio do garfo escocês e na sua parte cilíndrica. A graxa de silicone foi escolhida por ser atóxica. A montagem foi feita conforme a Fig. 3.26. A montagem com o garfo escocês impresso também leva graxa nos furos e na parte cilíndrica para diminuir o atrito.



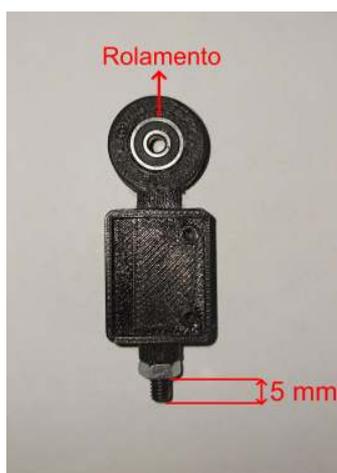
**Figura 3.26:** Montagem do garfo escocês e das guias.

A carcaça porta rolamento linear possui um detalhe na sua base permitindo que ela seja montada apenas de um lado quando o sensor de velocidade encoder está em seu lugar (Fig. 3.27). Ela também possui dois furos onde entram as guias. Os dois parafusos que passam nas porcas da tampa para rolamento linear foram ajustados de modo que encostassem nas guias após a carcaça ser montada. O anel *o'ring* pode ser tirado para fazer esse ajuste. Quando os parafusos são apertados e encostam nas guias, a tampa dá uma leve levantada. Usamos quatro parafusos cabeça cilíndrica com fenda  $M3 \times 12$  mm e quatro arruelas de pressão para prender a carcaça na base geral.



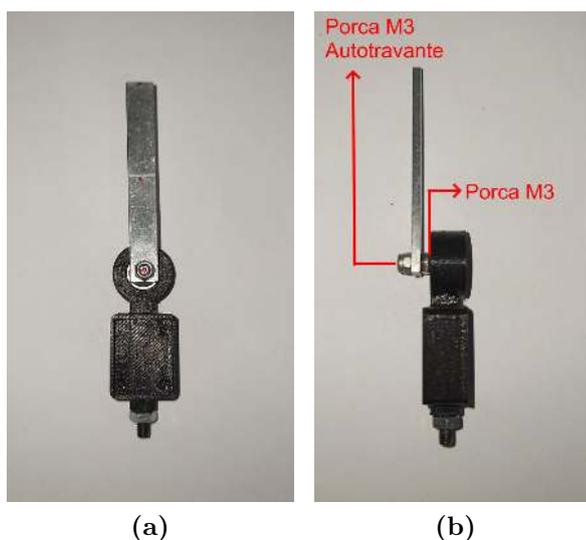
**Figura 3.27:** Montagem da carcaça porta rolamento na base geral. O detalhe na carcaça porta rolamento é um corte que foi feito na peça que demarca o lado que ela tem que ser montada. Não é possível montá-la utilizando o outro lado, pois a carcaça bateria no sensor.

Passamos cola na lateral do furo maior da peça base do pivô e colocamos o rolamento 623-2RS até ele encostar no batente do furo. Assim como foi feito no rolamento linear, também foi usada uma madeira por cima desse rolamento para não bater com o martelo diretamente nele. Em seguida rosqueamos um parafuso Allen sem cabeça M4 × 16 mm na parte inferior da base do pivô e colocamos uma porca M4 neste parafuso deixando-o 5 mm para fora (Fig. 3.28). Essa peça possui dois furos onde pode ser preso um acelerômetro MPU6050. Podem ser usados dois parafusos cabeça cilíndrica com fenda M2,5 × 7 mm para prender o acelerômetro. Deve-se preparar um *sketch* no Arduino para seu funcionamento, pois o sensor não foi implementado nesta dissertação.



**Figura 3.28:** Montagem do rolamento 623-2RS e do parafuso de fixação na base do pivô.

Usando um parafuso cabeça cilíndrica com fenda M3 × 13 mm, uma porca M3 e uma porca M3 autotravante, prendemos a barra de 60 mm ao rolamento (figuras 3.29a e 3.29b).



**Figura 3.29:** (a) Vista frontal da montagem da barra no pivô. (b) Vista Lateral da montagem da barra no pivô.

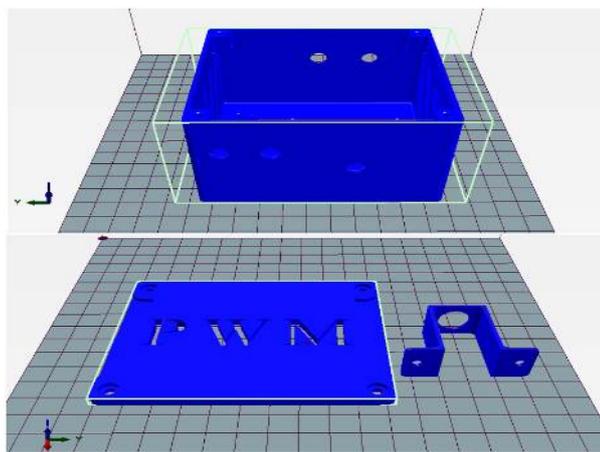
Montamos o conjunto anterior no cilindro do garfo escocês. O ajuste da posição da base do pivô foi feito através da porca que está no parafuso, em seguida foi dado o aperto final. O conjunto mecânico montado é mostrado na Figura 3.30.



**Figura 3.30:** Conjunto mecânico completo.

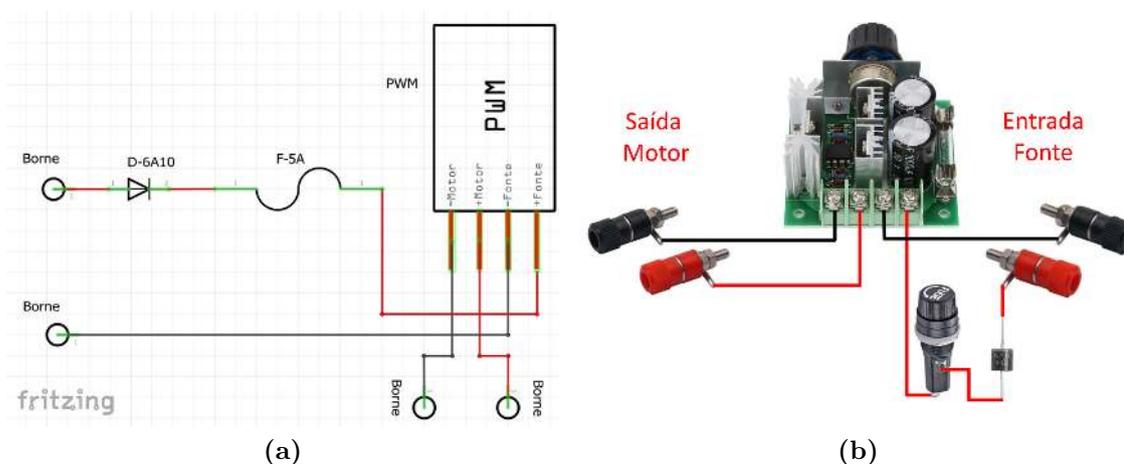
Após a montagem do conjunto mecânico, verificamos se o garfo escocês deslizava nas guias e no rolamento linear sem travar. Para isso, giramos o acoplamento pela paleta e verificamos se o garfo escocês subia e descia de forma suave. Quando era verificado algum travamento, a montagem do garfo escocês era feita novamente girando ele 180°. É normal em montagens mecânicas a montagem ficar melhor com a peça em uma posição do que em outra, por causa das tolerâncias nas medidas das posições dos furos. É importantíssimo que o movimento do garfo escocês seja suave, pois se houver travamento a corrente do motor vai aumentar, podendo queimar a placa PWM, o circuito de proteção ou o próprio motor.

Para evitar que algumas partes dos circuitos elétricos ficassem expostas e que o *display* e a placa Arduino ficassem simplesmente em cima da mesa, fizemos alguns acabamentos com peças impressas em 3D. Foram feitos uma caixinha onde fica o circuito de proteção e a placa PWM, um acabamento para a fonte 12 V AC/DC, um suporte para o *display* e uma base para a placa Arduino. A Fig. 3.31 mostra o conjunto de peças da caixa para a placa PWM.



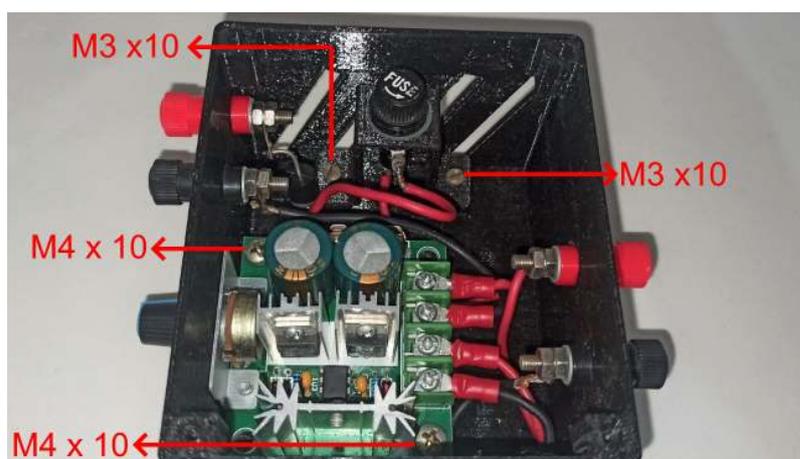
**Figura 3.31:** Peças caixa PWM, tampa PWM e suporte porta fusível.

O circuito ligado à placa PWM possui um Fusível de 5 A dentro de um porta fusível e um diodo de 6 A. Eles são elementos de proteção da placa e do motor. O fusível protege contra correntes maiores que 5 A e o diodo contra a polarização inversa, impedindo que circule corrente quando o terminal negativo da fonte é ligado nele por engano. O esquema elétrico simbólico e o esquema com as imagens dos componentes são mostrados, respectivamente, nas figuras 3.32a e 3.32b.



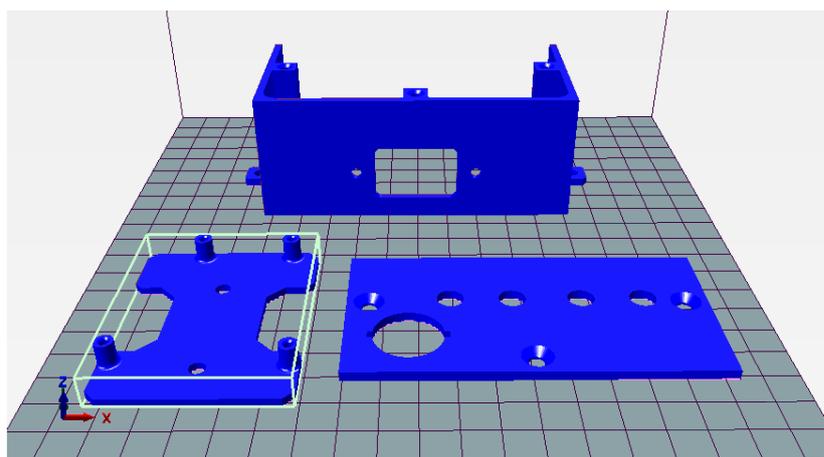
**Figura 3.32:** (a) Esquema elétrico simbólico da ligação da caixa PWM. Os *bornes* são entradas para os plugs banana, D-6A10 é o diodo de 6 A, F-5A é o fusível de 5 A (deve estar dentro do porta fusível), PWM é a placa PWM. (b) Esquema elétrico da ligação da caixa PWM com a imagem dos componentes.

A fixação da base do porta fusível foi feita com dois parafusos cabeça cilíndrica com fenda  $M3 \times 10$  mm. A placa PWM é fixada por dois furos diagonais, utilizando dois parafusos Phillips cabeça panela  $M4 \times 10$  mm. Para fechar a caixa, foram usados quatro parafusos cabeça cilíndrica com fenda  $M3 \times 10$  mm. Todos os furos foram rosqueados com os parafusos especificados. Os fios foram soldados nos *bornes*, no diodo e no porta fusível usando solda de estanho. Os terminais dos fios que são aparafusados na placa PWM vêm junto com ela, eles foram crimpados nos fios utilizando um alicate universal. A Figura 3.33 mostra a montagem do circuito dentro da caixa PWM.



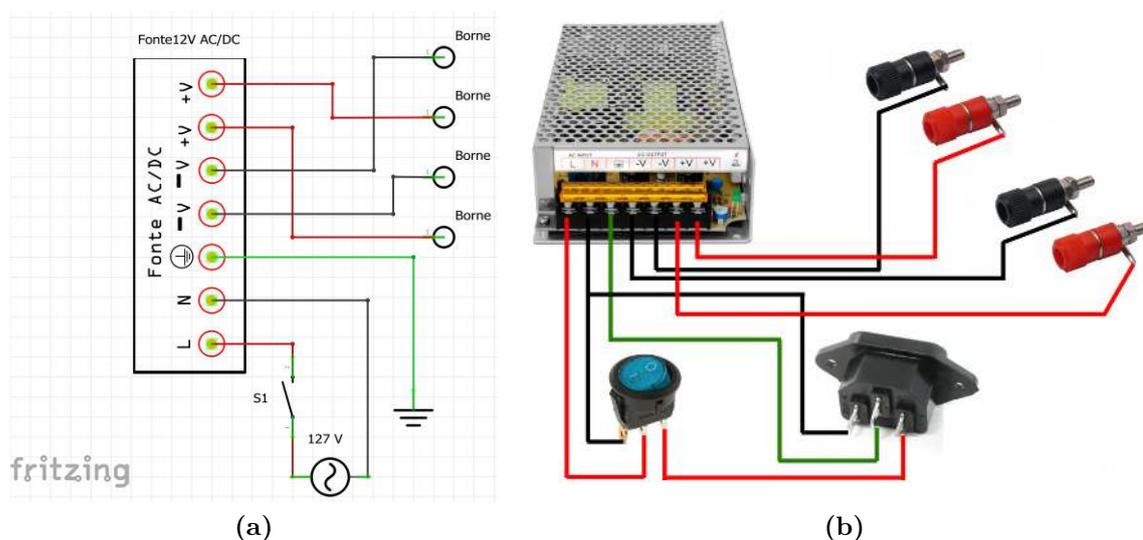
**Figura 3.33:** Montagem do circuito na caixa PWM.

A Fig. 3.34 mostra o acabamento da fonte 12 V e a base da placa Arduino. Este acabamento encaixa apenas no modelo semelhante à fonte mostrada na Figura 3.20.



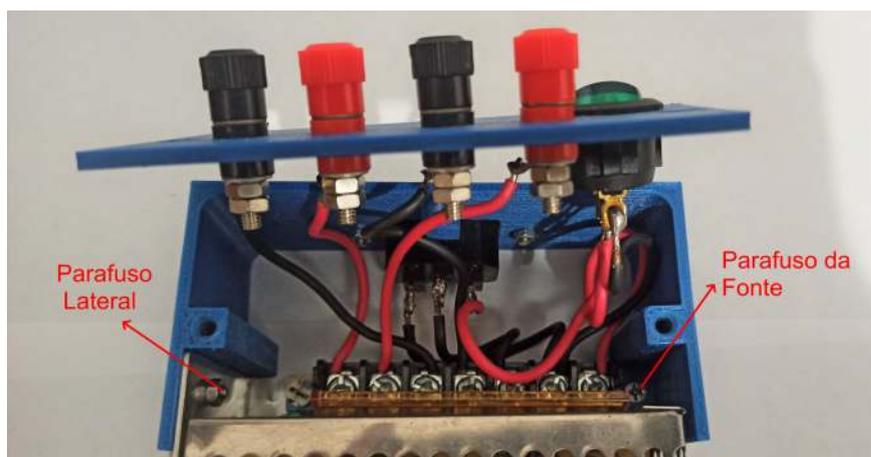
**Figura 3.34:** Peças base Arduino, acabamento fonte e tampa acabamento fonte.

Os desenhos esquemáticos do circuito são mostrados nas figuras 3.35a e 3.35b. Este circuito foi montado após a chave liga/desliga, a tomada e os *bornes* serem instalados nos acabamentos (Fig. 3.36).



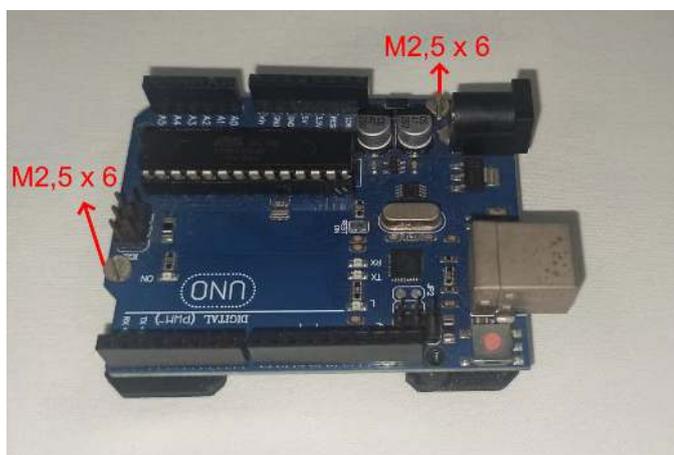
**Figura 3.35:** (a) Esquema elétrico simbólico da ligação da fonte. S1 é a chave liga/desliga. A fonte 127 V representa a entrada de tensão alternada pela tomada de três pinos. O aterramento é feito na ligação da tomada. (b) Esquema elétrico da ligação da fonte com a imagem dos componentes.

O acabamento foi fixado na fonte com um parafuso que já vem nela e com um parafuso Allen cabeça cilíndrica  $M3 \times 8$  mm, uma arruela lisa e uma porca M3 que prendem o acabamento na fonte pela lateral. A arruela lisa foi colocada embaixo da cabeça do parafuso Allen. A tomada foi presa com dois parafusos Phillips cabeça panela  $M3 \times 8$  mm e duas porcas M3. A tampa do acabamento foi presa com três parafusos cabeça chata com fenda  $M4 \times 7$  mm. Os furos do acabamento da fonte foram rosqueados com o próprio parafuso para fixação da tampa. A Figura 3.36 mostra como ficou a montagem.



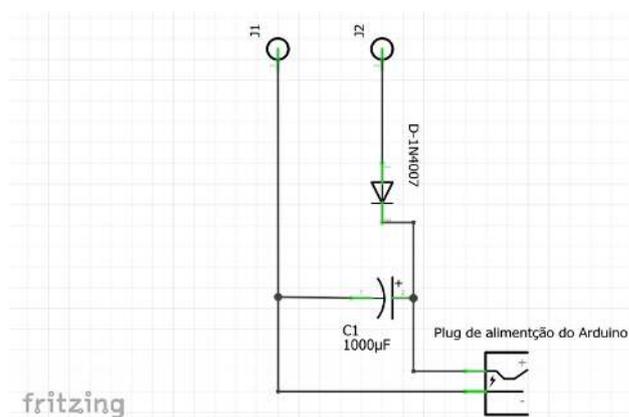
**Figura 3.36:** Montagem do circuito da fonte com o acabamento.

A placa Arduino foi fixada em sua base com dois parafusos cabeça cilíndrica com fenda  $M2,5 \times 6$  mm (Fig. 3.37).



**Figura 3.37:** Montagem da placa Arduino na base.

Fizemos um pequeno circuito para ligar a fonte 12V com a Arduino. Ele serve como filtro para retirar possíveis oscilações na tensão da fonte e protege contra uma ligação incorreta, em que se troca o fio positivo pelo negativo. O seu esquema e como ele deve ficar após a construção estão mostrados, respectivamente, nas figuras 3.38a e 3.38b. Após soldados o diodo e o capacitor nos fios, eles foram isolados cada um com um pedaço de tubo termo retrátil, depois foi colocado um tubo termo retrátil maior unindo os dois fios. Esse isolamento pode ser feito com fita isolante, trata-se de uma opção mais barata, por isso foi especificada uma na Tabela 3.1.



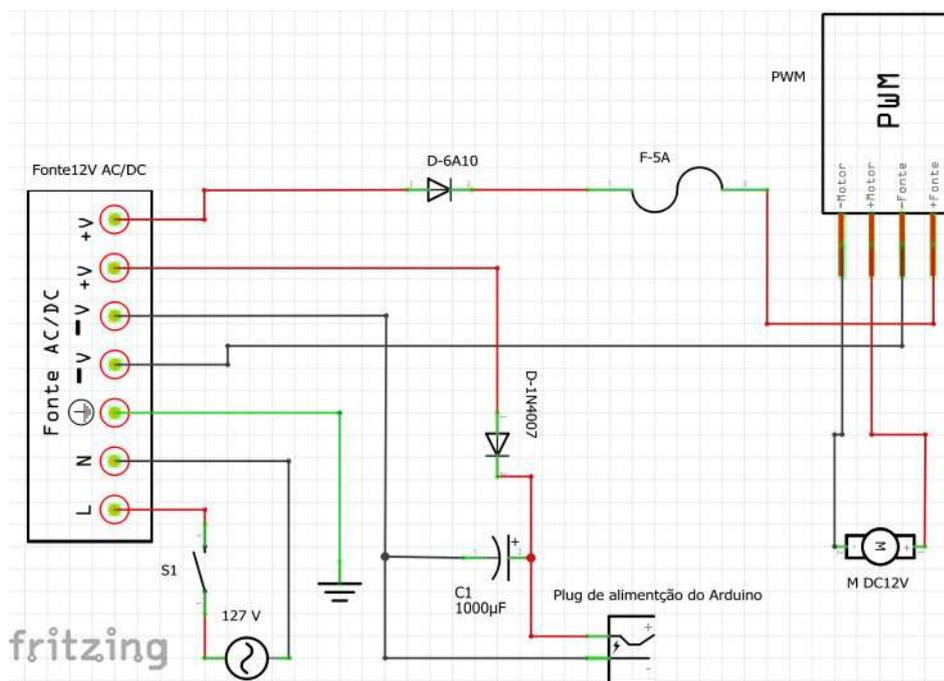
(a)



(b)

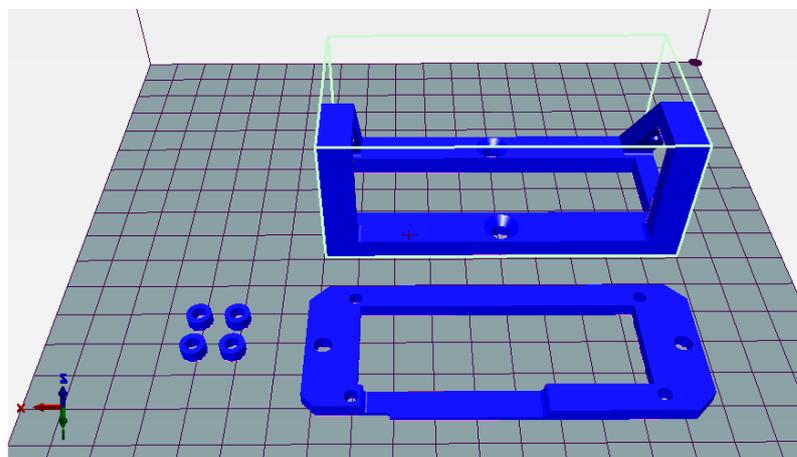
**Figura 3.38:** (a) Esquema elétrico do cabo de ligação da Arduino. D1N4007 é o Diodo de 1 A, J1 e J2 são conectores do tipo banana, C1 é o capacitor de  $1000\mu\text{F}$ . (b) Como deve ficar o cabo de ligação da placa Arduino.

O esquema elétrico geral sem os *bornes* está mostrado na Figura 3.39.



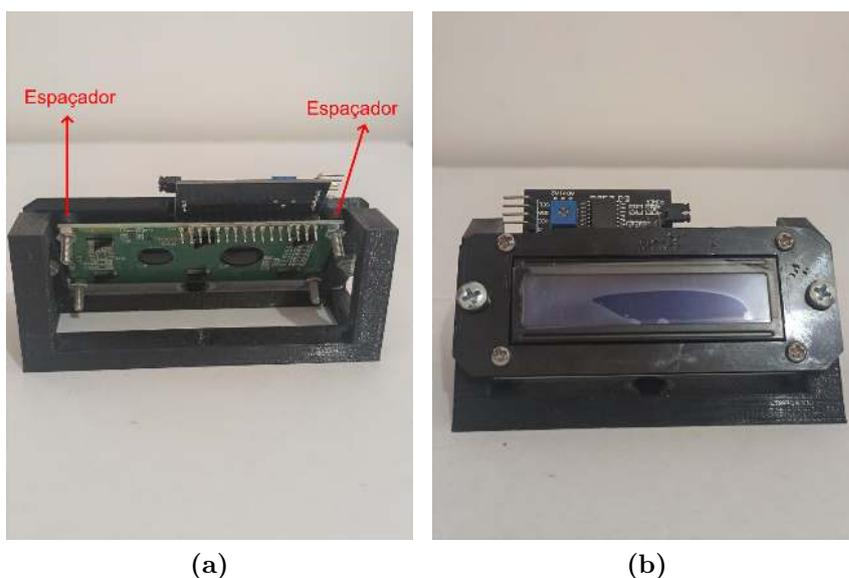
**Figura 3.39:** Esquema elétrico geral sem os *bornes*.

A Fig. 3.40 mostra o conjunto de peças para o suporte do *display*.



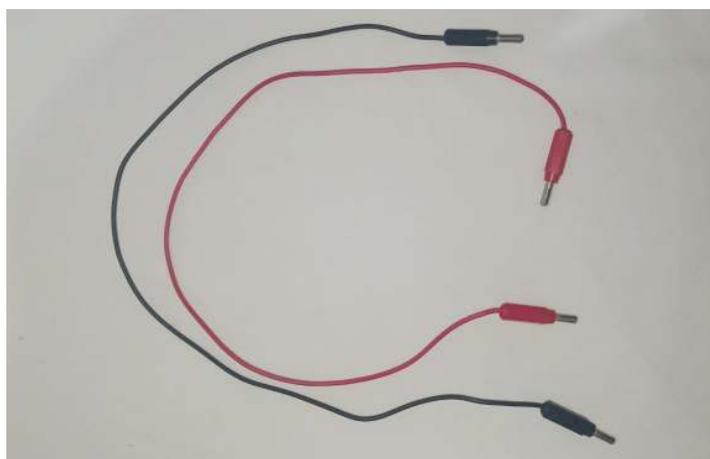
**Figura 3.40:** Conjunto de peças para o suporte do *display*. Espaçadores *display*, moldura *display* e suporte *display*.

Soldamos o módulo interface serial I2C no *display* e em seguida os montamos na moldura utilizando os espaçadores, quatro parafusos Phillips cabeça panela M3 × 16 mm e quatro porcas M3 (Fig. 3.41a). Em seguida fixamos a moldura com o *display* no suporte utilizando dois parafusos Phillips cabeça panela M4 × 16 mm e duas porcas M4. A Figura 3.41b mostra a vista frontal da montagem.



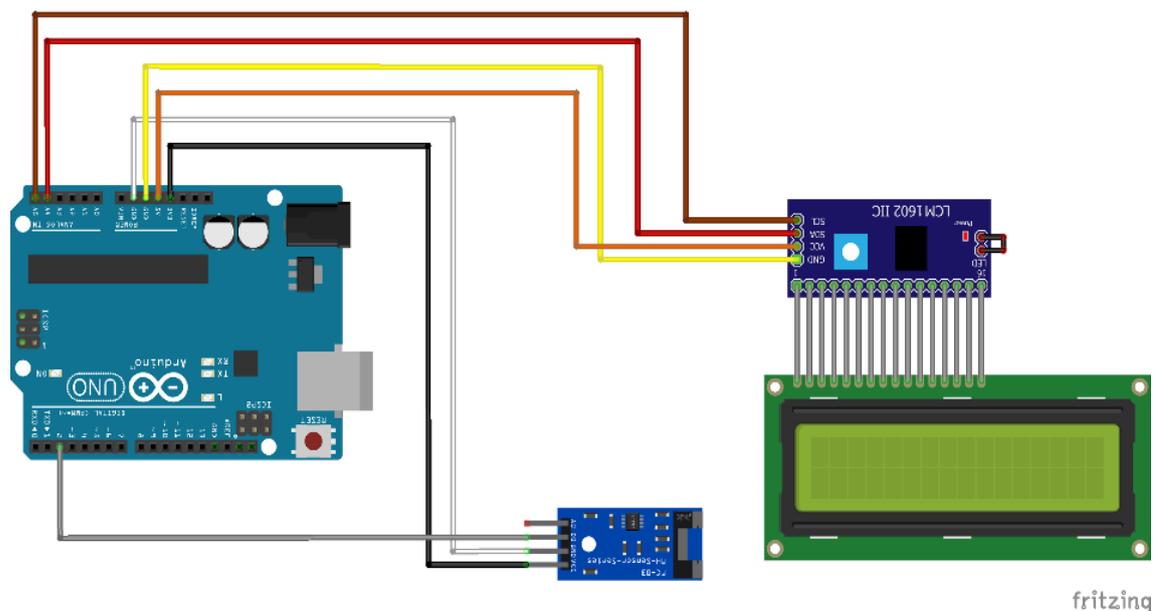
**Figura 3.41:** (a) Vista traseira da montagem do *display* no suporte. (b) Vista frontal da montagem do *display* no suporte.

Para ligar a fonte 12 V à caixa PWM, cortamos dois pedaços de fio com 500 mm e soldamos conectores banana nas duas pontas (Fig. 3.42).



**Figura 3.42:** Fios para ligar a fonte 12 V à caixa PWM.

Nós fizemos um *script* na IDE do Arduino para mostrar a frequência de oscilação do pivô no *display* em tempo real. Utilizamos a biblioteca “LiquidCrystal\_I2C” [46] para fazer a comunicação do *display* com a placa Arduino através da placa serial I2C. Após a instalação da biblioteca, carregamos o *script* na placa utilizando a IDE do Arduino. Utilizando os *Jumpers* macho/fêmea, fizemos a ligação do sensor de velocidade *encoder* e do *display* com a placa Arduino (Figura 3.43). No Kit Educacional, o *script* está em um arquivo com extensão **.ino**. Ele pode ser acessado através do link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/Medidor\\_de\\_frequ%C3%Aancia/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/Medidor_de_frequ%C3%Aancia/) e também pode ser visto no Apêndice C do material instrucional que consta no final desta dissertação.



**Figura 3.43:** Esquema de ligação do *display* e do sensor de velocidade *encoder* na placa Arduino.

Para a utilização da bancada experimental, colocamos a parte mecânica em cima de uma borracha com dimensões  $130\text{ mm} \times 130\text{ mm} \times 6\text{ mm}$  e utilizamos os dois grampos especificados na Tabela 3.1 para prendê-la à mesa. Utilizamos fita dupla-face para colar na mesa a base da placa Arduino, a fonte, a base do *display* e a caixa PWM. A montagem final ficou como mostrado na Figura 3.44.



**Figura 3.44:** Vista superior da bancada experimental.

Após fazer todas as ligações como na Figura 3.44, com o potenciômetro do PWM no mínimo, ligamos a fonte 12V, seguramos a barra na posição vertical superior como mostrado na Figura 3.45 e aumentamos a rotação do motor girando o potenciômetro do PWM até a barra ficar estável. Após a barra adquirir estabilidade, nós aplicamos pequenos impulsos em suas laterais para visualizar ela realizando oscilações em torno da

posição de estabilidade. O vídeo da bancada experimental em funcionamento pode ser encontrado na pasta “Vídeos”, através do link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/).

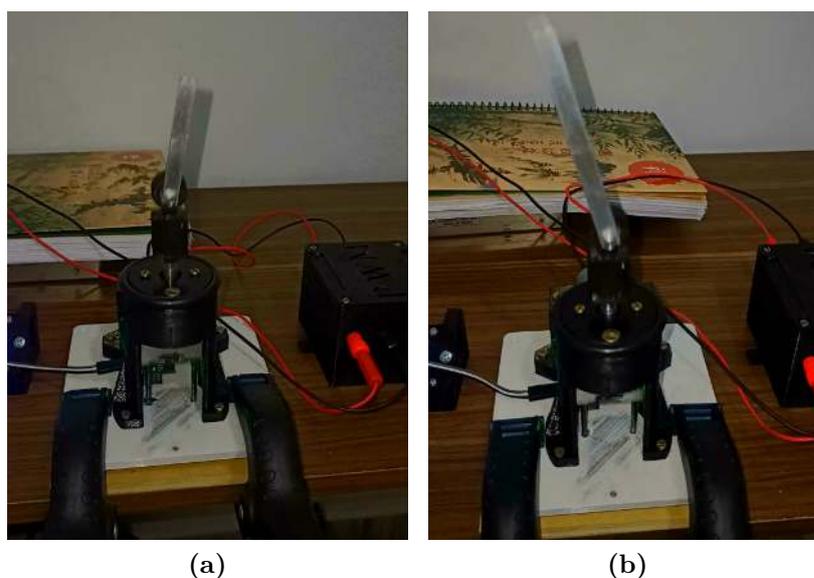


**Figura 3.45:** Como segurar a barra na posição vertical superior.

Para fazer a troca do acoplamento, tiramos a parte superior da base do motor, retiramos o motor e substituímos o acoplamento. Nós testamos os acoplamentos com excentricidades 3 mm e 1,5 mm e as barras de alumínio de 60 mm e 90 mm. A Tabela 3.3 mostra as frequências mínimas de oscilação do pivô para a estabilidade das barras de alumínio em três configurações do experimento Pêndulo de Kapitza. As medidas foram feitas observando o valor da frequência no *display* enquanto era aumentada lentamente a rotação do motor até que a barra adquirisse estabilidade. Ao atingir os valores de frequência que constam na referida tabela, as barras estabilizaram cada uma fazendo um ângulo diferente com a vertical. As figuras 3.46a e 3.46b mostram, respectivamente, as situações de 79 Hz e 60 Hz que constam na tabela. Percebeu-se que ao aumentar ainda mais a frequência de oscilação do pivô, elas tendiam a ficar mais próximas da vertical. Como foi visto que frequências acima de 85 Hz poderiam danificar a bancada experimental, a medição do mínimo de estabilidade para a configuração com o acoplamento de excentricidade de 1,5 mm e a barra de 90 mm foi evitada.

**Tabela 3.3:** Frequência mínima de estabilidade das barras de alumínio para três configurações do experimento Pêndulo de Kapitza.

Barra	Excentricidade nominal do pino	Frequência do pivô
60 mm	3,0 mm	$47 \pm 1$ Hz
60 mm	1,5 mm	$79 \pm 1$ Hz
90 mm	3,0 mm	$60 \pm 1$ Hz



**Figura 3.46:** (a) Barra de 60 mm estável à 79 Hz, utilizando o acoplamento com excentricidade 1,5 mm. (b) Barra de 90 mm estável à 60 Hz, utilizando o acoplamento com excentricidade 3 mm.

Alguns cuidados devem ser tomados para não danificar a bancada experimental e garantir maior vida útil do equipamento. Desta forma, o usuário deve seguir as recomendações listadas abaixo:

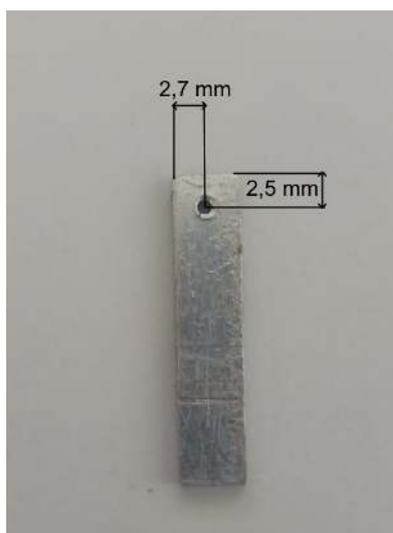
- Não ligar a bancada experimental se as partes que irão sofrer atrito não estiverem com graxa. A graxa diminuirá o atrito e aumentará a vida útil dos componentes.
- Não mexer no potenciômetro do PWM se o garfo escocês não estiver subindo e descendo suavemente nas guias e no rolamento linear. Se o garfo escocês estiver travando, isso irá aumentar a corrente do motor e possivelmente o fusível de 5 A irá queimar.
- Não ficar mais de 50 s com a bancada ligada quando a frequência estiver acima de 30 Hz. A peça onde fica o pino excêntrico é de plástico, assim, ela não pode ficar muito tempo submetida ao calor gerado pelo atrito do pino com o garfo escocês. Caso o pino solte devido ao aquecimento da peça, o recomendado é imprimir outra.
- Após 50 s com a bancada em funcionamento, esperar no mínimo 1 min para acionar novamente. Esse procedimento serve para esfriar um pouco o pino antes de acionar novamente a bancada.
- Não passar de 85 Hz. Frequências acima desse limite poderão danificar a bancada experimental.
- Não usar barras de alumínio com as dimensões maiores que a barra de 90 mm especificada. O uso de barras maiores irá gerar muito esforço nos componentes mecânicos, podendo causar danos.

## 3.2 Experimento de baixo custo

A bancada experimental da seção anterior possui diversos recursos que permitem explorar o experimento de diversas formas. Contudo, para uma simples visualização e análise qualitativa do fenômeno, é possível gastar bem menos. Pensando nisso, idealizamos uma forma mais simples e barata de realizar o experimento Pêndulo de Kapitza.

Neste seção apresentaremos um experimento de baixo custo. Diferente da bancada experimental da seção anterior, o experimento proposto não permite a mudança de amplitude e de frequência de oscilação do pivô, a visualização em tempo real do valor da frequência de oscilação do pivô e visualização da parte mecânica que transforma o movimento circular em linear. Sua vantagem está na facilidade de montagem e no baixo custo. Além disso, ela pode ser usada para mostrar o fenômeno de forma mais simples e rápida aos alunos. Uma máquina de cortar cabelo barata custa em média R\$ 70,00, os outros itens não devem passar de R\$ 20,00. Desta forma, este experimento não deve passar de R\$ 90,00. Essa estimativa de preço foi feita no segundo semestre do ano de 2021.

Para a construção do experimento, utilizamos uma máquina de cortar cabelo. Ela já possui internamente um sistema mecânico que transforma o movimento circular em linear. Cortamos um pedaço de arame com diâmetro de  $1,0 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$  de comprimento e o usamos para apoiar a barra. Usamos um pedaço de alumínio de dimensões  $40 \text{ mm} \times 10 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$  para fazer a barra que seria o pêndulo. A barra foi cortada com uma serra de mão e limada até ficar com as dimensões  $24,7 \text{ mm} \times 5,4 \text{ mm} \times 2,0 \text{ mm}$ . Em seguida, fizemos um furo na barra utilizando uma broca de  $1 \text{ mm}$  de diâmetro. A posição do furo é mostrada na Figura 3.47.



**Figura 3.47:** Barra furada.

Cortamos dois pedacinhos de borracha de  $3,0 \text{ mm}$  de diâmetro e  $2,0 \text{ mm}$  de espessura utilizando um vazador de  $3,0 \text{ mm}$  e os furamos com o arame. Esses pedacinhos de borracha servem para limitar o movimento da barra no arame, impedindo que ela se mova de um

lado para o outro. Para fixar o arame na lâmina móvel da máquina de cortar cabelo, foi utilizado uma cola instantânea cianoacrilato. A Figura 3.48 mostra o material pronto para a montagem.



**Figura 3.48:** Material necessário para montar o experimento Pêndulo de Kapitza de baixo custo.

Colamos o arame na lâmina móvel da máquina de tal forma que ele ficasse o mais reto possível. Após a secagem da cola, colocamos a primeira borracha no arame, em seguida a barra foi colocada e então a segunda borracha. A montagem ficou como na Figura 3.49.



**Figura 3.49:** Montagem final do aparato experimental.

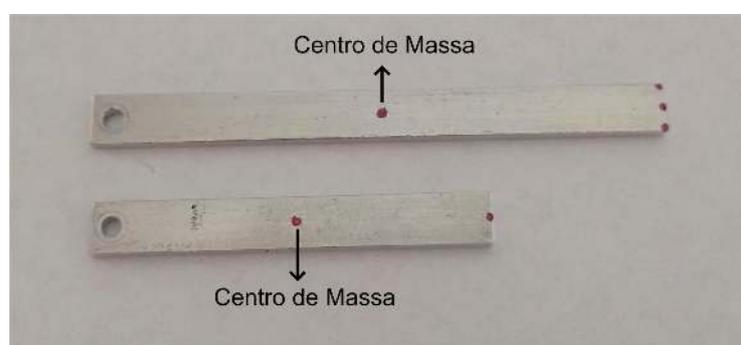
Feita a montagem, ligamos o barbeador, colocamos a barra na posição invertida e verificamos a sua estabilidade (Fig. 3.50). Aplicamos pequenos impulsos nas laterais da barra para ver se ela realizaria oscilações em torno da posição de estabilidade, contudo isso não foi possível. Devido à alta frequência de oscilação da lâmina e o pequeno comprimento da barra de alumínio, ela volta muito rápido para a posição vertical. O vídeo do experimento com a máquina de cortar cabelo pode ser encontrado na pasta “Vídeos”, através do link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/).



**Figura 3.50:** Máquina ligada e a barra na posição invertida em equilíbrio estável.

### 3.3 Gravação dos vídeos

Os vídeos foram gravados no Laboratório de Acústica e Vibrações (LAVI), do Programa de Engenharia Mecânica, da COPPE/UFRJ. O material para filmagem foi emprestado pelo responsável do laboratório, professor Fernando Augusto de Noronha Castro Pinto. Nosso objetivo com a filmagem era conseguir obter vídeos em que fosse possível rastrear a trajetória da barra e do pivô utilizando a ferramenta de rastreamento automático do *Software Tracker*. Deste modo, nós fizemos algumas marcações com uma tinta vermelha nas barras (Fig. 3.51) e no pivô, parafuso onde a barra é apoiada (Fig. 3.52). Antes de marcar com a tinta vermelha, a posição do centro de massa da barra foi traçada com um paquímetro. Como no cálculo do momento de inércia não consideramos o furo, traçamos o centro da barra utilizando as medidas da metade do comprimento e da largura. A marcação no centro das barras é a posição do centro de massa. Nós fizemos três pontos na parte superior da barra maior porque iríamos utilizá-los, mas apenas o do meio nos serviu.

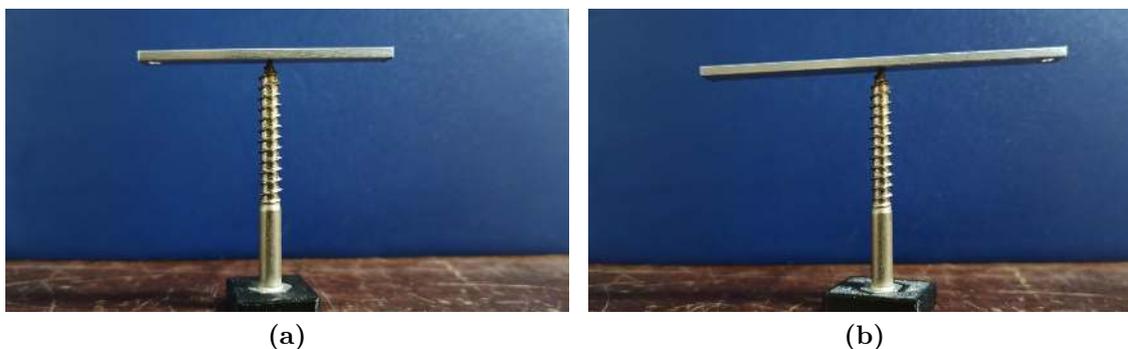


**Figura 3.51:** Barras de 90 mm e 60 mm com as marcações em vermelho. A marcação no meio das barras é a do centro de massa.



**Figura 3.52:** Marcação com tinta vermelha no pivô.

Para verificar a marcação do centro de massa, fizemos uma peça utilizando um parafuso sextavado de rosca soberba, com diâmetro 6 mm e comprimento 55 mm. Fixamos esse parafuso em um peça impressa que continha um furo sextavado onde foi colada a cabeça do parafuso. Em seguida, tentamos equilibrar as barras na ponta do parafuso pelo ponto vermelho traçado que indica o centro de massa. As figuras 3.53a e 3.53b mostram, respectivamente, as barras de 60 mm e 90 mm apoiadas pelos pontos marcados como centro de massa. Apesar da pequena inclinação da barra maior, consideramos que a marcação ficou muito boa, pois a barra ficou equilibrada e não caiu.



**Figura 3.53:** (a) Verificação da marcação do centro de massa da barra de 60 mm. (b) Verificação da marcação do centro de massa da barra de 90 mm.

Para tentar garantir os melhores resultados possíveis, nivelamos a bancada experimental utilizando um nível de bolha (Fig. 3.54). Na referida figura, a parte cilíndrica, o pivô e a barra ainda não tinham sido montados, mas em seguida isso foi feito e a bancada foi nivelada novamente. Os modelos vistos anteriormente no capítulo 2 não consideram o desvio do pivô com a vertical. Assim, tentamos deixar o pivô o mais na vertical possível.



**Figura 3.54:** Nivelamento da bancada experimental com o nível de bolha.

A câmera utilizada foi o modelo *HiSpec2 4G color*, da empresa *Fastec Imaging*. A lente utilizada foi a *Navitar TV Zoom Lens 12.5 - 75 mm F 1.8*. A câmera com a lente é mostrada na Figura 3.55. O programa utilizado para gravação dos vídeos foi o *HiSpec Control Software*. Foi utilizado um notebook para gravação dos vídeos com o programa.



**Figura 3.55:** Câmera HiSpec 2 4G color com a lente Navitar TV Zoom Lens 12.5 - 75 mm F 1.8.

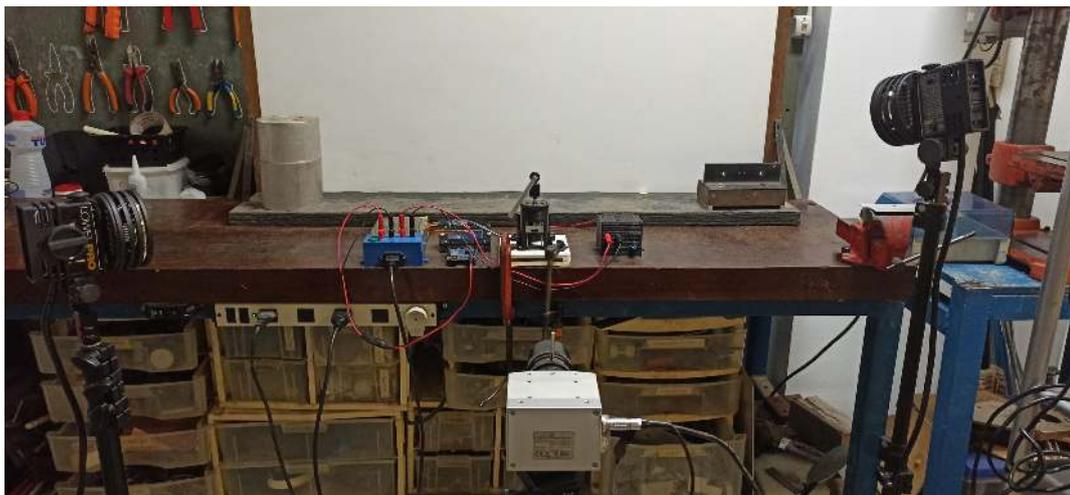
Foi utilizado um tripé Slik Pro 780DX com nível de bolha, que permitiu o nivelamento da câmera. As Figuras 3.57a e 3.57b mostram o tripé e o nível de bolha, respectivamente. Para a iluminação da bancada experimental e do fundo, foram utilizadas dois aparatos de iluminação Lowel Pro - Light (Fig. 3.56), que possuem potência máxima de 250 W, cada uma em um tripé. Foi utilizado um quadro branco como plano de fundo. A bancada experimental foi presa na mesa com dois grampos tipo sargento. A fonte, a caixa PWM e a base da placa Arduino foram fixados na mesa com fita dupla face 3M para impedir que ficassem se movendo na mesa devido a vibração causada pela bancada experimental. A distância da barra de 60 mm até a lente da câmera foi de 500 mm, já para a barra de 90 mm a distância foi de 535 mm. A distância das barras para o quadro branco foi de 400 mm. Os tripés com a luminária ficaram mais ou menos à mesma distância da câmera e da bancada experimental. A Figura 3.58 mostra o aparato completo montado.



**Figura 3.56:** Câmera HiSpec 2 4G color com a lente Navitar TV Zoom Lens 12.5 - 75 mm F 1.8.



**Figura 3.57:** (a) Tripé Slik Pro 780DX. (b) Nível de bolha do tripé Slik Pro 780DX.



**Figura 3.58:** Aparato completo para a filmagem do experimento, montado no LAVI.

Após toda a montagem estar pronta para a gravação dos vídeos, a bancada experimental foi ligada e a rotação do motor foi aumentada até que a barra ficasse estável o mais na vertical possível. A frequência de oscilação foi visualizada no *display* e anotada.

A primeira filmagem foi feita utilizando a bancada experimental com o acoplamento de excentricidade 3 mm e a barra de 60 mm. Nesta configuração foram gravados 4 vídeos. Em seguida, utilizamos a barra de 90 mm e gravamos 7 vídeos. Na terceira configuração, trocamos o acoplamento para o de excentricidade 1,5 mm e utilizamos a barra de 60 mm. Gravamos 2 vídeos com essa configuração.

Algumas vezes durante a gravação, a posição da câmera e a iluminação foram ajustadas para obter uma melhor imagem da barra. Deixar a lente da câmera paralela à barra foi um desafio, mesmo estando com os dois níveis de bolha do tripé alinhados, garantindo o paralelismo com o chão, ainda tínhamos que ter cuidado com a rotação da câmera em relação à vertical, este alinhamento foi feito com a visão. Todos os vídeos foram gravados à 1200 fps e salvos no formato AVI com uma taxa de 30 fps.

Após analisar os vídeos, foi verificado que apenas dois deles apresentaram quadros que permitiram o rastreamento utilizando o recurso de trajetória automática do *Tracker* e obtenção de boas medidas. Esses vídeos foram editados com o programa *Shotcut*, onde foram feitos alguns cortes, com o objetivo de retirar partes que não eram necessárias para a análise. Em seguida, os vídeos foram salvos no formato MP4 para diminuir seus tamanhos.

Em nenhum dos vídeos foi possível utilizar a marcação do centro de massa para a análise. O motivo é que a marcação sumia em alguns quadros, impedindo a obtenção de bons resultados com o recurso de trajetória automática do *Tracker*. O ponto usado nas análises foi o ponto central na parte superior da barra. Como a intenção era obter o movimento angular da barra, este ponto nos serviu, pois ele está na mesma linha que passa pelo centro de massa, sendo assim, fazem o mesmo ângulo com a vertical. Os vídeos para videoanálise podem ser acessados através do link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/V%3%addeos\\_para\\_an%c3%a1lise/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/V%3%addeos_para_an%c3%a1lise/).

## Capítulo 4

# VIDEOANÁLISE COM O *SOFTWARE TRACKER*

De posse dos vídeos da bancada experimental Pêndulo de Kapitza, foram feitas videoanálises com o *software Tracker*, versão 6.0.2. A filmagem com a câmera de alta velocidade permitiu que obtivéssemos vídeos com uma taxa de 1200 *frames/s*. Tal taxa permitiu que pudéssemos obter muitos pontos da trajetória tanto da barra quanto do pivô da bancada experimental. O produto educacional que acompanha esta dissertação possui, entre outros itens, dois vídeos, cada um com sua proposta de atividade envolvendo videoanálise. No material instrucional, disponível no Apêndice B, encontram-se as propostas de atividades e seus respectivos gabaritos escritos em negrito. Disponibilizamos, também, um manual para o uso do *Tracker*. O manual para o uso do *Tracker* e as atividades para os alunos podem ser acessados em arquivos separados através do link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/Aluno/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/Aluno/).

Neste capítulo mostraremos como foram feitas as análises com o *Tracker*. Para tal, analisaremos os vídeos Pêndulo de Kapitza 1 e 2 como é feito nas atividades propostas disponibilizadas no produto educacional. Na primeira seção nós analisaremos o vídeo Pêndulo de Kapitza 1. Mostraremos como foi obtido o gráfico da posição do pivô em função do tempo e como foi feito o ajuste da curva aos dados. A intenção é verificar se o pivô executa um movimento harmônico simples e obter sua amplitude e frequência angular de oscilação. Em seguida, apresentaremos como foram feitas as medidas para calcular o momento de inércia da barra. Uma vez obtidos a amplitude e a frequência angular de oscilação do pivô e o momento de inércia da barra, nós utilizamos a Equação 2.33 para verificar se a condição de estabilidade do pêndulo foi cumprida de acordo com o previsto no modelo da média temporal. Por último, mostraremos como obtivemos o gráfico de oscilação da barra em função do tempo. Analisando o gráfico, nós obtivemos o período médio de oscilação da barra e em seguida a sua frequência angular. Em seguida, nós comparamos essa frequência com a que é prevista pelo modelo da média temporal, dada pela Equação 2.32. Na segunda seção são apresentados os resultados da análise do vídeo

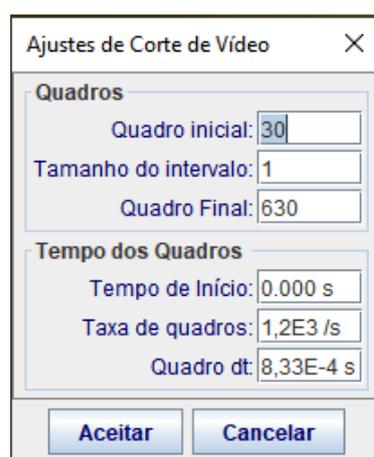
Pêndulo de Kapitza 2. Na terceira seção são discutidos outros resultados de medidas realizadas em outros vídeos e diretamente na bancada experimental. Por fim, na quarta seção falamos brevemente sobre a aplicação do produto educacional.

## 4.1 Análise do vídeo Pêndulo de Kapitza 1

### 4.1.1 Frequência angular e amplitude de oscilação do pivô

A seguir, nós mostraremos um passo a passo de como obter o gráfico de oscilação do pivô da bancada experimental Pêndulo de Kapitza e como fazer o ajuste da curva para os dados obtidos, utilizando o *software Tracker*. Para tal, será seguido basicamente o mesmo roteiro da atividade com o vídeo Pêndulo de Kapitza 1, disponível no produto educacional. Neste vídeo, o valor do comprimento da barra é de 60,00 mm, medida feita com um paquímetro, e o da sua massa é de 3,2 g, medida feita com uma balança de precisão. Nós consideramos o valor da gravidade como  $9,81 \text{ m/s}^2$ .

1. Primeiramente carregamos o vídeo Pêndulo de Kapitza 1. Isso pode ser feito clicando no ícone “Abrir” (  ) na barra de ferramentas.
2. Em seguida, definimos a parte do vídeo na qual pretendíamos fazer a análise. Para isso é necessário ir em *Vídeo/Ajustes de Corte de Vídeo* e preencher na janela “Ajustes de Corte de Vídeo” da seguinte forma: Quadro inicial, 30; Quadro final, 630; Tamanho do intervalo, 1 e Taxa de quadros, 1200 *frames/s* (Fig. 4.1).



**Figura 4.1:** Janela “Ajustes de Corte de Vídeo” com os valores determinados para a análise.

3. É necessário um sistema de coordenadas para gerar o gráfico. Para usá-lo, basta clicar no ícone dos eixos (  ) na barra de ferramentas. No quadro inicial, colocamos os eixos de coordenadas com a origem em cima do ponto de rotação da barra (pivô) (Fig. 4.2).

4. Para obter medidas com uma escala real, é necessário calibrar a escala do *Tracker*. É importante ter uma medida conhecida no experimento. Nos vídeos do experimento Pêndulo de Kapitza é usada altura da parte retangular da base onde fica o pivô, cuja medida é 0,024 m. Conhecendo essa medida, utilizamos o “Bastão de Medição”, que pode ser acessado indo em *Trajétórias/Novo/Ferramentas de Calibração/Bastão de Medição*, na barra de menu. Com ele, definimos a altura da parte retangular da base onde fica o pivô com 0,024 m (Fig. 4.2). Feito isso, o sistema está calibrado para realizar medidas.
5. No mesmo quadro inicial, criamos um “Ponto de Massa A” para trajetória automática na interseção dos eixos de coordenadas (Fig. 4.2). Isso é feito indo na barra de menu, acessando *Trajétórias/Novo/Ponto de Massa*, em seguida, segurando as teclas CTRL + SHIFT e clicando no botão esquerdo do mouse em cima da interseção dos eixos. Após os passos 2, 3 e 4 o quadro inicial ficou como na Figura 4.2.



**Figura 4.2:** Eixos de coordenadas, “Ponto de Massa A” e “Bastão de Medição” no quadro inicial.

6. Após criado o “Ponto de Massa A”, irá aparecer a janela “Trajetória Automática” para este ponto. (Figura 4.3). Nós não alteramos os valores, pois bons resultados são conseguidos com os valores padrões. Clicando em “Pesquisar”, obtivemos o gráfico  $y \times t$  como ilustrado na Figura 4.4. No gráfico,  $y$  está em metros e  $t$  em segundos.

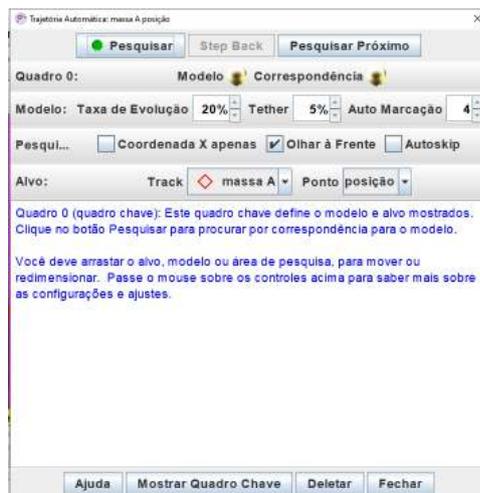


Figura 4.3: Janela Trajetória Automática.

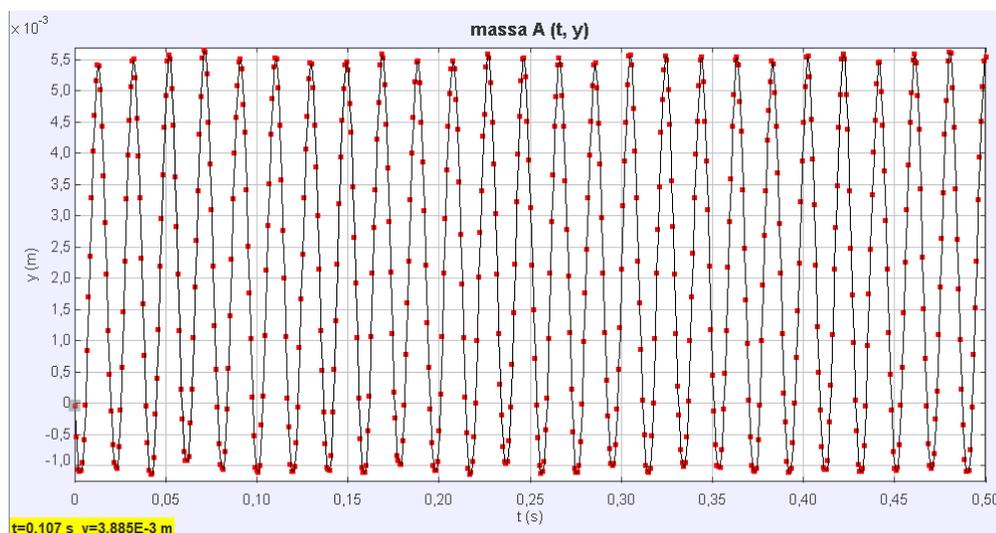
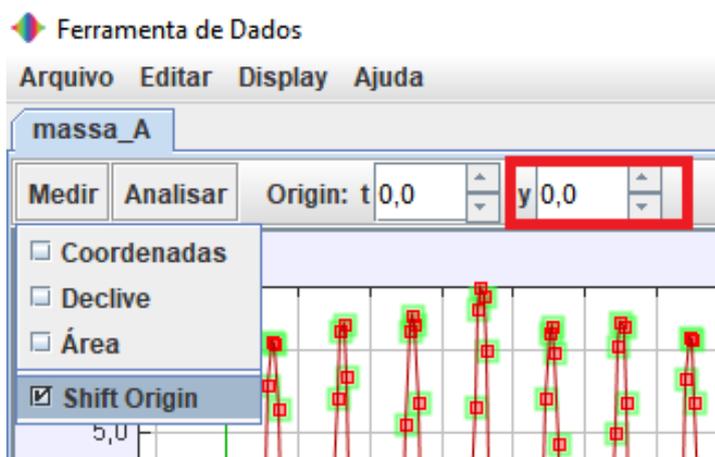
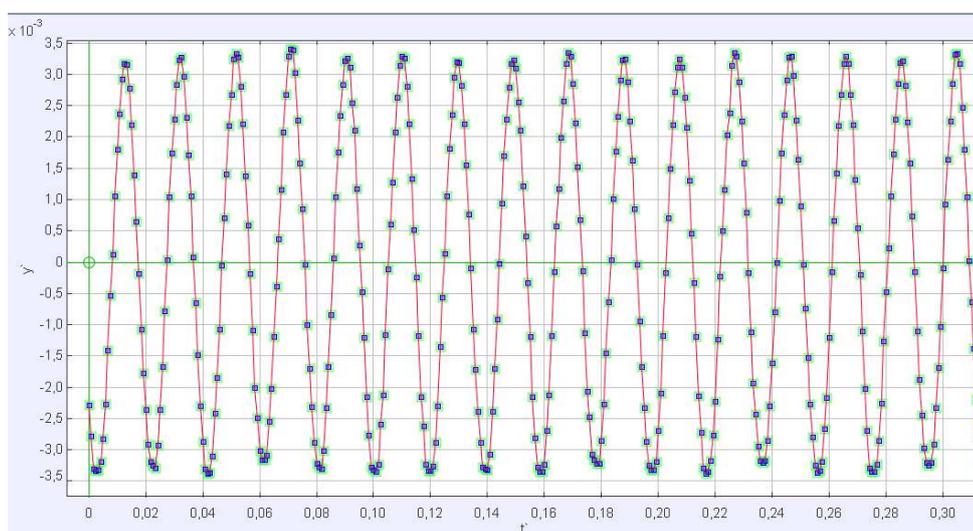


Figura 4.4: Gráfico  $y \times t$  obtido utilizando o “Ponto de Massa” de trajetória automática.

7. Clicando com o botão direito do mouse dentro da área do gráfico  $y \times t$  irá aparecer um menu. Ao clicar em “Analisar...”, irá abrir a janela “Ferramenta de Dados”. Nesta janela, nós deslocamos o gráfico na direção vertical. Para fazê-lo, basta ir em *Me-dir/Shift Origin* (Fig. 4.5) e clicar nas setas da coordenada  $y$  dentro do retângulo vermelho que aparece na figura abaixo. Tentamos fazer com que as amplitudes na região positiva e negativa do eixo vertical do gráfico fossem divididas igualmente pela linha que representa eixo horizontal. Feito o deslocamento, o gráfico ficou como na Figura 4.6.



**Figura 4.5:** Forma de acessar a opção que permite realizar o deslocamento do gráfico no eixo vertical.



**Figura 4.6:** Gráfico com as novas coordenadas  $y' \times t'$  após o deslocamento vertical.  $y'$  está em metros e  $t'$  em segundos. Foi modificada a cor dos pontos.

8. Na janela “Ferramenta de dados” é possível fazer alguns tipos de ajuste de curva. Como os pontos dos nossos dados parecem uma função periódica, escolhemos o ajuste senoidal. Para acessar a opção de ajuste senoidal basta ir em *Analisar/Ajustes de Curva/Senoide*. A curva ajustada será do tipo  $y = A \text{sen}(Bt + C)$ . Um movimento harmônico simples pode ser descrito por uma função do tipo,  $y = A' \text{sen}(\omega t + \phi)$ . Comparando as duas equações,  $A = A'$  é a amplitude de oscilação do movimento,  $B = \omega$  é a frequência angular,  $C = \phi$  é a constante de fase e  $t$  é o tempo.
9. O parâmetro  $A$  foi estimado apenas analisando as amplitudes do gráfico gerado com a trajetória automática. Ao observar o gráfico gerado, percebe-se visualmente que a amplitude de oscilação fica entre os valores  $3,0 \times 10^{-3}$  e  $3,5 \times 10^{-3}$ . Assim, percebemos que 0,0033 é um bom valor para o parâmetro  $A$ . Este parâmetro está em metros.
10. Para estimar o parâmetro  $B$ , calculamos o período médio de oscilação,  $T_M$ , o que é feito obtendo o tempo do último e primeiro pico (isso é feito para pegar o maior número

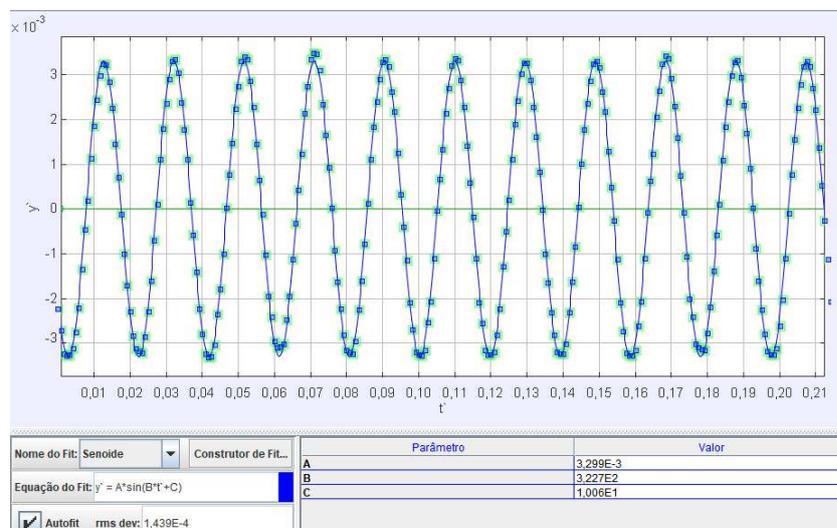
de oscilações possível) e dividindo pelo número de oscilações (número de picos menos um). Em seguida, usamos a Equação 4.1 para estimar o parâmetro  $B$ . Onde  $T$  é o período de oscilação de um movimento harmônico simples e  $\omega$  é a frequência angular.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (4.1)$$

$$T_M = \frac{0,5 - 0,0125}{25} = 0,0195 \text{ s,}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{0,0195} \approx 322,2 \text{ rad/s} = B.$$

11. O parâmetro  $C$  não é essencial para a nossa análise física, contudo foi preciso estimar o seu valor para o ajuste da curva. Ele foi ajustado manualmente na janela de ajuste de curva, no campo “Valor”. Para um melhor ajuste, pode ser usado o incremento em 1% ao invés de 10%. Após ajuste manual, obtivemos o valor 10,1 como um bom ajuste para o parâmetro  $C$ . Contudo este parâmetro pode ser ajustado a partir de  $C = 0$ , desta forma será encontrado um valor menor para a constante de fase.
12. Após os parâmetros terem sido estimados, o ajuste da curva foi feito clicando em *Autofit*. Algumas vezes o ajuste da curva não ficou bom, tivemos que mexer novamente no *offset* em  $y$ . O gráfico teve que ser deslocado em  $y$  mais um pouco, até que ele ficasse com as amplitudes o mais simétricas possíveis em relação ao eixo horizontal. Feito isso, pressionamos o *Autofit* novamente. A curva e os parâmetros ajustados ficaram como ilustrado na Figura 4.7.



**Figura 4.7:** Gráfico  $y' \times t'$  do ponto de massa colocado no centro do pivô.  $y'$  está em metros e  $t'$  em segundos. A curva ajustada aos pontos está em azul. Foi desabilitada a visualização da linha que une os pontos. Os parâmetros após o ajuste são:  $A = 3,299E-3$  m,  $B = 3,227E2$  rad/s e  $C = 1,006E1$  rad.

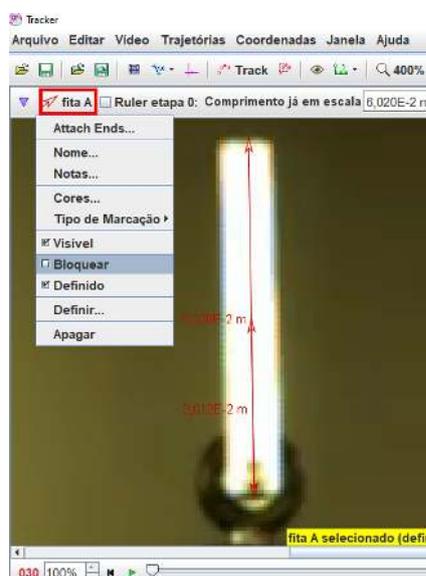
13. Os valores dos parâmetros obtidos após o ajuste da curva foram  $A = 3,299 \times 10^{-3} \text{ m}$  e  $B = 322,7 \text{ rad/s}$  e  $C = 10,06 \text{ rad}$ . Assim, conseguimos verificar que o pivô executa, em uma ótima aproximação, um movimento harmônico simples dado pela equação  $y = 3,299 \times 10^{-3} \text{ sen}(322,7t + 10,06)$ , onde  $y$  está em metros (m) e  $t$  em segundos (s).
14. A aba do ajuste foi salva como “ajuste seno”. A extensão do arquivo é .xml.
15. O projeto foi salvo como “grafico da posicao do pivô”. A extensão do arquivo é .trk.
16. Para aproveitar a calibração e o corte de vídeo feitos anteriormente, acessando *Arquivo/Salvar Como...*, o projeto foi salvo como “inercia”.

### 4.1.2 Momento de inércia e condição de estabilidade

A estabilidade do pêndulo invertido é alcançada quando, na média, o torque inercial causado pelo movimento do pivô supera o torque da força peso. A condição de estabilidade do pêndulo físico é dada pela Equação 2.33. A seguir, obteremos o momento de inércia da barra que está no vídeo Pêndulo de Kapitza 1 e verificaremos se os parâmetros do experimento satisfazem a esta condição.

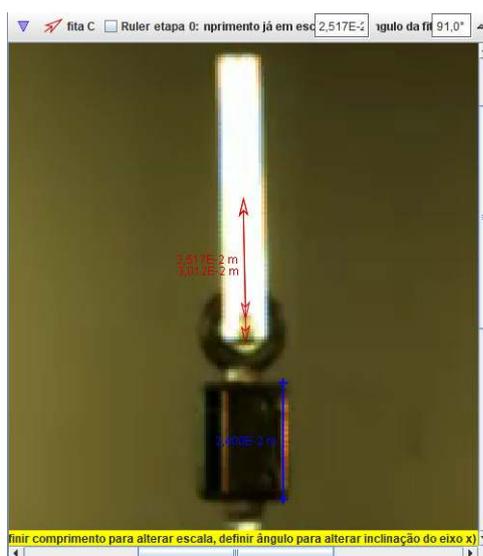
1. Começamos abrindo o arquivo “inercia” salvo na atividade anterior. Ele possui extensão .trk.
2. No quadro 30, deletamos o “Ponto de Massa” desse quadro e tiramos a visualização dos eixos de coordenadas clicando no ícone dos eixos na barra de ferramentas. Para excluir o “Ponto de Massa”, basta clicar no ponto e em seguida clicar na tecla “Del” do teclado.
3. A medida do comprimento da barra foi feita com a ferramenta “Fita Métrica”, que pode ser acessada indo *Trajetórias/Novo/Ferramentas de Medidas/Fita Métrica*, na barra de menu. Bloqueamos esta fita para que ela não se movesse. Para bloquear a “Fita Métrica”, basta clicar na “fita A”, em seguida, na barra de ferramentas, clicar em *fita A/Bloquear*.
4. Com uma segunda “Fita Métrica”, fita B, medimos da parte inferior da barra até o seu centro. A fita B também foi bloqueado. A Figura 4.8 mostra como posicionamos as fitas métricas dos dois itens anteriores. Para medir o comprimento, uma fita vai da posição inferior da barra até a superior. A outra fita tem seu comprimento definido como metade da anterior e posicionada em cima dela, essa fita tem a função de marcar o centro de massa da barra. O comprimento da barra medido com a “Fita Métrica” foi de 60,20 mm. A medida feita com o paquímetro foi de 60,00 mm. Assim, vemos que a medida com a “Fita Métrica” é bem próxima à do paquímetro.

A diferença entre elas é de 0,2 mm, o que não chega a 0,5% do valor medido com o paquímetro.



**Figura 4.8:** Fitas métricas usadas para medir o comprimento da barra e marcar seu centro de massa. No canto superior esquerdo é mostrado o menu onde é possível bloquear a “Fita Métrica A”.

- Com uma terceira “Fita Métrica”, fita C, medimos a distância do ponto de rotação da barra até o centro de massa. A Figura 4.9 mostra as duas fitas sendo usadas para medir a distância do eixo de rotação ao centro de massa. A medida do eixo de rotação ao centro de massa feita com a “Fita Métrica” foi de 25,17 mm. A medida feita com o paquímetro foi de 26,70 mm. Assim, a medida com a “Fita Métrica” ficou 6% menor que a do paquímetro.



**Figura 4.9:** Fitas métricas usadas para marcar o centro de massa e medir a distância do eixo de rotação ao centro de massa.

- Salvamos o arquivo novamente para guardar tudo o que foi feito.

7. Calculamos o momento de inércia da barra usando a Equação 2.35. Onde  $I_p$  é o momento de inércia da barra com relação a um eixo de rotação perpendicular a ela e que passa no centro do pivô,  $M$  é a massa da barra,  $L$  é seu comprimento e  $d$  é a distância entre o eixo perpendicular a barra, que passa pelo seu centro de massa e o eixo perpendicular a barra que passa pelo pivô. Observe que o furo não é considerado. Isso pode ser feito porque o diâmetro do furo é muito pequeno, sendo seu efeito no momento de inércia desprezível para os nossos cálculos. Usando as medidas obtidas,

$$I_p = \frac{0,0032 \times 0,06020^2}{12} + 0,0032 \times 0,02517^2 \approx 2,99 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

8. Em seguida verificamos se condição de estabilidade foi cumprida utilizando a Equação 2.33.

$$322,7 \times 3,299 \times 10^{-3} > \sqrt{\frac{2 \times 9,81 \times 2,99 \times 10^{-6}}{0,0032 \times 0,02517}}$$

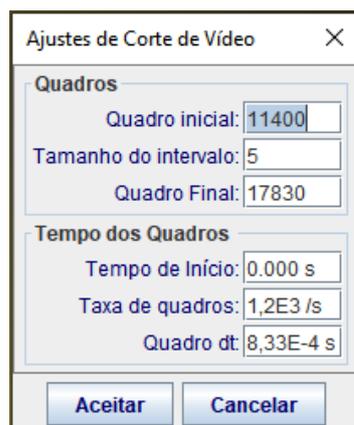
$$1,06 \text{ m/s} > 0,85 \text{ m/s}$$

A condição para a estabilidade do pêndulo invertido foi cumprida. Isso mostra que o modelo não pode ser descartado e aparentemente explica bem o fenômeno.

### 4.1.3 Aproximação para a frequência angular do movimento lento da barra

O movimento do pêndulo preso a um pivô que oscila verticalmente pode ser descrito pela soma de dois movimentos, um rápido de baixas amplitudes e um lento de altas amplitudes. O movimento lento do Pêndulo de Kapitza é aquele similar ao do pêndulo simples sob a ação apenas da gravidade. Já o rápido é tão veloz quanto o movimento do pivô. O olho humano perceberá bem o movimento lento, já o rápido, não. A Equação 2.32 é uma aproximação para a frequência angular do movimento lento do pêndulo físico,  $\omega_{lenta}^{PF}$ . A seguir compararemos o valor da frequência angular do movimento lento da barra, dado pela Equação 2.32, com o obtido através da análise do gráfico obtido com o *software Tracker*.

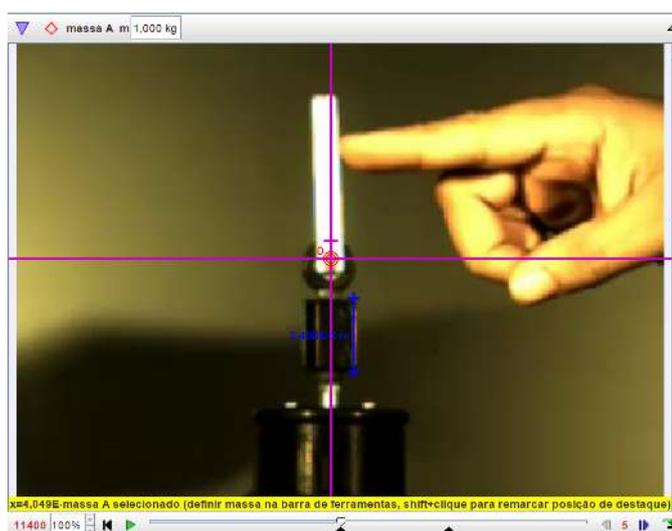
1. Ajustamos o corte de vídeo da seguinte forma: Quadro inicial, 11400; Quadro final, 17830; Tamanho do intervalo, 5 e Taxa de quadros, 1200 *frames/s* (Fig. 4.10).
2. No quadro inicial, criamos os eixos de coordenadas com a origem em cima do ponto de rotação da barra (pivô) e o giramos 90 graus para que o ângulo medido ficasse de



**Figura 4.10:** Janela “Ajustes de Corte de Vídeo” com os valores determinados para a análise.

acordo com o que nós convencionamos no capítulo anterior. (Fig. 4.11). Os eixos de coordenadas podem ser girados selecionando-os e digitando o valor do ângulo em “*ângulo a partir da horizontal*”, logo abaixo da barra de ferramentas.

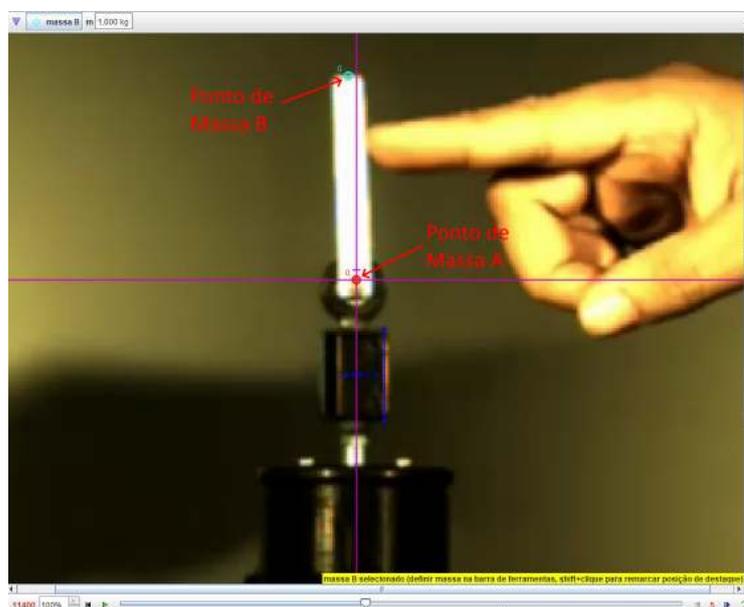
3. Para calibrar a escala, usamos o “Bastão de Medição” e definimos altura da parte retangular da base onde fica o pivô com 0,024 m (Fig. 4.11).
4. No quadro inicial, criamos um “Ponto de Massa A” de trajetória automática no ponto de rotação da barra (Fig. 4.11). Utilizamos a trajetória automática para criar os pontos nos quadros. Após finalizar os passos 2, 3 e 4, o quadro inicial dever ficar como na Figura 4.11.



**Figura 4.11:** Posicionamento dos eixos de coordenadas, “Bastão de Medição” e “Ponto de Massa A” no primeiro quadro da análise.

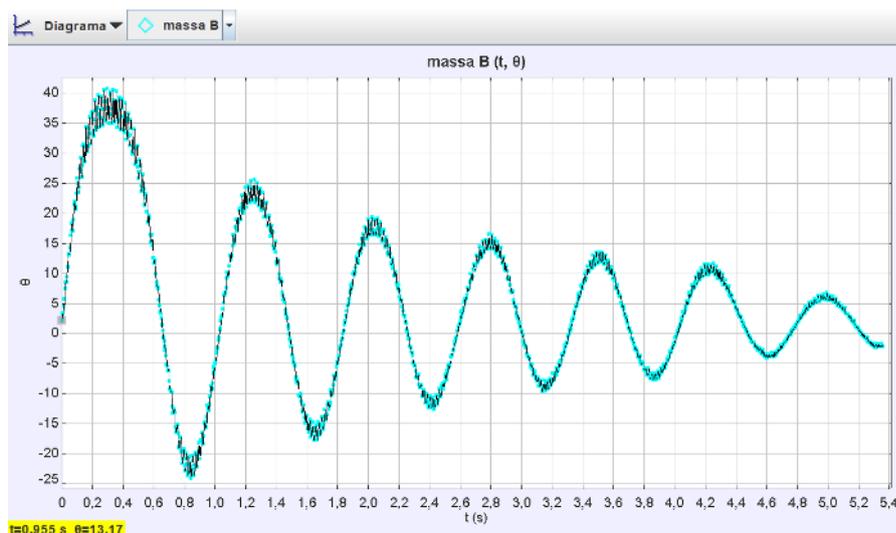
5. Para criar um referencial móvel, utilizamos os pontos de “massa A” criados no item anterior como referência. Isso pode ser feito indo em *Coordenadas/Quadro de Referência/Massa A*, na barra de menu.

- No quadro inicial, criamos um outro ponto de massa de trajetória automática na parte superior da barra, bem no centro, onde está marcado. Ele é chamado de “Ponto de Massa B”. A Figura 4.12 mostra onde criá-lo.

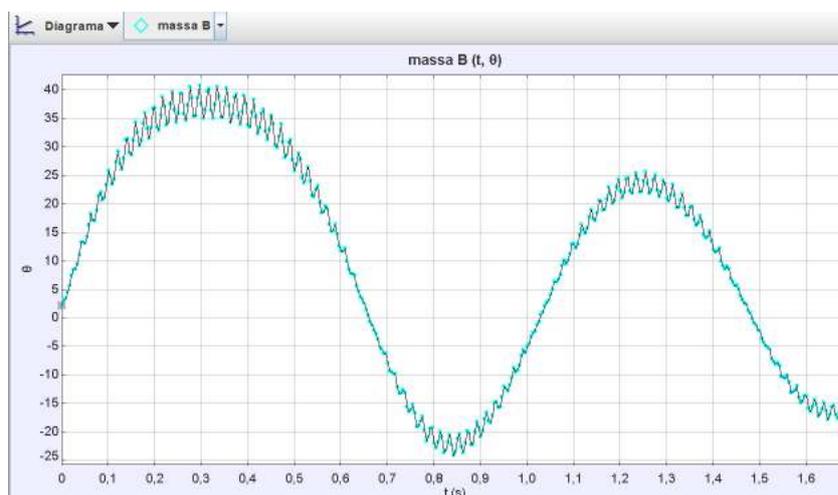


**Figura 4.12:** Posicionamento dos pontos de massa A e B no primeiro quadro da análise.

- Após clicar em “Pesquisar” na janela de trajetória automática que aparece quando é criado o “Ponto de Massa B”, o gráfico começa a ser construído. Em seguida, modificamos a coordenada do eixo vertical para  $\theta$ . Visualizamos, desta forma, o gráfico  $\theta \times t$  (Fig. 4.13). Note que a variável  $\theta$  que aparece no gráfico feito no *Tracker* corresponde à variável que denotamos por  $\varphi(t)$  ao longo do texto. No gráfico é possível visualizar pequenas amplitudes de alta frequência sobrepostas em amplitudes maiores de baixa frequência. Também conseguimos perceber o decaimento das amplitudes maiores, que revelam o caráter dissipativo de um oscilador subamortecido. A Figura 4.14 mostra o gráfico com um *zoom* que permite visualizar melhor as pequenas oscilações.
- Abrimos o ambiente “Ferramenta de Dados” para fazer análise do gráfico. Isso pode ser feito clicando com o botão direito do mouse dentro da área do gráfico  $\theta \times t$  e em seguida, em “Analisar...”
- O período médio de oscilação da barra,  $T_M$ , é dado pela diferença entre o último e primeiro picos, dividido pelo número de oscilações. Para obter o tempo dos picos, selecionamos alguns pontos nas proximidades dos picos das oscilações e analisamos os valores do tempo que aparecem destacados na tabela. Uma vez obtido o tempo desses pontos, dividimos por 6, que é o número de oscilações entre os dois pontos.



**Figura 4.13:** Gráfico  $\theta \times t$  do “Ponto de Massa B” localizado na parte superior da barra de 60 mm.  $\theta$  está em graus e  $t$  em segundos.



**Figura 4.14:** Gráfico  $\theta \times t$  do “Ponto de Massa B” localizado na parte superior da barra de 60 mm, com *zoom*.  $\theta$  está em graus e  $t$  em segundos.

$$T_M = \frac{4,9917 - 0,2958}{6} = 0,78265 \approx 0,7826 \text{ s.}$$

10. Utilizamos o resultado anterior para calcular a frequência angular da barra usando a Equação 4.1.

$$\omega_{lenta}^{PF} = \frac{2\pi}{0,78265} \cong 8,028 \approx 8,0 \text{ rad/s.}$$

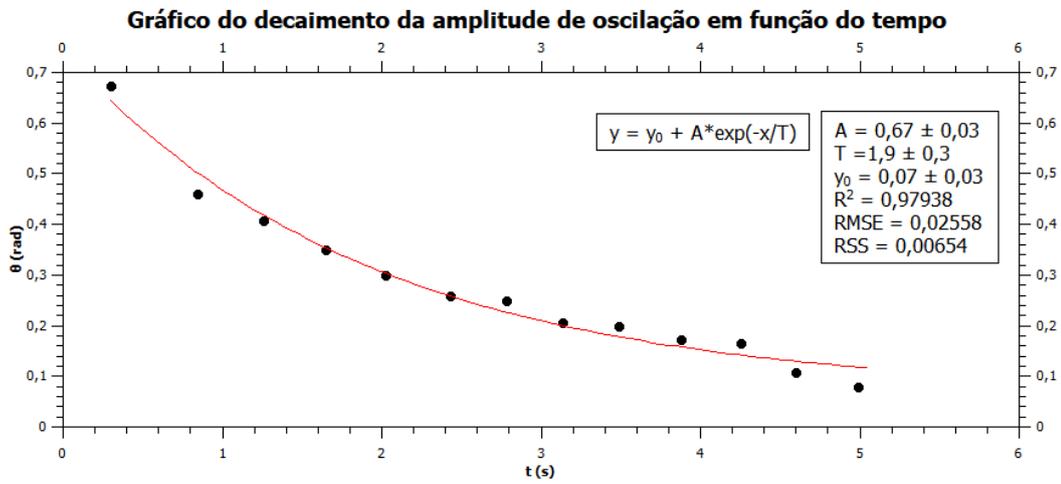
Para demonstrar que a frequência calculada com os dados experimentais é uma boa aproximação, nós verificamos se o fator de amortecimento de um oscilador subamortecido [10, p. 97] cuja a posição em função do tempo é dada por uma função do tipo da Equação 4.2, faria alguma diferença.

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega' t + \phi). \quad (4.2)$$

Onde  $A$  é a amplitude inicial do movimento,  $\gamma$  é o fator de amortecimento,  $t$  é o tempo,  $\omega'$  é a frequência angular dada pela Equação 4.3 e  $\phi$  é a constante de fase.

$$\omega' = \sqrt{(\omega_{lenta}^{PF})^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad (4.3)$$

Com os pontos máximos e mínimos do gráfico da posição angular da barra em função do tempo é possível ajustar uma curva no programa QtiPlot (Fig. 4.15).



**Figura 4.15:** Gráfico do decaimento da amplitude em função do tempo feito no QtiPlot, obtido com os pontos do gráfico da posição angular da barra, do vídeo Pêndulo de Kapitza 1. A equação obtida com o ajuste é do tipo  $y = y_0 + A * \exp(-x/T)$ .

Utilizando o parâmetro  $1/T$  obtido com o ajuste da curva, temos

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,9} s^{-1}.$$

Assim,

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{1,9}\right)^2 \approx 0,277 s^{-1}.$$

O valor da frequência que encontramos anteriormente é muito maior que  $0,277 s^{-1}$ . Portanto ele não alterará significativamente nossos resultados, de modo que podemos considerar  $\omega' = \omega_{lenta}^{PF}$ . Isso também vale para a análise do vídeo Pêndulo de Kapitza 2.

11. Utilizamos a Equação 2.32 obtido com a abordagem da média temporal para calcular a frequência angular da barra.

$$\omega_{lenta}^{PF} = \sqrt{\frac{(3,299 \times 10^{-3} \times 322,7 \times 0,0032 \times 0,02517)^2}{2 \times (2,99 \times 10^{-6})^2} - \frac{9,81 \times 0,0032 \times 0,02517}{2,99 \times 10^{-6}}},$$

$$\omega_{lenta}^{PF} \approx 12,1 \text{ rad/s.}$$

12. Podemos comparar o valor da frequência angular da barra obtido através do experimento com o valor obtido através do modelo teórico, calculando o erro relativo entre eles [47, p. 12]. Tomando o valor teórico como referência, temos a Equação 4.4.

$$\text{Erro relativo} = \frac{\text{valor experimental} - \text{valor teórico}}{\text{valor teórico}} \times 100\%, \quad (4.4)$$

$$\text{Erro relativo} = \frac{8,0 - 12,1}{12,1} \times 100\% \approx -34\%$$

Há uma discrepância muito grande entre os valores. O resultado mostra que o valor da frequência obtido no experimento está 34% abaixo do valor obtido com o modelo teórico. A seguir estão algumas possíveis causas para tal discrepância. Elas também constam no manual do professor.

- A principal causa da discrepância entre os valores está na análise de vídeo com o *software Tracker*. O valor da frequência está bem preciso, já que filmamos a 1200 fps e a frequência ficou bem próxima da medida que aparecia no *display* da bancada experimental. Contudo, o valor da amplitude do pivô não está com boa precisão e ele afeta muito o valor da frequência de oscilação da barra. O Valor da amplitude deveria ser de  $3,12 \pm 0,06$  mm, essa medida foi feita com o paquímetro já considerando uma folga no rolamento de 0,3 mm. Com a calibração feita no vídeo para obter os gráficos, dando bastante zoom, é possível medir a distância de cinco *pixels* com a “Fita Métrica”, dividindo esse valor por cinco, constata-se que um *pixel* mede aproximadamente 0,46 mm. Isso quer dizer que se errarmos um pixel na medida da amplitude do pivô, estamos com um erro maior que 10% da medida feita com o paquímetro. Nesta análise, o erro relativo entre as medidas da amplitude de oscilação do pivô feitas com o *Tracker* e com o paquímetro é de aproximadamente 6%.

Ainda, se utilizarmos no cálculo da frequência lenta, as medidas de amplitude de oscilação do pivô e o momento de inércia calculado com as medidas feitas com o paquímetro, obtemos  $\omega_{lenta}^{PF} \approx 9,67$  rad/s. Resultando em uma discrepância entre o valor experimental e o teórico de -17%. Uma filmagem com

uma resolução maior ajudaria a diminuir os erros de medição de comprimento nos quadros da videoanálise.

- A frequência dada pela Eq. 2.32 é uma aproximação para ângulos pequenos. O ângulo de oscilação da barra não é pequeno. Para o pêndulo simples, a frequência diminui conforme a amplitude de oscilação aumenta [10, p. 68-72].
- O modelo é muito simples para descrever o comportamento de um pêndulo real. Seria necessário fazer novas considerações se quisermos descrever o comportamento do pêndulo no experimento tal como ele se encontra. Por exemplo, temos folgas em componentes mecânicos, como o rolamento. O modelo não considera essas folgas.

Essas correções poderiam ser incluídas no modelo para tentar corrigir a discrepância, contudo os cálculos seriam mais complicados e fogem da proposta da atividade.

## 4.2 Análise do vídeo Pêndulo de Kapitza 2

O vídeo Pêndulo de Kapitza 2 consta no produto educacional. Os passos para a sua análise são praticamente os mesmos feitos para analisar o vídeo Pêndulo de Kapitza 1. A configuração usada no experimento foi:

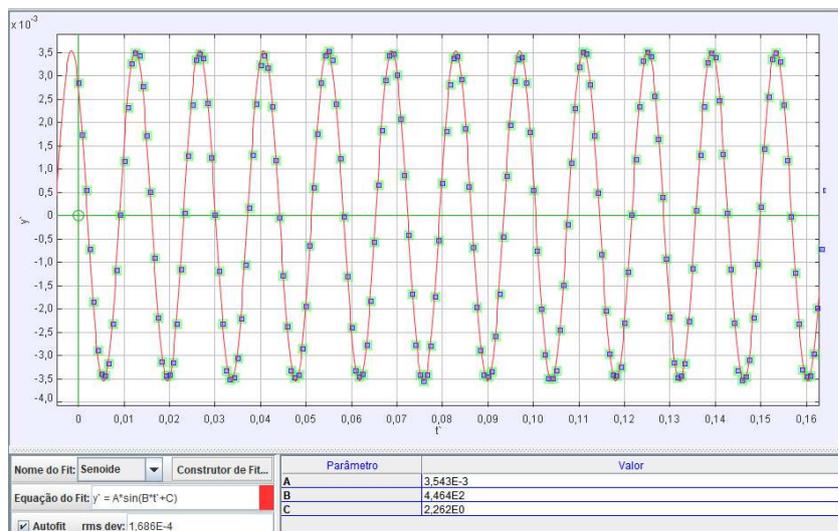
- Barra com 89,85 mm (90 mm nominal) de comprimento e massa 4,7 g.
- Acoplamento de excentricidade 3 mm.
- Gravidade 9,81 m/s<sup>2</sup>.

A seguir, apresentamos os resultados da análise.

### 4.2.1 Frequência angular e amplitude de oscilação do pivô.

O ajuste de corte de vídeo foi feito com os valores Quadro inicial: 58, Tamanho do intervalo: 1, Quadro final: 656, Tempo de início: 0 s, Taxa de quadros: 1200 fps. Os valores estimados dos parâmetros foram  $A = 0,0035$  m,  $B = 445,8$  rad/s e  $C = 2,188$  rad. Após estimados os parâmetros do ajuste senoidal e apertado em *Autofit*, obtivemos o gráfico mostrado na Fig. 4.16.

Após o ajuste, os valores da amplitude de oscilação, frequência angular e constante de fase foram, respectivamente,  $A = 3,543 \times 10^{-3}$  m,  $B = 446,4$  rad/s e  $C = 2,262$  rad. Assim, o movimento do pivô é, em ótima aproximação, um MHS que pode ser descrito pela equação  $y = 3,543 \times 10^{-3} \text{sen}(446,4t + 2,262)$ , onde  $y$  está em metros (m) e  $t$  em segundos (s).



**Figura 4.16:** Gráfico  $y' \times t'$  do ponto de massa colocado no centro do pivô.  $y'$  está em metros e  $t'$  em segundos. A função senoidal está ajustada aos pontos. Os parâmetros após o ajuste são:  $A = 3,543E-3$  m,  $B = 4,464E2$  rad/s e  $C = 2,262E0$  rad.

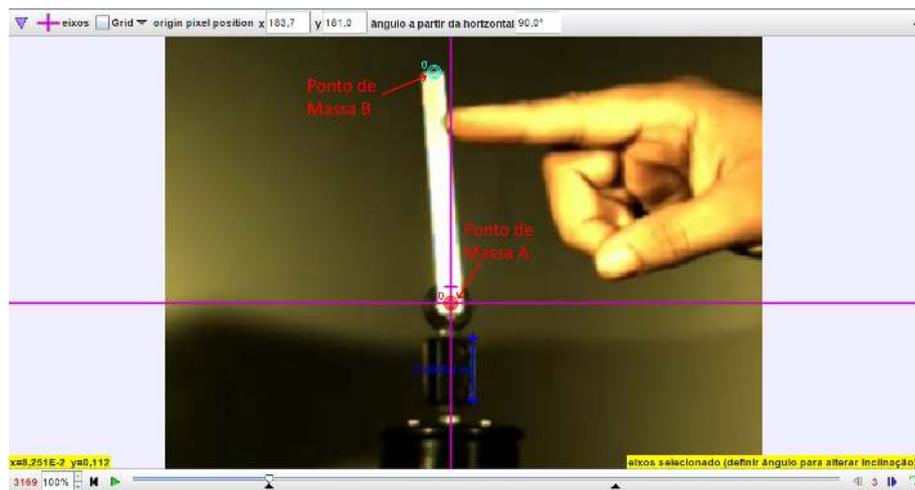
### 4.2.2 Momento de inércia e condição de estabilidade

O comprimento da barra medido com a “Fita Métrica” foi de 89,22 mm. A medida feita com o paquímetro foi de 89,85 mm. A medida com a “Fita Métrica” ficou muito boa, a diferença em relação à do paquímetro é de -0,63 mm, o que não chega a 1%. A medida do centro do pivô ao centro de massa feita com a “Fita Métrica” foi de 40,14 mm. Com o paquímetro, essa medida foi de 41,00 mm. Neste caso, a diferença entre os valores chega a 2%. O valor do momento de inércia encontrado, substituindo os valores dos parâmetros  $M = 0,0047$  kg,  $L = 0,08922$  m e  $d = 0,04014$  m na Equação 2.35, encontramos o valor do momento de inércia,  $I_p \approx 1,069 \times 10^{-5}$  kg · m<sup>2</sup>.

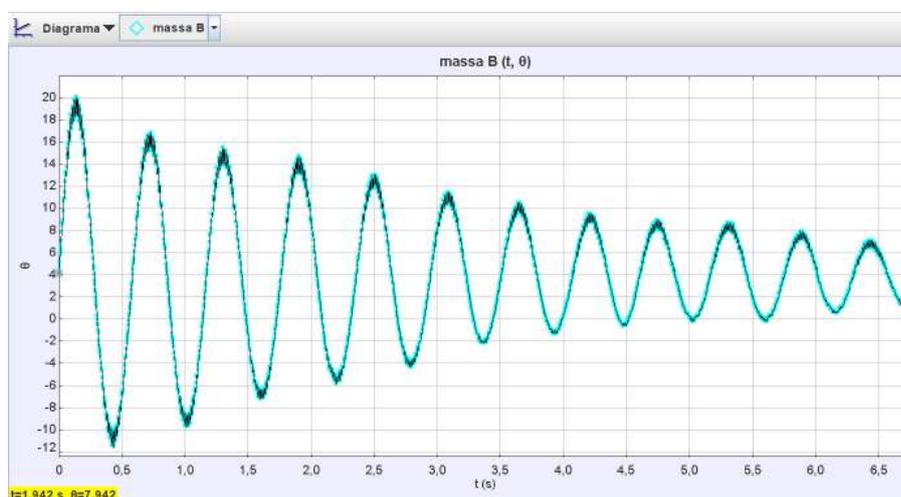
Na condição de estabilidade (Eq. 2.33), após substituir os valores encontrados, obtivemos a relação  $1,58$  m/s >  $1,05$  m/s. Esse resultado corrobora para que a condição de estabilidade prevista pelo modelo esteja correta. Aparentemente o modelo explica bem fenômeno.

### 4.2.3 Aproximação para a frequência angular do movimento lento da barra

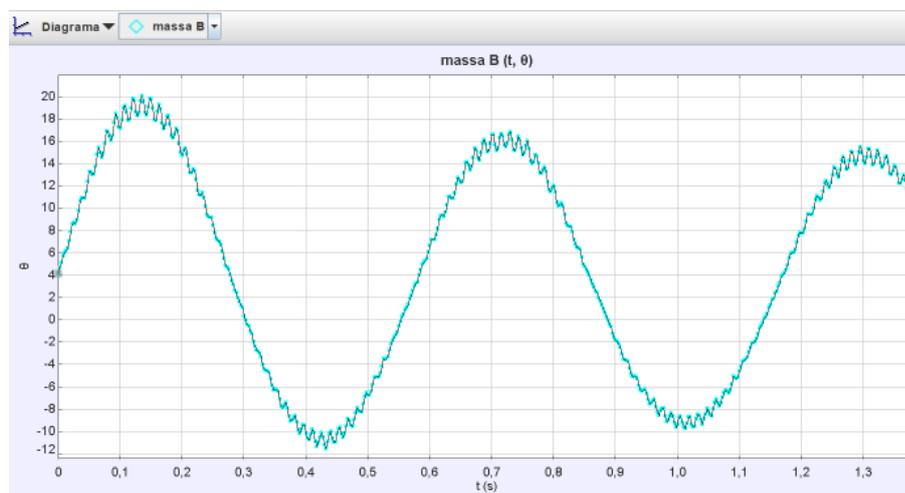
O ajuste de corte de vídeo foi feito com os valores Quadro inicial: 3169, Tamanho do intervalo: 3, Quadro final: 11233, Tempo de início: 0s, Taxa de quadros: 1200 fps. O posicionamento dos eixos de coordenadas, “Bastão de Medição” e dos pontos de massa no primeiro quadro da análise são mostrados na Figura 4.17. O gráfico  $\theta \times t$  obtido após a trajetória automática do “Ponto de Massa B” é mostrado na Fig. 4.18. A Figura 4.19 mostra o gráfico com um *zoom* que permite visualizar melhor as pequenas oscilações.



**Figura 4.17:** Posicionamento dos eixos de coordenadas, “Bastão de Medição” e dos pontos de massa A e B no primeiro quadro da análise.



**Figura 4.18:** Gráfico  $\theta \times t$  do “Ponto de Massa B” localizado na parte superior da barra de 90 mm.  $\theta$  está em graus e  $t$  em segundos.



**Figura 4.19:** Gráfico  $\theta \times t$  do “Ponto de Massa B” localizado na parte superior da barra de 90 mm, com *zoom*.  $\theta$  está em graus e  $t$  em segundos.

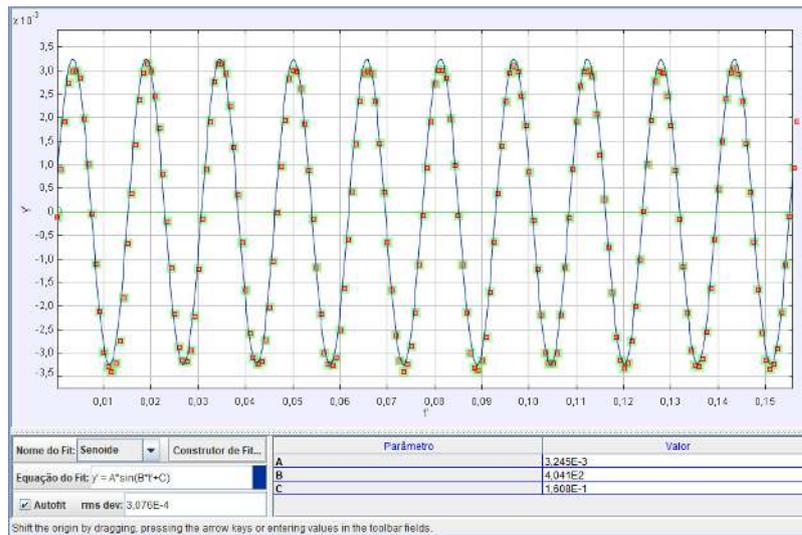
Conforme visto na Figura 4.18, entre o primeiro e último pico temos onze oscilações. O tempo do ponto máximo do primeiro pico foi de 0,1350s e o do último pico foi de 6,4275s. Com esses valores, obtivemos um período médio,  $T_M \approx 0,5720454$ s. A frequência angular do movimento lento da barra foi de  $\omega_{lenta}^{PF} \approx 11,0$  rad/s. Calculando a frequência angular substituindo os parâmetros,  $A = 0,003543$  m,  $\omega = 446,4$  rad/s,  $d = 0,04014$  m,  $I_p = 1,069 \times 10^{-5}$  kg · m<sup>2</sup>,  $M = 0,0047$  kg e  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> na Equação 2.32, obtivemos  $\omega_{lenta}^{PF} \approx 14,7$  rad/s. Obtivemos um erro relativo de -25%. Isso significa que o valor da frequência obtido no experimento está 25% abaixo em relação ao que foi obtido com o modelo teórico.

Os motivos para a discrepância entre os valores são os mesmos mencionados na atividade com o vídeo Pêndulo de Kapitza 1. A diferença é que agora o erro é menor. Isso acontece devido a barra do vídeo Pêndulo de Kapitza 2 iniciar com um deslocamento angular menor. Assim, ela tende a ficar mais próxima da aproximação para ângulos pequenos dada pela Equação 2.32.

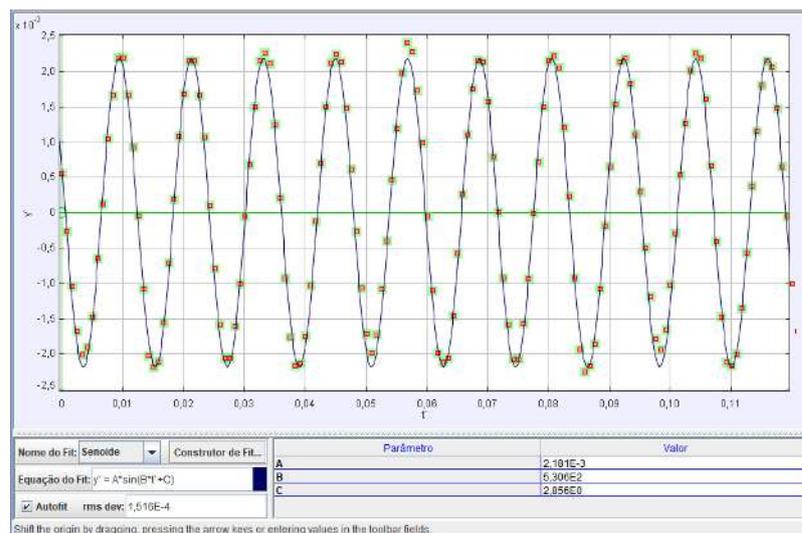
Nesta análise, o erro relativo entre as medidas da amplitude de oscilação do pivô feitas com o *Tracker* e com o paquímetro é de aproximadamente 13,6%. Ainda, se utilizarmos no cálculo da frequência lenta, as medidas de amplitude de oscilação do pivô e o momento de inércia calculado com as medidas feitas com o paquímetro, obtemos  $\omega_{lenta}^{PF} \approx 11,1$  rad/s. Resultando em uma discrepância entre o valor experimental e o teórico de aproximadamente -1%. Uma filmagem com uma resolução maior ajudaria a diminuir os erros de medição de comprimento nos quadros da videoanálise.

### 4.3 Discussão de outros resultados

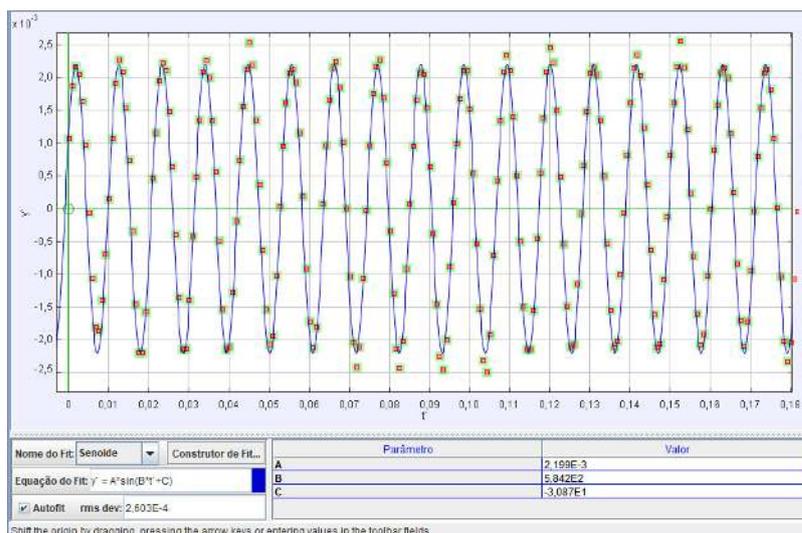
A seguir serão apresentadas comparações entre alguns resultados obtidos utilizando medidas feitas com e sem a utilização do *software Tracker*. Apesar de termos disponibilizados dois vídeos no produto educacional, devido a impossibilidade de usar o rastreamento automático para obter o gráfico de oscilação da barra, nós obtivemos o de oscilação do pivô analisando alguns outros vídeos. Na Figura 4.20 temos uma amplitude de 3,245 mm e frequência angular de 404,1 rad/s. Na Figura 4.21 temos uma amplitude de 2,181 mm e frequência angular de 530,6 rad/s. Na Figura 4.22 temos uma amplitude de 2.199 mm e frequência angular de 584,2 rad/s.



**Figura 4.20:** Gráfico  $y' \times t'$  do pivô com a barra de 90 mm e acoplamento de 3 mm de excentricidade.  $y'$  está em metros e  $t'$  em segundos. Os parâmetros do ajuste da curva são  $A = 3,245E-3$  m,  $B = 4,041E2$  rad/s e  $C = 1,608E-1$  rad.



**Figura 4.21:** Gráfico  $y' \times t'$  do pivô com a barra de 60 mm e acoplamento de 1,5 mm de excentricidade.  $y'$  está em metros e  $t'$  em segundos. Os parâmetros do ajuste da curva são  $A = 2,181E-3$  m,  $B = 5,306E2$  rad/s e  $C = 2,856E0$  rad.



**Figura 4.22:** Gráfico  $y' \times t'$  do pivô com a barra de 60 mm e acoplamento de 1,5 mm de excentricidade.  $y'$  está em metros e  $t'$  em segundos. Os parâmetros do ajuste da curva são  $A = 2,199E-3$  m,  $B = 5,842E2$  rad/s e  $C = 3,087E1$  rad.

Nós também anotamos os valores das frequências de oscilação do pivô que apareciam no *display* quando filmamos os experimentos. Na Tabela 4.1 são mostrados os valores obtidos tanto com o *Tracker* quanto visualizando o *display*, bem como o erro relativo entre essas medidas. Os valores que apareciam no *display* foram arredondados devido à variação do valor. Dividindo por  $2\pi$  o valor do parâmetro  $B$  (frequência angular) que aparece nos gráficos de oscilação do pivô obtidos com o *Tracker*, obtemos o valor da frequência em Hertz.

**Tabela 4.1:** Tabela com os valores das frequências de oscilação do pivô obtidos com o *Tracker*, com a visualização do *display* e o erro relativo entre as medidas.

Frequência no <i>Tracker</i> (Hz)	Frequência no <i>display</i> (Hz)	Erro relativo %
53	51	-3,8
71	73	2,8
64	64	0
84	86	2,4
93	94	1,1

Nós obtivemos a amplitude de oscilação do pivô realizando medidas com um paquímetro. Foram realizadas medidas tanto com o acoplamento de excentricidade 3 mm quanto com o de 1,5 mm montados. Foram medidos os máximos e mínimos que o cilindro do garfo escocês alcançava ao girar o acoplamento pela paleta. A amplitude de oscilação é a metade da diferença entre a medida máxima e mínima. Foram realizadas cinco medidas para cada acoplamento. As tabelas 4.2 e 4.3 mostram os valores obtidos. A Figura 4.23 mostra como foi realizada um das medidas.

**Tabela 4.2:** Medidas feitas com o acoplamento de excentricidade 1,5 mm montado.

Máximo (mm)	Mínimo (mm)	Amplitude (mm)
5,40	2,70	1,350
5,60	2,70	1,450
5,45	2,65	1,400
5,60	2,55	1,525
5,55	2,65	1,450

**Tabela 4.3:** Medidas feitas com o acoplamento de excentricidade 3 mm montado.

Máximo (mm)	Mínimo (mm)	Amplitude (mm)
21,00	15,55	2,725
21,00	15,30	2,850
21,05	15,30	2,875
21,00	15,35	2,825
21,10	15,50	2,800



**Figura 4.23:** Medição realizada com o paquímetro para obter a amplitude de oscilação do pivô.

Utilizando os valores obtidos, calculamos a média,  $\langle x \rangle$  (Eq. 4.5) e o desvio padrão,  $\sigma$  (Eq. 4.6) da amplitude de oscilação. Onde  $x_i$  é o valor de cada medida e  $n$  é o número de medidas.

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (4.5)$$

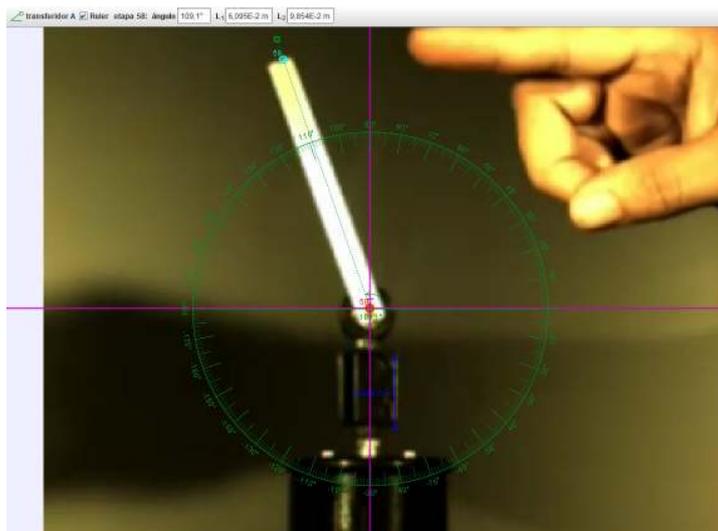
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n - 1}} \quad (4.6)$$

Assim, obtivemos para o acoplamento de excentricidade 1,5 mm uma amplitude média de  $\langle A_P \rangle = (1,44 \pm 0,07)$  mm. Já para o de 3 mm, obtivemos uma amplitude média de  $\langle A_P \rangle = (2,82 \pm 0,06)$  mm. Os valores de amplitude do pivô obtidos com o *Tracker* na

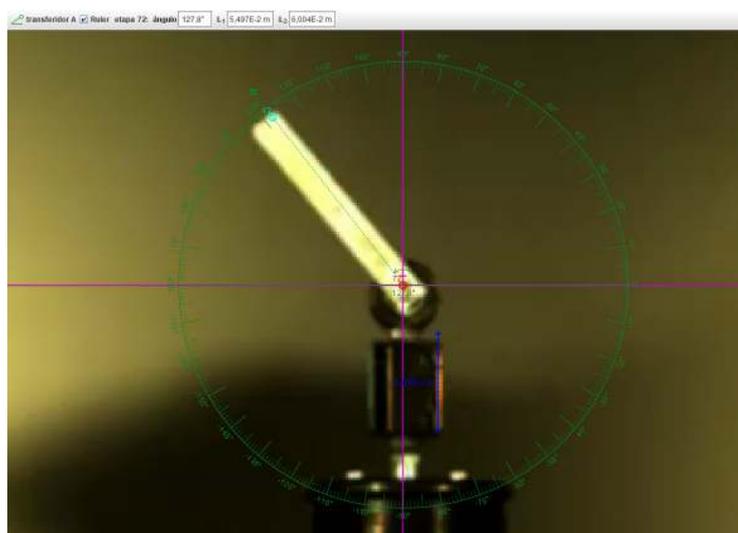
análise dos vídeos Pêndulo de Kapitza 1 e 2 foram, respectivamente,  $A_{T1} = 3,299$  mm e  $A_{T2} = 3,543$  mm. Já na Figura 4.20, temos  $A_{T3} = 3,245$  mm. Considerando que dois Algarismos significativos representam bem as medidas do experimento, devido a possíveis erros em calibração de escala, adotando a média das três amplitudes e o desvio padrão dessas medidas como incerteza, obtemos a amplitude obtida no *software Tracker* com o valor de  $\langle A_T \rangle = (3,4 \pm 0,2)$  mm. Para o acoplamento de excentricidade 1,5 mm, de acordo com as figuras 4.21 e 4.21, temos  $A'_{T1} = 2,181$  mm e  $A'_{T2} = 2,199$  mm. Desta forma, temos uma amplitude média para o acoplamento de excentricidade 1,5 mm de  $\langle A'_T \rangle = (2,2 \pm 0,1)$  mm.

Foi verificado que um dos motivos da discrepância entre os valores obtido com o *Tracker* e com o paquímetro era uma folga no anel interno do rolamento. Após realizar algumas medidas com o paquímetro, foi identificado 0,3 mm de folga. Sendo assim, podemos acrescentar esse valor às médias que foram obtidas com as medidas feitas com o paquímetro. Portanto as novas medidas de amplitude são  $\langle A_{P'} \rangle = (3,12 \pm 0,06)$  mm, utilizando o acoplamento com excentricidade de 3 mm e  $\langle A'_{P'} \rangle = (1,77 \pm 0,07)$  mm com o acoplamento de excentricidade 1,5 mm. Neste caso, os valores tornam-se mais próximos, mas ainda não há uma interseção entre eles.

Durante a análise, percebemos que o “Ponto de Massa B”, utilizado para rastrear o movimento lento da barra, sai da posição enquanto ela oscila em torno da vertical. Ele faz um pequeno deslocamento para à direita, quando a barra está à esquerda do eixo vertical e para a esquerda, quando ela está à direita do eixo. Conforme a barra volta para sua posição de equilíbrio estável, o ponto vai retornando para o centro. As figuras 4.24 e 4.25 mostram a medição do ângulo quando o ponto faz seu maior desvio nas barras de 90 mm e 60 mm. Essa medida angular foi comparada com a que foi feita quando o ponto encontrava-se no centro. As medidas foram feitas no *software Tracker*, com a ferramenta “Transferidor”. Os ângulo máximos medidos entre a posição do ponto central e o ponto com desvio foram de aproximadamente  $1^\circ$  e  $2^\circ$  para as barras de 90 mm e 60 mm, respectivamente.



**Figura 4.24:** Medição do desvio angular máximo do “Ponto de Massa B” em relação à posição do ponto de massa criado inicialmente para realizar a trajetória automática na barra de 90 mm.



**Figura 4.25:** Medição do desvio angular máximo do “Ponto de Massa B” em relação à posição do ponto de massa criado inicialmente para realizar a trajetória automática na barra de 60 mm.

Apesar desses pequenos desvios, as discrepâncias não são suficientes para alterar os resultados obtidos nesse trabalho.

## 4.4 Aplicação do produto educacional

A fim de aplicarmos o produto educacional, decidimos criar uma oficina. A divulgação foi feita através do compartilhamento do cartaz mostrado na Figura 4.26 e por e-mail. O cartaz possuía um link que levava a um formulário para inscrição na oficina. No formulário era possível acessar o vídeo da bancada experimental Pêndulo de Kapitza em funcionamento. O objetivo era mostrar o fenômeno para os alunos e despertar interesse neles. O nosso público alvo foram professores do ensino médio e alunos do ensino superior que já

tinham cursado a disciplina de física ondulatória. Devido à pandemia de COVID-19, a oficina ocorreu na modalidade EaD (Ensino à Distância) e teve duração de quatro horas, que foram divididas em dois dias. Dois dias antes da primeira aula, disponibilizamos um link para que os alunos pudessem acessar uma pasta no *Google Drive* que continha o manual para o uso do *Tracker*, uma atividade pedagógica com videoanálise e o vídeo Pêndulo de Kapitza 1.

Foram feitas duas sequências de slides para apresentar o conteúdo aos alunos nos dois dias de oficina. Na primeira sequência haviam 25 slides, na segunda 26. Nas duas sequências tinham figuras, equações, links para visualização de vídeos e gráficos feitos no *software Geogebra*. A primeira aula foi ministrada via plataforma *Google Meet*, no dia 16 de Março de 2022 (Fig. 4.27). Começamos falando sobre o que é o Pêndulo de Kapitza e mostrando o vídeo da bancada experimental que construímos. Após a visualização do fenômeno, revisamos alguns conceitos como torque, referencial inercial e não inercial, pêndulo simples e pêndulo físico. Em seguida, modelamos o pêndulo preso a um pivô que oscila verticalmente e obtivemos a equação exata para o movimento do pêndulo. Após a modelagem, iniciamos a atividade pedagógica utilizando videoanálise com o *software Tracker*. Essa atividade pedagógica consiste em um roteiro com atividades de videoanálise no vídeo Pêndulo de Kapitza 1. Ela consta no material instrucional (Apêndice B). Conseguimos obter gráfico da posição do pivô e, através do ajuste senoidal, obtivemos a amplitude de oscilação e a frequência angular do seu movimento. Nesse mesmo dia, realizamos a segunda parte tarefa que consistia em realizar medições na barra para calcular seu momento de inércia. Esses parâmetros foram utilizados para verificar a condição de estabilidade do pêndulo. Os alunos fizeram os cálculos depois, pois o tempo da oficina já estava perto do limite estipulado de duas horas. Deixamos os últimos cinco minutos para discutir sobre como foi o andamento da aula. Os alunos falaram que acharam o tema interessante e que estavam gostando de utilizar o *software Tracker*.

O segundo dia de oficina ocorreu em 18 de Março de 2022 (Fig. 4.28). Por motivos técnicos, a aula foi ministrada via plataforma *Zoom*. Começamos fazendo uma revisão do conteúdo visto na aula anterior e iniciamos a abordagem via média temporal para modelagem do fenômeno. Em seguida, nós fizemos a segunda atividade. Nesta atividade de videoanálise nós obtivemos o gráfico de posição angular da barra em função do tempo e através dele estimamos o período médio e a frequência angular do movimento. Em seguida este valor foi comparado com o valor teórico da frequência lenta obtida via abordagem da média temporal. O *software Tracker* de uma das alunas travou no meio da construção do gráfico de oscilação da barra. Devido ao tempo, ela optou por acompanhar a aula sem realizar a atividade para depois fazer sozinha. Chegamos a calcular o período médio e a frequência angular da oscilação da barra, mas a comparação com a frequência do modelo ficou para que os alunos fizessem depois devido ao tempo.

Os alunos interagiram pouco durante o ensino da parte conceitual. Isso mudou quando

começamos a fazer as tarefas com o *software Tracker*. Uma das alunas teve dificuldade em entender como o *software* realiza as medidas. Foi explicado a ela sobre a calibração da escala feita no programa para que pudéssemos realizar medidas coerentes com a escala do nosso experimento. Os alunos acharam interessante o estudo do fenômeno e a bancada experimental. Eles gostaram de aprender a fazer videoanálise com o *software Tracker* e acharam que os gráficos ficaram com uma resolução muito boa. Ficaram impressionados quando viram o recurso de trajetória automática do *Tracker* construindo os gráficos do movimento do pivô e da barra. Graças à filmagem feita a 1200 fps eles puderam visualizar bem, no gráfico de oscilação da barra, a composição dos dois movimentos, um rápido de baixa amplitude e um lento de alta amplitude. Nós percebemos que tempo para a realização das atividades não ficou ideal, pois nos dois dias algumas cálculos tiveram que ser feitos depois. Por isso no material instrucional estipulamos um tempo que consideramos ideal para realizar cada tarefa.



Figura 4.26: Cartaz de divulgação da Oficina Pêndulo de Kapitza.



Figura 4.27: Primeira sequência de slides. Aula via *Google Meet*.

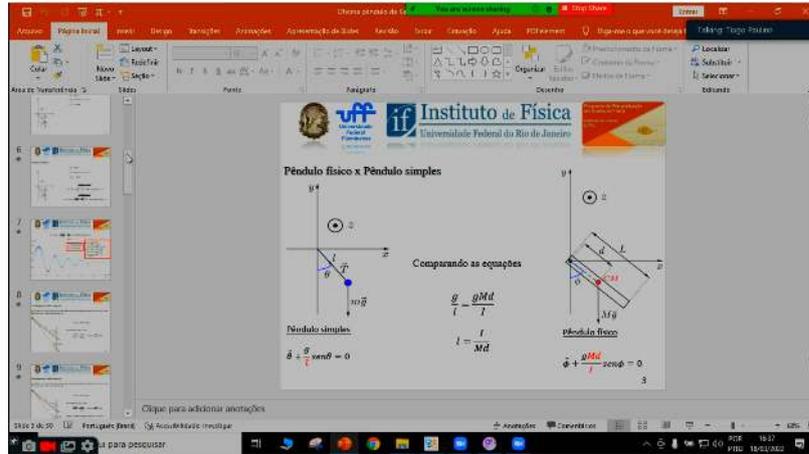


Figura 4.28: Segunda seqüência de slides. Aula via Zoom.

## Capítulo 5

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa dissertação estudamos o fascinante fenômeno do Pêndulo de Kapitza e exploramos a sua potencialidade para o ensino de física. Como vimos, este fenômeno consiste em conseguirmos equilibrar um pêndulo invertido a partir de rápidas oscilações de seu suporte sem necessidade de controle eletrônico. Discutimos uma modelagem teórica na qual pudemos explorar as duas escalas de tempo do fenômeno, em que o pivô tem um período de oscilação muito menor que o período de oscilação da barra em torno da vertical. Ainda na modelagem, conseguimos extrair informações importantes como a causa da estabilidade do pêndulo e uma aproximação para a condição de estabilidade do mesmo quando utilizamos o referencial do pivô, um referencial não inercial, para modelar o fenômeno.

Para auxiliar os professores em aulas sobre o Pêndulo de Kapitza, nós desenvolvemos um material instrucional que possui links que dão acesso a arquivos STLs para impressão 3D e um *script* em Arduino para a construção de uma bancada experimental que nós desenvolvemos. A mesma é feita com peças impressas por uma impressora 3D. Através dos *links* também é possível acessar dois vídeos filmados a 1200 fps, dois roteiros de atividades de vídeo análise e um manual para o uso do *Tracker* separados. No material instrucional constam o manual para o uso do *Tracker*, o gabarito das atividades de videoanálise e instruções para construção e montagem de um experimento de baixo custo em que é utilizada uma máquina de cortar cabelo e da bancada experimental feita com peças impressas.

A bancada experimental feita com peças impressas por uma impressora 3D, que nós chamamos de Bancada Experimental Pêndulo de Kapitza, possui uma eletrônica baseada em Arduino que permite a visualização das frequências de oscilação do pivô em tempo real. A bancada experimental permite a mudança de frequência e de amplitude de oscilação do pivô. A mudança de frequência é feita ajustando o potenciômetro da placa PWM e a mudança de amplitude de oscilação é feita trocando o acoplamento com excentricidade diferente. Foram feitos dois acoplamentos, um com excentricidade de 1,5 mm e outro com 3,0 mm. A bancada experimental Pêndulo de Kapitza que construímos apresentou um comportamento satisfatório tanto em relação à visualização do fenômeno quanto em

relação às medidas de frequência que aparecem no *display*. O experimento de baixo custo feito com uma máquina de cortar cabelo é uma alternativa muito interessante para quem quer gastar pouco com o experimento e mesmo assim conseguir visualizar o fenômeno. Essa proposta também é interessante devido à sua facilidade de montagem.

Os dois experimentos foram apresentados em vídeo, em uma oficina sobre o pêndulo de Kapitza. Os alunos ficaram bem impressionados e curiosos em relação ao fenômeno. A atividade de videoanálise proposta com o vídeo Pêndulo de Kapitza 1 foi aplicada na referida oficina. Os alunos gostaram muito de aprender a mexer no *software Tracker* e a fazer videoanálise. Percebemos que a videoanálise também foi um fator motivador para que os alunos participassem da oficina. Alguns alunos já haviam tido contato com a videoanálise.

Através da videoanálise conseguimos obter ótimos gráficos, tanto para o movimento do pivô quanto para o movimento da barra, ao analisar os dois vídeos que constam no produto. Conseguimos verificar que o pivô executa, com ótima aproximação, um movimento harmônico simples. Apesar do pequeno desvio do ponto que descreve o movimento angular da barra, os gráficos mostram claramente as características principais do fenômeno. Em especial, vemos que há oscilações em torno da posição vertical para cima, indicando que conseguimos de fato transformar o equilíbrio em geral instável do pêndulo invertido em equilíbrio estável. Além disso, podemos observar o amortecimento do movimento oscilatório da barra em torno da posição de equilíbrio devido ao atrito da barra com o ar e das partes móveis do rolamento. Também conseguimos ver oscilações de pequenas amplitudes de alta frequência sobrepostas com grandes amplitudes de baixa frequência. As condições de estabilidade foram cumpridas conforme previsto no modelo. Vimos também que as medidas realizadas com as ferramentas do *software Tracker* apresentaram-se boas se comparadas com as realizadas com o paquímetro. Contudo os valores da frequência lenta da barra ficaram mais próximos do valor experimental quando utilizamos as medidas feitas com o paquímetro. Apesar da discrepância obtida entre o valor experimental e o teórico com as medidas obtidas na videoanálise, nós conseguimos precisão suficiente para capturar os aspectos essenciais do fenômeno.

Antes de finalizarmos este capítulo, gostaríamos de deixar sugestões que podem ser exploradas com o material que disponibilizamos. Com a bancada experimental Pêndulo de Kapitza, as duas amplitudes de oscilação do pivô podem ser exploradas para obter informações qualitativas do fenômeno em aulas presenciais. A variação da rotação do motor através do controle da placa PWM proporciona a flexibilidade de explorar diversas frequências de oscilação do pivô. Desta forma, podem ser feitas análises qualitativas em sala de aula. Um outro aspecto que pode ser explorado é a conversão do movimento circular em linear realizado por componentes mecânicos da bancada experimental. Seria interessante mostrar aos alunos como pode ser feita a transformação desses movimentos em uma aula de cinemática. Com o experimento de baixo custo, alguns cumprimentos

um pouco maiores de barra podem ser explorados para visualizar melhor as oscilações em torno da posição de equilíbrio estável. Tanto a bancada experimental Pêndulo de Kapitza quanto o experimento de baixo custo podem ser apresentados a alunos do ensino médio e superior em aulas que exploram o caráter qualitativo do fenômeno.

Por fim, acreditamos que o produto educacional que consta nesta dissertação será útil em aulas de mecânica newtoniana e física ondulatória para cursos do ensino superior, possibilitando que o professor trabalhe em um fenômeno instigante e concreto diversos conceitos sutis e abstratos como, por exemplo, referenciais não inerciais. Nosso produto educacional pode também ser usado em sala de aula do ensino médio, de uma forma qualitativa, para motivar o engajamento dos estudantes e o interesse no estudo da física. Em especial, a montagem que apresentamos empregando uma máquina de cortar cabelo é particularmente adequada para este propósito, pois mostra o fenômeno de forma simples. Para além disso, como vimos é possível fazer uma boa análise quantitativa com os vídeos em câmera lenta da bancada experimental Pêndulo de Kapitza, explorando conceitos físicos bem interessantes, como referencial não inercial, equilíbrio estável e instável, momento de inércia, dentre outros. Em aulas e oficinas que envolvam a análise quantitativa, sugerimos que o público alvo sejam alunos que já cursaram a matéria de ondulatória.

# REFERÊNCIAS

- [1] LUCHESE, T. C., O pêndulo invertido sob diferentes perspectivas, **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 40, n. 4, e4304, 2018.
- [2] TRETIAKOV, N. P.; SILVA, T. L.; FERNANDES, H. A., Pêndulo Invertido: Dinâmica Complexa num Sistema Mecânico Simples, **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 21, n. 1, Mar. 1999.
- [3] **Tracker Video Analysis and Modeling Tool**. Disponível em: <https://physlets.org/tracker/>, Acesso em: 11 de Jan. de 2022.
- [4] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M.; **Mechanics**, vol. 1, 3. ed; Traduzido por J. B. Sykes e J. S. Bell, Butterworth Heinemann, p. 93-96.
- [5] BUTIKOV, E. I., **Kapitza's Pendulum: A Physically Transparent Simple Treatment**, p. 1-20, Disponível em: <http://butikov.faculty.ifmo.ru/InvPendulumCNS.pdf>, Acesso em: 05 de Fev. de 2022.
- [6] E. I. Butikov, On the dynamic stabilization of an inverted pendulum, **American Journal of Physics**, vol. 69, p. 755–768, Jan. 2001.
- [7] NUSSENZVEIG, H. M., **Curso de física básica, 1: Mecânica**, 5. ed., São Paulo: Blücher, 2014.
- [8] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J., **Fundamentos de física: Mecânica**, vol. 1, 9. ed., Tradução e Revisão técnica: Ronaldo Sérgio de Biasi, LTC, Rio de Janeiro, RJ, 2014.
- [9] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J., **Fundamentos de física: Gravitação, ondas e Termodinâmica**, vol. 1, 9. ed., Tradução e Revisão técnica: Ronaldo Sérgio de Biasi, Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2014.
- [10] NUSSENZVEIG, H. M., **Curso de física básica, 2: fluidos, oscilações e ondas, calor**, 5. ed., São Paulo: Blücher, 2014.
- [11] BRASIL, Ministério da Educação. Parecer CNE/CES nº 1.304/2001, **Diretrizes Nacionais Curriculares para os Cursos de Física**. <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES1304.pdf>. Acesso em 14/07/2022.
- [12] LEITE, L., (2000). O trabalho laboratorial e a avaliação das aprendizagens dos alunos. *In*: Sequeira, M. et al. (Org.), **Trabalho prático e experimental na educação em Ciências**, Braga: Universidade do Minho, p. 91-108.

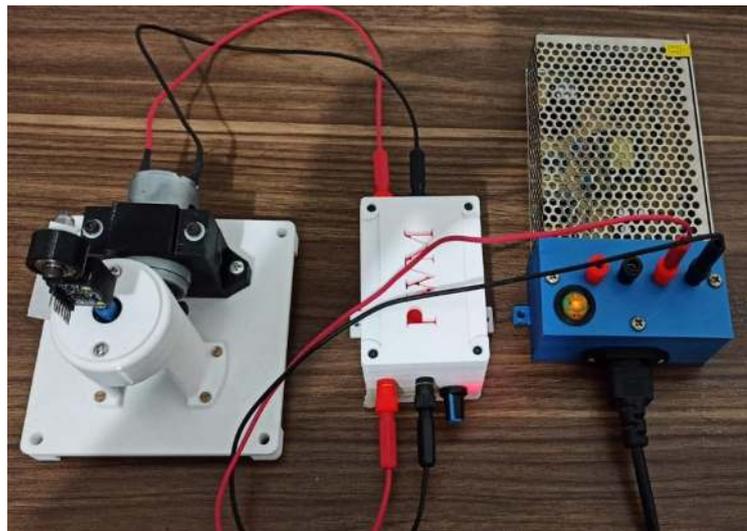
- 
- [13] GUIMARÃES, S. E. R., Motivação intrínseca, extrínseca e o uso de recompensas em sala de aula, *In: BZUNECK, J.A.; BORUCHOVITCH, E., A motivação do aluno*, Petrópolis: Editora Vozes, p. 37-57, 2001a.
- [14] LABURÚ, C. E., Fundamentos para um experimento cativante, **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, vol. 23, n. 3: p. 382-404, Dez. 2006.
- [15] Wikipédia, **Van de Graaff generator**, Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Van\\_de\\_Graaff\\_generator](https://en.wikipedia.org/wiki/Van_de_Graaff_generator), Acesso em: 12 de Fev. 2023.
- [16] Wikipédia, **Tesla coil**, [https://en.wikipedia.org/wiki/Tesla\\_coil](https://en.wikipedia.org/wiki/Tesla_coil), Acesso em: 12 de Fev. 2023.
- [17] STEPHENSON, A., On an induced stability, **Philosophical Magazine**, vol. 15, p. 233-236, 1908. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14786440809463763?journalCode=tphm17>, Acesso em: 15/11/2021.
- [18] **Collected Papers of P. L. Kapitza**, edited by D. Ter Haar, Pergamon Press, vol. 2, p. 714-737, London, 1965.
- [19] WebFísica, **Curso de Física Básica - Aula 4.32: Torque, alavancas e equilíbrio de corpos extensos**, Disponível em: <https://webfisica.com/laravel/public/fisica/curso-de-fisica-basica/aula/4-32>, Acesso em: 10 de Fev. 2023.
- [20] JÚNIOR, D. P., 3. ed., **Cálculo II**, vol. 1, p. 43-53 - Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.
- [21] SMITH, R. W. M.; POESE, M. E., CARBO, R. M., *Stability of the parametrically excited damped inverted pendulum: Theory and experiment*, **Journal of the Acoustical Society of America**, 128 (4), Oct. 2010.
- [22] ALLAIN, R., **Physics and Video Analysis**, Morgan & Claypool Publishers, 2016, p. 1-3, Disponível em: <https://iopscience.iop.org/chapter/978-1-6817-4067-6/bk978-1-6817-4067-6ch1.pdf>, Acesso em: 12/07/2022.
- [23] LEITÃO, L. I.; TEIXEIRA, P. F. D.; ROCHA, F. S., *A vídeo-análise como recurso voltado ao ensino de física experimental: um exemplo de aplicação na mecânica*, **REIEC**, vol. 6, n. 1, p. 21, jul. 2011.
- [24] JESUS, V. L. B., **Experimentos e Videoanálise - Dinâmica**, 1. ed., Editora Livraria da Física, São Paulo, 2014.
- [25] BORDIN, G. D.; FRANÇA, I. H.; JUNIOR, A. G. B., Desenvolvimento e utilização de um aplicativo móvel brasileiro para videoanálise: “Videoanalizando”, **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 44, e20220058 (2022).
- [26] **Open Source Physics (OSP)**. Disponível em <https://www.compadre.org/osp/webdocs/about.cfm>. Acesso em: 07 de Jan. de 2022.
- [27] BORDIN, G. D., **Potencialidades de uso do software de videoanálise Tracker no ensino de física**, Dissertação de Mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2020.

- [28] Martinelli, J., As Tecnologias de impressão 3D mais utilizadas: FFF, SLA e SLS, Disponível em: <https://www.inovahouse3d.com.br/post/blog-tecnologias-de-impressao-3d>, **Blog InovaHouse3D**, Acesso em: 26 de Jul. de 2022.
- [29] Amazon.com.br, **Impressora Creality One**, Disponível em: <https://tinyurl.com/3hj3ccyd>, Acesso em: 28 de Ago. de 2022.
- [30] Kabum.com.br, **Impressora Creality Ender 3**, Disponível em: <https://tinyurl.com/mwm69u63>, Acesso em: 28 de Ago. de 2022.
- [31] PAUL, **Paul's Orrery**, Disponível em: <https://www.thingiverse.com/thing:5438641>, Acesso em: 09 de Set. de 2022.
- [32] ONISAKI, H. H. C.; VIEIRA, R. M. B., Impressão 3D e o desenvolvimento de produtos educacionais, **Educitec**, vol. 05, Edição especial, n. 10, p. 128-137, Manaus, Mar. 2019.
- [33] AGUIAR, L. D. C. D. **Um processo para utilizar a tecnologia de impressão 3D na construção de instrumentos didáticos para o ensino de ciências**, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, Bauru, 2016.
- [34] NETO, A. F.; LOUBET, S. S.; ALBUQUERQUE, L. M., O uso da impressão 3D no processo de ensino e aprendizagem, **Sala de aula em foco**, vol. 10, n. 2, Fev. 2021.
- [35] LEDO, R. M. D.; SILVA, C. P. L., Limites e possibilidades da impressão 3D como ferramenta em abordagens STEAM no ensino de biologia: um estudo de caso, **Revista eixo**, vol. 10, n. 1, Brasília - DF, Janeiro - Abril de 2021.
- [36] TOLEDO, K. C., RIZZATTI, I. M., Modelos atômicos e a impressora 3D: proposta para a inclusão de deficientes visuais para o ensino de química, **Scientia Naturalis**, vol. 3, n. 2, p. 473-485, Rio Branco, Set. 2021.
- [37] SHIMOSAKA, M. Y, **Estudo dinâmico comparativo entre mecanismos Biela-Manivela e Garfo Escocês**, Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Tecnológica do Paraná, Departamento Acadêmico de Mecânica, Pato Branco, 2016.
- [38] eletrogate.com, **Rolamento linear**, Disponível em: <https://tinyurl.com/crhs7fa8>, Acesso em: 05 de Jan. de 2023.
- [39] eletrogate.com, **Sensor de velocidade encoder**, Disponível em: <https://tinyurl.com/2tkenhdw>, Acesso em: 05 de Jan. de 2023.
- [40] eletrogate.com, **Placa Arduino UNO**, Disponível em: <https://tinyurl.com/28pstrem>, Acesso em: 05 de Jan. de 2023.
- [41] curtocircuito.com.br, **Display LCD 16 × 2 com módulo I2C**, Disponível em: <https://tinyurl.com/2p9x4zvx>, Acesso em: 05 de Jan. de 2023.
- [42] shopee.com.br, **PWM 4,5 a 35 VDC, 5 A**, Disponível em: <https://tinyurl.com/47xcse2x>, Acesso em: 05 de Jan. de 2023.

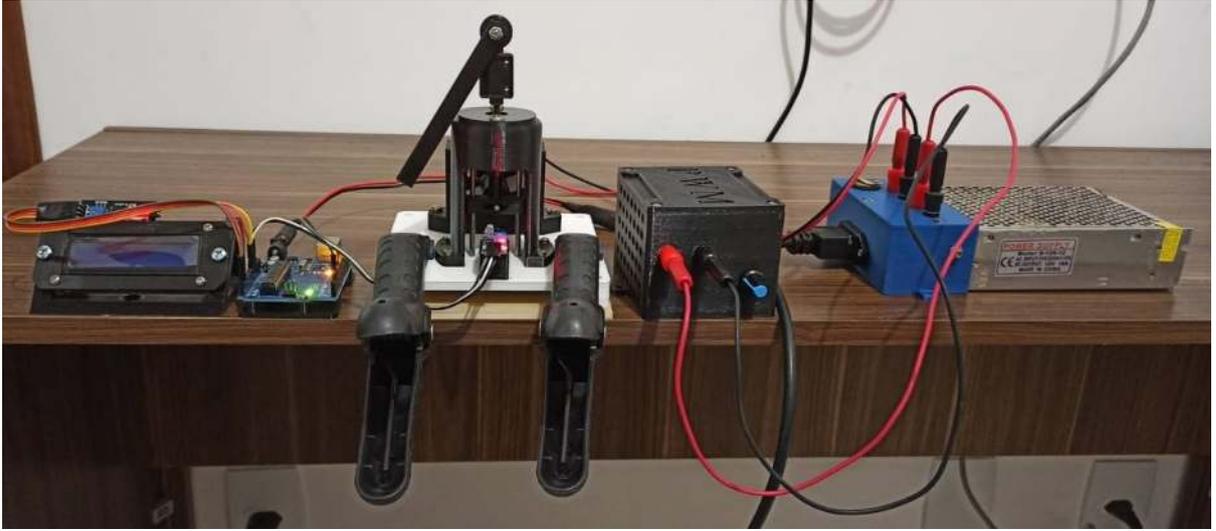
- [43] eletrogate.com, **PWM 5 a 12 V DC, 10 A**, Disponível em: <https://tinyurl.com/mphe95a8>, Acesso em: 05 de Jan. de 2023.
- [44] eletrogate.com, **PWM 12 a 40 V, 10 A**, Disponível em: <https://tinyurl.com/36mnrxne>, Acesso em: 05 de Jan. de 2023.
- [45] mercadolibre.com, **Fonte AC/DC, 12 V, 10 A**, Disponível em: <https://tinyurl.com/57kp24e7>, Acesso em: 05 de Jan. de 2023.
- [46] RICKMAN, J., **LiquidCrystal\_I2C: LiquidCrystal Arduino library for I2C LCD displays**, Disponível em: [https://github.com/johnrickman/LiquidCrystal\\_I2C](https://github.com/johnrickman/LiquidCrystal_I2C), Acesso em: 20 de Mar. de 2022.
- [47] CABRAL, P., **Erros e Incertezas nas Medições**, Instituto Superior de Engenharia do Porto, Departamento de Física, Porto, 2004.

# APÊNDICE A - OUTRAS VERSÕES DA BANCADA EXPERIMENTAL PÊNULO DE KAPITZA

Neste apêndice, são mostradas outras duas versões da bancada experimental Pêndulo de Kapitza que foram feitas antes de chegarmos à versão final. A primeira versão foi a que utilizamos o sistema biela-manivela para gerar o movimento do pivô, ela foi apresentada no capítulo 3. Na versão 2 (Fig. A1), temos a bancada com o controle de velocidade através de uma placa PWM que está dentro da caixa PWM. Colocamos um acelerômetro na base do pivô, mas não chegamos a utilizá-lo. Na versão 3 (Fig. A2) utilizamos um sensor reflexivo para obter a frequência de oscilação do pivô e utilizamos um *display* LCD para visualizar o seu valor. A medição com o sensor reflexivo funcionava, mas durante a gravação dos vídeos de alta velocidade não conseguimos obter a frequência de oscilação do pivô olhando o *display*, pois a iluminação interferia na medição do sensor, resultando em um valor nulo. Também substituímos a placa PWM por uma com corrente máxima de 10 A. Nas duas versões ainda utilizávamos a barra e o garfo escocês impressos.



**Figura A1:** Versão 2 da bancada experimental Pêndulo de Kapitza.



**Figura A2:** Versão 3 da bancada experimental Pêndulo de Kapitza.

# APÊNDICE B - MATERIAL INSTRUCIONAL

Este material instrucional possui instruções para construção de um experimento Pêndulo de Kapitza de baixo custo, gabaritos e atividades pedagógicas de videoanálise com a utilização do *software Tracker*, um manual para o uso do *Tracker*, instruções para a construção de um experimento Pêndulo de Kapitza utilizando peças impressas por uma impressora 3D e Arduino, e um *script* para Arduino. Neste material é possível encontrar links que levam à uma página onde são encontrados vídeos dos experimentos Pêndulo de Kapitza, arquivos no formato STL para construção do experimento com peças impressas em 3D, atividades de videoanálise e o manual para o uso do *Tracker*.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## O Pêndulo de Kapitza: Equilibrando o Instável

(Material Instrucional)

Tiago Paulino dos Santos  
Reinaldo Faria de Melo e Souza  
Germano Maioli Penello

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Tiago Paulino dos Santos, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro  
Maio de 2023

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>100</b>
<b>2</b>	<b>Experimento de baixo custo</b>	<b>102</b>
<b>3</b>	<b>Manual para o uso do <i>Tracker</i></b>	<b>104</b>
3.1	Ambiente <i>Tracker</i> . . . . .	104
3.2	Recursos . . . . .	105
3.2.1	Abrindo um vídeo . . . . .	105
3.2.2	Ajustando o corte de vídeo . . . . .	105
3.2.3	Calibrando a escala para realizar medições . . . . .	106
3.2.4	Usando a “Fita Métrica” . . . . .	108
3.2.5	Criando um sistema de referência . . . . .	109
3.2.6	Ponto de Massa e Trajetória Automática . . . . .	109
3.2.7	Análise de gráficos: Ajuste da função seno . . . . .	111
3.2.8	Criando um referencial móvel . . . . .	113
3.2.9	Salvando um projeto . . . . .	114
<b>4</b>	<b>Gabarito das propostas de atividades pedagógicas utilizando o <i>Tracker</i></b>	<b>115</b>
4.1	Gabarito das atividades de videoanálise utilizando o vídeo Pêndulo de Kapitza 1 . . . . .	117
4.2	Gabarito das atividades de videoanálise utilizando o vídeo Pêndulo de Kapitza 2 . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Construção e montagem do experimento Pêndulo de Kapitza</b>	<b>138</b>
5.1	Construção e montagem . . . . .	138
5.2	Instruções de uso . . . . .	161
	<b>Referências</b>	<b>163</b>
<b>A</b>	<b>Atividades de videoanálise com o vídeo Pêndulo de Kapitza 1</b>	<b>164</b>
<b>B</b>	<b>Atividades de videoanálise com o vídeo Pêndulo de Kapitza 2</b>	<b>170</b>
<b>C</b>	<b><i>Script</i> para leitura de frequência no <i>display</i> LCD</b>	<b>176</b>

# 1 Introdução

Caro professor, este material instrucional apresenta recursos que podem ser utilizados para compor aulas ou oficinas sobre o Pêndulo de Kapitza. Neste material instrucional constam links que dão acesso a vídeos para aulas expositivas, vídeos para videoanálise, arquivos para impressão 3D, código em Arduino, manual para o uso do *software Tracker* e propostas de atividades com videoanálise. Estes dois últimos também são encontrados separados desse material instrucional. Se você já quiser acessar todo o material disponível para download, basta acessar o link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/) e baixar o que precisar.

Este material instrucional é composto por cinco capítulos. O primeiro é esta introdução, o segundo é uma proposta de construção de um experimento Pêndulo de Kapitza de baixo custo, o terceiro é um manual para o uso do *software Tracker*, o quarto são gabaritos de atividades pedagógicas propostas envolvendo videoanálise de um experimento Pêndulo de Kapitza e o quinto capítulo é uma proposta de construção e montagem do experimento Pêndulo de Kapitza, que usa impressão 3D e eletrônica com Arduino. A seguir detalhamos o conteúdo de cada capítulo.

No segundo capítulo, será mostrada a construção de um experimento de baixo custo. Para tanto, empregaremos uma máquina de cortar cabelo. Trata-se de uma forma simples e barata de poder mostrar o fenômeno pessoalmente aos alunos. Nós esperamos que o aluno se encante e desperte o interesse pelo fenômeno ao interagir com ele. Esse experimento pode ser apresentado a alunos do ensino médio para discutir aspectos qualitativos do fenômeno.

No terceiro capítulo, é apresentado um manual para uso do *Tracker*. Ele permite que professores e alunos conheçam os principais recursos utilizados em uma análise de vídeo. O manual para uso do *Tracker* possui dados que permitem a análise dos vídeos do experimento Pêndulo de Kapitza, que compõem o produto educacional. São disponibilizados dois vídeos gravados com uma câmera de alta velocidade. Eles são utilizados em duas propostas de atividades de videoanálise, utilizando o *Software Tracker*.

No quarto capítulo, são apresentados os gabaritos sugeridos para duas propostas de atividades em que são feitas videoanálises com o *software Tracker*. As atividades podem ser encontradas nos apêndices A e B. São dois vídeos e um roteiro de atividades para cada um. Em cada vídeo o experimento está em uma configuração diferente. Como pêndulo, são usadas barras de comprimentos diferentes em cada um dos vídeos. O professor pode escolher qual vídeo e roteiro irá usar. O manual, as atividades e o vídeo para análise devem ser distribuídos aos alunos antes de uma aula ou oficina sobre o Pêndulo de Kapitza para que eles possam tentar fazer sozinhos. O aluno precisará de um computador com o *software Tracker* instalado. O professor deve ler o gabarito antes de aplicar as atividades. Na aula, ele deve fazer as atividades e os alunos devem acompanhá-lo. Na primeira

atividade, são obtidos o momento de inércia da barra, a função que descreve o movimento de oscilação do pivô e é verificada a condição de estabilidade da barra. Na segunda atividade, é obtido o gráfico que descreve o movimento de oscilação da barra e compara-se a frequência angular teórica com a experimental. As atividades usam [1] como principal referencial teórico, mas uma boa discussão também pode ser encontrada em português na seção 2.2 da dissertação que deu origem a este produto. O intuito de disponibilizar dois vídeos diferentes é para que o professor possa diversificar em uma aplicação para grupos diferentes de alunos. O público alvo para a aplicação dessas atividades são alunos da graduação, que estão cursando ou já cursaram física ondulatória e professores do ensino médio. Após a leitura do manual para o uso do *Tracker* e a realização das atividades, os alunos além de aprenderem sobre os conceitos relacionados ao Pêndulo de Kapitza, adquirirão habilidades necessárias para analisar diversos vídeos, pois terão contato com uma poderosa ferramenta, a videoanálise.

No quinto capítulo, é apresentada a construção e montagem de uma bancada experimental mais elaborada. Ela foi construída, em sua maior parte, com peças impressas em uma impressora 3D. Os arquivos para impressão fazem parte deste produto educacional. Também foi utilizada uma placa Arduino e outros periféricos como sensor, *display* e placa PWM (*Pulse Width Modulation*). Os vídeos de alta velocidade disponibilizados são desta bancada experimental. Esta parte do material instrucional é para você, professor, que gosta de se aventurar em construir experimentos um pouco mais complexos.

Para finalizar esta introdução, apresento-lhe o Pêndulo de Kapitza. É intuitivo imaginar que um pêndulo fica em equilíbrio quando deixado na posição vertical inferior. Na vertical superior, denominado pêndulo invertido, ele também fica em equilíbrio, já que nele age uma força resultante nula. Contudo o que difere as duas situações é o que acontece com o pêndulo quando nele é dado um pequeno deslocamento angular. Enquanto que na orientação vertical inferior ele tende a voltar para a posição de equilíbrio, o pêndulo invertido tende a se afastar. É chamado ponto de equilíbrio estável a posição cujo pêndulo tende a retornar quando uma força o tira dela e ponto de equilíbrio instável a posição cujo pêndulo tende a afastar-se. Como nunca conseguimos colocar um pêndulo invertido exatamente na vertical, vemos sempre ele cair quando tentamos invertê-lo.

Será que é possível transformar um equilíbrio instável em um estável? A resposta é sim! Se o pêndulo for forçado a oscilar rapidamente na direção vertical, é possível manter o pêndulo invertido. O pêndulo preso a um pivô que oscila verticalmente e adquire estabilidade na posição invertida é chamado Pêndulo de Kapitza, em homenagem a P.L. Kapitza [2], um dos pioneiros a investigar o fenômeno. Neste material instrucional veremos como montar este experimento e como ele pode constituir um material interessante para o ensino de física.

## 2 Experimento de baixo custo

Neste capítulo é apresentado um experimento de baixo custo. Diferente da bancada experimental do capítulo cinco, o experimento proposto não permite a mudança de amplitude e de frequência de oscilação do pivô, a visualização em tempo real do valor da frequência de oscilação do pivô e visualização da parte mecânica que transforma o movimento circular em linear. Sua vantagem está na facilidade de montagem e no baixo custo. Além disso, ela pode ser usada para mostrar o fenômeno de forma mais simples e rápida aos alunos.

Para a construção do experimento, é preciso uma máquina de cortar cabelo, um pedaço de arame com diâmetro de  $1,0\text{ mm} \times 20\text{ mm}$  de comprimento, dois pedacinhos de borracha, uma barra de alumínio ou madeira com dimensões  $25\text{ mm} \times 5\text{ mm} \times 2\text{ mm}$  e uma cola instantânea cianoacrilato (Fig. 2.1). Uma máquina de cortar cabelo barata custa em média R\$ 70,00, os outros itens não devem passar de R\$ 20,00. Desta forma, este experimento não deve passar de R\$ 90,00.



**Figura 2.1:** Material necessário para montar o experimento Pêndulo de Kapitza de baixo custo.

Fure a barra de alumínio com uma broca de  $1,0\text{ mm}$  de diâmetro, cole o arame na lâmina móvel da máquina de cortar cabelo e monte conforme a Figura 2.2.



**Figura 2.2:** Montagem final do aparato experimental.

Feita a montagem, é só ligar a máquina, colocar a barra na posição invertida e ver ela ficando estável (Fig. 2.3). Podem ser dados pequenos impulsos nas laterais da barra para ver ela realizar oscilações em torno da posição de estabilidade.



**Figura 2.3:** Máquina ligada e a barra na posição invertida em equilíbrio estável.

O vídeo do experimento de baixo custo funcionando pode ser acessado através do link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/), na pasta “Vídeos”. Ele pode ser exibido para os alunos caso o professor opte por uma aula expositiva.

### 3 Manual para o uso do *Tracker*

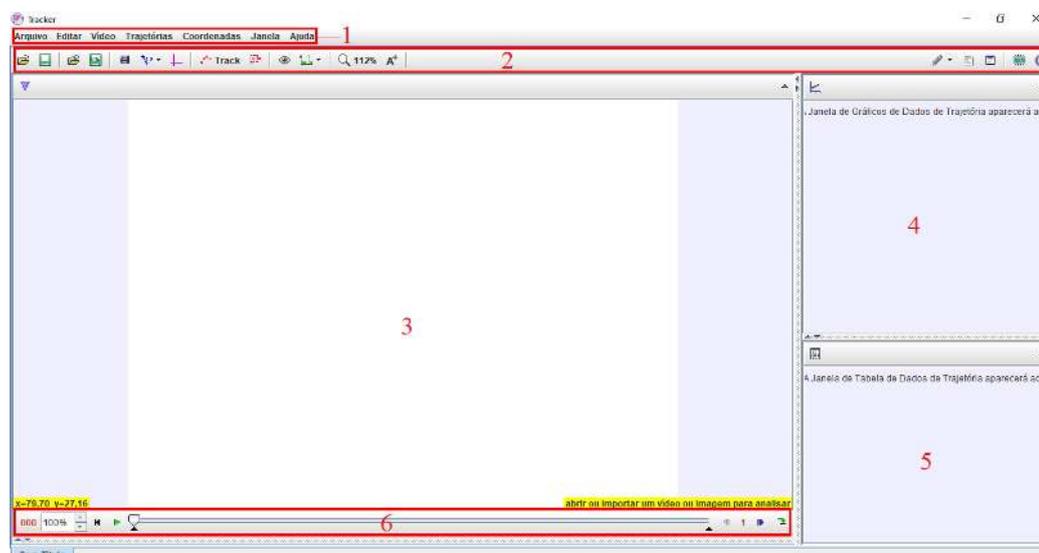
Um vídeo é uma sequência de imagens reproduzida a uma determinada taxa. Cada imagem é chamada de *frame* (quadro) e a taxa de reprodução é chamada *frames per second* (fps) ou, em português, quadros por segundo.

A videoanálise é um recurso que permite a análise quadro a quadro de um vídeo. Ela é muito usada no estudo de fenômenos físicos [3] e pode ser bastante útil no estudo de fenômenos que envolvem altas velocidades. Vale ressaltar que quanto mais alta a velocidade do objeto de estudo, maior terá que ser a taxa de gravação do vídeo, a fim de obter imagens mais nítidas nos quadros que serão analisados. A videoanálise é um recurso bem interessante, pois uma vez que se tenha um vídeo bem gravado, é necessário apenas um computador e um *software* de análise de vídeo para fazer uma análise.

O *Tracker* é um *software* gratuito, de código aberto, projetado para fazer videoanálises e direcionado ao ensino de física [4]. Ele foi criado pelo projeto *Open Source Physics* (OSP) formado por físicos e educadores [5]. Seu download pode ser feito através do site <https://physlets.org/tracker/>. A seguir, serão apresentados o ambiente do *Tracker* e alguns recursos fundamentais para a análise dos vídeos sobre o experimento Pêndulo de Kapitza. Este material instrucional foi escrito com base na versão 6.0.2 do *software Tracker*, pode ser que alguns recursos e a forma de acessá-los sejam diferentes em outras versões.

#### 3.1 Ambiente *Tracker*

A Figura 3.1 mostra a tela inicial do *software Tracker*. Foram enumeradas algumas partes para o detalhamento do ambiente.

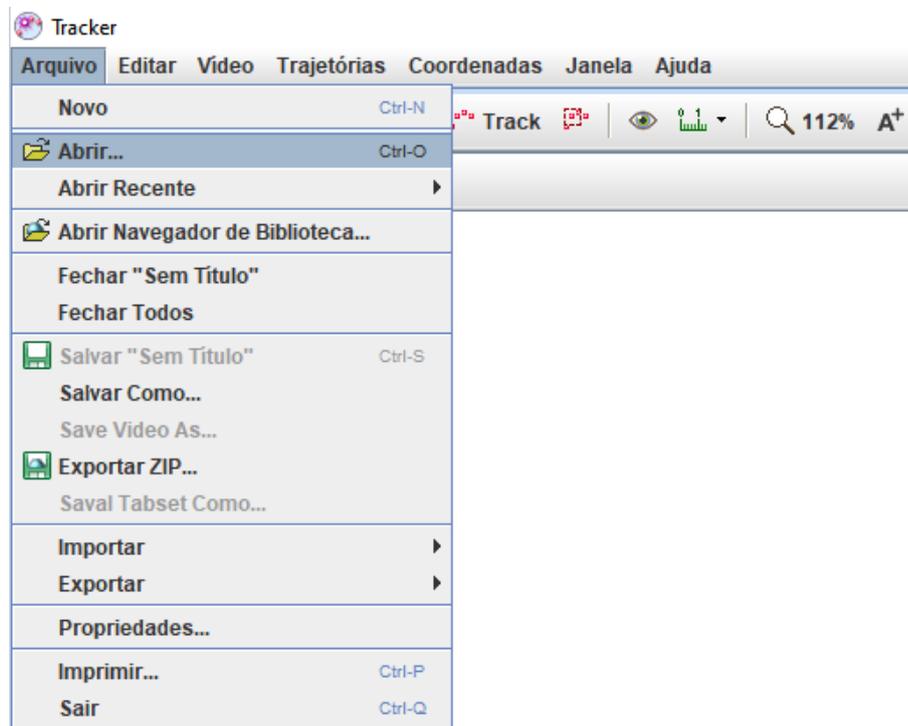


**Figura 3.1:** O ambiente do *Tracker*. 1 - Barra de Menu, 2 - Barra de Ferramentas, 3 - Área onde os *frames* dos vídeos são carregados, 4 - Área onde os gráficos são plotados, 5 - Área onde os dados aparecem em tabelas, 6 - Área de controle e ajustes de corte de vídeo.

## 3.2 Recursos

### 3.2.1 Abrindo um vídeo

Para carregar um vídeo ou imagem no *Tracker*, é preciso ir em *Arquivo/Abrir*. Veja a (Fig. 3.2). Ou através do ícone “Abrir” (📁) na barra de ferramentas.



**Figura 3.2:** Forma de acessar a opção que permite abrir um vídeo através da barra de menu.

### 3.2.2 Ajustando o corte de vídeo

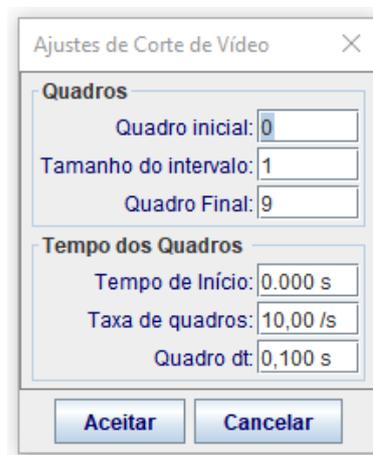
Após abrir o vídeo, você precisará definir a taxa na qual o vídeo foi gravado e o trecho do vídeo que será analisado. Para isso, vá em *Vídeo/Ajustes de Corte de Vídeo* (Fig. 3.3).



**Figura 3.3:** Forma de acessar a opção que permite abrir a caixa de diálogo para ajustes de corte de vídeo através da barra de menu.

Ao clicar em “Ajustes de Corte de Vídeo...”, aparecerá uma caixa de diálogo onde deverão ser inseridos alguns valores (Fig. 3.4). Preenchendo os campos “Quadro inicial” e “Quadro Final” é definido o intervalo do vídeo que se quer analisar. Ao preencher o campo “Tamanho do intervalo”, é definido o intervalo entre quadros. Como exemplo, suponhamos que seja inserido o número cinco no campo “Tamanho do intervalo”. Se a análise iniciar no quadro zero, o próximo quadro analisado será o de número cinco, se colocado o valor um, serão analisados um por um dos quadros. O campo “Tempo de início” serve para definir o tempo a partir do primeiro quadro. No campo “Taxa de quadros” é inserido o valor da taxa com a qual o vídeo foi gravado, preenchendo-o, o campo “Quadro dt” é preenchido automaticamente.

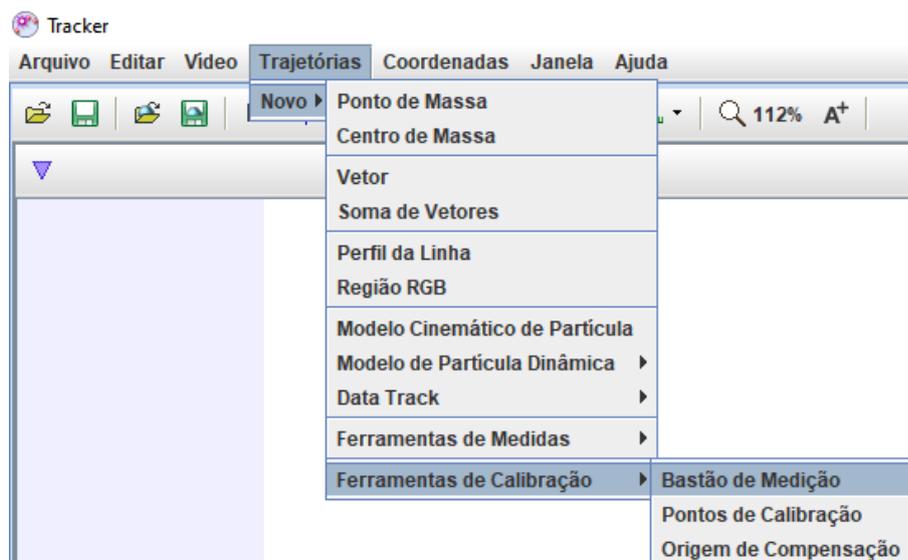
Os vídeos do experimento Pêndulo de Kapitza foram gravados em **1200 fps**. Deste modo, para analisá-los, deve-se inserir o valor 1200 no campo “Taxa de quadros”.



**Figura 3.4:** Caixa de diálogo “Ajustes de Corte de Vídeo”.

### 3.2.3 Calibrando a escala para realizar medições

Feito os ajustes de corte de vídeo, agora é preciso calibrar a escala para obter medidas compatíveis com as medidas reais do experimento. Faça a calibração no primeiro quadro definido na etapa de corte de vídeo. O recurso que faz a calibração é o “Bastão de Medição”. Para usá-lo, vá em *Trajетórias/Novo/Ferramentas de Calibração/Bastão de Medição* (Fig. 3.5).



**Figura 3.5:** Forma de acessar a opção que permite usar a ferramenta “Bastão de Medição” através da barra de menu.

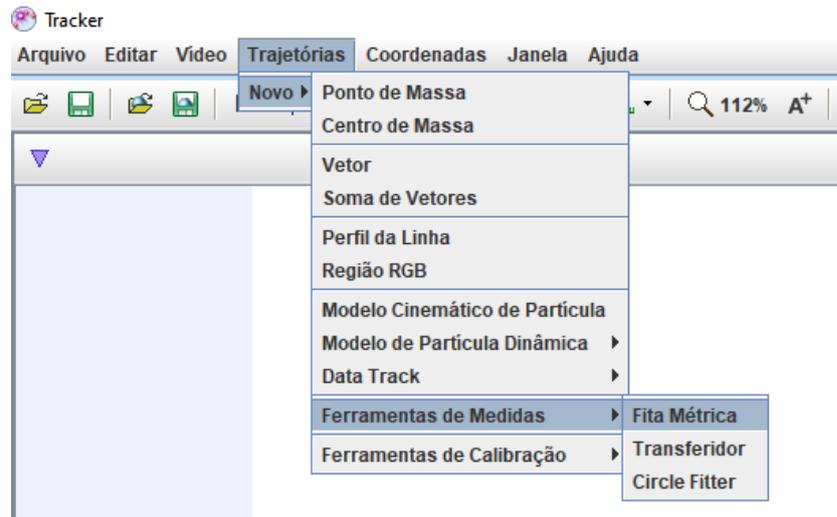
Para calibrar é preciso ter uma medida conhecida em algum *frame*. A medida usada como referência no experimento Pêndulo de Kapitza é a altura da parte retangular da base onde fica o pivô, ela mede 0,024 m. A Fig. 3.6 mostra o “Bastão de Medição” sendo usado. O zoom na imagem pode facilitar no posicionamento do “Bastão de Medição”. Ele pode ser feito rolando o botão *scroll* do *mouse* ou através do ícone (🔍<sub>100%</sub>) na barra de ferramentas. Tome cuidado com o ângulo do bastão quando estiver fazendo a calibração. Ele deve estar medindo noventa graus no campo “ângulo da fita”. Digite o valor da medida conhecida no campo “comprimento já em escala”, em destaque na Fig. 3.6.



**Figura 3.6:** A seta vermelha indica onde fica localizado o pivô. A linha vertical azul é o “Bastão de Medição” usado na análise de vídeo do experimento Pêndulo de Kapitza. Na parte superior, o retângulo vermelho destaca o campo “comprimento já em escala”.

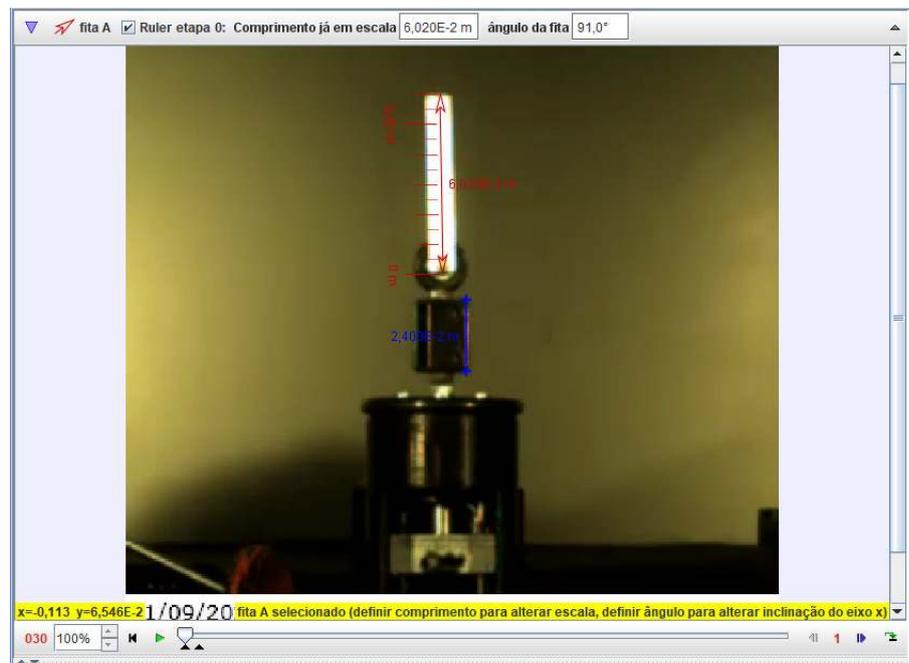
### 3.2.4 Usando a “Fita Métrica”

A “Fita Métrica” é um recurso que permite medir a distância entre dois pontos. Não confunda com o “Bastão de Medição”. Para acessar a “Fita Métrica”, vá em *Trajétórias/Novo/Ferramentas de Medidas/Fita Métrica* (Fig. 3.7).



**Figura 3.7:** Forma de acessar a opção que permite usar ferramenta “Fita Métrica” através da barra de menu.

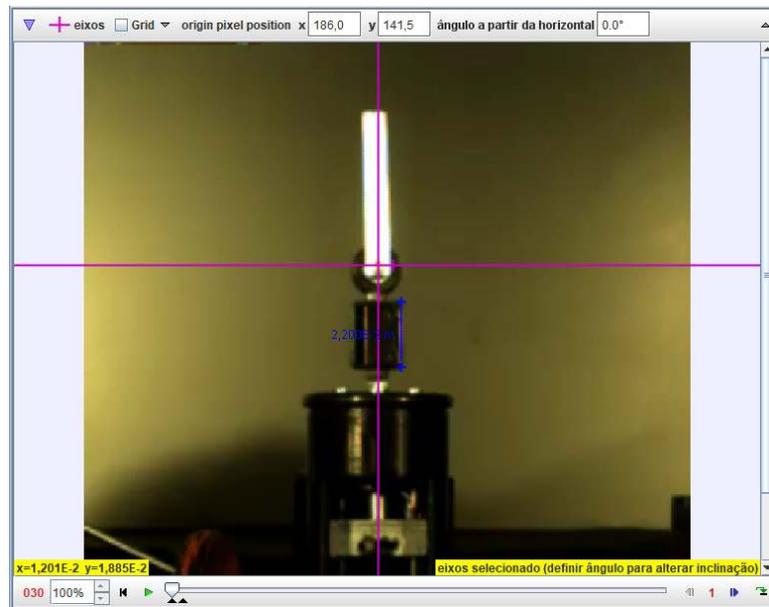
Na Figura 3.8, é mostrado o uso da “Fita Métrica” para medir o comprimento da barra do experimento Pêndulo de Kapitza.



**Figura 3.8:** Medição da barra usando a ferramenta “Fita Métrica” (em vermelho) na análise de vídeo do experimento Pêndulo de Kapitza.

### 3.2.5 Criando um sistema de referência

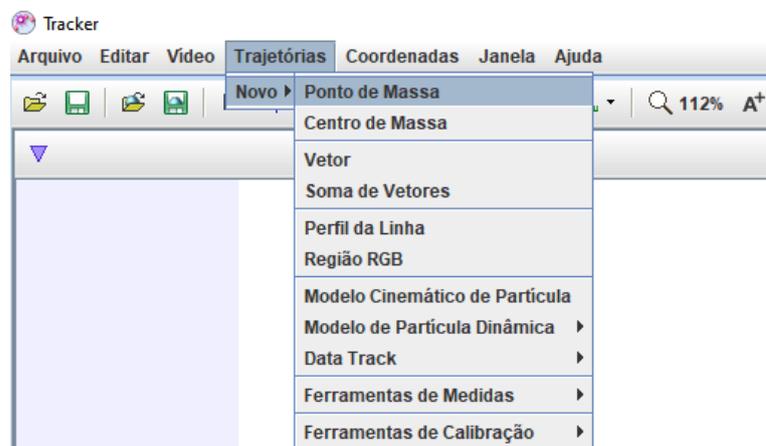
Para obter gráficos no *Tracker* é preciso ter um referencial, que consiste em um par de eixos de coordenadas fixo ou móvel. Para usá-lo, clique no ícone dos eixos (  ) na barra de ferramentas. No experimento Pêndulo de Kapitza, a origem dos eixos é colocada no centro de rotação da barra (pivô), como mostrado na Figura 3.9.



**Figura 3.9:** Mostra como são usados os eixos de coordenadas na análise de vídeo do experimento Pêndulo de Kapitza.

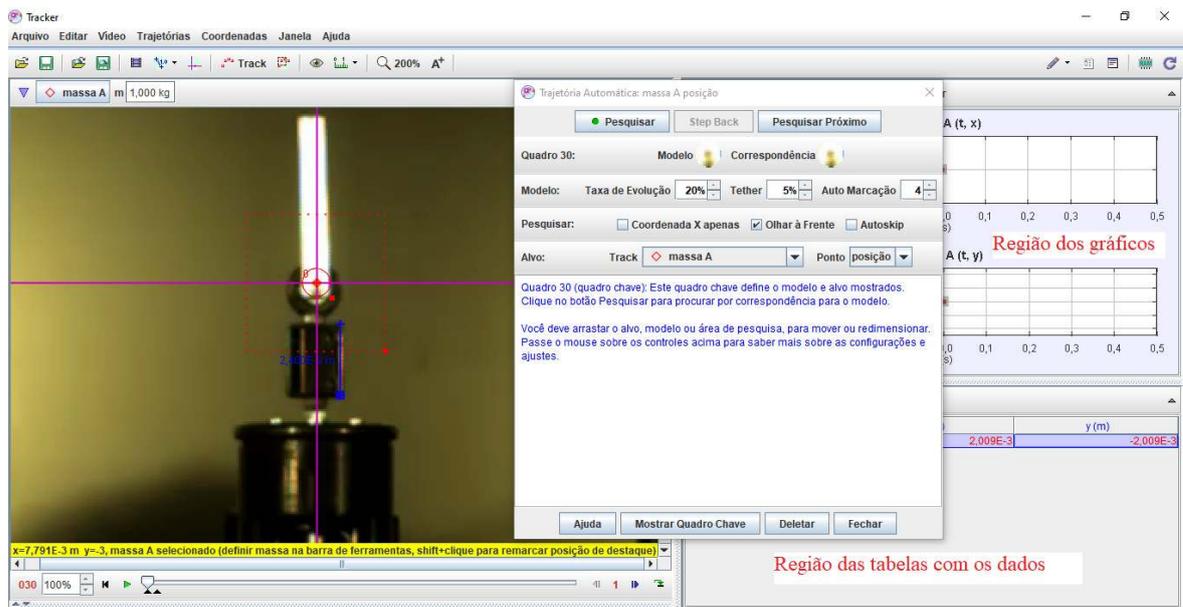
### 3.2.6 Ponto de Massa e Trajetória Automática

Para gerar o gráfico da trajetória de algum objeto, é preciso marcar pontos em cada *frame* com o recurso “Ponto de Massa”. Para acessar o recurso “Ponto de Massa”, vá em *Trajetoórias/Novo/Ponto de Massa* (Fig. 3.10).



**Figura 3.10:** Forma de acessar a opção que permite usar o recurso “Ponto de Massa” através da barra de menu.

O “Ponto de Massa” pode ser colocado manualmente em cada *frame*, apertando a tecla *SHIFT* e clicando no *botão esquerdo do mouse*, ou pode ser colocado automaticamente em cada *frame*, deixando pressionadas as teclas *CTRL + SHIFT* e clicando no *botão esquerdo do mouse*. Ao fazer pela última opção, aparecerá a janela para configuração de trajetória automática, não é necessário mexer nos parâmetros dessa janela, apenas clique em “Pesquisar”. Bons resultados são obtidos com a configuração padrão. Os gráficos da posição em função do tempo aparecerão na área dos gráficos e as tabelas com os dados aparecerão na região abaixo deles (Fig. 3.11).



**Figura 3.11:** Ponto de massa criado para fazer trajetória automática na análise de vídeo do experimento Pêndulo de Kapitza. Assim que é colocado o ponto de massa no *frame*, aparece a janela de trajetória automática para o ponto. São mostradas as regiões dos gráficos e das tabelas na parte direita da figura.

Na região dos gráficos (Fig. 3.11), é possível visualizar até três gráficos. Para alterar a sua quantidade basta ir em “Diagrama”, destacado na região superior esquerda da Figura 3.12. Pode-se alterar as variáveis dependentes e independentes dos gráficos clicando em cima da variável de cada eixo. Passando o ponteiro do mouse próximo à origem ou nas extremidades dos eixos onde ficam as unidades de medidas, aparecerá uma seta. Arrastando a seta para cima ou para baixo é possível modificar a escala dos gráficos.

### 3.2.7 Análise de gráficos: Ajuste da função seno

Para análise do gráfico, clique com o botão direito do mouse no gráfico que você quer analisar, aparecerá um menu, em seguida clique em “Analisar...” (Fig. 3.12).

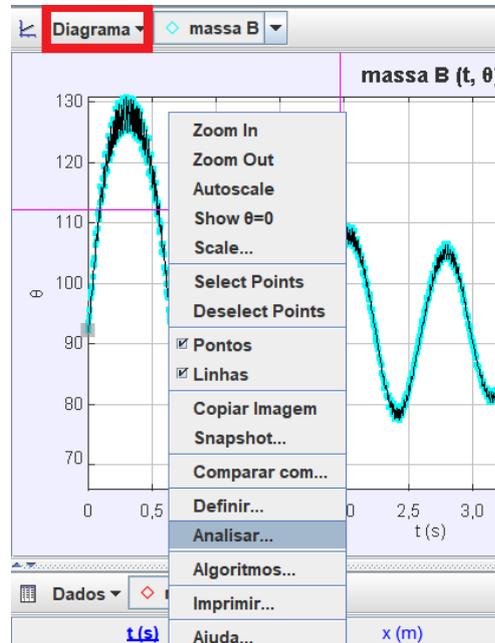


Figura 3.12: Forma de acessar a opção que permite abrir a janela para analisar os dados.

Aparecerá a janela “Ferramenta de Dados” com uma aba para análise dos dados (Fig. 3.13).

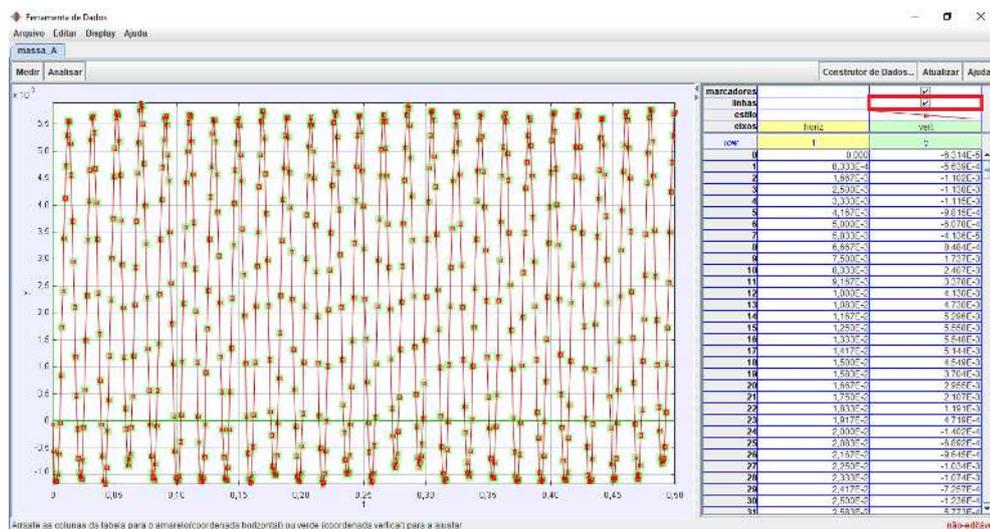
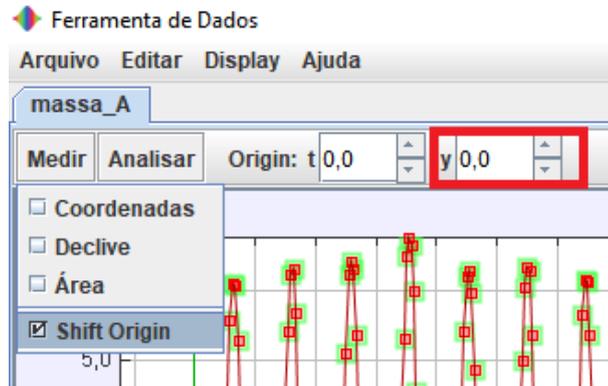


Figura 3.13: Janela “Ferramenta de Dados” onde é feito o ajuste de curvas. No canto superior direito, o retângulo mostra onde desabilitar as linhas do gráfico e deixar apenas os pontos.

Na aba de análise, antes de fazer o ajuste, deixe visível apenas os pontos do gráfico. Veja o destaque no canto superior direito da Figura 3.13.

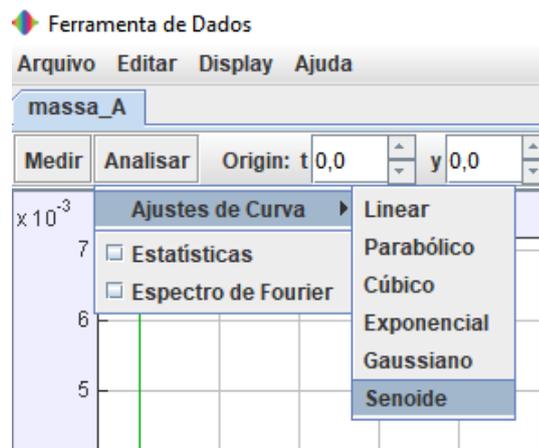
Para ajustar a curva senoidal, é preciso deslocar o gráfico no eixo vertical. Tente fazer com que as amplitudes na região positiva e negativa do eixo vertical do gráfico sejam

divididas igualmente pela linha que representa o eixo horizontal. Para movimentar o gráfico vá em *Medir/Shift Origin* (Fig. 3.14) e clique nas setas da coordenada  $y$  dentro do retângulo que aparece na figura abaixo.



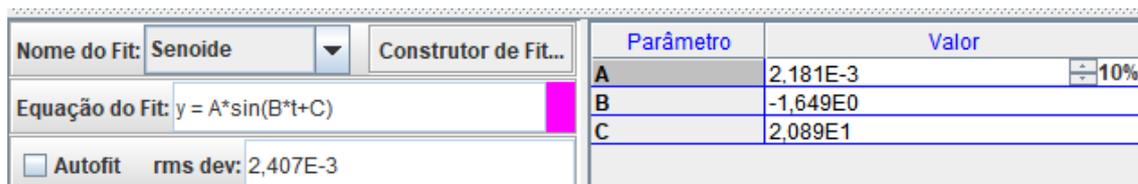
**Figura 3.14:** Forma de acessar a opção que permite realizar o deslocamento do gráfico no eixo vertical.

Para o ajuste da curva senoidal, vá em *Analisar/Ajustes de Curva/Senoide* (Fig. 3.15).



**Figura 3.15:** Forma de acessar a opção que permite iniciar o ajuste de curva senoidal.

Aparecerá uma nova área abaixo do gráfico onde é possível modificar os parâmetros da curva e fazer o ajuste dela com os pontos experimentais, veja a Figura 3.16. Os parâmetros precisam estar bem estimados, caso contrário o ajuste não será feito corretamente. Após digitar os parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $C$ , pode-se marcar a opção *Autofit*.



**Figura 3.16:** Área de ajuste dos parâmetros da curva.

Após fazer o ajuste da curva, ainda na janela “Ferramenta de Dados”, é possível salvar a aba em que o ajuste foi feito. Para isso, vá em *Arquivo/Salvar Aba* (Fig.3.17).

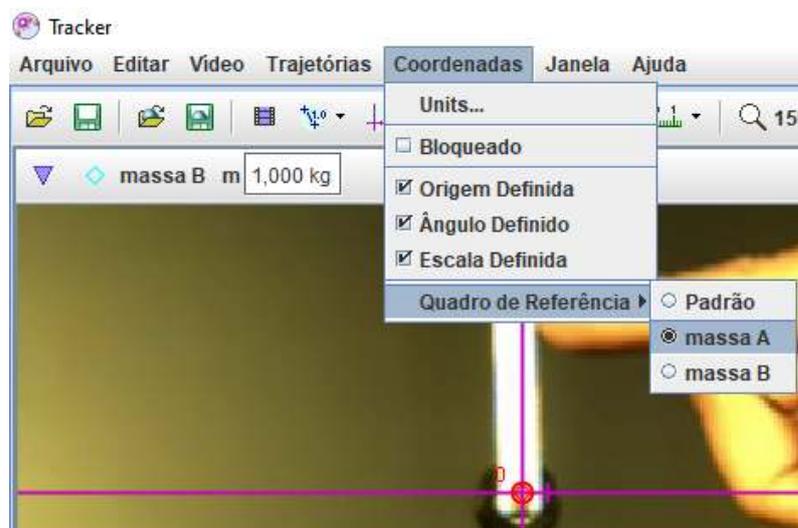


**Figura 3.17:** Forma de acessar a opção que permite salvar o ajuste da curva através da barra de menu da janela Ferramenta de dados.

O arquivo salvo terá extensão **.xml**. Se você quiser visualizar a curva do ajuste terá que abrir este arquivo na janela “Ferramenta de Dados”, pois o *Tracker* não abre a curva ajustada quando o projeto é aberto.

### 3.2.8 Criando um referencial móvel

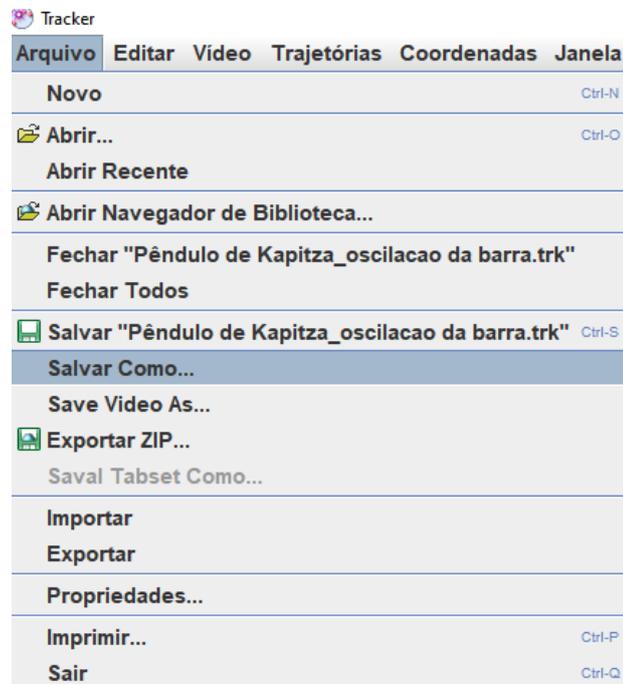
Para criar referenciais móveis, é preciso marcar uma trajetória com um “Ponto de Massa A”. Feito isso, utilizam-se esses quadros como referência para um outro “Ponto de Massa B”. Isso é feito em *Coordenadas/Quadro de Referência/Massa A* (Fig. 3.18). Ao fazê-lo, os eixos de coordenadas se moverão juntamente com os pontos da massa A.



**Figura 3.18:** Forma de acessar a opção que permite usar a trajetória do “Ponto de Massa A” como referência.

### 3.2.9 Salvando um projeto

Para salvar um projeto, vá em *Arquivo/Salvar Como...* (Fig. 3.19 ). Ou clique no ícone (  ) na barra de ferramentas.



**Figura 3.19:** Forma de acessar a opção que permite salvar um projeto.

O arquivo salvo terá extensão **.trk**. Quase tudo será salvo, com exceção da curva que foi ajustada na janela “Ferramentas de Dados”, por isso ela tem que ser salva na própria janela, como foi feito anteriormente.

## 4 Gabarito das propostas de atividades pedagógicas utilizando o *Tracker*

Neste capítulo, serão apresentadas os gabaritos das atividades de videoanálise, do experimento Pêndulo de Kapitza, usando o *software Tracker*. Os referenciais teóricos para as atividades estão presentes na dissertação que deu origem a este produto. São disponibilizados dois vídeos, “Pêndulo de Kapitza 1” e “Pêndulo de Kapitza 2”. Os vídeos podem ser baixados através do link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/), na pasta “Vídeos\_para\_análise”. No mesmo link encontra-se a pasta “Aluno”, onde estão o manual para uso do *Tracker* e as listas de atividades. São duas listas, uma para cada vídeo. Elas também podem ser encontradas nos apêndices A e B deste material instrucional.

Os roteiros para a análise dos dois vídeos são semelhantes, contudo a configuração do experimento é diferente em cada um deles, isso possibilita que o professor possa aplicar atividades com os mesmos objetivos, mas com configurações diferentes para grupos de alunos distintos. As atividades foram testadas em uma oficina utilizando o vídeo “Pêndulo de Kapitza 1”. Mais adiante será detalhado, em negrito, o gabarito das atividades que utilizam o vídeo “Pêndulo de Kapitza 1”. Para o vídeo “Pêndulo de Kapitza 2”, será omitido o passo a passo das atividades, pois são semelhantes. Desta forma, serão mostrados apenas os novos parâmetros do experimento e o gabarito em cada item.

### Material utilizado

Levando em consideração que a aula seja remota, o material utilizado será:

- 1) Um Computador.
- 2) *Software* para videoconferência. Ex. *Zoom*.
- 3) *Software Tracker*.
- 4) O manual para uso do *Tracker*.
- 5) Lista de atividades do vídeo Pêndulo de Kapitza 1
- 6) O vídeo Pêndulo de Kapitza 1.
- 7) O gabarito das atividades que constam nesse material.

Caso a aula seja presencial, substitui-se o *software* de videoconferência por um projetor.

### Metodologia

Como foram disponibilizados dois vídeos e duas listas de atividades, fica a critério do professor usar os dois ou apenas um. Esta metodologia considera apenas a aplicação da atividade que utiliza o vídeo “Pêndulo de Kapitza 1”. É estimado aproximadamente o mesmo tempo na aplicação com o vídeo “Pêndulo de Kapitza 2”.

As duas atividades para cada um dos vídeos foram divididas em três etapas: atividade 1 - primeira etapa, atividade 1 - segunda etapa e atividade 2. Os tempos recomendados para cada uma das etapas são, respectivamente, 40, 30, e 60 min.

O professor deve compartilhar o manual para o uso do *Tracker*, a lista de atividade, e o vídeo com os alunos alguns dias antes de iniciar a primeira atividade, para que eles possam lê-lo ou até mesmo tentar praticar sozinhos, pois o manual possui dados para isso.

O professor deve explicar a parte teórica presente nesta dissertação ou em suas referências bibliográficas. Para que a aula não fique apenas expositiva, o professor deve introduzir essas atividades conforme ele avança com o ensino do tema.

Ao final da aplicação dessas atividades, espera-se que o aluno, além de aprender novos conceitos, também possa utilizar o *software Tracker* para realizar uma boa análise de vídeo, fazendo o uso de diversos recursos. Espera-se também que ele possa perceber o potencial da videoanálise para análises de experimentos.

## Objetivos

O objetivo geral das atividades é analisar, através de videoanálise, o movimento de um pêndulo preso a um pivô que oscila verticalmente. Ao final dessas atividades espera-se que o aluno consiga:

- a) Obter o gráfico do movimento do pivô do experimento Pêndulo de Kapitza usando o *Tracker*.
- b) Ajustar uma função seno no *Tracker*.
- c) Realizar medidas utilizando a ferramenta “Fita Métrica” no *Tracker*.
- d) Verificar a condição de estabilidade obtida a partir do modelo matemático, utilizando os dados obtidos com a análise de vídeo.
- e) Construir o gráfico que descreve o movimento do pêndulo do experimento Pêndulo de Kapitza, a partir do referencial do pivô, usando o *Tracker*.
- f) Comparar a frequência angular do pêndulo obtida a partir do modelo teórico com a obtida experimentalmente.

## 4.1 Gabarito das atividades de videoanálise utilizando o vídeo Pêndulo de Kapitza 1

As instruções que constam nas atividades são detalhadas a seguir tal como elas são apresentadas aos alunos. Para auxiliar o professor, são mostradas respostas e informações adicionais em negrito. A lista para o aluno encontra-se na pasta “Aluno”, seu *download* pode ser feito através do link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/).

### Atividade 1 - primeira etapa: Obter a frequência angular e a amplitude de oscilação do pivô.

No modelo apresentado nesta dissertação, é considerado que o pivô executa um movimento harmônico simples (MHS). Nesta tarefa verificaremos se o pivô do experimento Pêndulo de Kapitza satisfaz esta condição e obteremos a amplitude e a frequência angular do movimento.

Dados para a realização das tarefas 1 e 2:

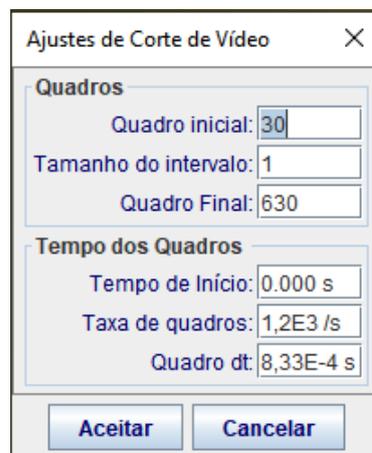
Massa da barra: 3,2 g

Gravidade: 9,81 m/s<sup>2</sup>

1. No *Tracker*, abra o vídeo pêndulo “Pêndulo de Kapitza 1”.

**No manual é mostrado como se faz.**

2. Ajuste o corte de vídeo da seguinte forma: Quadro inicial, 30; Quadro final, 630; Tamanho do intervalo, 1 e Taxa de quadros, 1200 *frames/s* (**Fig. 4.1**).



**Figura 4.1:** Janela “Ajustes de Corte de Vídeo” com os valores determinados para a análise.

3. No quadro inicial, ponha os eixos de coordenadas com a origem em cima do ponto de rotação da barra (pivô) (**Fig. 4.2**).

- Use o “Bastão de Medição” para definir altura da parte retangular da base onde fica o pivô com 0,024m (**Fig. 4.2**). Feito isso, o sistema está calibrado para realizar medidas.
- No mesmo quadro inicial, crie um “Ponto de Massa” para trajetória automática na interseção dos eixos de coordenadas (**Fig. 4.2**).

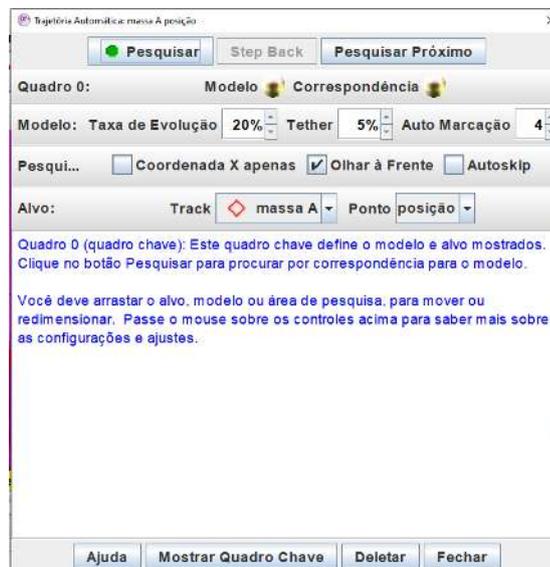
Após os passos 2, 3 e 4 o quadro inicial deve ficar como na **Figura 4.2**.



**Figura 4.2:** Eixos de coordenadas, “Ponto de Massa A” e “Bastão de Medição” no quadro inicial.

- Use a trajetória automática para obter a posição em função do tempo do pivô.

Quando o “Ponto de Massa” para trajetória automática é criado, aparece a janela mostrada na **Figura 4.3**. Não precisa mexer nos valores, apenas clique em pesquisar. O gráfico obtido será como o da **Fig. 4.4**.



**Figura 4.3:** Janela Trajetória Automática.

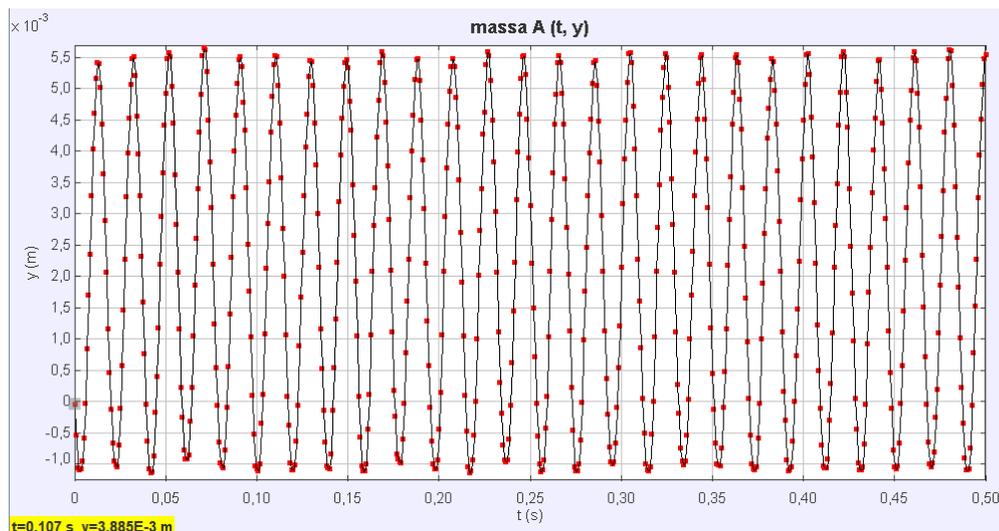


Figura 4.4: Gráfico  $y \times t$  obtido utilizando o “Ponto de Massa” de trajetória automática.

7. Clique com o botão direito do mouse dentro da área do gráfico  $y \times t$ . Em seguida, clique em “Analisar...” .

Este passo irá abrir a janela “Ferramenta de Dados”, como mostrado no manual para o uso do *Tracker*.

8. Mova o gráfico em  $y$  tentando fazer com que as amplitudes na região positiva e negativa do eixo vertical do gráfico sejam divididas igualmente pela linha que representa eixo horizontal.

Feito o deslocamento do gráfico, ele deverá ficar como na Figura 4.5.

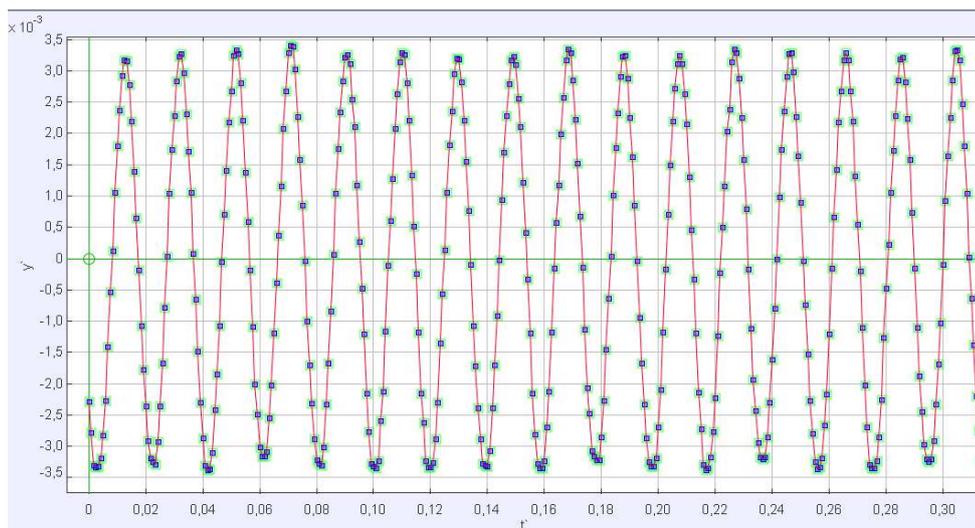


Figura 4.5: Gráfico com as novas coordenadas  $y' \times t'$  após o deslocamento vertical.  $y'$  está em metros e  $t'$  em segundos. Foi modificada a cor dos pontos.

9. Escolha o ajuste senoidal.

No manual para uso do *Tracker* é mostrado como fazer o ajuste senoidal. A curva ajustada será do tipo  $y = A \text{sen}(Bt + C)$ . Um movimento harmônico simples pode ser descrito por uma função do tipo,  $y = A' \text{sen}(\omega t + \phi)$ . Comparando as duas equações,  $A = A'$  é a amplitude de oscilação do movimento,  $B = \omega$  é a frequência angular,  $C = \phi$  é a constante de fase e  $t$  é o tempo.

10. Estime o parâmetro  $A$  apenas analisando as amplitudes do gráfico gerado com a trajetória automática.

Ao observar o gráfico gerado, percebe-se visualmente que a amplitude de oscilação fica entre os valores  $3,0 \times 10^{-3}$  e  $3,5 \times 10^{-3}$ . Coloque o valor do parâmetro  $A$  como 0,0033. Este parâmetro está em metros.

11. Estime o parâmetro  $B$ . Para isso, você precisará calcular o período médio de oscilação,  $T_M$ , o que é feito obtendo o tempo do último e primeiro pico (isso é feito para pegar o maior número de oscilações possível) e dividindo pelo número de oscilações (número de picos menos um). Em seguida, usa-se a Equação 1 para estimar o parâmetro  $B$ . Onde  $T$  é o período de oscilação de um movimento harmônico simples e  $\omega$  é a frequência angular.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (1)$$

$$T_M = \frac{0,5 - 0,0125}{25} = 0,0195 \text{ s},$$

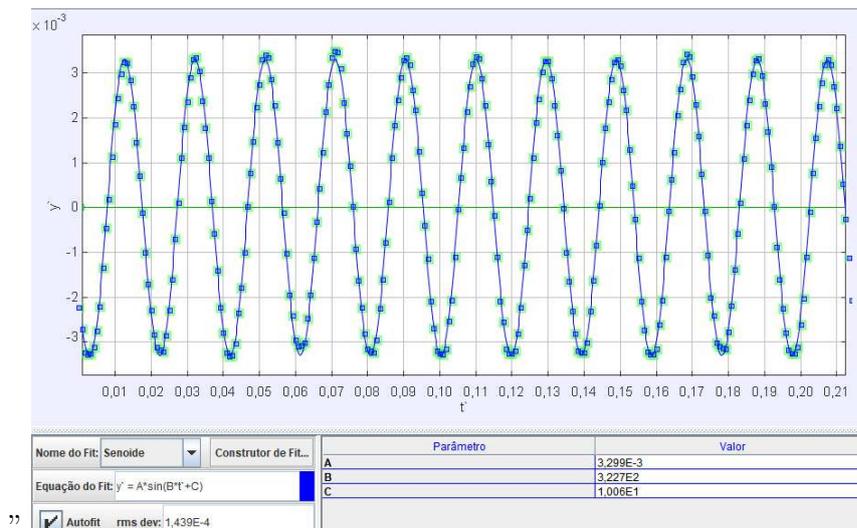
$$\omega = \frac{2\pi}{0,0195} \approx 322,2 \text{ rad/s} = B.$$

12. Ajuste o parâmetro  $C$  manualmente na janela de ajuste de curva, no campo “Valor”. Para um melhor ajuste, pode ser usado o incremento em 1% ao invés de 10%.

O parâmetro  $C$  não é fundamental para a análise que será feita, mas ele precisa ser estimado para que o ajuste da curva possa ser feito no programa. No valor do parâmetro  $C$  pode ser colocado 10,1 para fazer o ajuste.

13. Após os parâmetros terem sido estimados, clique na opção *Autofit*. Se a curva ajustada não estiver boa, provavelmente o *offset* em  $y$  não está correto. Ajuste o gráfico em  $y$  mais um pouco e clique na opção *Autofit* novamente.

Marcada a opção *autofit*, a curva e os parâmetros ajustados devem ficar como na Fig. 4.6.



**Figura 4.6:** Gráfico  $y' \times t'$  do ponto de massa colocado no centro do pivô.  $y'$  está em metros e  $t'$  em segundos. No gráfico é possível ver o ajuste da função senoidal. Foi desabilitada a visualização da linha que une os pontos. Os parâmetros após o ajuste são:  $A = 3,299E-3$  m,  $B = 3,227E2$  rad/s e  $C = 1,006E1$  rad.

14. Anote os valores dos parâmetros  $A$  e  $B$  obtidos após o ajuste.

$$A = 3,299 \times 10^{-3} \text{ m} , B = 322,7 \text{ rad/s.}$$

O valor da constante de fase é  $C = 10,06$  rad. Perceba que o pivô executa, em ótima aproximação, um movimento harmônico simples descrito pela equação  $y = 3,299 \times 10^{-3} \text{sen}(322,7t + 10,06)$ , onde  $y$  está em (m) e  $t$  em (s).

15. Salve a aba do ajuste como “ajuste seno”. A extensão do arquivo é .xml.
16. Salve o projeto como “grafico da posicao do pivô”. A extensão do arquivo é .trk.
17. Salve o arquivo acessando *Arquivo/Salvar Como....* Salve como “inercia”. Isso foi feito para aproveitar o corte de vídeo e a calibração feitos anteriormente. Este arquivo será aberto no próximo encontro.

### Atividade 1 - segunda etapa: Obter o momento de inércia e verificar a condição de estabilidade.

A estabilidade do pêndulo invertido é alcançada quando na média, o torque inercial causado pelo movimento do pivô supera o torque da força peso. Na referência [1] é possível obter a condição de estabilidade do pêndulo físico dada pela Equação 3. A seguir obteremos o momento de inércia da barra que está no vídeo Pêndulo de Kapitza 1 e verificaremos se os parâmetros do experimento satisfazem a esta condição.

1. Abra o arquivo “inercia”. O arquivo com extensão .trk salvo na atividade anterior.

2. No quadro 30, delete o “Ponto de Massa” desse quadro e tire a visualização dos eixos de coordenadas clicando no ícone dos eixos na barra de ferramentas.

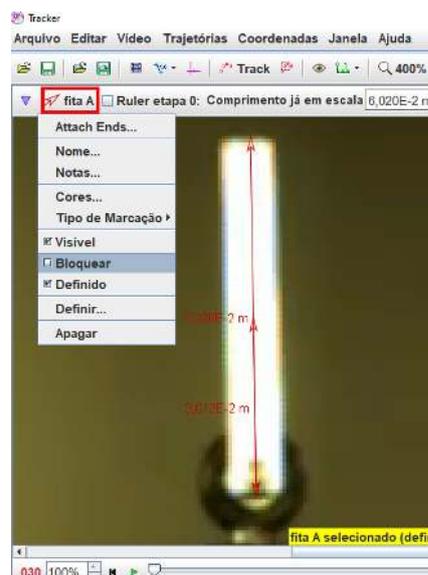
Para excluir o “Ponto de Massa”, basta clicar no ponto e em seguida clicar na tecla “Del” do teclado.

3. Com a ferramenta “Fita Métrica”, meça o comprimento da barra. Bloquee esta fita para que ela não se mova.

Para bloquear a “Fita Métrica”, clique na “fita A”, em seguida, na barra de ferramentas, clique em *fita A/ Bloquear* (Fig.4.7). O procedimento para bloquear as outras é o mesmo, apenas muda o nome da fita conforme elas são criadas.

4. Com uma segunda “Fita Métrica”, meça da parte inferior da barra até o seu centro. Bloquee esta fita também.

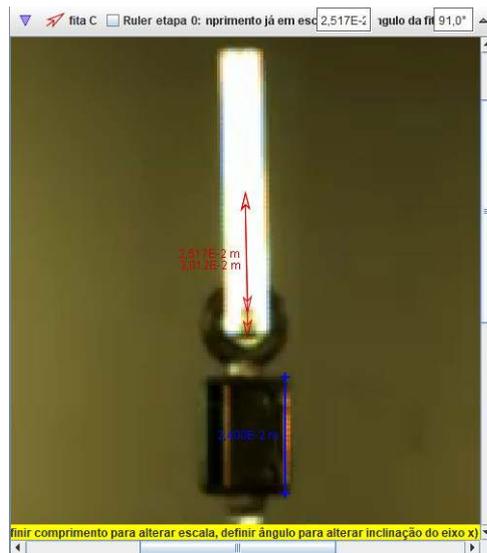
A Figura 4.7 mostra como posicionar as fitas métricas dos dois itens anteriores. Para medir o comprimento, uma fita vai da posição inferior da barra até a superior. A outra fita tem seu comprimento definido como metade da anterior e posicionada em cima dela, essa fita tem a função de marcar o centro de massa da barra. O comprimento da barra medido com a fita métrica é 60,20 mm. A medida feita com o paquímetro foi de 60,00 mm. Perceba que a medida com a “Fita Métrica” é bem próxima a do paquímetro.



**Figura 4.7:** Fitas métricas usadas para medir o comprimento da barra e marcar seu centro de massa. No canto superior esquerdo é mostrado o menu onde é possível bloquear a “Fita Métrica A”.

- Com uma terceira “Fita Métrica”, meça a distância do ponto de rotação da barra até o centro de massa.

A Fig. 4.8 mostra as duas fitas sendo usadas para medir a distância do eixo de rotação ao centro de massa. A medida do eixo de rotação ao centro de massa feita com a “Fita Métrica” é de 25,17 mm. A medida feita com o paquímetro foi de 26,70 mm.



**Figura 4.8:** Fitas métricas usadas para marcar o centro de massa e medir a distância eixo de rotação ao centro de massa.

- Salve esse arquivo novamente.
- Calcule o momento de inércia da barra usando o teorema dos eixos paralelos (Eq. 2) [6, p. 307-312]. Onde  $I_p$  é o momento de inércia da barra com relação a um eixo de rotação perpendicular a ela e que passa no centro do pivô,  $M$  é a massa da barra,  $L$  é seu comprimento e  $d$  é a distância entre o eixo perpendicular a barra, que passa pelo seu centro de massa e o eixo perpendicular a barra que passa pelo pivô. Observe que o furo não é considerado. Isso pode ser feito porque o diâmetro do furo é muito pequeno, sendo seu momento de inércia desprezível para os nossos cálculos.

$$I_p = \frac{ML^2}{12} + Md^2. \quad (2)$$

Usando os parâmetros medidos e disponibilizados:

$$I_p = \frac{0,0032 \times 0,06020^2}{12} + 0,0032 \times 0,02517^2 \approx 2,99 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

- Verifique se a condição de estabilidade foi cumprida (Eq. 3).

$$\omega A > \sqrt{\frac{2gI_p}{Md}}, \quad (3)$$

$$322,7 \times 3,299 \times 10^{-3} > \sqrt{\frac{2 \times 9,81 \times 2,99 \times 10^{-6}}{0,0032 \times 0,02517}},$$

$$1,06 \text{ m/s} > 0,85 \text{ m/s}.$$

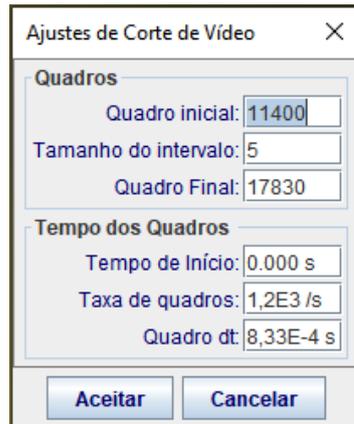
A condição para a estabilidade do pêndulo invertido foi cumprida. Esse resultado corrobora para que a condição de estabilidade prevista pelo modelo esteja correta. Aparentemente o modelo explica bem fenômeno.

**Atividade 2: Verificar a aproximação para a frequência angular do movimento lento da barra.**

O movimento do pêndulo preso a um pivô que oscila verticalmente pode ser descrito pela soma de dois movimentos, um rápido de baixas amplitudes e um lento de altas amplitudes. O movimento lento do pêndulo é aquele similar ao do pêndulo simples sob a ação apenas da gravidade. Já o rápido é tão veloz quanto o movimento do pivô. O olho humano perceberá bem o movimento lento, já o rápido, não. Na referência [1] é possível obter a Equação 4, que é uma aproximação para a frequência angular do movimento lento do pêndulo físico,  $\omega_{lenta}^{PF}$ . Onde  $A$  é a amplitude de oscilação do pivô,  $\omega$  é a frequência angular do pivô,  $M$  é a massa da barra,  $d$  é a distância entre o eixo perpendicular a barra, que passa pelo seu centro de massa e o eixo perpendicular a barra que passa pelo pivô,  $I_p$  é o momento de inércia da barra com relação a um eixo de rotação perpendicular a ela e que passa no centro do pivô e  $g$  é a aceleração da gravidade. A seguir compararemos o valor da frequência angular do movimento lento da barra, dado pela Equação 4, com o obtido através da análise do gráfico.

$$\omega_{lenta}^{PF} = \sqrt{\frac{(A\omega Md)^2}{2I_p^2} - \frac{gMd}{I_p}}. \quad (4)$$

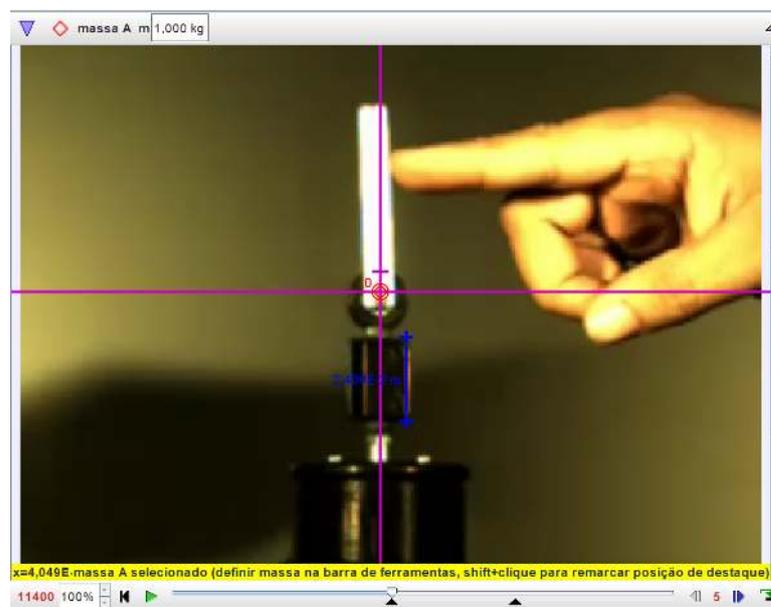
1. Ajuste o corte de vídeo da seguinte forma: Quadro inicial, 11400; Quadro final, 17830; Tamanho do intervalo, 5 e Taxa de quadros, 1200 *frames/s* (**Fig. 4.9**).



**Figura 4.9:** Janela “Ajustes de Corte de Vídeo” com os valores determinados para a análise.

2. No quadro inicial, crie os eixos de coordenadas com a origem em cima do ponto de rotação da barra e gire-os  $90^\circ$ . Os eixos de coordenadas podem ser girados selecionando-os e digitando o valor do ângulo em “*ângulo a partir da horizontal*”, logo abaixo da barra de ferramentas. (**Fig. 4.10**).
3. Use o “Bastão de Medição” para definir altura da parte retangular da base onde fica o pivô com  $0,024\text{ m}$  (**Fig. 4.10**).
4. No quadro inicial, crie um “Ponto de Massa” de trajetória automática no centro de rotação da barra (pivô). Utilize a trajetória automática para criar os pontos nos quadros. (**Fig. 4.10**)

Após finalizar os passos 2, 3 e 4, o quadro inicial deve ficar como na **Figura 4.10**.



**Figura 4.10:** Posicionamento dos eixos de coordenadas, “Bastão de Medição” e “Ponto de Massa A” no primeiro quadro da análise.

5. Utilize os pontos de “massa A” criados no item anterior como referência. Isso criará, fisicamente, um referencial não inercial.

No manual para o uso do *Tracker* é mostrado como se faz.

6. No quadro inicial, crie um ponto de massa de trajetória automática na parte superior da barra, bem no centro, onde está marcado. Use a trajetória automática.

A Figura 4.11 mostra onde criar o “Ponto de Massa B”.

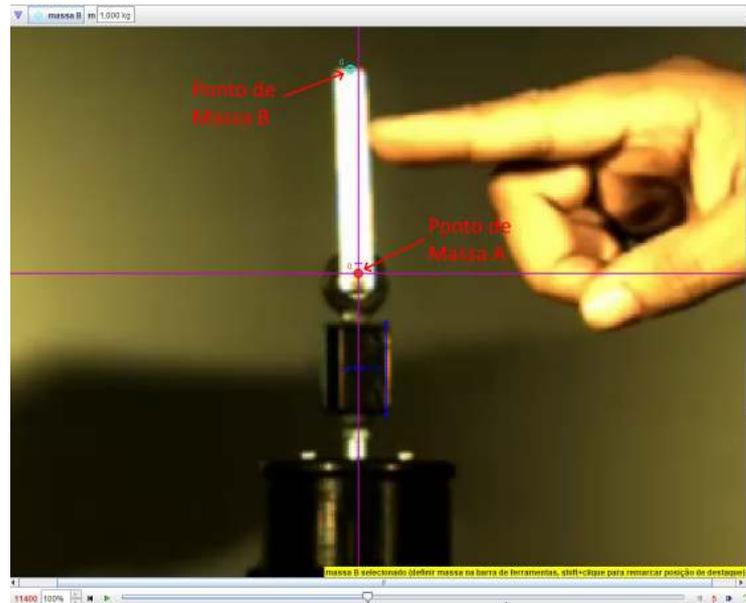
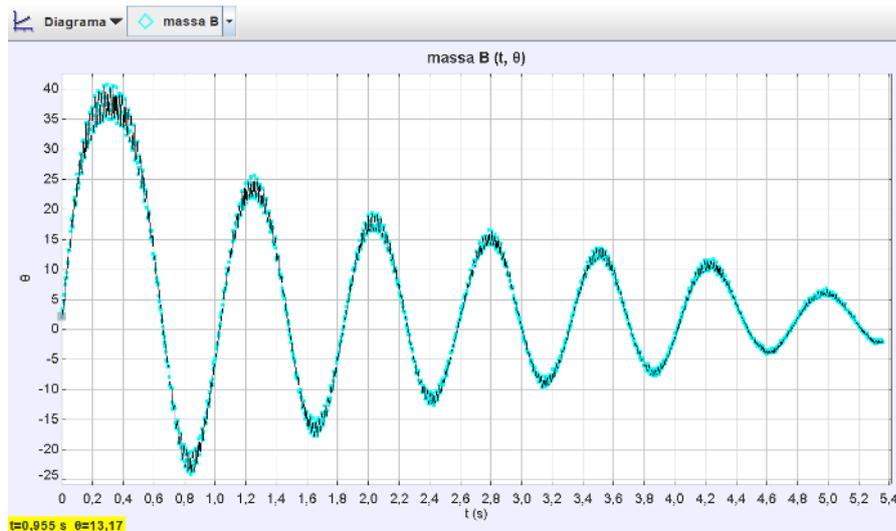


Figura 4.11: Posicionamento dos pontos de massa A e B no primeiro quadro da análise.

7. No gráfico correspondente aos pontos de “massa B” criados no item anterior, mude a variável do eixo vertical para  $\theta$ .

O gráfico obtido é mostrado na Fig. 4.12. Note que a variável  $\theta$  que aparece no gráfico feito no *Tracker* corresponde à variável  $\varphi(t)$  vista em [1]. Deve-se chamar a atenção dos alunos para as pequenas amplitudes de alta frequência sobrepostas em amplitudes maiores de baixa frequência. Deve-se, também, chamar a atenção para o decaimento das amplitudes maiores, que revelam o caráter dissipativo de um oscilador subamortecido.



**Figura 4.12:** Gráfico  $\theta \times t$  do “Ponto de Massa B” localizado na parte superior da barra de 60 mm.  $\theta$  está em graus e  $t$  em segundos.

8. Clique com o botão direito do mouse dentro da área do gráfico  $\theta \times t$ . Em seguida, clique em “Analisar...”.
9. Obtenha o tempo do último e do primeiro pico. Divida a diferença entre eles pelo número de oscilações para obter o período médio de oscilação.

$$T_M = \frac{4,9917 - 0,2958}{6} = 0,78265 \approx 0,7826 \text{ s.}$$

10. Utilize o resultado do item anterior para calcular a frequência angular da barra usando a Equação 1.

$$\omega_{lenta}^{PF} = \frac{2\pi}{0,78265} \cong 8,028 \approx 8,0 \text{ rad/s.}$$

11. Calcule a frequência angular da barra usando a Equação 4.

$$\omega_{lenta}^{PF} = \sqrt{\frac{(3,299 \times 10^{-3} \times 322,7 \times 0,0032 \times 0,02517)^2}{2 \times (2,99 \times 10^{-6})^2} - \frac{9,81 \times 0,0032 \times 0,02517}{2,99 \times 10^{-6}}},$$

$$\omega_{lenta}^{PF} \approx 12,1 \text{ rad/s.}$$

12. Compare os dois resultados obtidos anteriormente calculando o erro relativo entre eles.

Há uma discrepância muito grande entre os valores, cerca de 34%.

$$\text{Erro relativo} = \frac{8,0 - 12,1}{12,1} \times 100\% \approx -34\%.$$

13. O que pode ter causado a discrepância entre os valores encontrados?

Esta pergunta é para gerar uma discussão sobre o experimento e fazer com que os alunos reflitam sobre possíveis causas da discrepância entre os valores e apontar sugestões para corrigi-la. Não é necessário aprofundar muito. Desta forma, podem ser apontados alguns motivos para a discrepância, tais como:

- A principal causa da discrepância entre os valores está na análise de vídeo com o *software Tracker*. O valor da frequência está bem preciso, já que filmamos a 1200 fps e a frequência ficou bem próxima da medida que aparecia no *display* da bancada experimental. Contudo, o valor da amplitude do pivô não está com boa precisão e ele afeta muito o valor da frequência de oscilação da barra. O Valor da amplitude deveria ser de  $3,12 \pm 0,06$  mm, essa medida foi feita com o paquímetro já considerando uma folga no rolamento de 0,3 mm. Com a calibração feita no vídeo para obter os gráficos, dando bastante zoom, é possível medir a distância de cinco *pixels* com a “Fita Métrica”, dividindo esse valor por cinco, constata-se que um *pixel* mede aproximadamente 0,46 mm. Isso quer dizer que se errarmos um *pixel* na medida da amplitude do pivô, estaremos com um erro maior que 10% da medida feita com o paquímetro. Nesta análise, o erro relativo entre as medidas da amplitude de oscilação do pivô feitas com o *Tracker* e com o paquímetro é de aproximadamente 6%. Ainda, se utilizarmos no cálculo da frequência lenta, as medidas de amplitude de oscilação do pivô e o momento de inércia calculado com as medidas feitas com o paquímetro, obtemos  $\omega_{\text{lenta}}^{\text{PF}} \approx 9,67$  rad/s. Resultando em uma discrepância entre o valor experimental e o teórico de -17%. Uma filmagem com uma resolução maior ajudaria a diminuir os erros de medição de comprimento nos quadros da videoanálise.
- A frequência dada pela Eq. 4 é uma aproximação para ângulos pequenos. O ângulo de oscilação da barra não é pequeno. Para o pêndulo simples, a frequência diminui conforme a amplitude de oscilação aumenta [7, p. 68-72].

- O modelo é muito simples para descrever o comportamento de um pêndulo real. Seria necessário fazer novas considerações se quisermos descrever o comportamento do pêndulo no experimento tal como ele se encontra. Por exemplo, temos folgas em componentes mecânicos como o rolamento. O modelo não considera essas folgas.

Essas correções poderiam ser incluídas no modelo para tentar corrigir a discrepância, contudo os cálculos seriam mais complicados e fogem da proposta da atividade.

## 4.2 Gabarito das atividades de videoanálise utilizando o vídeo Pêndulo de Kapitza 2

Os passos dessas atividades são praticamente os mesmos das que utilizam o vídeo Pêndulo de Kapitza 1. Se precisar, consulte o arquivo da tarefa na pasta “Aluno”. A seguir, serão apresentados apenas o gabarito e os parâmetros necessários para o desenvolvimento das atividades.

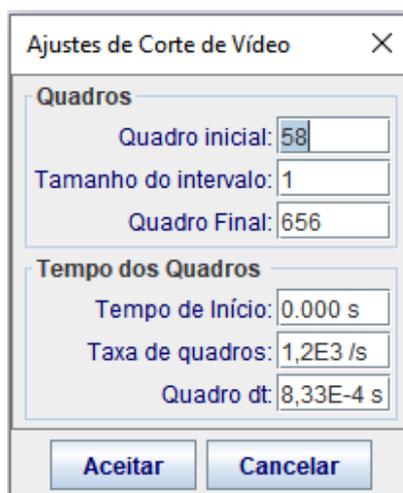
**Atividade 1 - primeira etapa: Obter a frequência angular e a amplitude de oscilação do pivô.**

Dados para a realização das tarefas 1 e 2:

Massa da barra: 4,7 g

Gravidade: 9,81 m/s<sup>2</sup>

1. O ajuste de corte de vídeo deve ser feito com os valores mostrados na Figura 4.13.



**Figura 4.13:** Janela “Ajustes de Corte de Vídeo” com os valores determinados para a análise.

2. Os eixos de coordenadas, o “Bastão de Medição” e o “Ponto de Massa” de trajetória automática devem ficar posicionados no primeiro quadro da análise, como mostrado na Figura 4.14.

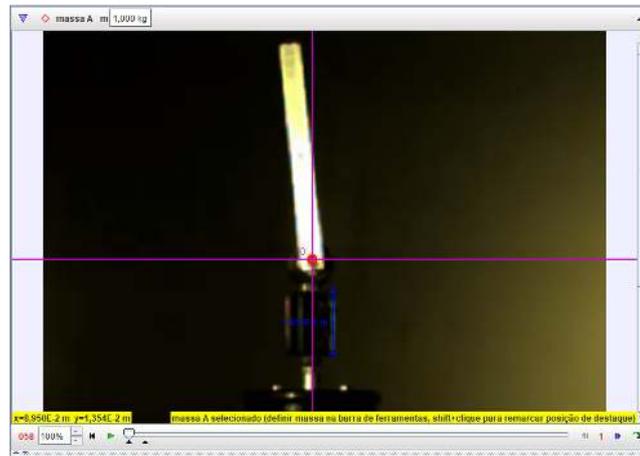


Figura 4.14: Eixos de coordenadas, “Ponto de Massa A” e “Bastão de Medição” no quadro inicial.

3. Após completada a trajetória automática, o gráfico deve ficar como na Figura 4.15.

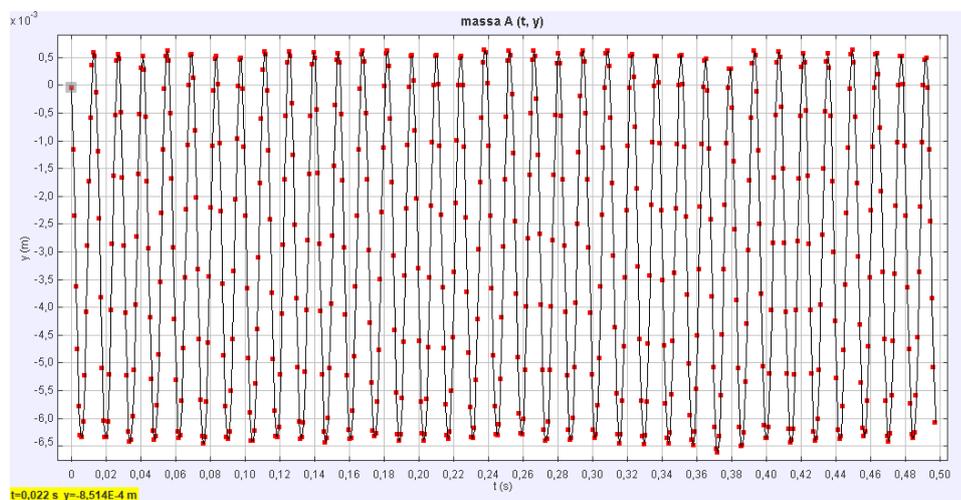
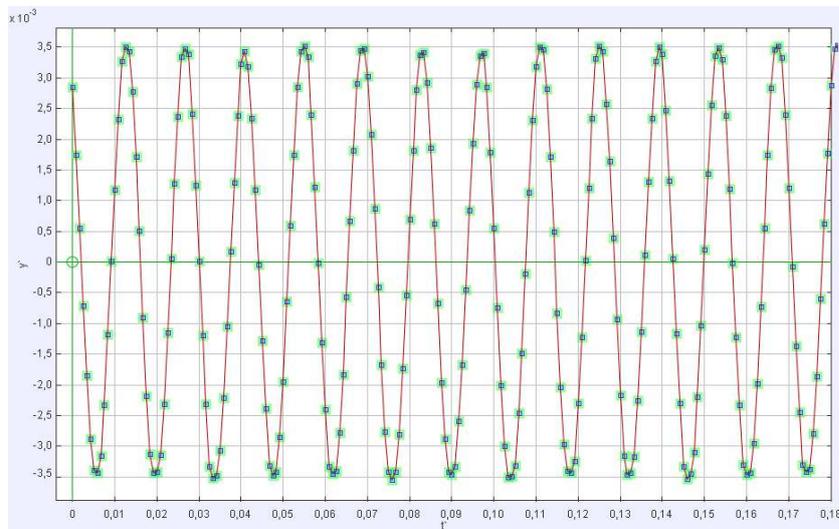


Figura 4.15: Gráfico  $y \times t$  obtido utilizando o “Ponto de Massa” de trajetória automática.

4. Feito o deslocamento do gráfico, ele deverá ficar como na Figura 4.16.



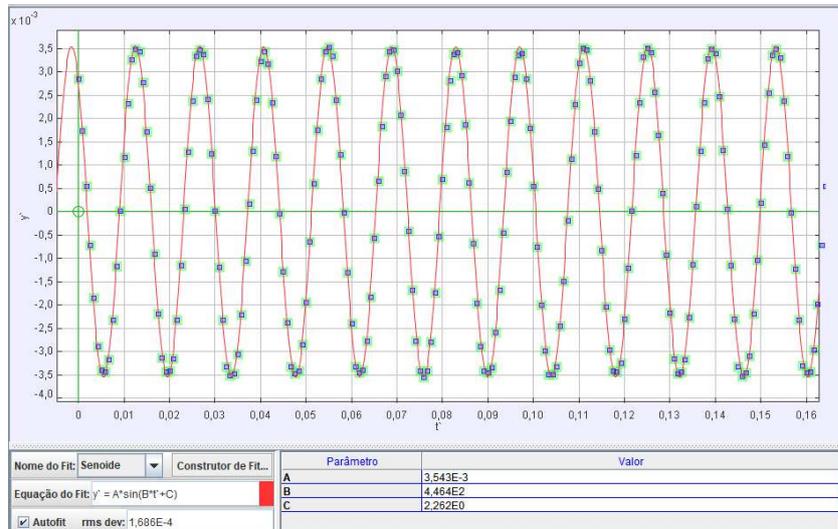
**Figura 4.16:** Gráfico com as novas coordenadas  $y' \times t'$  após o deslocamento vertical.  $y'$  está em metros e  $t'$  em segundos. Foi modificada a cor dos pontos.

5. Coloque o valor do parâmetro  $A$  como 0,0035. Este parâmetro está em metros.
6. Segue abaixo cálculo do período médio,  $T_M$ , utilizando os valores do último e primeiro pico do gráfico. Em seguida, é mostrado o cálculo do parâmetro  $B$ .

$$T_M = \frac{0,49167 - 0,0125}{34} = 0,0140932 \text{ s,}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{0,0140932} \approx 445,8 \text{ rad/s} = B.$$

7. No valor do parâmetro  $C$  pode ser colocado 2,188 para fazer o ajuste.
8. Marcada a opção *autofit*, a curva e os parâmetros ajustados devem ficar como na Fig. 4.17.
9. Os valores da amplitude de oscilação e frequência angular, após o ajuste são, respectivamente,  $A = 3,543 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $B = 446,4 \text{ rad/s}$ . O valor da constante de fase é  $C = 2,262 \text{ rad}$ . Assim, conseguimos verificar que o pivô executa, em uma ótima aproximação, um movimento harmônico simples dado pela equação  $y = 3,543 \times 10^{-3} \text{sen}(446,4t + 2,262)$ , onde  $y$  está em (m) e  $t$  em (s).

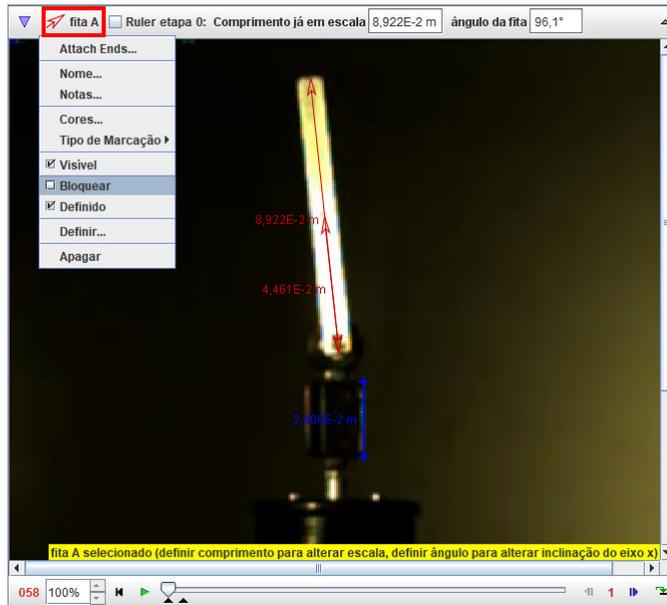


**Figura 4.17:** Gráfico  $y' \times t'$  do ponto de massa colocado no centro do pivô.  $y'$  está em metros e  $t'$  em segundos. No gráfico é possível ver o ajuste da função senoidal. Foi desativada a visualização da linha que une os pontos. Os parâmetros após o ajuste são:  $A = 3,543E-3$  m,  $B = 4,464E2$  rad/s e  $C = 2,262E0$  rad.

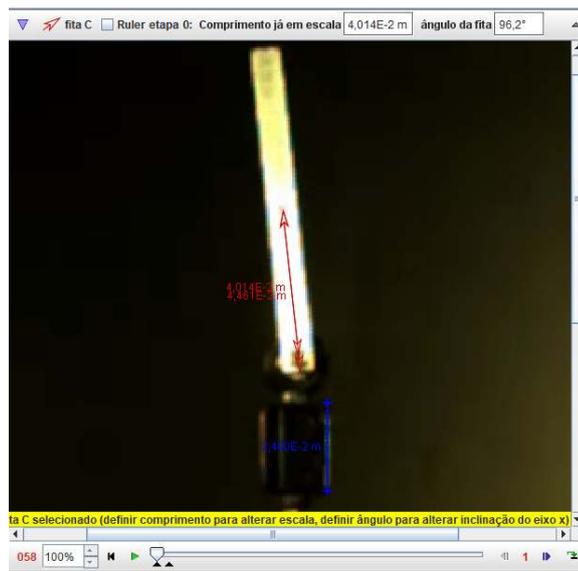
10. A aba do ajuste da curva deve ser salva como “ajuste seno 2”. O projeto deve ser salvo como “grafico da posicao do pivo 2”. O projeto deve ser salvo novamente, através de “Salvar como...”, com o título “inerçia 2”.

**Atividade 1 - segunda etapa:** Obter o momento de inércia e verificar a condição de estabilidade.

1. Para aproveitamento do corte de vídeo, deve ser aberto o arquivo “inerçia 2”.
2. A Figura 4.18 mostra como posicionar as fitas métricas usadas para medir o comprimento da barra e marcar a posição do centro de massa. Para medir o comprimento, uma fita vai da posição inferior da barra até a superior. A outra fita tem seu comprimento definido como metade da anterior e posicionada em cima dela, essa fita tem a função de marcar o centro de massa da barra. O comprimento da barra medido com a fita métrica é 89,22 mm. A medida feita com o paquímetro foi de 89,85 mm.
3. A Fig. 4.19 mostra as duas fitas sendo usadas para medir a distância do pivô ao centro de massa. A medida do centro do pivô ao centro de massa feita com a “Fita Métrica” foi de 40,14 mm. A medida feita com o paquímetro foi de 41,00 mm.



**Figura 4.18:** Fitas métricas usadas para medir o comprimento da barra e marcar seu centro de massa. No canto superior esquerdo é mostrado o menu onde é possível bloquear a “Fita Métrica A”.



**Figura 4.19:** Fitas métricas usadas para marcar o centro de massa e medir a distância do centro do pivô ao centro de massa.

4. Segue abaixo o cálculo do momento de inercia usando os parâmetros medidos e disponibilizados:

$$I_p = \frac{0,0047 \times 0,08922^2}{12} + 0,0047 \times 0,04014^2 \approx 1,069 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

5. O cálculo da verificação da condição de estabilidade é mostrado a seguir.

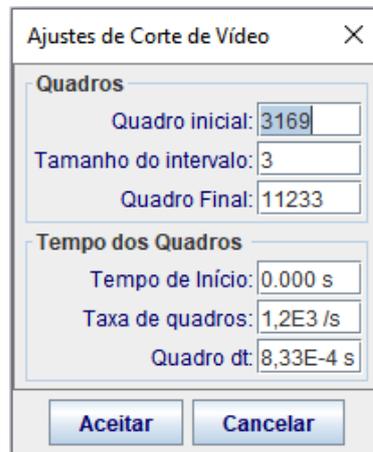
$$446,4 \times 3,543 \times 10^{-3} > \sqrt{\frac{2 \times 9,81 \times 1,069 \times 10^{-5}}{0,0047 \times 0,04014}},$$

$$1,58 \text{ m/s} > 1,05 \text{ m/s}.$$

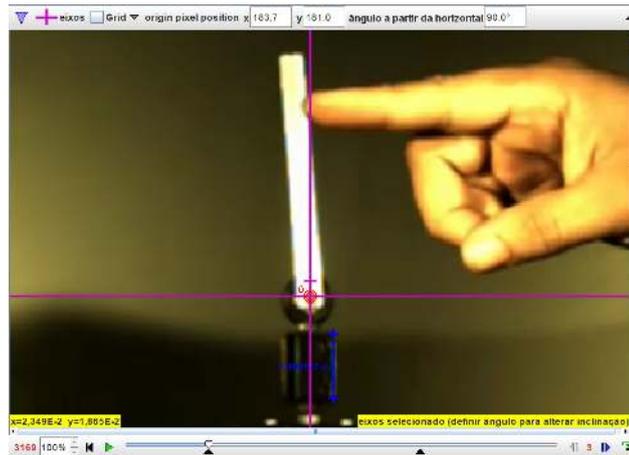
A condição para a estabilidade do pêndulo invertido foi cumprida. Esse resultado corrobora para que a condição de estabilidade prevista pelo modelo esteja correta. Aparentemente o modelo explica bem fenômeno.

**Atividade 2:** Verificar a aproximação para a frequência angular do movimento lento da barra.

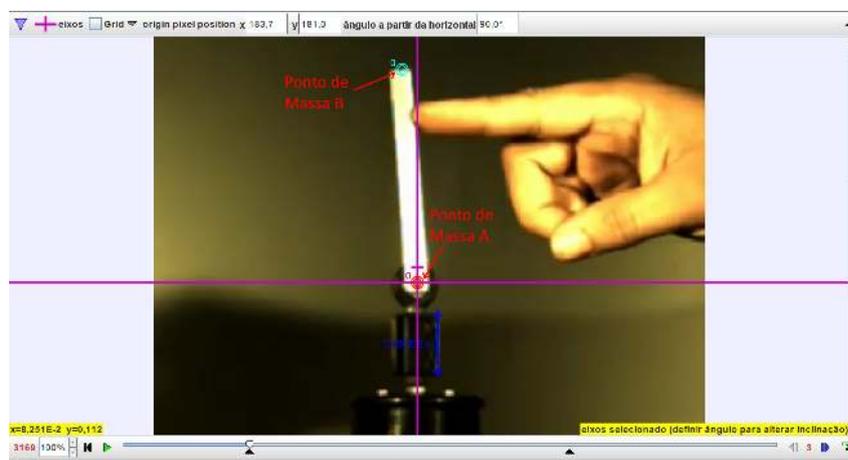
1. O ajuste o corte de vídeo deve ser feito com os valores mostrados na Figura 4.20.
2. Os eixos de coordenadas, o “Bastão de Medição” e o “Ponto de Massa A” de trajetória automática devem ficar posicionados no primeiro quadro da análise como mostrado na Figura 4.21.
3. A Figura 4.22 mostra onde colocar o “Ponto de Massa B” para trajetória automática, no primeiro quadro da análise, após a executada trajetória automática com o “Ponto de Massa A”.



**Figura 4.20:** Janela “Ajustes de Corte de Vídeo” com os valores determinados para a análise.

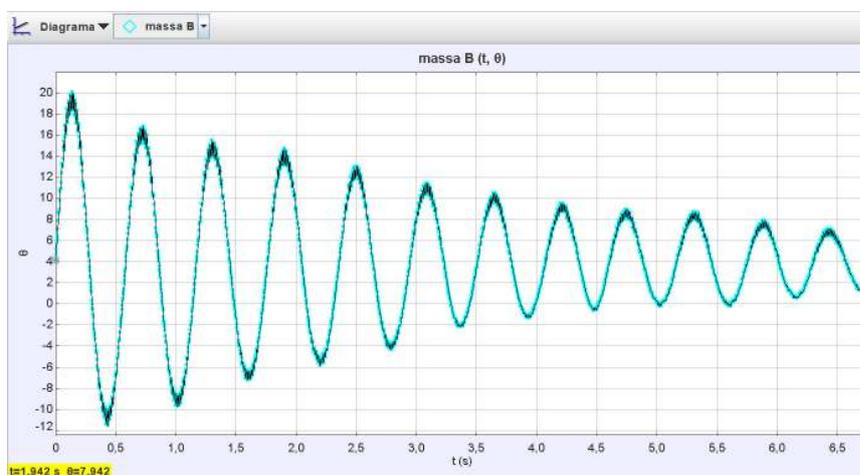


**Figura 4.21:** Posicionamento dos eixos de coordenadas, “Bastão de Medição” e “Ponto de Massa A” no primeiro quadro da análise.



**Figura 4.22:** Posicionamento dos pontos de massa A e B no primeiro quadro da análise.

4. O gráfico  $\theta \times t$  obtido após a trajetória automática do “Ponto de Massa B” é mostrado na Fig. 4.23.



**Figura 4.23:** Gráfico  $\theta \times t$  do “Ponto de Massa B” localizado na parte superior da barra de 90 mm.  $\theta$  está em graus e  $t$  em segundos.

5. Segue abaixo o cálculo do período médio,  $T_M$ , utilizando os valores do último e primeiro pico do gráfico.

$$T_M = \frac{6,4275 - 0,1350}{11} \approx 0,5720454 \text{ s.}$$

6. A seguir, é calculada a frequência angular do movimento lento da barra.

$$\omega_{lenta}^{PF} = \frac{2\pi}{0,5720454} \approx 11,0 \text{ rad/s.}$$

7. Segue abaixo o cálculo da frequência angular do movimento lento da barra, utilizando a Equação 4.

$$\omega_{lenta}^{PF} = \sqrt{\frac{(3,543 \times 10^{-3} \times 446,4 \times 0,04014 \times 0,0047)^2}{2 \times (1,069 \times 10^{-5})^2} - \frac{9,81 \times 0,0047 \times 0,04014}{1,069 \times 10^{-5}}}$$

$$\omega_{lenta}^{PF} \approx 14,7 \text{ rad/s.}$$

8. Abaixo é mostrado o erro relativo entre os dois valores encontrados para a frequência angular do movimento lento da barra.

$$\text{Erro relativo} = \frac{11,0 - 14,7}{14,7} \times 100\% \approx -25\%.$$

- Os motivos para a discrepância entre os valores são os mesmos mencionados na atividade com o vídeo Pêndulo de Kapitza 1. A diferença é que agora o erro é menor. Isso acontece devido a barra do vídeo Pêndulo de Kapitza 2 iniciar com um deslocamento angular menor. Assim, ela tende a ficar mais próxima da aproximação para ângulos pequenos dada pela Equação 4.
- O valor da frequência está bem preciso, já que filmamos a 1200 fps e a frequência ficou bem próxima da medida que aparecia no *display* da bancada experimental. Contudo, o valor da amplitude do pivô não está com boa precisão e ele afeta muito o valor da frequência de oscilação da barra. O Valor da amplitude deveria ser de  $3,12 \pm 0,06$  mm, essa medida foi feita com o paquímetro já considerando uma folga no rolamento de 0,3 mm. Com a calibração feita no vídeo para obter os gráficos, dando bastante zoom, é possível medir a distância de cinco *pixels* com a “Fita Métrica”, dividindo esse valor por cinco, constata-se que um *pixel* mede aproximadamente 0,55 mm. Isso quer dizer

que se errarmos um *pixel* na medida da amplitude do pivô, estaremos com um erro maior que 10% da medida feita com o paquímetro. Nesta análise, o erro relativo entre as medidas da amplitude de oscilação do pivô feitas com o *Tracker* e com o paquímetro é de aproximadamente 13,6%. Ainda, se utilizarmos no cálculo da frequência lenta, as medidas de amplitude de oscilação do pivô e o momento de inércia calculado com as medidas feitas com o paquímetro, obtemos  $\omega_{\text{lenta}}^{\text{PF}} \approx 11,1 \text{ rad/s}$ . Resultando em uma discrepância entre o valor experimental e o teórico de  $-1\%$ . Uma filmagem com uma resolução maior ajudaria a diminuir os erros de medição de comprimento nos quadros da videoanálise.

## 5 Construção e montagem do experimento Pêndulo de Kapitza

Caro professor, se você veio até este capítulo é porque gosta de construir experimentos bem elaborados. Na introdução, você leu que para estabilizar um pêndulo invertido (Pêndulo de Kapitza), é preciso fazê-lo oscilar rapidamente na direção vertical. Desta forma, precisamos de um mecanismo que realize oscilações com amplitude e frequência suficientes para estabilizar uma barra de determinadas dimensões na posição invertida. É interessante poder controlar e visualizar a frequência de oscilação se quisermos fazer uma análise quantitativa do experimento. Mudar a amplitude de oscilação e utilizar barras de comprimentos diferentes permite explorar diversas configurações do experimento.

Este capítulo é dividido em duas seções. Na seção 5.1 são dadas instruções para a construção e montagem da bancada experimental Pêndulo de Kapitza. Na seção 5.2 são dadas instruções sobre como utilizar a bancada experimental e os cuidados que se deve tomar para garantir uma maior vida útil do equipamento.

### 5.1 Construção e montagem

Nesta seção, serão dadas as instruções para a construção e montagem do experimento Pêndulo de Kapitza. A bancada experimental possui controle de frequência de oscilação e um *display* LCD para visualizar o valor da frequência em tempo real. É possível mudar a amplitude de oscilação trocando uma das peças. Observando o limite máximo, que consta nas instruções de uso, há também a possibilidade de serem usadas barras de comprimentos diferentes.

A montagem completa é mostrada na Fig 5.1. O valor do material para a construção totaliza aproximadamente R\$ 510,00. Os valores dos itens são mostrados na Tabela 1. No custo não está incluso o serviço de fabricação, ou seja, é considerado apenas o material. A lista dos parafusos está na Tabela 2. A Figura 5.2 mostra os tipos de parafusos, porcas e arruelas que são usadas na montagem do experimento. O custo de construção desta bancada pode variar de acordo com o interesse da pessoa. Por exemplo, pode-se eliminar a placa Arduino e o *display* com a interface serial I2C, caso não se queira visualizar o valor da frequência de oscilação do pivô em tempo real.



**Figura 5.1:** Bancada experimental Pêndulo de Kapitza.



**Figura 5.2:** Tipos de porcas, parafusos e arruelas usadas na montagem

**Tabela 1:** Material e custo. Os preços são referentes ao primeiro semestre do ano de 2021.

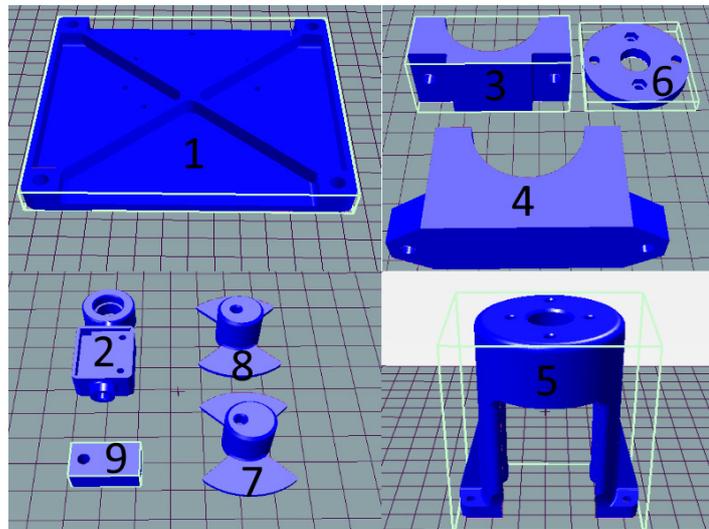
Quant.	Material	Preço
1 uni.	Motor DC 12 V 18200 RPM Akiyama - Ak555/390ml12s18200c	R\$ 33,45
1 uni.	Fonte Chaveada 10 A-12 V-120 W P/ CFTV Bivolt	R\$ 39,00
1 uni.	Arduino Uno R3 + Cabo Usb	R\$ 56,90
1 uni.	Display 1602 Backlight Azul	R\$ 17,00
1 uni.	Sensor de velocidade <i>encoder</i>	R\$ 8,90
1 uni.	Módulo interface serial I2C	R\$ 11,90
1 uni.	Controlador PWM de Velocidade p/ Motor DC 12 V a 40 V, 10 A	R\$ 38,85
1 uni.	Rolamento Linear Lm8uu	R\$ 10,90
1 uni.	Rolamento de esferas 623-2RS	R\$ 15,00
120 g	PLA	R\$ 15,10
400 g	PETG	R\$ 48,00
8 uni.	Borne p/ Plug Banana B10 4 mm - Médio	R\$ 16,00
8 uni.	Plug banana 4 mm	R\$ 16,00
54 uni.	Parafusos + porcas + arruelas	R\$ 15,20
1 uni.	Cabo Adaptador p/ Alimentação Arduino saída P4	R\$ 7,00
1 uni.	Tomada AC 10 A/250 VAC Tripolar para painel	R\$ 3,00
10 m	Fio 1,0 mm <sup>2</sup>	R\$ 15,00
1 uni.	Fusível 5 A, 5 × 20 mm	R\$ 0,50
1 uni.	Cabo de Força Tripolar 1,5 m para 10 A	R\$ 15,00
20 cm	Barra chata de alumínio 12,7 mm × 2,5 mm, 6061-T6	R\$ 3,00
1 uni.	Porta fusível 5 × 20	R\$ 2,00
22 g	Solda de Estanho em Fio Hikari HS-63	R\$ 13,00
5 m	Fita Isolante Preta, Anti-Chama, Kokay	R\$ 3,00
20 cm	Barra redonda aço inox 304, diâmetro 3,0 mm	R\$ 15,00
20 cm	Guia linear, diâmetro 8,00 mm, retificado, H7	R\$ 15,00
5 cm	Barra chata de alumínio 1" × 7/16", 6061-T6	R\$ 7,00
1 uni.	Anel o'ring 2-327	R\$ 6,00
10 uni.	Jumpers Macho/Fêmea - 20 cm	R\$ 4,50
1 uni.	Chave Gangorra KCD1-106N	R\$ 3,25
1 uni.	Capacitor 1000 $\mu$ F - 16 V	R\$ 0,50
1 uni.	Diodo 1N4007 - 1A	R\$ 0,10
1 uni.	Diodo 6A10	R\$ 0,65
20 g	Cola Tekbond 793	R\$ 7,50
1 uni.	Borracha 6 mm × 130 mm × 130 mm	R\$ 4,00
50 g	Graxa de silicone Allchem Premium	R\$ 28,70
2	Grampo Multiuso 6 pol (150 mm) Reforçado 7355 BRASFORT	R\$ 11,70
Total:		R\$ 507,60

**Tabela 2:** Especificação dos parafusos. O preço total dos parafusos, porcas e arruelas é encontrado na Tabela 1.

<b>Tampa da caixa PWM</b>
4 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M3 × 10 mm
<b>Placa PWM</b>
2 × Parafuso Phillips cabeça panela M4 × 10 mm
<b>Suporte porta fusível</b>
2 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M3 × 10 mm
<b>Tampa do Rolamento linear</b>
2 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M3 × 12 mm + 2 porcas M3
2 × Parafuso cabeça chata com fenda M4 × 12 mm
<b>Base do Motor</b>
2 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M4 × 35 mm + arruelas de pressão
2 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M4 × 20 mm + arruelas de pressão
<b>Base da Arduino</b>
2 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M2,5 × 6 mm
<b>Acabamento da Fonte</b>
3 × Parafuso cabeça chata com fenda M4 × 7 mm
2 × Parafuso Phillips cabeça panela M3 × 8 mm + 2 porca M3 - Tomada
1 × Parafuso Allen, cabeça cilíndrica M3 × 8 mm + Arruela lisa M3 + porca M3
<b>Sensor de velocidade encoder</b>
1 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M3 × 16 mm
<b>Base da carcaça porta rolamento linear</b>
4 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M3 × 12 mm + 4 arruela de pressão
<b>Suporte do Display LCD</b>
2 × Parafuso Phillips cabeça panela M4 × 16 mm + porca M4
4 × Parafuso Phillips cabeça panela M3 × 18 mm + porca M3
<b>Acoplamento do motor</b>
2 × Parafuso Allen sem cabeça M3 × 6 mm
<b>Fixação das peças do garfo escocês + fixação da barra</b>
1 × Parafuso Allen sem cabeça M4 × 16 mm
1 × Parafuso Allen sem cabeça M3 × 12 mm
1 × Porca M4
1 × Porca M3
1 × Porca M3 autotravante
1 × Parafuso cabeça cilíndrica com fenda M3 × 13 mm

Para que uma peça seja impressa em uma impressora 3D, é preciso ter um modelo tridimensional com extensão **.STL**. Os arquivos de extensão **.STL**, da bancada experimental Pêndulo de Kapitza, encontram-se na pasta “STLs\_Bancada\_Pêndulo\_de\_Kapitza” cujo acesso pode ser feito através do link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/). É recomendado no mínimo 70% de preenchimento nas peças. Os acoplamentos excêntricos devem ser impressos com 100% de preenchimento e preferencialmente em ABS (*Acrylonitrile Butadiene Styrene*) ou PETG (*Polyethylene Terephthalate Glycol*), pois eles resistem melhor ao aquecimento do pino devido ao atrito com o garfo escocês.

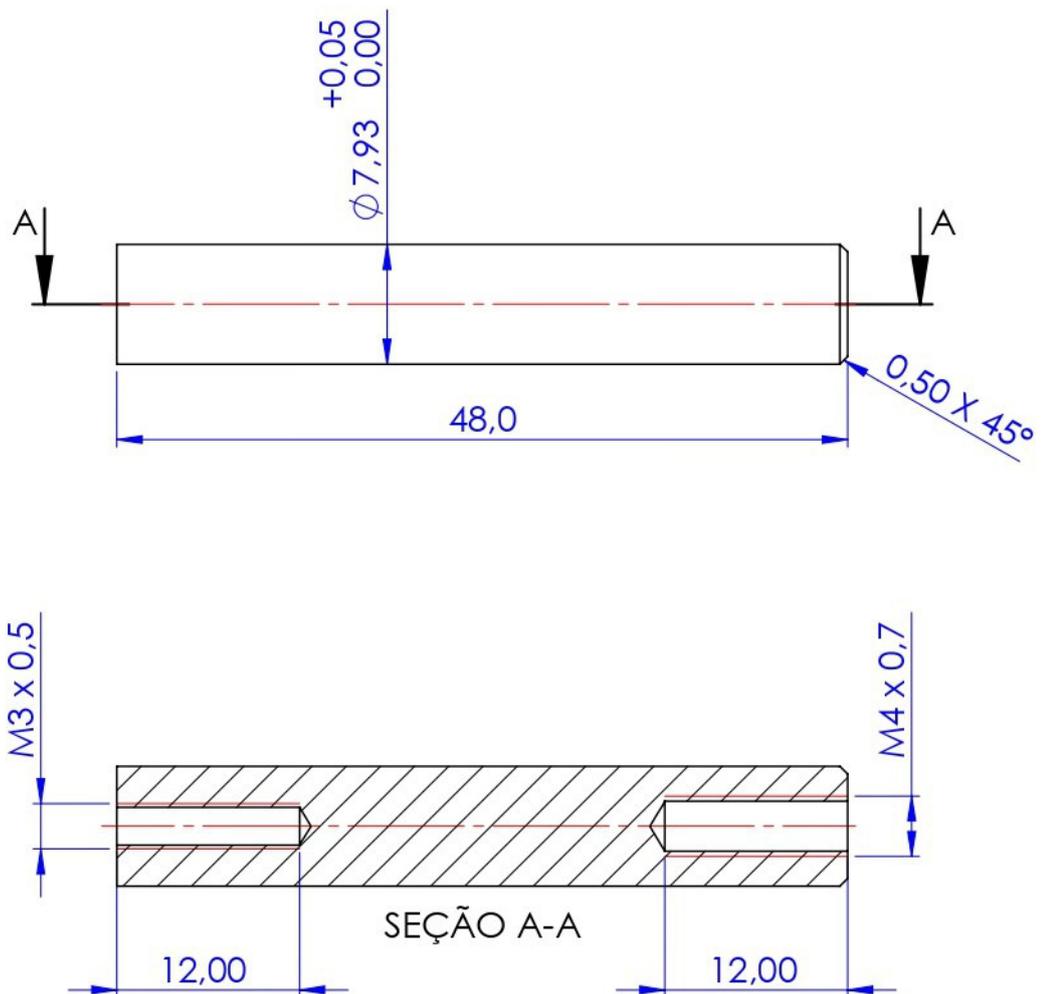
Imprima primeiro os arquivos da parte mecânica do experimento, pois o restante é acabamento para o *display*, placa PWM e fonte DC. É possível colocar o experimento para funcionar sem esses acabamentos. O nome das peças da parte mecânica são: base geral, base superior motor, base inferior motor, carcaça porta rolamento, base do pivô, tampa para rolamento linear, acoplamento excêntrico 3,0 mm e base sensor de velocidade encoder. Na Figura 5.3 são mostradas essas peças e a posição sugerida para impressão. Repare que há duas peças parecidas, esses são os acoplamentos excêntricos. Caso deseje mudar a amplitude de oscilação do pivô, imprima também o acoplamento de excentricidade 1,5 mm.



**Figura 5.3:** STLs das peças da parte mecânica nas suas posições sugeridas para impressão. 1 - base geral, 2 - base do pivô, 3 - base superior motor, 4 - base inferior motor, 5 - carcaça porta rolamento, 6 - tampa para rolamento linear, 7 - acoplamento excêntrico 3,0 mm, 8 - acoplamento excêntrico 1,5 mm, 9 - base sensor de velocidade encoder.

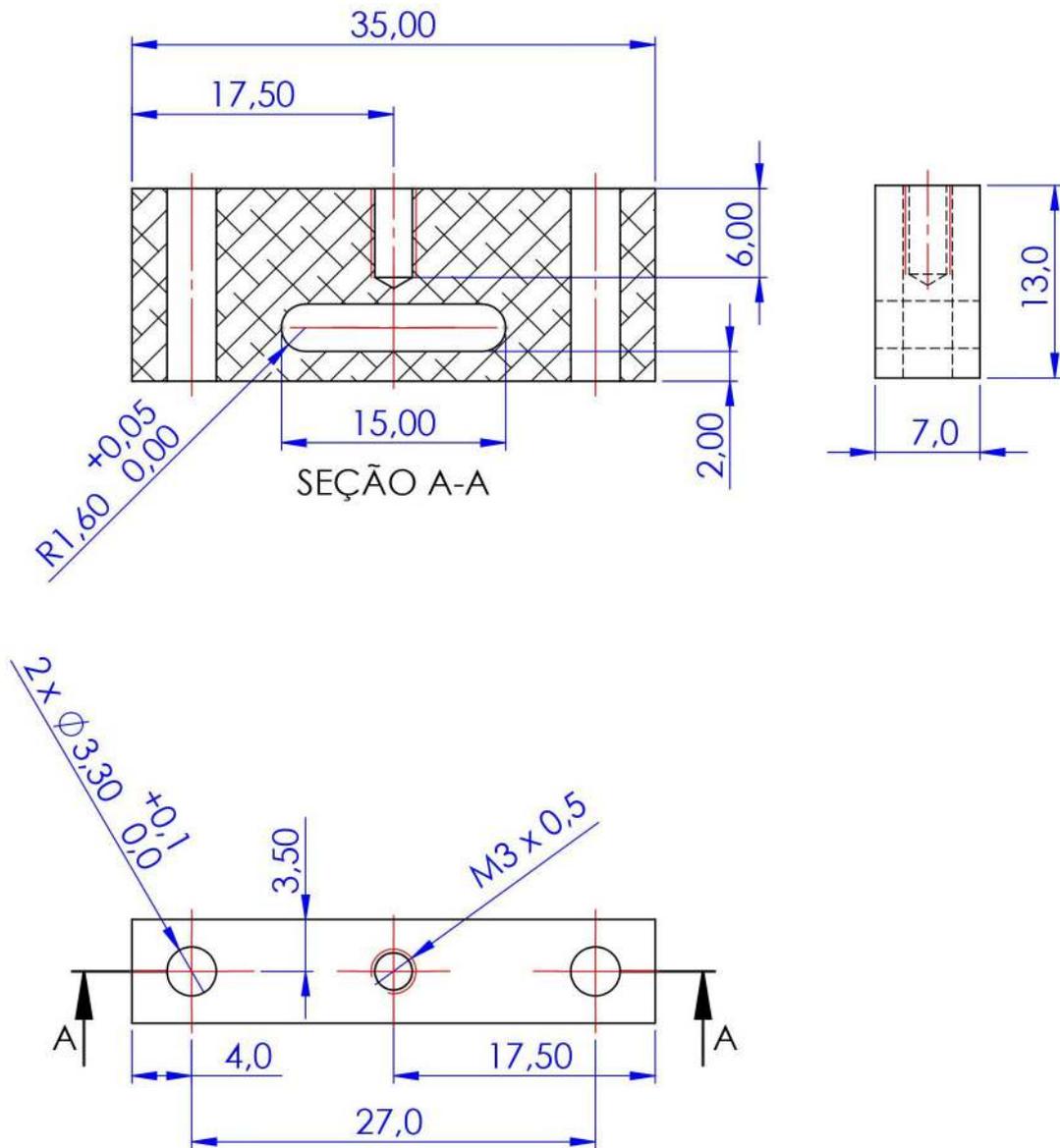
Todas as peças podem ser impressas com filamento PETG ou ABS. A base geral pode ser impressa em PLA (*Polylactic acid*). A quantidade necessária de PLA para imprimi-la está na Tabela 1. Alguns furos passantes precisarão ter rosca. As roscas são feitas com o próprio parafuso especificado na montagem. Você precisará fazer um pouco de força para fazer essas roscas. Isso é esperado porque o furo tem o diâmetro menor que o do parafuso para que o material possa ser retirado e a rosca feita. Tente entrar com o parafuso o mais na vertical possível para que ele não entre torto.

As peças responsáveis por transformar o movimento circular em retilíneo são o garfo escocês e as duas guias. Para garantir uma melhor homogeneidade das barras e maior vida útil do garfo escocês, essas peças precisam ser usinadas. As barras são feitas utilizando a barra chata de alumínio de 12,7 mm  $\times$  2,5 mm. O garfo escocês é feito com a guia linear que possui diâmetro nominal de 8,0 mm (essa guia também pode ser encontrada em impressoras jato de tinta, pois foi usada uma dessas no experimento proposto) e a barra chata de alumínio 1"  $\times$  7/16". Na posse desses materiais, fabricar conforme os desenhos mostrados nas Figuras 5.4, 5.5 e 5.6.



Medidas em milímetros  
 Título: cilindro do garfo escocês  
 Escala: 2:1  
 Material: aço SAE 1045  
 Acabamento: retificado  
 Caso não especificado, tolerância de  $\pm 0,1$  mm

**Figura 5.4:** Desenho de fabricação da peça cilindro do garfo escocês.



Medidas em milímetros.

Título: base do garfo escocês

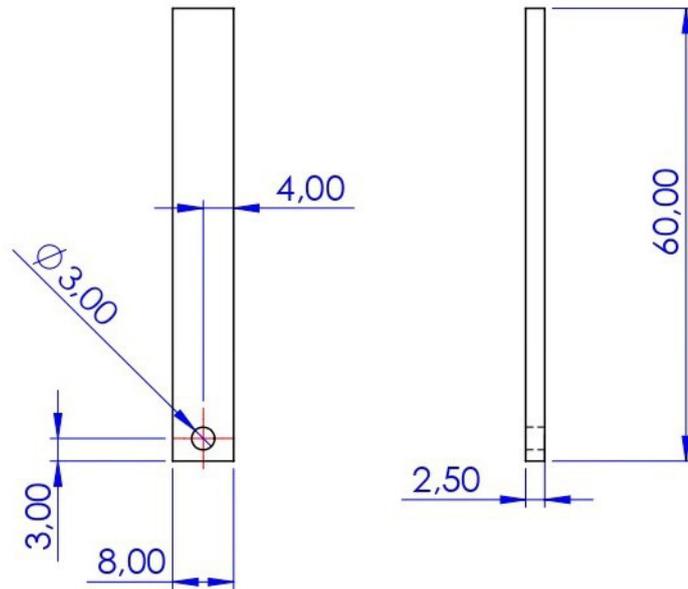
Escala: 2:1

Material: alumínio 6061-T6 ou similar

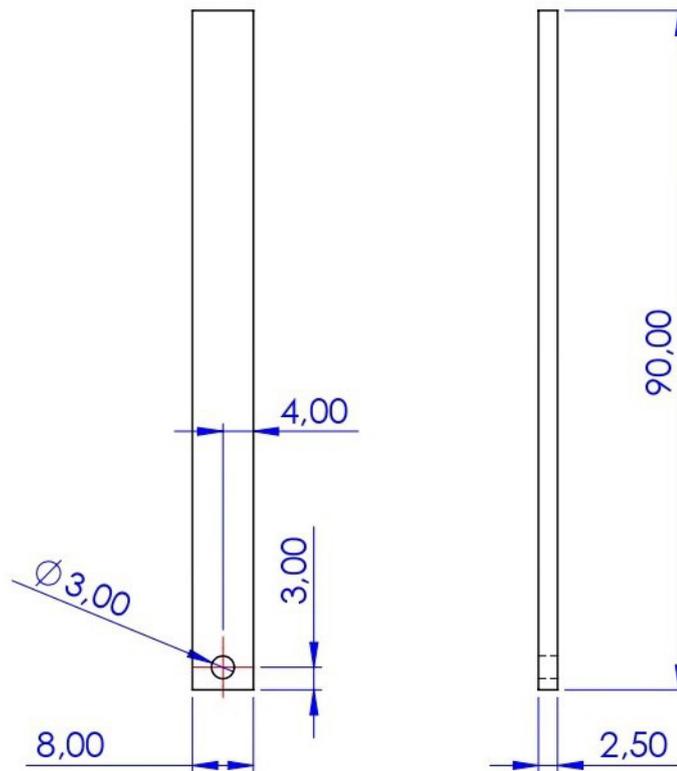
Caso não especificado, tolerância de  $\pm 0,1$  mm

**Figura 5.5:** Desenho de fabricação da peça base do garfo escocês.

### Barra 60 mm



### Barra 90 mm



Medidas em milímetros

Título: barras de alumínio

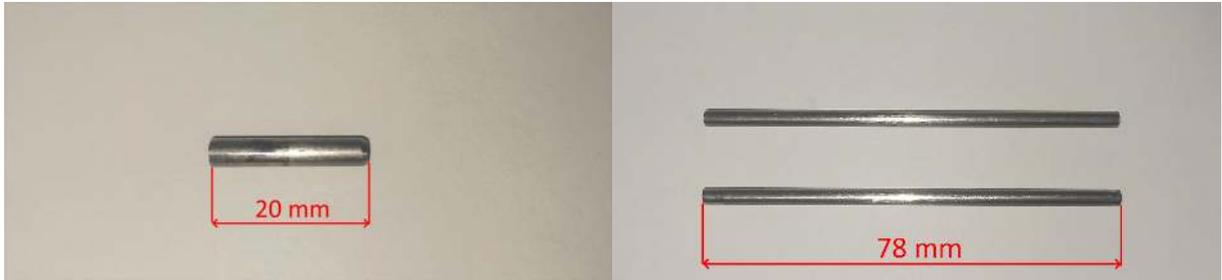
Escala: 1:1

Material: alumínio 6061-T6 ou similar

Caso não especificado, tolerância de  $\pm 0,1$  mm

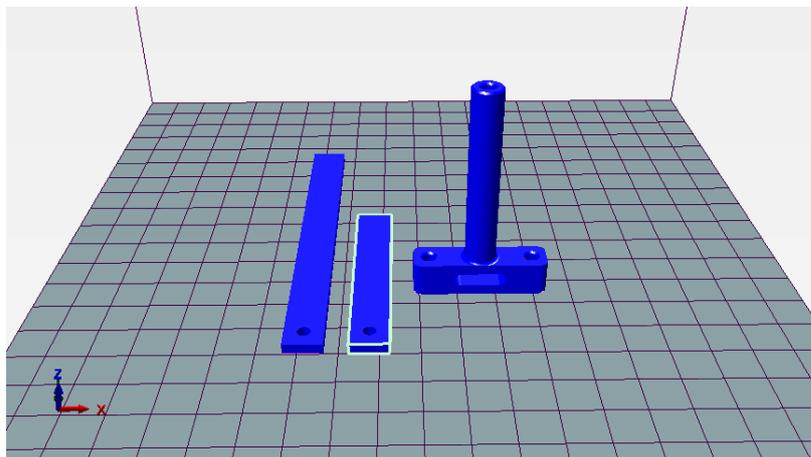
Figura 5.6: Desenho de fabricação das barras de 60 mm e 90 mm.

Para fazer as duas guias e o pino para o acoplamento excêntrico, corte a barra de aço inox de 3 mm de diâmetro com os comprimentos mostrados na Figura 5.7. As duas guias têm comprimentos iguais.



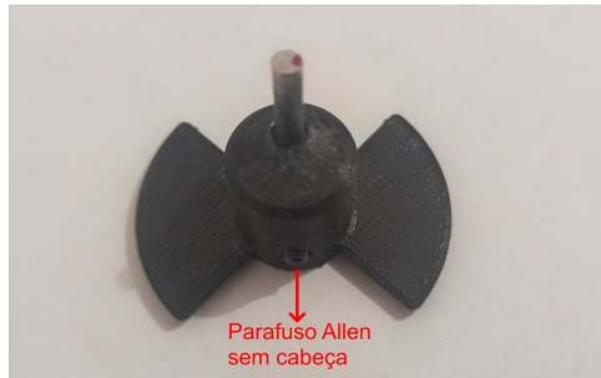
**Figura 5.7:** Pino para acoplamento excêntrico cortado com comprimento de 20 mm e guias cortadas com comprimento de 78 mm.

Foi disponibilizado o STL do garfo escocês para impressão. O experimento funciona com ele impresso, contudo devem ser usadas barras chatas impressas como pêndulo e não de alumínio, pois elas causam o rompimento da peça devido ao torque excessivo. Essas barras estão disponíveis para impressão nos comprimentos de 90 mm e 60 mm. O garfo escocês e as barras no formato STL, que foram disponibilizados para impressão, são mostrados na Figura 5.8. O garfo escocês deve ser impresso com 100% de preenchimento, preferencialmente em PETG, pois esse material tem maior resistência ao atrito que o PLA e o ABS. As barras podem ser impressas com 100% de preenchimento, utilizando PLA, PETG ou ABS.



**Figura 5.8:** Garfo escocês e barras para impressão.

Uma vez que as peças foram cortadas, usinadas e impressas, pode-se iniciar a montagem dos componentes. Primeiro vamos montar o pino no acoplamento com excentricidade de 3,0 mm. Passe a cola instantânea cianoacrilato no furo excêntrico do acoplamento e encaixe o pino de comprimento 20 mm nele batendo com um martelo. Tente deixar o pino o mais na vertical possível. Faça a rosca nos dois furos simétricos do acoplamento com o parafuso Allen sem cabeça M3 × 6 mm. Veja a Figura 5.9.



**Figura 5.9:** Acoplamento com excentricidade de 3 mm impresso.

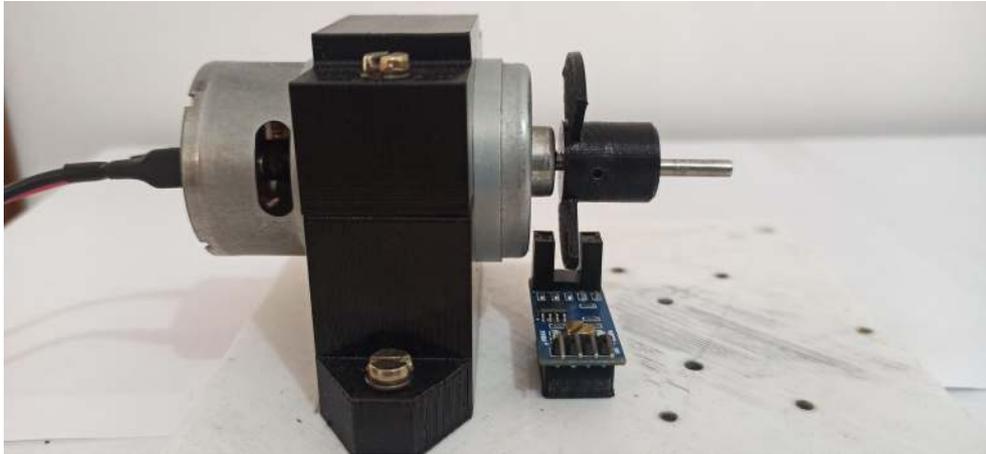
Corte dois pedaços de fio com 350 mm e solde os *plugs* banana em uma das pontas dos fios, a outra ponta é soldada no motor Fig. 5.10. A solda feita no motor pode ser isolada com fita isolante ou com tubo termo retrátil, neste material instrucional foi especificada a fita isolante. Monte o acoplamento com excentricidade de 3 mm no motor.



**Figura 5.10:** Motor com cabo soldado e acoplamento com excentricidade de 3 mm montado.

Monte o motor e o sensor de velocidade *encoder* na base geral conforme a Fig. 5.11. Certifique-se de que as paletas do acoplamento estejam passando no meio do sensor. Para unir as bases superior e inferior do motor são usados dois parafusos cabeça cilíndrica com fenda M4 × 35 mm e duas arruelas de pressão. A rosca é feita nos furos da base inferior. A fixação da base do motor na base geral é feita com dois parafusos cabeça cilíndrica com fenda M4 × 20 mm e duas arruelas de pressão. O sensor de velocidade *encoder* é fixado

na sua base e na base geral com um parafuso cabeça cilíndrica com fenda  $M3 \times 16$  mm. Para fixação das peças na base geral, as roscas são feitas nos furos da mesma.



**Figura 5.11:** Montagem do motor e do sensor de velocidade *encoder* na base geral.

Cole duas porcas M3 nos furos hexagonais da tampa para rolamento linear (Fig. 5.12).



**Figura 5.12:** Tampa para rolamento linear impressa.

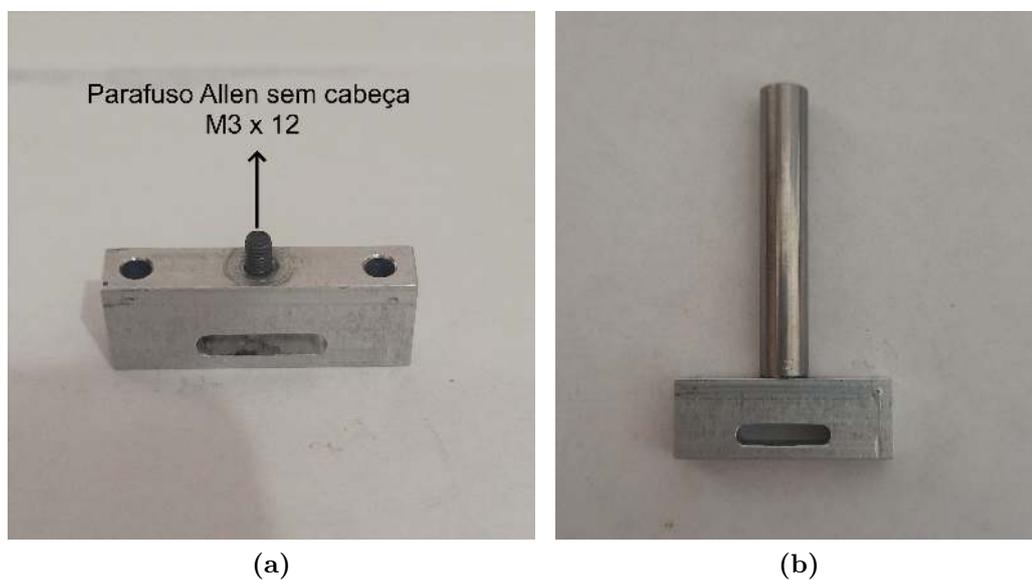
Monte o rolamento linear na carcaça porta rolamento. Não bata com o martelo direto no rolamento, use uma madeira por cima dele. Em seguida, monte a tampa para rolamento linear e o anel *o'ring* (anel de borracha) (Fig. 5.13).

A tampa é fixada na carcaça com dois parafusos cabeça chata com fenda  $M4 \times 12$  mm. Os dois parafusos cabeça cilíndrica com fenda  $M3 \times 12$  mm que passam nas porcas da tampa, servem como batente para as guias.



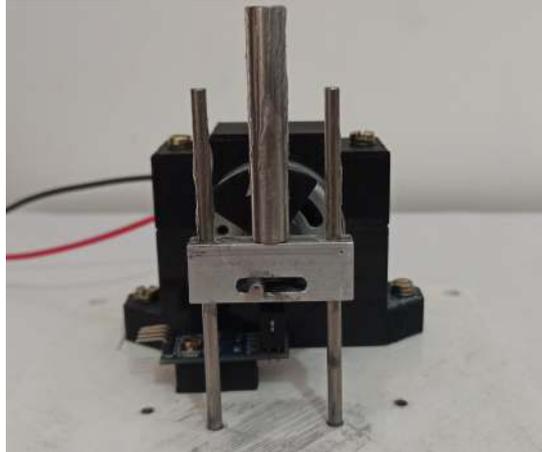
**Figura 5.13:** Montagem do rolamento linear, tampa para rolamento linear e do anel o'ring (anel de borracha) na carcaça porta rolamento.

Com as peças usinadas do garfo escocês, coloque o parafuso Allen sem cabeça M3 × 12 mm até o final do furo da base do garfo escocês (Fig. 5.14a), depois fixe bem a parte cilíndrica enroscando-a no parafuso utilizando as mãos (Fig. 5.14b). Caso escolha realizar a montagem com o garfo escocês impresso em 3D, vá para o próximo passo, já que ele é uma peça única.



**Figura 5.14:** (a) Peça base do garfo escocês com o parafuso Allen sem cabeça M3 × 12 mm. (b) Montagem completa do garfo escocês.

Passa a graxa nas guias, nos furos da peça de alumínio do garfo escocês e na sua parte cilíndrica. Monte conforme a Fig. 5.15. A montagem com o garfo escocês impresso também leva graxa nos furos e na parte cilíndrica para diminuir o atrito.



**Figura 5.15:** Montagem do garfo escocês e das guias.

A carcaça porta rolamento linear possui um detalhe na sua base permitindo que ela seja montada apenas de um lado quando o sensor de velocidade *encoder* está em seu lugar (Fig. 5.16). Ela também possui dois furos onde entram as guias. Os dois parafusos que passam nas porcas da tampa para rolamento linear devem ser ajustados de modo que encostem nas guias após a carcaça ser montada. Você pode tirar o anel *o'ring* para fazer esse ajuste. Você verá a tampa do rolamento dar uma leve subida quando o parafuso pressionar a guia.

Use quatro parafusos cabeça cilíndrica com fenda M3 × 12 mm e quatro arruelas de pressão para prender a carcaça na base geral.



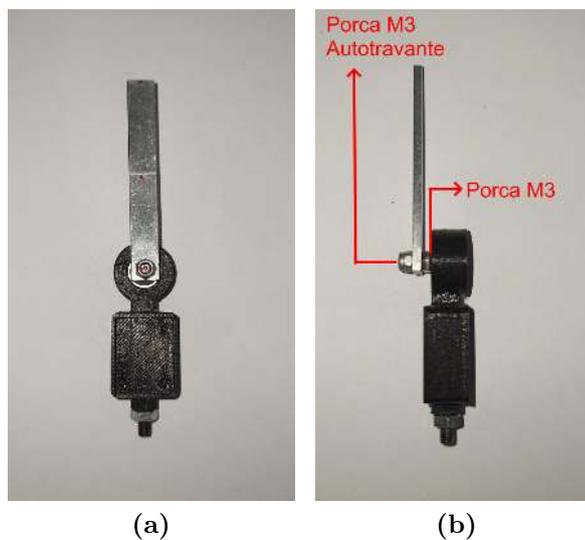
**Figura 5.16:** Montagem da carcaça porta rolamento na base geral. O detalhe na carcaça porta rolamento é um corte que foi feito na peça que demarca o lado que ela tem que ser montada. Não é possível montá-la utilizando o outro lado, pois a carcaça bate no sensor.

Passa cola na lateral do furo maior da peça base do pivô e coloque o rolamento 623-2RS até ele bater no batente do furo. Não bata diretamente no rolamento, use uma madeira por cima. Rosqueie um parafuso Allen sem cabeça M4 × 16 mm na parte inferior da base do pivô e coloque uma porca M4 neste parafuso deixando-o 5 mm para fora (Fig. 5.17). Caso deseje, essa peça possui dois furos onde pode ser preso um acelerômetro MPU6050. Podem ser usados dois parafusos cabeça cilíndrica com fenda M2,5 × 7 mm para prender o acelerômetro. Deve-se preparar um *sketch* no Arduino para seu funcionamento, pois o sensor não foi implementado nesta dissertação.



**Figura 5.17:** Montagem do rolamento 623-2RS e do parafuso de fixação na base do pivô.

Usando um parafuso cabeça cilíndrica com fenda M3 × 13 mm, uma porca M3 e uma porca M3 autotravante, prenda a barra de 60 mm ao rolamento. Veja as Figuras 5.18a e Fig. 5.18b).



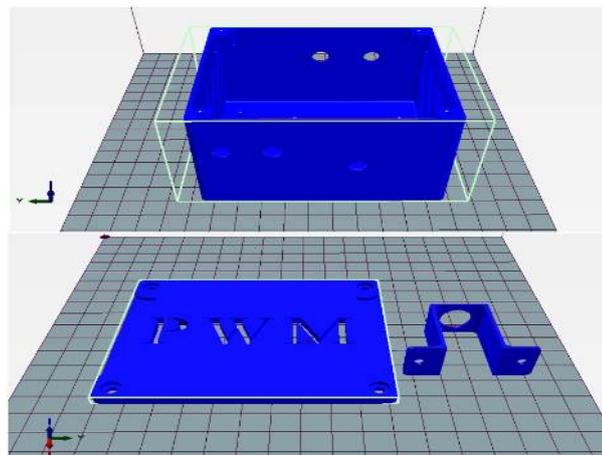
**Figura 5.18:** (a) Vista frontal da montagem da barra no pivô. (b) Vista Lateral da montagem da barra no pivô.

Monte o conjunto anterior no cilindro do garfo escocês. Ajuste a posição da base do pivô através da porca que está no parafuso e dê o aperto final. O conjunto mecânico completo deve ficar como mostrado na Fig. 5.19.



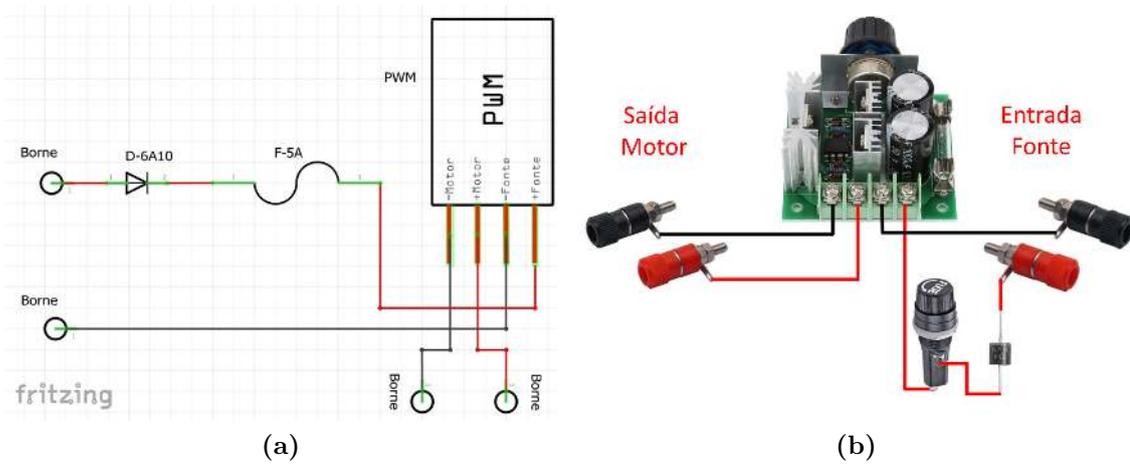
**Figura 5.19:** Conjunto mecânico completo.

Gire o acoplamento pela paleta e veja se o garfo escocês sobe e desce de forma suave. Se ele estiver travando, refaça a montagem do garfo escocês girando ele 180°. É importantíssimo que o movimento do garfo escocês seja suave, pois se houver travamento a corrente do motor vai aumentar, podendo queimar o circuito de proteção ou o próprio motor. Feitas as peças do conjunto mecânico, pode-se imprimir os outros conjuntos de peças. A Fig. 5.20 mostra o conjunto de peças da caixa para a placa PWM.



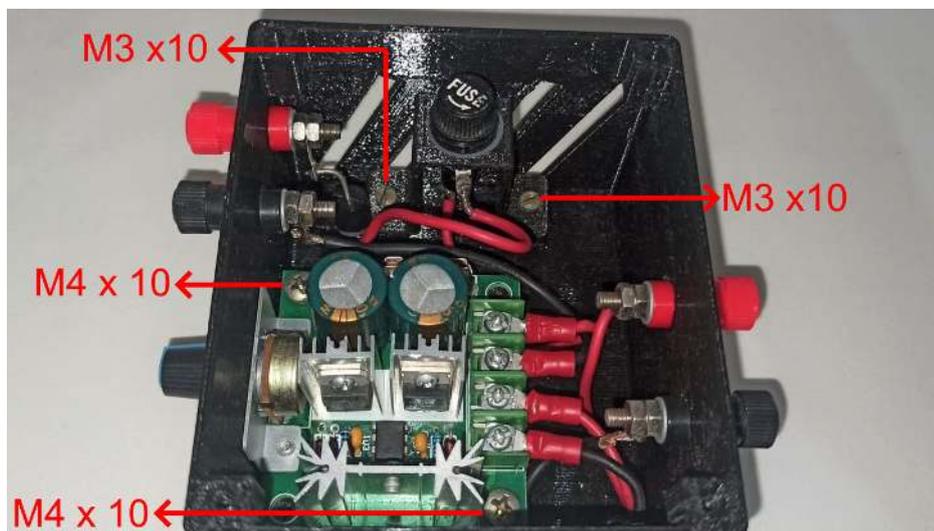
**Figura 5.20:** Peças caixa PWM, tampa PWM e suporte porta fusível.

Monte o circuito da caixa de acordo com os esquemas das Figuras 5.21a e 5.21b.



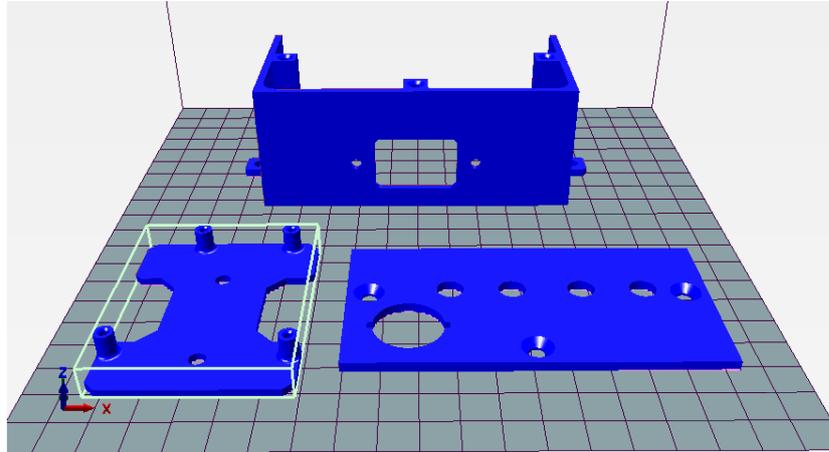
**Figura 5.21:** (a) Esquema elétrico simbólico da ligação da caixa PWM. Os bornes são entradas para os plugs banana, D-6A10 é o diodo de 6 A, F-5A é o fusível de 5 A (deve estar dentro do porta fusível), PWM é a placa PWM. (b) Esquema elétrico da ligação da caixa PWM com a imagem dos componentes.

A fixação da base do porta fusível é feita com dois parafusos cabeça cilíndrica com fenda  $M3 \times 10$  mm. A placa PWM é fixada por dois furos diagonais, utilizando dois parafusos Phillips cabeça panela  $M4 \times 10$  mm. Para fechar a caixa são usados quatro parafusos cabeça cilíndrica com fenda  $M3 \times 10$  mm. Todos os furos são rosqueados com os parafusos especificados. Veja a Fig. 5.22.



**Figura 5.22:** Montagem do circuito na caixa PWM.

A Fig. 5.23 mostra o acabamento da fonte 12V e a base da placa Arduino.



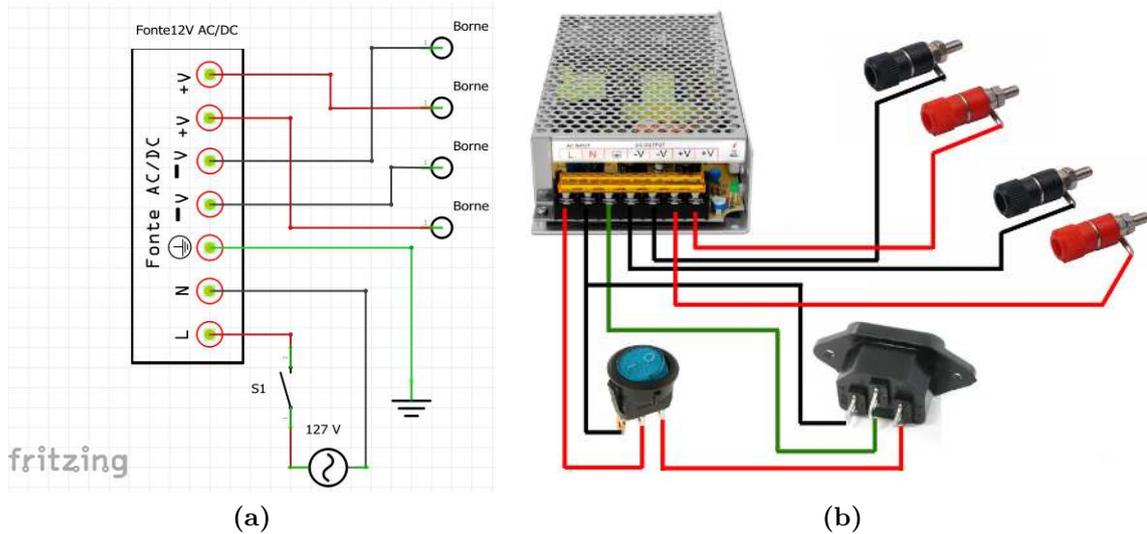
**Figura 5.23:** Peças base Arduino, acabamento fonte e tampa acabamento fonte.

O acabamento da fonte 12V encaixa apenas no modelo semelhante à fonte mostrada na Fig. 5.24.



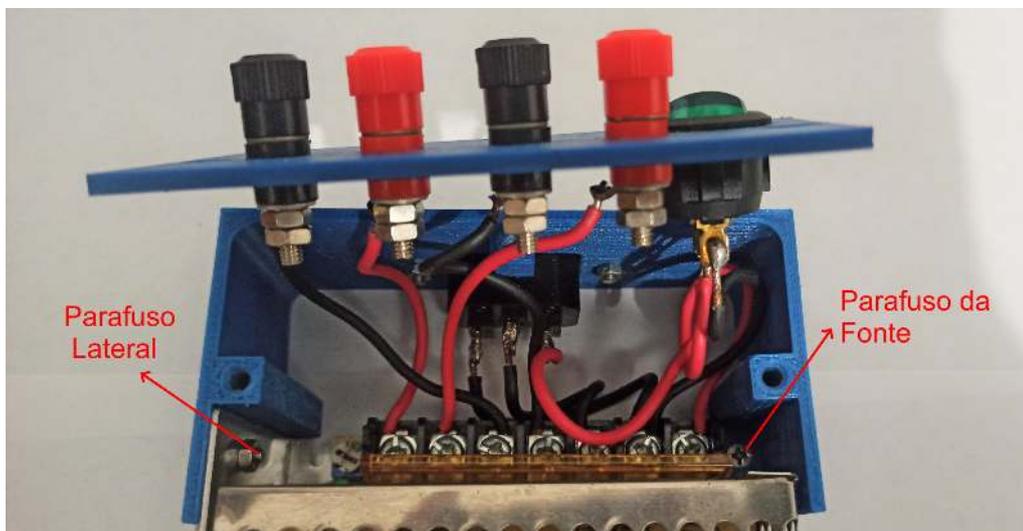
**Figura 5.24:** Modelo da fonte AC/DC 12V recomendada.

Os desenhos esquemáticos do circuito são mostrados nas Figuras 5.25a e 5.25b. Este circuito é montado após a chave liga/desliga, a tomada e os bornes serem instalados nos acabamentos (Fig. 5.26).



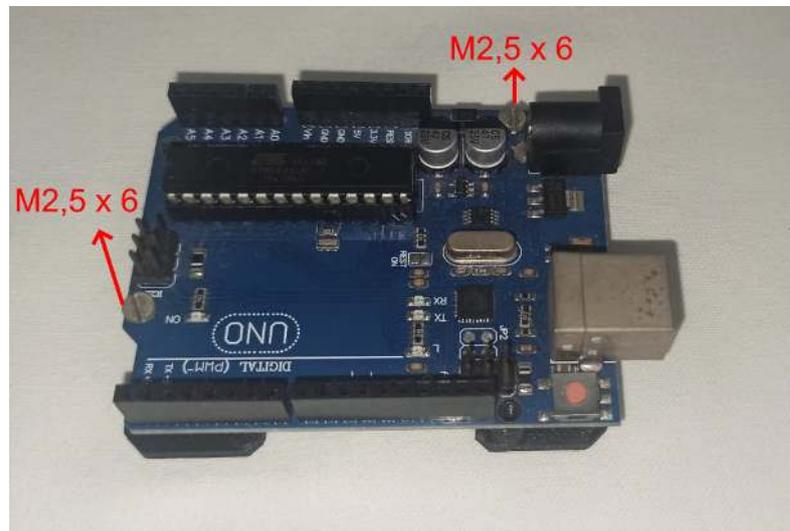
**Figura 5.25:** (a) Esquema elétrico simbólico da ligação da fonte. S1 é a chave liga/desliga. A fonte 127V representa a entrada de tensão alternada pela tomada de três pinos. O aterramento é feito na ligação da tomada. (b) Esquema elétrico da ligação da fonte com a imagem dos componentes.

O acabamento é fixado na fonte com um parafuso que já vem nela e com um parafuso Allen cabeça cilíndrica M3 × 8 mm, uma arruela lisa e uma porca M3, que prendem o acabamento na fonte pela lateral. A arruela lisa deve ficar embaixo da cabeça do parafuso Allen. A tomada é presa com dois parafusos Phillips cabeça panela M3 × 8 mm e duas porcas M3. A tampa do acabamento é presa com três parafusos cabeça chata com fenda M4 × 7 mm. Os furos do acabamento da fonte são rosqueados com o próprio parafuso para fixação da tampa. A Fig. 5.26 mostra como deve ficar a montagem.



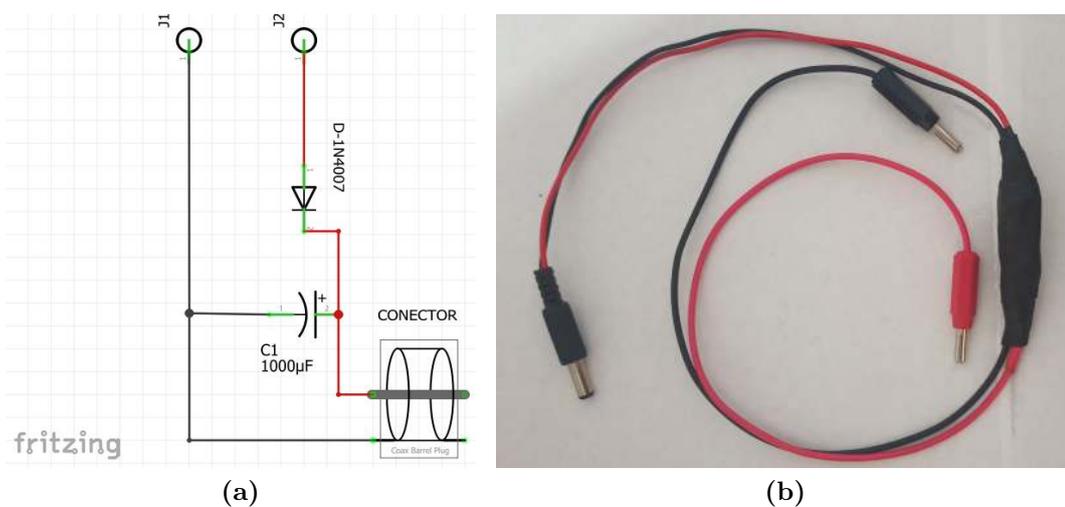
**Figura 5.26:** Montagem do circuito da fonte com o acabamento.

A placa Arduino é fixada em sua base com dois parafusos cabeça cilíndrica com fenda  $M2,5 \times 6$  mm (Fig. 5.27).



**Figura 5.27:** Montagem da placa Arduino na base.

Há um pequeno circuito que faz a ligação da fonte 12 V com a Arduino. Ele serve como filtro para retirar possíveis oscilações na tensão da fonte e protege contra ligação incorreta, em que se troca o fio positivo pelo negativo. O seu esquema e como ele deve ficar após a construção estão mostrados, respectivamente, nas figuras 5.28a e 5.28b. Após soldar o diodo e o capacitor nos fios, deve-se isolar cada um com fita isolante para não fechar curto circuito. Após isolar os fios separadamente, passe fita isolante unindo os dois fios. O isolamento também pode ser feito com tubo termo retrátil. Por fim, solde os plugs banana.



**Figura 5.28:** (a) Esquema elétrico do cabo de ligação da Arduino. D1N4007 é o Diodo de 1 A, J1 e J2 são conectores do tipo banana, C1 é o capacitor de  $1000 \mu\text{F}$ . (b) Como deve ficar o cabo de ligação da Arduino.

O esquema elétrico geral sem os bornes está mostrado na Fig. 5.29.

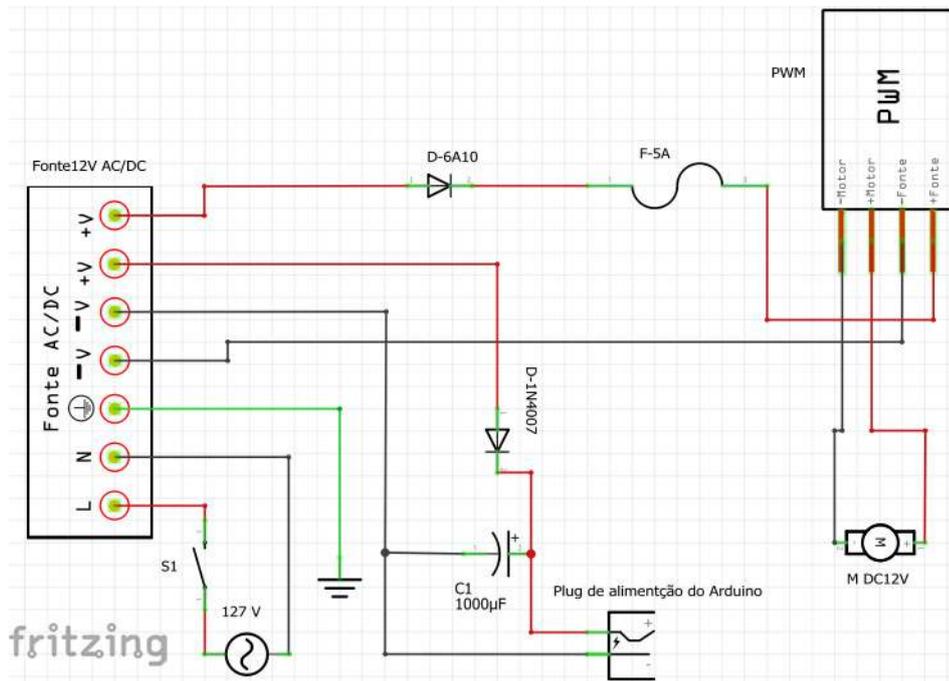


Figura 5.29: Esquema elétrico geral sem os bornes.

A Fig. 5.30 mostra o conjunto de peças para o suporte do *display*.

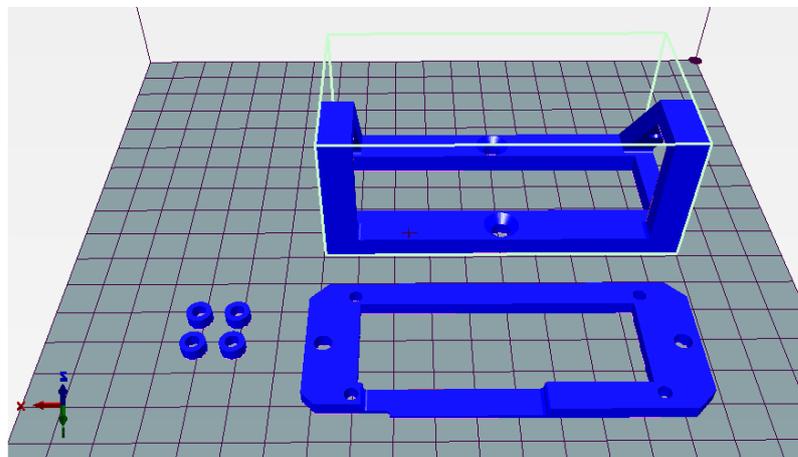
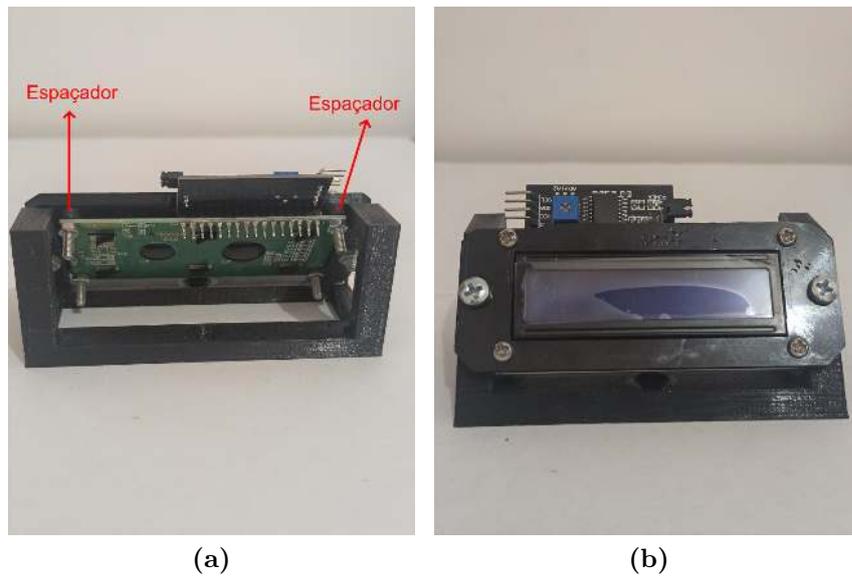


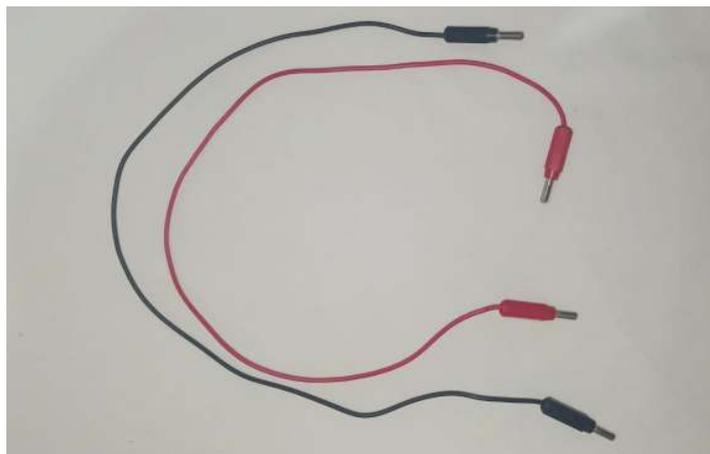
Figura 5.30: Conjunto de peças para o suporte do *display*. Espaçadores *display*, moldura *display* e suporte *display*.

Solde o módulo interface serial I2C no *display* e monte-o na moldura utilizando os espaçadores, quatro parafusos Phillips cabeça panela M3 × 16 mm e quatro porcas M3 (Fig. 5.31a). Em seguida fixe a moldura com o *display* no suporte com dois parafusos Phillips cabeça panela M4 × 16 mm e duas porcas M4. A Fig. 5.31b mostra a vista frontal da montagem.



**Figura 5.31:** (a) Vista traseira da montagem do *display* no suporte. (b) Vista frontal da montagem do *display* no suporte.

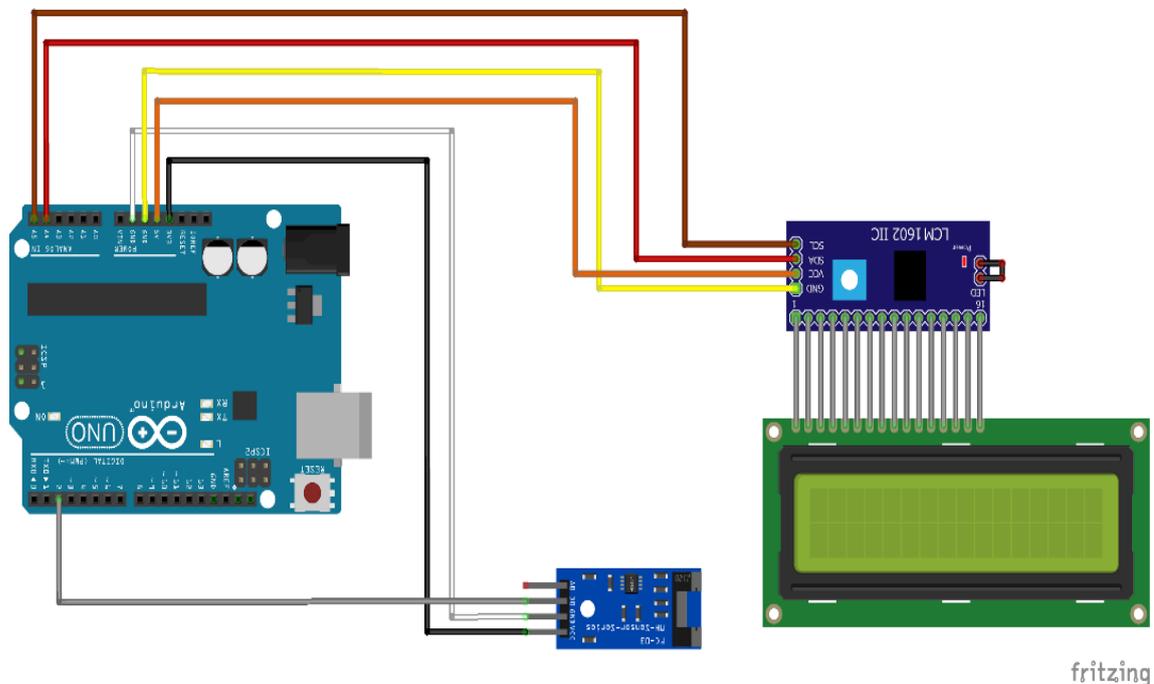
Corte dois pedaços de fio com 500 mm e solde conectores banana nas duas pontas (Fig. 5.32).



**Figura 5.32:** Fios para ligar a fonte à caixa PWM.

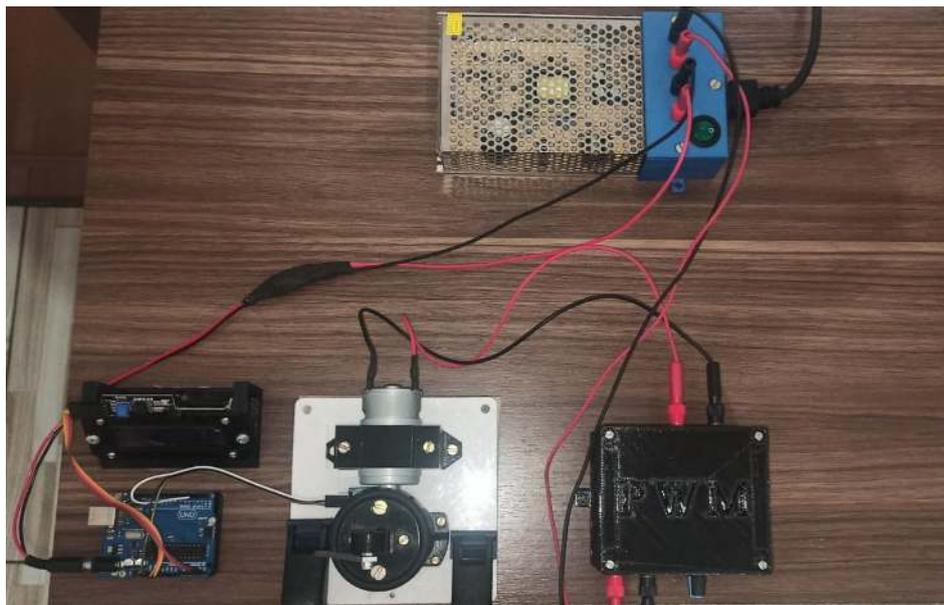
No Kit Educacional há um arquivo com extensão **.ino**, com um *script* que deve ser carregado na placa Arduino. O arquivo **.ino** pode ser acessado através do link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/), entrando na pasta “Medidor\_de\_frequência” e depois em “sketch\_medidor\_de\_Frequencia”. O nome do arquivo é o mesmo da pasta em que ele se encontra. Após baixar o arquivo, abra-o com o programa Arduino, instale a biblioteca “LiquidCristal\_I2C” [8] e carregue o *script* na placa. O *script* foi feito para mostrar a frequência de oscilação do pivô no *display* em tempo real. Ele também pode ser visto no Apêndice C.

Utilizando os *Jumpers* macho/fêmea, faça a ligação do sensor de velocidade *encoder* e do *display* com a placa Arduino como na Fig. 5.33. Repare que quem faz a comunicação entre a Arduino e o *display* é a placa serial I2C que está soldada no mesmo.



**Figura 5.33:** Esquema de ligação do *display* e do sensor de velocidade *encoder* na Arduino.

Coloque a parte mecânica em cima da borracha e prenda-a na mesa com os dois grampos especificados na Tabela 1. É recomendado que cole a base da placa Arduino, a fonte, a base do *display* e a caixa PWM na mesa com fita dupla face. A montagem final deve ficar como na Fig. 5.34. A vista frontal da montagem final é mostrada na Fig. 5.1.



**Figura 5.34:** Vista superior da bancada experimental.

O vídeo da bancada experimental Pêndulo de Kapitza em funcionamento pode ser acessado na pasta “Vídeos”, através do link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/). Ele pode ser exibido para os alunos caso o professor opte por uma aula expositiva.

## 5.2 Instruções de uso

Após fazer todas as ligações como na Fig. 5.34, com o potenciômetro do PWM no mínimo, ligue a fonte AC/DC. Segure a barra na posição vertical superior como mostrado na Fig. 5.35 e aumente a rotação do motor girando o potenciômetro do PWM até a barra ficar estável. Após a barra adquirir estabilidade, podem ser dados pequenos impulsos em suas laterais para visualizar ela realizando oscilações em torno da posição de estabilidade.



**Figura 5.35:** Como segurar a barra na posição vertical superior.

A Tabela 3 mostra as frequências mínimas para a estabilidade das barras de alumínio para cada configuração do experimento Pêndulo de Kapitza feita nesta dissertação.

**Tabela 3:** Frequência mínima de estabilidade das barras de alumínio para três configurações do experimento.

Barra	Excentricidade nominal do pino	Frequência do pivô
60 mm	3,0 mm	$47 \pm 1$ Hz
60 mm	1,5 mm	$79 \pm 1$ Hz
90 mm	3,0 mm	$60 \pm 1$ Hz

Pode ser que com essas frequências a barra não fique estável totalmente na vertical, apresentando alguma inclinação.

Como foi dito anteriormente, é possível mudar a amplitude de oscilação trocando o acoplamento. Para fazer a troca do acoplamento, basta tirar a parte superior da base do motor, retirá-lo e substituir o acoplamento. Uma vez que esteja tudo alinhado, evite mexer na fixação da carcaça porta rolamento.

Alguns cuidados devem ser tomados para não danificar a bancada experimental e garantir maior vida útil do equipamento. Desta forma, o usuário deve seguir as recomendações listadas abaixo:

- Não ligue a bancada experimental se as partes que irão sofrer atrito não estiverem com graxa. A graxa diminuirá o atrito e aumentará a vida útil dos componentes.
- Não mexa no potenciômetro do PWM se o garfo escocês não estiver subindo e descendo suavemente nas guias e no rolamento linear. Se o garfo escocês estiver travando, isso irá aumentar a corrente do motor e possivelmente o fusível de 5 A irá queimar.
- Não fique mais de 50 s com a bancada ligada quando a frequência estiver acima de 30 Hz. A peça onde fica o pino excêntrico é de plástico, assim, ela não pode ficar muito tempo submetida ao calor gerado pelo atrito do pino com o garfo escocês. Caso o pino solte devido ao aquecimento da peça, o recomendado é imprimir outra.
- Após 50 s com a bancada em funcionamento, esperar no mínimo 1 min para acionar novamente. Esse procedimento serve para esfriar um pouco o pino antes de acionar novamente a bancada.
- Não passe de 85 Hz. Frequências acima desse limite poderão danificar a bancada experimental.
- Não use barras de alumínio com as dimensões maiores que a barra de 90 mm especificada. O uso de barras maiores irá gerar muito esforço nos componentes mecânicos, podendo causar danos.

## Referências

- [1] BUTIKOV, E. I., Kapitza Pendulum: *A Physically Transparent Simple Explanation*, p. 1-19, Disponível em <http://butikov.faculty.ifmo.ru/InvPendulumCNS.pdf>, Acesso em: 05 de Fev. 2022.
- [2] Collected Papers of P. L. Kapitza, edited by D. Ter Haar, Pergamon Press, vol. 2, p. 714–737, London, 1965.
- [3] JESUS, V. L. B., *Experimentos e Videoanálise - Dinâmica*, 1. ed., Editora Livraria da Física, São Paulo, 2014.
- [4] *Tracker Video Analysis and Modeling Tool*. Disponível em: <https://physlets.org/tracker/>, Acesso em: 11 de Jan. de 2022.
- [5] *Open Source Physics (OSP)*. Disponível em <https://www.compadre.org/osp/webdocs/about.cfm>. Acesso em: 07 de Jan. de 2022.
- [6] NUSSENZVEIG, H. M., *Curso de física básica, 1: Mecânica*, 5. ed., São Paulo: Blücher, 2014.
- [7] NUSSENZVEIG, H. M., *Curso de física básica, 2: fluidos, oscilações e ondas, calor*, 5. ed., São Paulo: Blücher, 2014.
- [8] RICKMAN, J., *LiquidCristal\_I2C: LiquidCrystal Arduino library for I2C LCD displays*, Disponível em: [https://github.com/johnrickman/LiquidCrystal\\_I2C](https://github.com/johnrickman/LiquidCrystal_I2C), Acesso em: 20 de Mar. de 2022.

## **A Atividades de videoanálise com o vídeo Pêndulo de Kapitza 1**

Para a realização desta atividade, o vídeo Pêndulo de Kapitza 1 deve ser baixado. Ele pode ser encontrado na pasta “Vídeos\_para\_análise”, através do link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/).

## Atividades de videoanálise utilizando o vídeo Pêndulo de Kapitza 1

**Atividade 1 - primeira etapa: Obter a frequência angular e a amplitude de oscilação do pivô.**

No modelo apresentado nesta dissertação, é considerado que o pivô executa um movimento harmônico simples (MHS) ([1], p. 59 - 65). Nesta tarefa verificaremos se o pivô do experimento Pêndulo de Kapitza satisfaz esta condição e obteremos a amplitude e a frequência angular do movimento.

Dados para a realização das tarefas 1 e 2:

Massa da barra: 3,2 g

Gravidade: 9,81 m/s<sup>2</sup>

1. No *Tracker*, abra o vídeo “Pêndulo de Kapitza 1”.
2. Ajuste o corte de vídeo da seguinte forma: Quadro inicial, 30; Quadro final, 630; Tamanho do intervalo, 1 e Taxa de quadros, 1200 *frames/s*.
3. No quadro inicial, ponha os eixos de coordenadas com a origem em cima do ponto de rotação da barra (pivô).
4. Use o “Bastão de Medição” para definir altura da parte retangular da base onde fica o pivô com 0,024 m. Feito isso, o sistema está calibrado para realizar medidas.
5. No mesmo quadro inicial, crie um “Ponto de Massa” para trajetória automática na interseção dos eixos de coordenadas.
6. Use a trajetória automática para obter a posição em função do tempo do pivô.
7. Clique com o botão direito do mouse dentro da área do gráfico  $y \times t$ . Em seguida, clique em “Analisar...” .
8. Mova o gráfico em  $y$  tentando fazer com que as amplitudes na região positiva e negativa do eixo vertical do gráfico sejam divididas igualmente pela linha que representa eixo horizontal.
9. Escolha o ajuste senoidal.
10. Estime o parâmetro  $A$  apenas analisando as amplitudes do gráfico gerado com a trajetória automática.

11. Estime o parâmetro B. Para isso, você precisará calcular o período médio de oscilação,  $T_M$ , o que é feito obtendo o tempo do último e primeiro pico (isso é feito para pegar o maior número de oscilações possível) e dividindo pelo número de oscilações (número de picos menos um). Em seguida, usa-se a Equação 1 para estimar o parâmetro B. Onde  $T$  é o período de oscilação de um movimento harmônico simples e  $\omega$  é a frequência angular.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1)$$

12. Ajuste o parâmetro C manualmente na janela de ajuste de curva, no campo “Valor”. Para um melhor ajuste, pode ser usado o incremento em 1% ao invés de 10%.
13. Após os parâmetros terem sido estimados, clique na opção *Autofit*. Se a curva ajustada não estiver boa, provavelmente o *offset* em  $y$  não está correto. Ajuste o gráfico em  $y$  mais um pouco e clique na opção *Autofit* novamente.
14. Anote os valores dos parâmetros A e B obtidos após o ajuste.
15. Salve a aba do ajuste como “ajuste seno”. A extensão do arquivo é .xml.
16. Salve o projeto como “grafico da posicao do pivo”. A extensão do arquivo é .trk.
17. Salve o arquivo acessando *Arquivo/Salvar Como....* Salve como “inercia”. Isso foi feito para aproveitar o corte de vídeo e a calibração feitos anteriormente. Este arquivo será aberto no próximo encontro.

**Atividade 1 - segunda etapa: Obter o momento de inércia e verificar a condição de estabilidade.**

A estabilidade do pêndulo invertido é alcançada quando na média, o torque inercial causado pelo movimento do pivô supera o torque da força peso. Na referência [2] é possível obter a condição de estabilidade do pêndulo físico dada pela Equação 3. A seguir obteremos o momento de inércia da barra que está no vídeo Pêndulo de Kapitza 1 e verificaremos se os parâmetros do experimento satisfazem a esta condição.

1. Abra o arquivo “inercia”. O arquivo com extensão .trk salvo na atividade anterior.
2. No quadro 30, delete o “Ponto de Massa” desse quadro e tire a visualização dos eixos de coordenadas clicando no ícone dos eixos na barra de ferramentas.
3. Com a ferramenta “Fita Métrica”, meça o comprimento da barra. Bloqueie esta fita para que ela não se mova.
4. Com uma segunda “Fita Métrica”, meça da parte inferior da barra até o seu centro. Bloqueie esta fita também.

5. Com uma terceira “Fita Métrica”, meça a distância do ponto de rotação da barra até o centro de massa.
6. Salve esse arquivo novamente.
7. Calcule o momento de inércia da barra usando o teorema dos eixos paralelos (Eq. 2) ([3], p. 307 - 312). Onde  $I_p$  é o momento de inércia da barra com relação a um eixo de rotação perpendicular a ela e que passa no centro do pivô,  $M$  é a massa da barra,  $L$  é seu comprimento e  $d$  é a distância entre o eixo perpendicular a barra, que passa pelo seu centro de massa e o eixo perpendicular a barra que passa pelo pivô. Observe que o furo não é considerado. Isso pode ser feito porque o diâmetro do furo é muito pequeno, sendo seu momento de inércia desprezível para os nossos cálculos.

$$I_p = \frac{ML^2}{12} + Md^2. \quad (2)$$

8. Verifique se a condição de estabilidade foi cumprida (Eq. 3).

$$\omega A > \sqrt{\frac{2gI_p}{Md}}. \quad (3)$$

**Atividade 2: Verificar a aproximação para a frequência angular do movimento lento da barra.**

O movimento do pêndulo preso a um pivô que oscila verticalmente pode ser descrito pela soma de dois movimentos, um rápido de baixas amplitudes e um lento de altas amplitudes. O movimento lento do pêndulo é aquele similar ao do pêndulo simples sob a ação apenas da gravidade. Já o rápido é devido a oscilação do pivô. O olho humano perceberá bem o movimento lento, já o rápido, não. Na referência [2] é possível obter a Equação 4, que é uma aproximação para a frequência angular do movimento lento do pêndulo físico,  $\omega_{lenta}^{PF}$ . Onde  $A$  é a amplitude de oscilação do pivô,  $\omega$  é a frequência angular do pivô,  $M$  é a massa da barra,  $d$  é a distância entre o eixo perpendicular a barra, que passa pelo seu centro de massa e o eixo perpendicular a barra que passa pelo pivô e  $I_p$  é o momento de inércia da barra com relação a um eixo de rotação perpendicular a ela e que passa no centro do pivô e  $g$  é a aceleração da gravidade. A seguir compararemos o valor da frequência angular do movimento lento da barra, dado pela Equação 4, com o obtido através da análise do gráfico.

$$\omega_{lenta}^{PF} = \sqrt{\frac{(A\omega Md)^2}{2I_p^2} - \frac{gMd}{I_p}}. \quad (4)$$

1. Ajuste o corte de vídeo da seguinte forma: Quadro inicial, 11400; Quadro final, 17830; Tamanho do intervalo, 5 e Taxa de quadros, 1200 *frames/s*.

2. No quadro inicial, crie os eixos de coordenadas com a origem em cima do ponto de rotação da barra e gire-os  $90^\circ$ . Os eixos de coordenadas podem ser girados selecionando-os e digitando o valor do ângulo em “*ângulo a partir da horizontal*”, logo abaixo da barra de ferramentas.
3. Use o “Bastão de Medição” para definir altura da parte retangular da base onde fica o pivô com  $0,024\text{ m}$ .
4. No quadro inicial, crie um “Ponto de Massa” de trajetória automática no centro de rotação da barra (pivô). Utilize a trajetória automática para criar os pontos nos quadros.
5. Utilize os pontos de “massa A” criados no item anterior como referência. Isso criará, fisicamente, um referencial não inercial.
6. No quadro inicial, crie um ponto de massa de trajetória automática na parte superior da barra, bem no centro, onde está marcado. Use a trajetória automática.
7. No gráfico correspondente aos pontos de “massa B” criados no item anterior, mude a variável do eixo vertical para  $\theta$ .
8. Clique com o botão direito do mouse dentro da área do gráfico  $\theta \times t$ . Em seguida, clique em “Analisar...”.
9. Obtenha o tempo do último e do primeiro pico. Divida a diferença entre eles pelo número de oscilações para obter o período médio de oscilação.
10. Utilize o resultado do item anterior para calcular a frequência angular da barra usando a Equação 1.
11. Calcule a frequência angular da barra usando a Equação 4.
12. Compare os dois resultados obtidos anteriormente calculando o erro relativo entre eles.
13. O que pode ter causado a discrepância entre os valores encontrados?

## Referências

- [1] NUSSENZVEIG, H. M., *Curso de física básica, 2: fluidos, oscilações e ondas, calor*, 5. ed., São Paulo: Blücher, 2014.
- [2] BUTIKOV, E. I., Kapitza Pendulum: *A Physically Transparent Simple Explanation*, p. 1-19, Disponível em <http://butikov.faculty.ifmo.ru/InvPendulumCNS.pdf> . Acesso em: 05 de Fev. 2022.
- [3] NUSSENZVEIG, H. M., *Curso de física básica, 1: Mecânica*, 5. ed., p. São Paulo: Blücher, 2014.

## **B Atividades de videoanálise com o vídeo Pêndulo de Kapitza 2**

Para a realização desta atividade, o vídeo Pêndulo de Kapitza 2 deve ser baixado. Ele pode ser encontrado na pasta “Vídeos\_para\_análise”, através do link [https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit\\_Educacional/](https://www.if.ufrj.br/~gpenello/PEF/TiagoPaulino/Kit_Educacional/).

## Atividades de videoanálise utilizando o vídeo Pêndulo de Kapitza 2

**Atividade 1 - primeira etapa: Obter a frequência angular e a amplitude de oscilação do pivô.**

No modelo apresentado nesta dissertação, é considerado que o pivô executa um movimento harmônico simples (MHS) ([1], p. 59 - 65). Nesta tarefa verificaremos se o pivô do experimento Pêndulo de Kapitza satisfaz esta condição e obteremos a amplitude e a frequência angular do movimento.

Dados para a realização das tarefas 1 e 2:

Massa da barra: 4,7 g

Gravidade: 9,81 m/s<sup>2</sup>

1. No *Tracker*, abra o vídeo “Pêndulo de Kapitza 2”.
2. Ajuste o corte de vídeo da seguinte forma: Quadro inicial, 58; Quadro final, 656; Tamanho do intervalo, 1 e Taxa de quadros, 1200 *frames/s*.
3. No quadro inicial, ponha os eixos de coordenadas com a origem em cima do ponto de rotação da barra (pivô).
4. Use o “Bastão de Medição” para definir altura da parte retangular da base onde fica o pivô com 0,024 m. Feito isso, o sistema está calibrado para realizar medidas.
5. No mesmo quadro inicial, crie um “Ponto de Massa” para trajetória automática na interseção dos eixos de coordenadas.
6. Use a trajetória automática para obter a posição em função do tempo do pivô.
7. Clique com o botão direito do mouse dentro da área do gráfico  $y \times t$ . Em seguida, clique em “Analisar...” .
8. Mova o gráfico em  $y$  tentando fazer com que as amplitudes na região positiva e negativa do eixo vertical do gráfico sejam divididas igualmente pela linha que representa eixo horizontal.
9. Escolha o ajuste senoidal.
10. Estime o parâmetro  $A$  apenas analisando as amplitudes do gráfico gerado com a trajetória automática.

11. Estime o parâmetro B. Para isso, você precisará calcular o período médio de oscilação,  $T_M$ , o que é feito obtendo o tempo do último e primeiro pico (isso é feito para pegar o maior número de oscilações possível) e dividindo pelo número de oscilações (número de picos menos um). Em seguida, usa-se a Equação 1 para estimar o parâmetro B. Onde  $T$  é o período de oscilação de um movimento harmônico simples e  $\omega$  é a frequência angular.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1)$$

12. Ajuste o parâmetro C manualmente na janela de ajuste de curva, no campo “Valor”. Para um melhor ajuste, pode ser usado o incremento em 1% ao invés de 10%.
13. Após os parâmetros terem sido estimados, clique na opção *Autofit*. Se a curva ajustada não estiver boa, provavelmente o *offset* em  $y$  não está correto. Ajuste o gráfico em  $y$  mais um pouco e clique na opção *Autofit* novamente.
14. Anote os valores dos parâmetros A e B obtidos após o ajuste.
15. Salve a aba do ajuste como “ajuste seno 2”. A extensão do arquivo é .xml.
16. Salve o projeto como “grafico da posicao do pivo 2”. A extensão do arquivo é .trk.
17. Salve o arquivo acessando *Arquivo/Salvar Como...* Salve como “inercia 2”. Isso foi feito para aproveitar o corte de vídeo e a calibração feitos anteriormente. Este arquivo será aberto no próximo encontro.

**Atividade 1 - segunda etapa: Obter o momento de inércia e verificar a condição de estabilidade.**

A estabilidade do pêndulo invertido é alcançada quando na média, o torque inercial causado pelo movimento do pivô supera o torque da força peso. Na referência [2] é possível obter a condição de estabilidade do pêndulo físico dada pela Equação 3. A seguir obteremos o momento de inércia da barra que está no vídeo Pêndulo de Kapitza 2 e verificaremos se os parâmetros do experimento satisfazem a esta condição.

1. Abra o arquivo “inercia 2”. O arquivo com extensão .trk salvo na atividade anterior.
2. No quadro 58, delete o “Ponto de Massa” desse quadro e tire a visualização dos eixos de coordenadas clicando no ícone dos eixos na barra de ferramentas.
3. Com a ferramenta “Fita Métrica”, meça o comprimento da barra. Bloqueie esta fita para que ela não se mova.
4. Com uma segunda “Fita Métrica”, meça da parte inferior da barra até o seu centro. Bloqueie esta fita também.

5. Com uma terceira “Fita Métrica”, meça a distância do ponto de rotação da barra até o centro de massa.
6. Salve esse arquivo novamente.
7. Calcule o momento de inércia da barra usando o teorema dos eixos paralelos (Eq. 2) ([3], p. 307 - 312). Onde  $I_p$  é o momento de inércia da barra com relação a um eixo de rotação perpendicular a ela e que passa no centro do pivô,  $M$  é a massa da barra,  $L$  é seu comprimento e  $d$  é a distância entre o eixo perpendicular a barra, que passa pelo seu centro de massa e o eixo perpendicular a barra que passa pelo pivô. Observe que o furo não é considerado. Isso pode ser feito porque o diâmetro do furo é muito pequeno, sendo seu momento de inércia desprezível para os nossos cálculos.

$$I_p = \frac{ML^2}{12} + Md^2. \quad (2)$$

8. Verifique se a condição de estabilidade foi cumprida (Eq. 3).

$$\omega A > \sqrt{\frac{2gI_p}{Md}}. \quad (3)$$

**Atividade 2: Verificar a aproximação para a frequência angular do movimento lento da barra.**

O movimento do pêndulo preso a um pivô que oscila verticalmente pode ser descrito pela soma de dois movimentos, um rápido de baixas amplitudes e um lento de altas amplitudes. O movimento lento do pêndulo é aquele similar ao do pêndulo simples sob a ação apenas da gravidade. Já o rápido é devido a oscilação do pivô. O olho humano perceberá bem o movimento lento, já o rápido, não. Na referência [2] é possível obter a Equação 4, que é uma aproximação para a frequência angular do movimento lento do pêndulo físico,  $\omega_{lenta}^{PF}$ . Onde  $A$  é a amplitude de oscilação do pivô,  $\omega$  é a frequência angular do pivô,  $M$  é a massa da barra,  $d$  é a distância entre o eixo perpendicular a barra, que passa pelo seu centro de massa e o eixo perpendicular a barra que passa pelo pivô,  $I_p$  é o momento de inércia da barra com relação a um eixo de rotação perpendicular a ela e que passa no centro do pivô e  $g$  é a aceleração da gravidade. A seguir compararemos o valor da frequência angular do movimento lento da barra, dado pela Equação 4, com o obtido através da análise do gráfico.

$$\omega_{lenta}^{PF} = \sqrt{\frac{(A\omega Md)^2}{2I_p^2} - \frac{gMd}{I_p}}. \quad (4)$$

1. Ajuste o corte de vídeo da seguinte forma: Quadro inicial, 3169; Quadro final, 11233; Tamanho do intervalo, 3 e Taxa de quadros, 1200 *frames/s*.

2. No quadro inicial, crie os eixos de coordenadas com a origem em cima do ponto de rotação da barra e gire-os  $90^\circ$ . Os eixos de coordenadas podem ser girados selecionando-os e digitando o valor do ângulo em “*ângulo a partir da horizontal*”, logo abaixo da barra de ferramentas.
3. Use o “Bastão de Medição” para definir altura da parte retangular da base onde fica o pivô com  $0,024\text{ m}$ .
4. No quadro inicial, crie um “Ponto de Massa” de trajetória automática no centro de rotação da barra (pivô). Utilize a trajetória automática para criar os pontos nos quadros.
5. Utilize os pontos de “massa A” criados no item anterior como referência. Isso criará, fisicamente, um referencial não inercial.
6. No quadro inicial, crie um ponto de massa de trajetória automática na parte superior da barra, bem no centro, onde está marcado. Use a trajetória automática.
7. No gráfico correspondente aos pontos de “massa B” criados no item anterior, mude a variável do eixo vertical para  $\theta$ .
8. Clique com o botão direito do mouse dentro da área do gráfico  $\theta \times t$ . Em seguida, clique em “Analisar...”.
9. Obtenha o tempo do último e do primeiro pico. Divida a diferença entre eles pelo número de oscilações para obter o período médio de oscilação.
10. Utilize o resultado do item anterior para calcular a frequência angular da barra usando a Equação 1.
11. Calcule a frequência angular da barra usando a Equação 4.
12. Compare os dois resultados obtidos anteriormente calculando o erro relativo entre eles.
13. O que pode ter causado a discrepância entre os valores encontrados?

## Referências

- [1] NUSSENZVEIG, H. M., *Curso de física básica, 2: fluidos, oscilações e ondas, calor*, 5. ed., São Paulo: Blücher, 2014.
- [2] BUTIKOV, E. I., Kapitza Pendulum: *A Physically Transparent Simple Explanation*, p. 1-19, Disponível em <http://butikov.faculty.ifmo.ru/InvPendulumCNS.pdf> . Acesso em: 05 de Fev. 2022.
- [3] NUSSENZVEIG, H. M., *Curso de física básica, 1: Mecânica*, 5. ed., p. São Paulo: Blücher, 2014.

## C *Script* para leitura de frequência no *display* LCD

Este *script* deve ser carregado na placa Arduino através da IDE do Arduino. A biblioteca “LiquidCrystal\_I2C” deve ser instalada antes de carregá-lo. O *script* serve para contar os pulsos que são gerados cada vez que uma das pás do acoplamento do motor passa pelo sensor e fazer um cálculo com eles para que seja mostrado o valor da frequência de rotação do motor no *display* LCD. Por consequência da construção mecânica, esse valor também é a frequência de oscilação do pivô.

```
1
2 // Bibliotecas
3 #include <LiquidCrystal_I2C.h>
4
5 // Define o display
6
7 #define endereco 0x27
8 #define colunas 16
9 #define linhas 2
10
11 LiquidCrystal_I2C lcd(endereco , colunas , linhas);
12
13 //-----//
14
15 //sensor de feixe infravermelho
16 int pino_D0 = 2; //Pino ligado ao pino D0 do sensor
17 float frequencia;
18 volatile long pulsos;
19 unsigned long timeold;
20
21 //Altere o número abaixo de acordo com o número de pás no acoplamento.
22 int pulsos_por_volta = 2;
23 int dT=3000; // Período de amostragem [ms]
24
25 void contador()
26 {
27 // Contador de pulsos
28 pulsos++;
29 }
30
31 //-----//
32
33 void setup()
34 {
35
36 lcd.init(); //inicia a comunicação com o display
37 lcd.backlight(); //liga a luz de fundo do display
38 lcd.setCursor(10,1); //posiciona o cursor na decima primeira
coluna e na segunda linha
39 lcd.print("Hz");
40 lcd.setCursor(3,0); // posiciona o cursor na quarta coluna e na
primeira linha do display
41 lcd.print("FREQUENCIA");
42
43 Serial.begin(115200);
44
45 pinMode(pino_D0, INPUT); //Pino Digital 2 do Arduino definido como
entrada (Saída D0 do sensor).
```

```

46  pulsos = 0;
47  frequencia = 0;
48  timeold = millis();
49
50  //Interrupcao 0 – pino digital 2
51  //Aciona o contador a cada subida do pulso
52  attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(pino_D0), contador, RISING);
53 }
54
55 //-----//
56
57 void loop()
58 {
59
60 //Atualiza contador a cada três segundos
61  if (millis() - timeold >=dT)
62  {
63 //Desabilita interrupcao durante o calculo
64   detachInterrupt(digitalPinToInterrupt(pino_D0));
65
66  frequencia=(pulsos)/(pulsos_por_volta*(dT/1000.0));
67
68
69 //Mostra o valor da frequência no serial monitor
70   Serial.print("FREQUENCIA (Hz)= ");
71   Serial.println(frequencia, 1);
72
73 //Mostra o valor da frequência no display
74   lcd.setCursor(5,1); // posiciona o cursor na sexta coluna e
75   lcd.print(frequencia,1);
76
77   if (pulsos > 2){
78   lcd.backlight();
79   } // acende o LCD
80 //apaga o lcd após quatro segundos se o valor da frequência for zero
81   if (frequencia == 0) {
82   delay (4000);
83   lcd.noBacklight();
84   } //desliga o display
85
86   pulsos = 0; // zera os pulsos
87   timeold = millis(); // reinicia a contagem do tempo
88
89 //Habilita interrupcao
90   attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(pino_D0), contador, RISING);
91 }
92
93 }

```

Listing 1: *Script.*