



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## **A medida do fluir do tempo e a física do relógio de água**

João Gabriel Campos de Bragança

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Vitorvani Soares

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2021

# A medida do fluir do tempo e a física do relógio de água

João Gabriel Campos de Bragança

Orientador: Vitorvani Soares

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Presidente, Prof. Vitorvani Soares

---

Prof. Alexandre Carlos Tort

---

Prof. Carlos Eduardo Magalhães de Aguiar

---

Prof. Felipe Mondaini

---

Prof. Roberto Affonso Pimentel Júnior

---

Prof. Sérgio Eduardo Silva Duarte

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2021

## Ficha catalográfica

B794m Bragança, João Gabriel Campos de  
A medida do fluir do tempo e a física do relógio de  
água / João Gabriel Campos de Bragança. – Rio de Janeiro:  
UFRJ/IF, 2021.  
xi, 47 f. : il. ; 30 cm.  
Orientador: Vitorvani Soares.  
Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física /  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2021.  
Referências Bibliográficas: f. 55-56.  
1. Ensino de Física. 2. Tempo. 3. Hidrodinâmica. I. So-  
ares, Vitorvani. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro,  
Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino  
de Física. III. Título.

*Dedico esse trabalho aos meus familiares e amigos sem os  
quais nada faria sentido.*

## **Agradecimentos**

Agradeço aos colegas de trabalho que sempre me incentivaram a estudar cada vez mais para me manter atualizado e, assim, aprimorar mais ainda o lado profissional.

Agradeço ao Vitorvani, meu orientador, e a todos da UFRJ que direta ou indiretamente colaboraram para a minha especialização.

Por fim, agradeço aos membros da banca, Profs. Alexandre Tort, Carlos Aguiar, Felipe Mondaini, Roberto Pimentel e Sérgio Duarte pela leitura e apreciação dessa dissertação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

TO SHED LIGHT ON any continuous shape, object, motion, process, or phenomenon –no matter how wild and complicated it may appear– reimagine it as an infinite series of simpler parts, analyze those, and then add the results back together to make sense of the original whole.

— STEVEN STROGATZ, *Infinite powers: How Calculus reveals the secrets of the Universe*, 2019, p. xvi.

## RESUMO

### **A medida do fluir do tempo e a física do relógio de água**

João Gabriel Campos de Bragança

Orientador: Vitorvani Soares

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Apresentamos neste trabalho duas atividades para serem realizadas com alunos do Ensino Médio que envolvem a física do escoamento de água do interior de um recipiente, e um modelo matemático da física relacionada a esse fenômeno. Com a realização dos procedimentos discutidos nas atividades, procuramos, com o auxílio do professor, orientar os estudantes a: (i) estabelecer a representação matemática dos diferentes conceitos físicos considerados na dinâmica do problema, a partir da observação e da análise da variação da coluna de água restante no recipiente, para diferentes condições de escoamento; e (ii) empregar estas representações como instrumentos de medida da passagem do tempo. O modelo matemático que apresentamos se propõe também a orientar o professor quanto aos limites da representação matemática usualmente empregada nos modelos hidrodinâmicos discutidos em sala de aula.

Palavras chave: Ensino de Física, Tempo, Hidrodinâmica.

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2021

# ABSTRACT

## **The measurement of the flow of time and the physics of the water-clock**

João Gabriel Campos de Bragança

Supervisor: Vitorvani Soares

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

In this work, we present two activities to be performed with high school students that involve the physics of water flow from inside a container, and a mathematical model of the physics related to this phenomenon. By carrying out the procedures discussed in the activities, we sought, with the help of the teacher, to guide students: (i) to establish the mathematical representation of the different physical concepts considered in the dynamics of the problem, based on observation and analysis of the column variation of water remained in the vessel, for different flow conditions; and (ii) to use these representations as instruments to measure the passage of time. The mathematical model we present also proposes to guide the teacher on the limits of the mathematical representation usually employed in the hydrodynamic models discussed in the classroom.

Keywords: Physics education, Time, Hydrodynamics.

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2021

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>O experimento</b>	<b>16</b>
2.1	Material utilizado	16
2.2	Preparação do material	18
2.3	Escoamento da água – Atividade 1	18
2.3.1	Evolução da coluna de água para altura inicial $H = 16$ cm	19
2.3.1.1	A altura vs. tempo	19
2.3.1.2	A velocidade vs. altura	23
2.3.1.3	O tempo vs. profundidade	25
2.3.2	Evolução da coluna de água para altura inicial $H = 8$ cm	26
2.3.2.1	A altura vs. tempo	26
2.3.2.2	A velocidade vs. altura	28
2.3.2.3	O tempo vs. profundidade	30
2.3.3	Evolução da coluna de água para altura inicial $H = 10, 12,$ e $14$ cm	31
2.3.3.1	A altura vs. tempo	31
2.3.3.2	A velocidade vs. altura	33
2.3.3.3	O tempo vs. profundidade	35
2.3.4	Os parâmetros $h_{\min}, v_0$ e o tempo de escoamento	37
2.4	Escoamento da água – Atividade 2	39
2.4.1	Evolução da coluna de água para altura inicial $H = 16$ cm	39
2.4.1.1	A altura vs. tempo	39
2.4.1.2	A velocidade vs. altura	41
2.4.1.3	O tempo vs. profundidade	43
2.5	Tempo de escoamento e o orifício de saída	44
<b>3</b>	<b>Um modelo matemático para o fluxo de água</b>	<b>45</b>
3.1	Número de Reynolds	45
3.2	Nível do fluido constante	46
3.2.1	Determinação da velocidade $U$	48
3.3	Nível do fluido variável	49
3.3.1	Determinação da velocidade $U$	50
3.4	O relógio de água	52
<b>4</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>53</b>
	<b>Referências</b>	<b>55</b>
<b>A</b>	<b>Plano de Aula</b>	<b>57</b>

# Lista de ilustrações

Figura 1	Materiais empregados no experimento . . . . .	16
Figura 2	Escalas na garrafa PET . . . . .	17
Figura 3	Altura vs. instante de tempo para $H = 16,0$ cm . . . . .	20
Figura 4	Velocidade vs. instante de tempo para $H = 16,0$ cm . . . . .	21
Figura 5	Velocidade vs. instante de tempo para $H = 16,0$ cm (aux.) . . . . .	22
Figura 6	Velocidade vs. altura para $H = 16,0$ cm . . . . .	24
Figura 7	Quadrado da velocidade vs. altura para $H = 16,0$ cm . . . . .	25
Figura 8	Tempo vs. profundidade para $H = 16,0$ cm . . . . .	25
Figura 9	Altura vs. instante de tempo para $H = 8,0$ cm . . . . .	27
Figura 10	Velocidade vs. instante de tempo para $H = 8,0$ cm . . . . .	28
Figura 11	Velocidade vs. altura para $H = 8,0$ cm . . . . .	29
Figura 12	Quadrado da velocidade vs. altura para $H = 8,0$ cm . . . . .	30
Figura 13	Tempo vs. profundidade para $H = 8,0$ cm . . . . .	30
Figura 14	Altura vs. tempo para $H = 8,0, 10,0, 12,0, 14,0$ e $16,0$ cm . . . . .	31
Figura 15	Velocidade vs. tempo para $H = 8,0, 10,0, 12,0, 14,0$ e $16,0$ cm . . . . .	32
Figura 16	Velocidade vs. altura para $H = 8,0, 10,0, 12,0, 14,0$ e $16,0$ cm . . . . .	34
Figura 17	Quadrado da velocidade vs. altura para $8,0 \leq H \leq 16,0$ cm . . . . .	35
Figura 18	Tempo vs. profundidade para $H = 10,0$ cm e $12,0$ cm . . . . .	36
Figura 19	Tempo vs. profundidade para $H = 14,0$ cm . . . . .	37
Figura 20	Parâmetro $h_{\min}$ vs. altura inicial $H$ . . . . .	37
Figura 21	Parâmetro $v_0$ vs. altura inicial $H$ . . . . .	38
Figura 22	Tempo de escoamento $t_{\text{esc}}$ vs. altura inicial $H$ . . . . .	38
Figura 23	Altura vs. instante de tempo para $H = 16,0$ cm e $d = 1,2$ mm . . . . .	40
Figura 24	Velocidade vs. instante de tempo para $H = 16,0$ cm e $d = 1,2$ mm . . . . .	41
Figura 25	Velocidade vs. altura para $H = 16,0$ cm e $d = 1,2$ mm . . . . .	42
Figura 26	Quadrado da velocidade vs. altura para $H = 16,0$ cm e $d = 1,2$ mm . . . . .	43
Figura 27	Tempo vs. profundidade para $H = 16,0$ cm e $d = 1,2$ mm . . . . .	43
Figura 28	Recipiente cilíndrico regular reto, preenchido com água . . . . .	45
Figura 29	Velocidade reduzida $U/U_0$ vs. altura reduzida $h/H$ . . . . .	51

## Lista de tabelas

Tabela 1	Abordagens sobre o conceito de tempo nos livros do PNLD. . . . .	14
Tabela 2	Altura vs. instante de tempo para $H = 16,0$ cm . . . . .	19
Tabela 3	Velocidade vs. instante de tempo para $H = 16,0$ cm . . . . .	21
Tabela 4	Velocidade vs. altura para $H = 16,0$ cm . . . . .	23
Tabela 5	Quadrado da velocidade vs. altura para $H = 16,0$ cm . . . . .	24
Tabela 6	Altura vs. instante de tempo para $H = 8,0$ cm . . . . .	26
Tabela 7	Velocidade vs. instante de tempo para $H = 8,0$ cm . . . . .	27
Tabela 8	Velocidade vs. altura para $H = 8,0$ cm . . . . .	28
Tabela 9	Quadrado da velocidade vs. altura para $H = 8,0$ cm . . . . .	29
Tabela 10	Altura vs. instante de tempo para $H = 10,0$ cm, $12,0$ cm e $14,0$ cm . . .	31
Tabela 11	Velocidade vs. instante de tempo para $H = 10,0$ cm, $12,0$ cm e $14,0$ cm .	32
Tabela 12	Parâmetros $v_0$ e $a$ para $H = 8,0$ cm, $10,0$ cm, $12,0$ cm, $14,0$ cm e $16,0$ cm	33
Tabela 13	Velocidade vs. altura para $H = 10,0$ cm, $12,0$ cm e $14,0$ cm . . . . .	34
Tabela 14	Quadrado da velocidade vs. altura para $H = 10,0$ cm, $12,0$ cm e $14,0$ cm	35
Tabela 15	Altura vs. instante de tempo para $H = 16,0$ cm e $d = 1,2$ mm . . . . .	39
Tabela 16	Velocidade vs. instante de tempo para $H = 16,0$ cm e $d = 1,2$ mm . . .	40
Tabela 17	Velocidade vs. altura para $H = 16,0$ cm e $d = 1,2$ mm . . . . .	41
Tabela 18	Quadrado da velocidade vs. altura para $H = 16,0$ cm e $d = 1,2$ mm . . .	42

# 1 Introdução

Ao apresentar os conceitos de cinemática para turmas de Ensino Médio, percebemos uma certa dificuldade dos alunos no entendimento da definição de velocidade média, assim como muita confusão por parte dos estudantes para diferenciar os conceitos de instante de tempo e intervalo de tempo. Uma consulta aos dicionários também não deixa clara a distinção entre estes dois conceitos. No dicionário *Michaelis* (2021), por exemplo, tempo é definido como “[p]eríodo de momentos, de horas, de dias, de semanas, de meses, de anos etc. no qual os eventos se sucedem, dando-se a noção de presente, passado e futuro.” Por sua vez, o dicionário *Dicio* (2021) nos oferece a seguinte significação para tempo: “[o] que se consegue medir através dos dias, dos meses ou dos anos; duração.”

Podemos perceber, portanto, que precisar o conceito de tempo não é uma tarefa simples e uma definição para este substantivo tem ocupado grandes pensadores ao longo de nossa História. Em 397 d.C., o teólogo e filósofo Santo Agostinho (1980, p. 254), em suas *Confissões*, Capítulo XIV – Livro XI, já se perguntava: “Mas, afinal, o que é o tempo?”

Nenhuns tempos Vos são coeternos, porque Vós permaneceis imutável, e se os tempos assim permanecessem, já não seriam tempos. Que é, pois, o tempo? Quem poderá explicá-lo clara e brevemente? Quem o poderá apreender, mesmo só com o pensamento, para depois nos traduzir com palavras o seu conceito? E que assunto mais familiar e mais batido nas nossas conversas do que o tempo? Quando dele falamos, compreendemos o que dizemos. Compreendemos também o que nos dizem quando dele nos falam. O que é, por conseguinte, o tempo? Se ninguém mo perguntar, eu sei; se o quiser explicar a quem me fizer a pergunta, já não sei. Porém, atrevo-me a declarar, sem receio de contestação, que, se nada sobreviesse, não haveria tempo futuro, e se agora nada houvesse, não existiria o tempo presente.<sup>1</sup>

Ou, ainda, Isaac Newton (2017, p. 24) que, nos *Principia*, Livro I, de 1687, afirma: “Não defini tempo, espaço, lugar e movimento, porque são bem conhecidos de todos.”<sup>2</sup> Entretanto, mais adiante, na mesma página, Newton apresenta as seguintes definições:

Tempo absoluto, verdadeiro e matemático, de si mesmo e por sua própria natureza flui igualmente, sem relação a qualquer coisa de externo, e, por outro nome, chama-se duração. Tempo relativo, aparente e comum, é alguma medida sensível e externa (precisa ou imprecisa) da duração, por meio do movimento.

Richard Feynman (2008), em suas *Lições de Física*, no volume 1, capítulo 5, Seção 5-2, ao discutir o conceito de tempo, afirma que: “[o] que realmente importa não é como definimos tempo, mas como nós o medimos. Uma forma de medir tempo é utilizando algo com o qual acontecem coisas que se repetem de forma regular – algo que seja periódico.

<sup>1</sup> Tradução de J. Oliveira Santos e A. Ambrósio de Pina. (AGOSTINHO, 1980)

<sup>2</sup> Tradução e de J. Resina Rodrigues. (NEWTON, 2017)

Como, por exemplo, o dia.” E Feynman conclui que “[t]udo que podemos dizer é que a regularidade de uma das coisas se ajusta com a regularidade da outra”<sup>3</sup>, Por conseqüência, podemos definir tempo como uma grandeza física cujos intervalos podem ser observados e medidos com um relógio, um medidor de intervalos de tempo. E, para calibrarmos o medidor, precisamos montar um aparato que combine seu funcionamento com algo natural e que possua um ciclo regular.

De fato, percebemos em nosso dia-a-dia que nós mesmos e o mundo que nos cerca estamos em constante mudança. Para citar um exemplo, desde a nossa Pré-História nos preocupamos em caracterizar os ciclos das estações do ano que definem os períodos de plantio e colheita da nossa agricultura e assegurar a nossa sobrevivência e das gerações futuras. Savoie (2009), Callender (2014) e Schomberg (2018) observam que as antigas civilizações já usavam os movimentos regulares do Sol, da Lua e das estrelas para construir relógios de Sol, baseados na projeção da sombra de um gnômon, e relógios baseados na duração do escoamento da água contida em um recipiente. Ao eleger o movimento das estrelas como referência, Callender (2014) também acrescenta que “ao observá-las a olho nu, um antigo astrônomo poderia estabelecer a hora com quinze minutos de incerteza. E qualquer um podia dizer aproximadamente a hora simplesmente olhando para o Sol.”<sup>4</sup>

Schomberg (2018) ainda destaca que “[a] invenção e a adoção do relógio de água no Egito, à primeira vista, parecem ser um dos desenvolvimentos mais bem documentados na história da tecnologia antiga.”<sup>5</sup> Também populares entre as civilizações grega, romana e indiana, os relógios eram construídos fazendo-se um orifício na base de um vaso feito de barro. Quando colocado em outro recipiente cheio de água, a água penetrava em seu interior e após um certo intervalo de tempo o vaso afundava; quando preenchido com água, a coluna de água escoava completamente de seu interior, após um dado intervalo de tempo.

A Tabela 1 ilustra como os conceitos de tempo e intervalo de tempo são abordados e apresentados em oito livros didáticos disponíveis para os alunos do Ensino Fundamental e Médio, parte da listagem de livros de Física indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD. Ao analisar as informações reunidas na Tabela 1, observamos que os livros consultados também não apresentam um consenso ou padrão na abordagem utilizada para a conceituação do tempo e dos diferentes processos para a sua medida. Cinco autores fazem referência ao movimento solar, em relação com a definição de ano astronômico, mas somente dois autores fazem referência à definição do segundo como unidade de medida. Podemos também perceber, da mesma Tabela 1, que a maioria dos livros sequer cita instrumentos de medição de tempo e somente um livro faz referência ao emprego do fluxo de água como um cronômetro.

<sup>3</sup> Tradução de Adriana Válio Roque da Silva e Kaline Rabelo Coutinho. (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 2008)

<sup>4</sup> Tradução nossa.

<sup>5</sup> Tradução nossa.

Tabela 1 – Abordagens sobre o conceito de tempo nos livros do PNLD.

Livro	Pergunta o que é o tempo?	Previsão de eventos	Movimento do Sol	Calendários	Definição do segundo	Instrumentos
<i>Física aula por aula</i> (XAVIER; BENIGNO, 2010).	Sim	Dias e noites	Sim	Nenhum	Sim	Relógio e cronômetro
<i>Física</i> (BONJORNO et al., 2016).	Sim	Dias e noites, cheias de rio, fertilidade da mulher.	Sim	Nenhum	Não	Nenhum
<i>Ser protagonista – Física</i> (VÁLIO et al., 2016).	Sim	Dias e noites	Não	Nenhum	Não	Nenhum
<i>Física para o Ensino Médio 1 – Mecânica</i> (KAZUHITO; FUKU, 2016).	Não	Dias e noites, cheias de rio.	Sim	Nenhum	Não	Relógio solar, de água, ampulheta, relógio mecânico.
<i>Física</i> (GUIMARÃES; PIQUEIRA; CARRON, 2014).	Não	Nada	“ano solar”.	Juliano	Não	Nenhum
<i>Física Ciência e Tecnologia</i> (TORRES et al., 2016).	Não	Nada	Sim	Nenhum	Sim	Nenhum
<i>Curso de Física — v. 1</i> (MÁXIMO; ALVARENGA, 2000).	Não	Nada	Não	Nenhum	Não	Nenhum
<i>Física em contextos — Pessoal, Social, Histórico</i> (OLIVEIRA et al., 2011).	Sim	Agricultura	Sim	Juliano, Gregoriano, Babilônico, Egípcio, Maia e Romano	Não	Nenhum

(Conclusão da Tabela 1')

Este cenário nos motivou a desenvolver o presente trabalho, onde descrevemos uma proposta didática que reúne duas atividades práticas para serem realizadas com alunos do Ensino Médio – que envolvem a física do escoamento de água do interior de um recipiente de geometria conhecida –, e um modelo matemático da física relacionada a esse fenômeno. Acreditamos que as duas atividades sugeridas neste trabalho, possam auxiliar o professor na discussão com seus alunos sobre a distinção entre os conceitos de tempo, intervalo de tempo e suas diferentes escalas: o ano, a hora, o minuto e o segundo.

Esperamos também que, ao realizar as atividades práticas propostas, os estudantes desenvolvam suas habilidades e competências para a observação, investigação e representação de um fenômeno físico. Com a realização dos procedimentos discutidos nas atividades, o professor pode orientar os estudantes em pelo menos dois aspectos. Primeiro, estabelecer a representação matemática dos diferentes conceitos físicos considerados na cinemática e na dinâmica do problema, a partir da observação e da análise da variação da coluna de água contida no recipiente, para diferentes condições de escoamento; Segundo, empregar estas representações como instrumentos de medida da passagem do tempo.

O modelo matemático discutido nesse trabalho se propõe também a orientar o professor quanto aos limites da representação matemática usualmente empregada nos modelos hidrodinâmicos discutidos em sala de aula. Como outras observações fundamentais em ciência, ao construir com os alunos a representação do escoamento da coluna de água do interior do recipiente procuramos mostrar que o modelo matemático é uma aproximação da realidade. que os “modelos explicativos não são únicos nem finais”, como sinalizam as orientações dos PCNs de Física quanto ao estudo das Ciências Físicas no Ensino Médio (BRASIL, 2002).

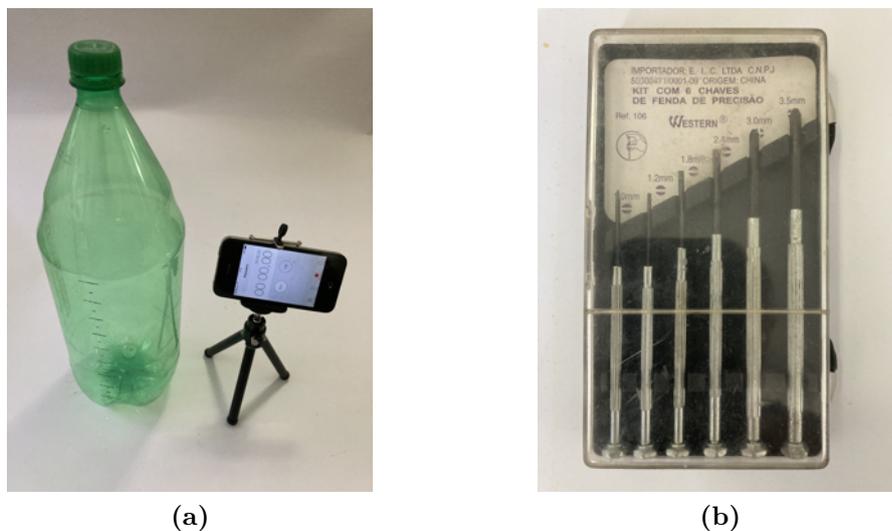
Para uma descrição detalhada de nosso trabalho, reunimos o material didático desenvolvido nesta dissertação na seguinte ordem: no Capítulo 2, descrevemos em detalhes as duas atividades propostas para a observação e caracterização do escoamento da coluna de água do interior de um recipiente, e mostramos como usar as informações obtidas para a construção de um cronômetro baseado no fluxo da água; no Capítulo 3, usamos as leis da hidrodinâmica e construímos um modelo matemático para representar o comportamento do escoamento da coluna de água do interior de um recipiente; para concluir esse trabalho, no Capítulo 4, apresentamos as nossas considerações finais.

## 2 O experimento

Apresentamos, neste capítulo, um conjunto de atividades em que o estudante do Ensino Médio, sob a orientação do professor, pode praticar as etapas de um processo investigativo científico: observar um fenômeno físico, estabelecer e medir as variáveis envolvidas no problema e, com o auxílio da análise dos dados, estabelecer possíveis relações entre as medidas obtidas. Nessas atividades primeiro escoamos diferentes volumes de água de um mesmo recipiente, a partir de diferentes alturas da coluna de água: medimos a evolução da altura da coluna ao longo do tempo e determinamos o correspondente tempo de escoamento. Em seguida, analisamos gráfica e algebricamente o comportamento das grandezas físicas envolvidas no problema e obtemos a lei que descreve o comportamento da altura da coluna de água ao longo do tempo. Repetimos o processo com um recipiente similar mas de orifício diferente e, ao final das atividades, utilizamos os resultados obtidos para a construção de um cronômetro baseado no fluxo de água que sai do recipiente.

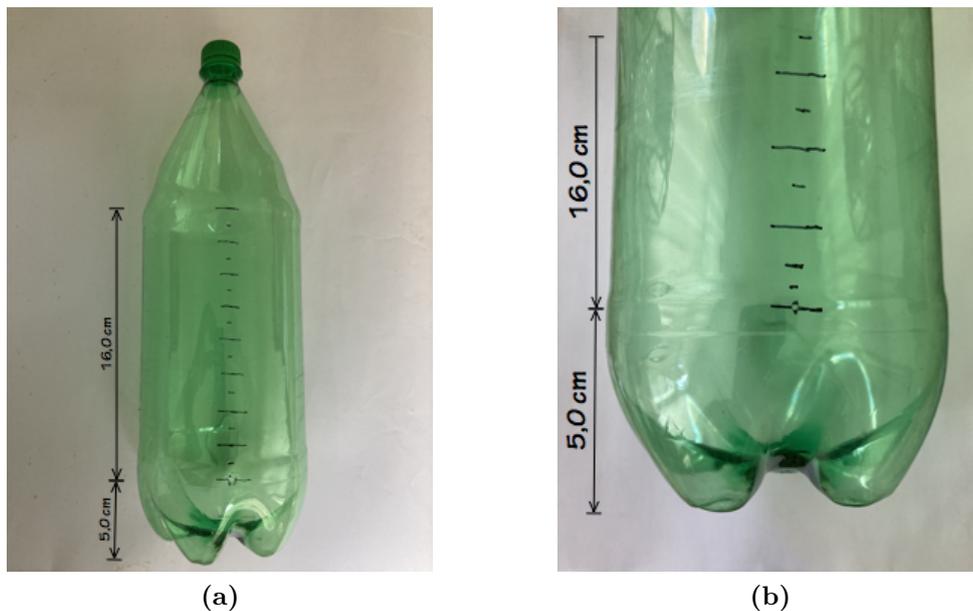
### 2.1 Material utilizado

Os materiais empregados nas atividades foram os seguintes: duas garrafas PET de seção reta e com tampa, idênticas, de diâmetro  $D = 12,0$  cm, com capacidade de 2,0 litros; um cronômetro; régua milimetrada de no mínimo 30 cm; jogo de chaves de fenda com indicadores de calibre; marcador permanente de ponta fina (diâmetro menor que 1,0 mm), lápis e papel para anotações. O modelo da garrafa PET empregada em nossas atividades e o jogo de chaves estão ilustrados na Figura 1.



**Figura 1.** – (a) Garrafa PET com a graduação de alturas e cronômetro empregados em nossas atividades; (b) jogo de chaves de fenda com os indicadores de calibre, empregados nas atividades. Também foram utilizados no trabalho uma régua graduada, lápis e papel.

Ter à disposição palitos de churrasco, alfinetes de fraldas ou alfinete de cabeça permite realizar o orifício de saída nas garrafas. A tampa da garrafa é essencial para que o experimentador controle o início do escoamento. Com o marcador permanente, podemos reproduzir a escala da régua sobre uma vertical ao longo da superfície da garrafa. Em uma das garrafas, com o auxílio do alfinete e das chaves de fenda, produzimos, a 5,0 cm acima da base da garrafa, um orifício de diâmetro igual a 3,0 mm. A escolha da posição dessa origem de coordenadas foi um compromisso devido ao formato da base das garrafas. O desenho da escala na garrafa PET está indicado na Figura 2.



**Figura 2.** – (a) Garrafa PET com a graduação de alturas feita com o auxílio da régua e do marcador permanente; (b) Vista aproximada do orifício na parte inferior da garrafa. A altura da posição da origem de coordenadas foi um compromisso devido ao formato da base da garrafa.

O alfinete ajuda a perfurar a garrafa e as chaves de fenda permitem definir o diâmetro desejado com uma certa precisão. A partir do centro do orifício marcamos a escala correspondente às diferentes alturas, dividida em centímetros, até 16,0 cm. Subdividimos os dois primeiros centímetros da escala em 0,5 cm e aumentamos a quantidade de medidas nesse intervalo de alturas, próximo à origem de coordenadas, onde se encontra o orifício de escoamento da água. Na outra garrafa, procedemos de maneira equivalente, mas fizemos um orifício com diâmetro cerca de três vezes menor,  $d = 1,2$  mm. Como cronômetro, usamos o aplicativo disponível em nosso aparelho de telefonia móvel.

Podem ser adotados outros valores para os diâmetros dos orifícios de escoamento de cada garrafa. O importante é escolher valores para os diâmetros que sejam fáceis para o aluno estabelecer uma proporção entre eles.

## 2.2 Preparação do material

Para investigar a relação entre a variação da altura da coluna de água ao longo do tempo, e determinar o tempo de escoamento correspondente, preenchemos a garrafa com água, até uma altura acima daquela desejada. Ao enroscar ou desenroscar a tampa da garrafa podemos controlar o escoamento através do orifício de saída e, desse modo, definir com precisão a altura de partida desejada. Procedemos então, da seguinte maneira: com a tampa fechada e a água em repouso, disparamos o cronômetro; em seguida, desenroscamos a tampa, o escoamento se inicia e registramos o instante de tempo indicado pelo cronômetro; observamos a coluna de água alcançar diferentes alturas e anotamos o instante de tempo correspondente, indicado pelo cronômetro.

Uma consulta prévia realizada pelo professor aos trabalhos de Plauska (2013), sobre “Uma aula introdutória a mecânica dos fluidos”, e ao trabalho de Silva (2020), sobre “A análise gráfica como instrumento para o ensino de calorimetria no Ensino Médio”, podem servir de orientação sobre a realização das atividades propostas neste capítulo.

## 2.3 Escoamento da água – Atividade 1

Montado o aparato experimental, procedemos a aquisição dos dados da evolução da altura da coluna de água em função do tempo e, em seguida, construímos a tabela correspondente para posterior análise gráfica das medidas. Sugerimos que antes de realizar a primeira coleta de dados, o professor discuta com os alunos como fazer as medidas, como anotá-las e quem será incumbido de cada tarefa. Essa discussão é fundamental para que os alunos tomem consciência da importância da organização ao se realizar um experimento. Pretendemos, assim, desenvolver algumas habilidades nos estudantes como, por exemplo, a organização para realizar tarefas e a colaboração em trabalhos coletivos.

É importante mencionar que as medidas feitas nessa fase podem ser tomadas de diversas formas. Sendo assim, os alunos podem e devem ser encorajados a realizá-las da maneira que eles julguem mais apropriada, desde que se organizem para tal desde o início da atividade. Com isso, queremos dizer que o tempo pode ser marcado em relação a variações fixas de altura a partir de um valor inicial ou a altura pode ser medida em intervalos fixos de tempo ou, ainda, que os estudantes podem aferir a altura em intervalos de tempo aleatórios. Cada forma de se realizar a aquisição de dados pode ter seus pontos positivos e negativos do ponto de vista organizacional e isso deve ser discutido em acordo com os objetivos do experimento.

Outra etapa importante da atividade é a construção dos gráficos. Neste experimento, esse processo é essencial do ponto de vista didático e deve ser explorado em todas as suas possibilidades. A escolha das escalas, a marcação dos dados obtidos e a determinação da curva mais simples para a sua representação não devem ser tratados como processos

triviais. Se trabalhadas de forma apropriada, essas habilidades desenvolvidas pelos alunos podem representar uma grande e valiosa ferramenta para o saber científico deles.

Um primeiro gráfico pode ser construído no quadro, pelo professor, em colaboração com os alunos. Mas é fundamental que os estudantes tenham a tarefa de construir os gráficos posteriores. Alguns programas computacionais também podem ser utilizados para a montagem dos gráficos. Porém, é sugerido que ao menos os primeiros gráficos sejam feitos a mão, pelos alunos, no papel milimetrado.

### 2.3.1 Evolução da coluna de água para altura inicial $H = 16$ cm

Apresentamos nesta seção as medidas e a análise dos resultados para a evolução da altura da coluna de água em função do tempo para o escoamento da água a partir da altura inicial  $H = 16,0$  cm, para o recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm. É difícil estabelecer com precisão o intervalo de tempo de escoamento, a partir da observação direta. Ao se aproximar do orifício, a coluna de água parece estacionar, mas um pequeno filete quase imperceptível continua a fluir. O intervalo de tempo  $t_{\text{esc}} = 282$  s corresponde ao tempo de escoamento estimado a partir da observação mas discutimos mais adiante um melhor critério para definir o intervalo de tempo de escoamento.

#### 2.3.1.1 A altura vs. tempo

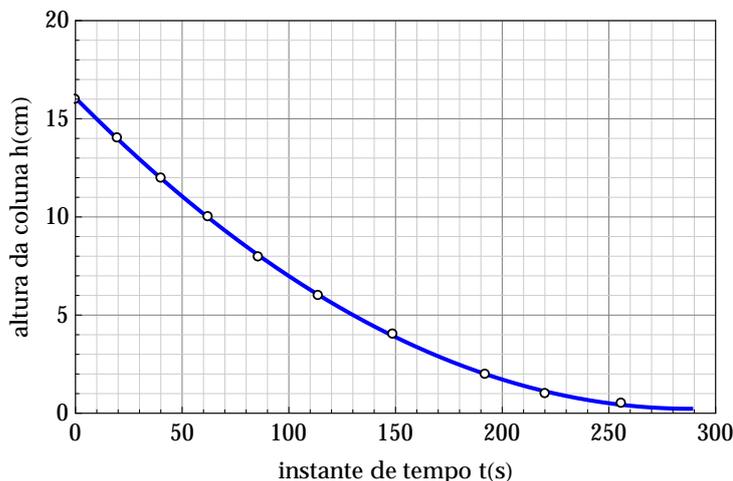
A Tabela 2 apresenta a altura da coluna de água vs. instante de tempo para o escoamento a partir da altura inicial  $H = 16,0$  cm, para o recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

**Tabela 2.** – Altura  $h$  da coluna de água vs. instante de tempo  $t$  para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

instante de tempo $t'$ (s)	instante de tempo $t$ (s)	altura $h$ da coluna $t$ (cm)
3,0(5)	0(1)	16,0(1)
23,0(5)	20(1)	14,0(1)
43,0(5)	40(1)	12,0(1)
65,0(5)	62(1)	10,0(1)
89,0(5)	86(1)	8,0(1)
117,0(5)	114(1)	6,0(1)
152,0(5)	149(1)	4,0(1)
195,0(5)	192(1)	2,0(1)
223,0(5)	220(1)	1,0(1)
259,0(5)	256(1)	0,5(1)

Os instantes de tempo  $t'$ (s) correspondem aos instantes de tempo indicados pelo cronômetro e os instantes de tempo  $t$ (s) agora subtraído do intervalo entre o disparo do cronômetro e o início do escoamento. Consideramos como incerteza  $\delta t = 0,5$  s e  $\delta h = 0,1$  cm

para os instantes de tempo  $t$  e altura  $h$ , respectivamente. Ao longo deste trabalho indicamos as medidas com suas incertezas na representação  $(3,0 \pm 0,5) \text{ s} = 3,0(5) \text{ s}$ , como indicado na Tabela 2. A evolução da altura da coluna de água, para uma altura inicial  $H = 16,0 \text{ cm}$ , representada na Tabela 2 pode ser melhor percebida com o auxílio do gráfico indicado na Figura 3.



**Figura 3.** – Altura  $h$  da coluna de água vs. instante de tempo  $t$  para uma altura inicial  $H = 16,0 \text{ cm}$  e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0 \text{ mm}$ . A linha contínua representa a evolução da altura da coluna de água, desde a sua altura inicial até a água do recipiente praticamente parar de escoar.

Definimos o tempo de escoamento como aquele instante de tempo em que observamos a coluna de água alcançar uma altura mínima ou velocidade nula. É interessante observar que, devido as dimensões do orifício, a velocidade nula nem sempre ocorre para altura nula.

Observamos ainda que somente com a construção do gráfico dos dados de escoamento, representado na Figura 3, não é possível determinar com precisão em qual altura  $h$  ou instante  $t$  a velocidade de escoamento é nula. Para resolver esse problema, devemos fazer um outro gráfico que represente a velocidade  $v$  da superfície livre vs. instante de tempo. Para a construção desse gráfico, calculamos a velocidade média  $v_i$  em um dado intervalo de tempo  $\Delta t$ :

$$v_i = \left( \frac{\Delta h}{\Delta t} \right)_i = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}. \quad (2.1)$$

com sua respectiva incerteza:

$$\delta v_i = v_i \left( \frac{\delta h_i}{\Delta h} + \frac{\delta t_i}{\Delta t} \right). \quad (2.2)$$

Deixamos a critério do professor a realização ou não dos cálculos da incerteza dos parâmetros envolvidos na atividade. Os incluímos neste trabalho para que o leitor tenha uma

estimativa da ordem de grandeza desses valores para as condições em que as atividades foram realizadas.

Lembramos que, para pequenos intervalos de tempo, essa velocidade média  $v_i$  corresponde à velocidade do instante  $t_i$  determinado pela média aritmética dos dois instantes considerados para a determinação do intervalo  $\Delta t$ :

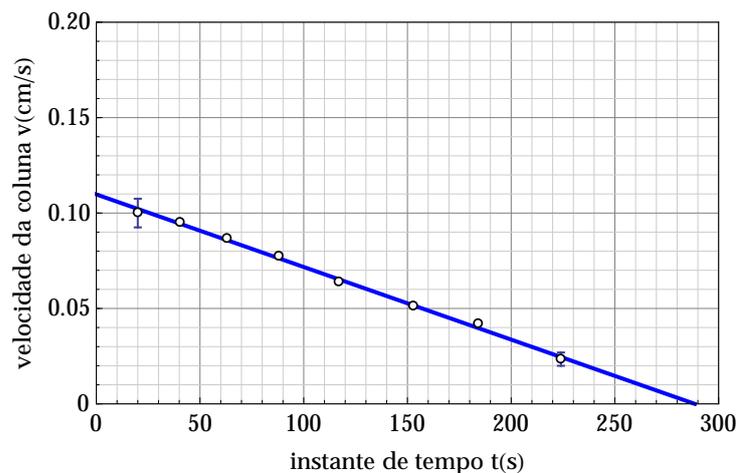
$$t_i = \frac{t_{i+1} + t_{i-1}}{2}. \quad (2.3)$$

Observamos que, com esta definição, não há propagação do valor da incerteza na determinação desse instante de tempo.

Admitimos que essas hipóteses sejam válidas para o nosso problema, construímos a Tabela 3 e representamos esses dados no gráfico na Figura 4.

**Tabela 3.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. instante de tempo  $t$ , para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

instante de tempo $t$ (s)	velocidade $v$ (cm s <sup>-1</sup> )
20(1)	0,100(8)
41(1)	0,095(7)
63(1)	0,087(6)
88(1)	0,077(5)
118(1)	0,063(4)
153(1)	0,051(3)
185(1)	0,042(3)
224(1)	0,023(3)



**Figura 4.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. instantes de tempo  $t$ , para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm. As incertezas nas medias foram representadas somente no início e no fim do movimento, para não sobrecarregar a figura.

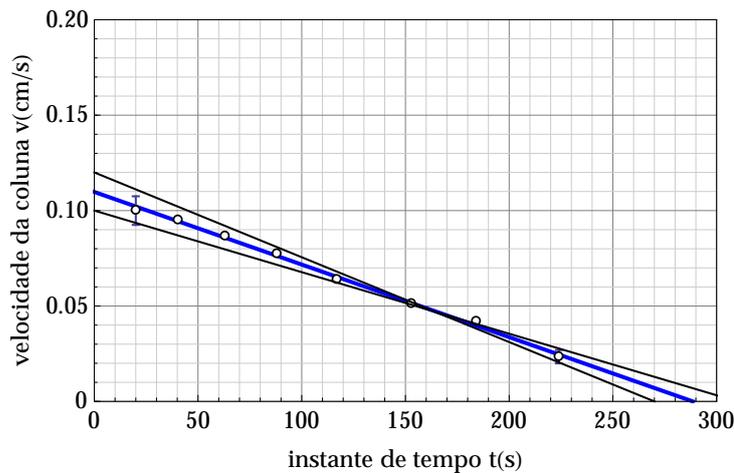
Como podemos observar na Tabela 3, ao seguir os procedimentos indicados pelas equações (2.1) e (2.3), interpolamos os valores calculados para a velocidade da superfície livre da altura da coluna de água entre os instantes inicial e final da sua evolução. Estes procedimentos também permitem determinar com melhor precisão as diferentes velocidades da superfície da água ao longo do seu movimento e, por consequência, permitem determinar o instante de tempo para o qual a velocidade se anula no gráfico da Figura 4.

A mesma Figura 4 revela que a velocidade da coluna de água varia linearmente com o tempo, e pode ser representada algebricamente pela forma:

$$v = v_0 - at, \quad (2.4)$$

onde os coeficientes linear  $v_0$  e angular  $a$  podem ser determinados a partir do gráfico da figura. Da interseção da reta com o eixo das ordenadas determinamos o coeficiente linear  $v_0 = 0,11(1) \text{ cm s}^{-1}$ , com dimensão de velocidade.

O coeficiente angular  $a$  é determinado traçando-se duas retas auxiliares que levem em conta as incertezas das velocidades, como indicado na Figura 5.



**Figura 5.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. instante de tempo  $t$ , para uma altura inicial  $H = 16,0 \text{ cm}$  e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0 \text{ mm}$ . As retas auxiliares determinam as incertezas nos parâmetros da reta que descreve a evolução da velocidade.

Portanto, podemos estimar um valor máximo e um mínimo para  $a$  tal que

$$a_{\min}^{\max} = \frac{0.11 \pm 0.01}{290 \mp 20} \quad (2.5)$$

e o parâmetro  $a$  corresponde a

$$a = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2} \quad (2.6)$$

e a sua respectiva incerteza é dada por

$$\delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2} \quad (2.7)$$

Assim, obtemos um coeficiente angular  $a = 3,79(3) \cdot 10^{-4} \text{ cm/s}^2$ . Este coeficiente angular corresponde à aceleração média a qual a superfície livre está submetida. É tentador associar o parâmetro  $v_0$  à velocidade inicial do movimento, mas observamos que a coluna iniciou o seu movimento a partir do repouso. Resolvemos esse paradoxo no Capítulo 3 desse trabalho. O comportamento temporal da velocidade representado na Figura 4 também nos revela que o movimento da coluna tem velocidade nula quando  $t_{\text{esc}} = 290(10) \text{ s}$ , em acordo com o valor observado experimentalmente de  $4,9(2) \text{ min}$ .

Da mesma Figura 4 também podemos observar que a velocidade média aritmética entre  $v$  e  $v_0$  corresponde a

$$-\frac{v + v_0}{2} = \frac{h - h_0}{t - 0}, \quad (2.8)$$

onde  $h$  e  $h_0$  correspondem as alturas nos instantes  $t \neq 0$  e  $t = 0$ , respectivamente. Substituímos (2.4) em (2.8), solucionamos o resultado para  $h$  e obtemos

$$h = h_0 - v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad (2.9)$$

onde  $h_0 = H = 16,0 \text{ cm}$ . A expressão algébrica (2.9) representa a evolução da altura da superfície livre da coluna de água durante o processo de escoamento, e corresponde à curva contínua delineada na Figura 3. Podemos desse modo, afirmar que o movimento da coluna de água pode ser representado de forma aproximada pela expressão do movimento uniformemente retardado.

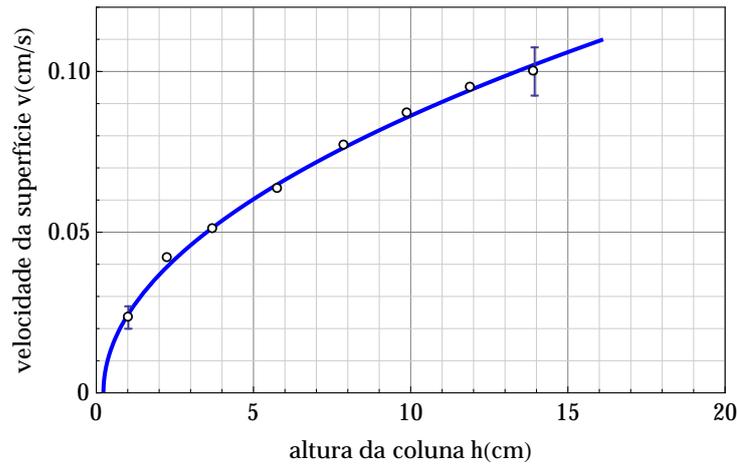
### 2.3.1.2 A velocidade vs. altura

Com o auxílio da equação (2.9) podemos substituir os instantes de tempo indicados na Tabela 3 e estudar o comportamento da velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água em função da altura  $h$  da coluna de água. O resultado está indicado na Tabela 4.

**Tabela 4.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 16,0 \text{ cm}$  e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0 \text{ mm}$ .

altura $h(\text{cm})$	velocidade $v(\text{cm s}^{-1})$
13,9(1)	0,100(8)
11,9(1)	0,095(7)
9,9(1)	0,087(6)
7,9(1)	0,077(5)
5,8(1)	0,063(4)
3,7(1)	0,051(3)
2,3(1)	0,042(3)
1,0(1)	0,023(3)

O comportamento não linear dos dados da Tabela 4 pode ser observado no gráfico representado na Figura 6.



**Figura 6.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

Entretanto, ao elevar ao quadrado a equação (2.4) obtemos, com o auxílio da equação (2.9), a expressão

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + a^2 t^2 - 2av_0 t \\ &= v_0^2 - 2a \left( v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \right) \\ &= v_0^2 - 2a (h_0 - h). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Da Figura 6 observamos que  $v \approx 0$  quando  $h \approx 0$ . Desse modo, a partir de (2.10) podemos concluir que  $v_0^2 \approx 2ah_0$ . Portanto, em boa aproximação, a equação (2.10) se reduz a

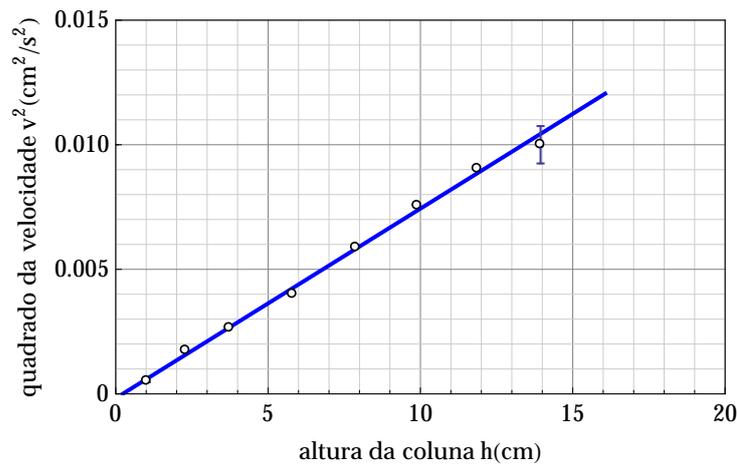
$$v^2 = 2ah, \quad (2.11)$$

Para investigar o resultado indicado pela equação (2.11) construímos a Tabela 5.

**Tabela 5.** – Quadrado da velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

altura $h$ (cm)	quadrado da velocidade $v^2$ (cm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
13,9(1)	0,0100(8)
11,9(1)	0,0091(7)
9,9(1)	0,0076(5)
7,9(1)	0,0059(4)
5,8(1)	0,0040(3)
3,7(1)	0,0026(2)
2,3(1)	0,0018(1)
1,0(1)	0,0005(1)

O comportamento dos dados da Tabela 5 pode ser observado no gráfico representado na Figura 7.

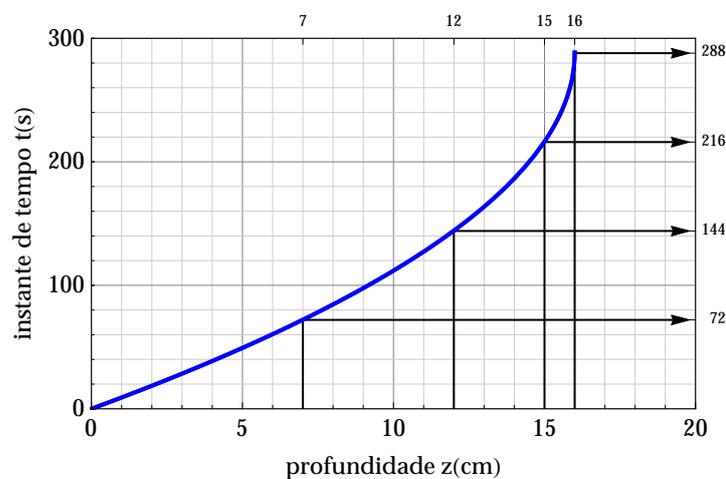


**Figura 7.** – Quadrado da velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

Observamos, da Figura 7, o comportamento praticamente linear entre o quadrado da velocidade da superfície livre e a altura da coluna de água ao longo do escoamento. Observamos também o afastamento desse comportamento no início do movimento, quando a coluna sai do repouso e adquire uma velocidade não nula, e no final do movimento, quando a altura da coluna de água é comparável ao raio do orifício.

### 2.3.1.3 O tempo vs. profundidade

Os resultados obtidos anteriormente nos permitem descrever o instante de tempo vs. a profundidade da superfície da coluna de água em relação ao seu nível inicial, como representado na Figura 8.



**Figura 8.** – Instante de tempo  $t$  vs. profundidade  $z$ , para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm. Observamos no gráfico a proporção 1:3:5:7 associada ao movimento uniformemente acelerado.

Observamos na mesma Figura 8 a proporção 1:3:5:7 associada ao movimento uniformemente acelerado. Podemos, assim, construir um cronômetro onde os instantes de tempo são indicados pela altura da coluna de água.

### 2.3.2 Evolução da coluna de água para altura inicial $H = 8$ cm

Estudamos nesta seção o comportamento do escoamento da água, a partir da altura da coluna de água igual a  $H = 8,0$  cm, para o recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm. Seguimos as mesmas orientações definidas e discutidas na seção 2.3.1.

#### 2.3.2.1 A altura vs. tempo

A Tabela 6 apresenta a altura da coluna de água vs. instante de tempo para o escoamento a partir da altura inicial  $H = 8,0$  cm, para o recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm e tempo de escoamento  $t_{\text{esc}} = 210$  s.

**Tabela 6.** – Altura  $h$  da coluna de água vs. instante de tempo  $t$  para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

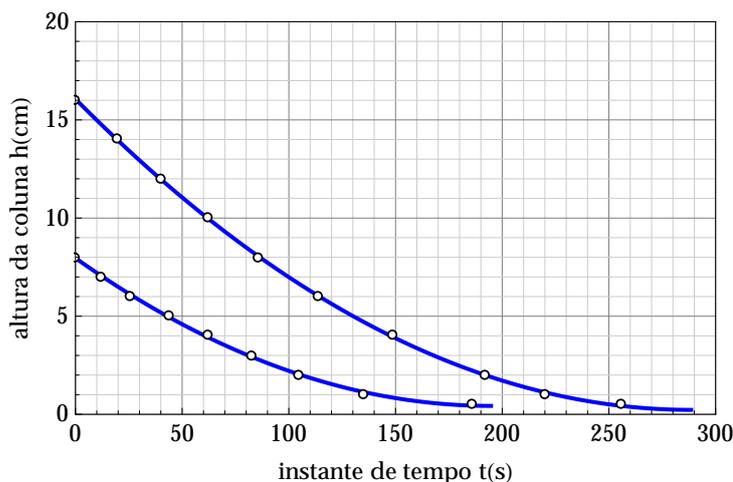
instante de tempo $t'$ (s)	instante de tempo $t$ (s)	altura $h$ da coluna $t$ (cm)
4,0(5)	0(1)	8,0(1)
16,0(5)	12(1)	7,0(1)
30,0(5)	26(1)	6,0(1)
48,0(5)	44(1)	5,0(1)
66,0(5)	62(1)	4,0(1)
87,0(5)	83(1)	3,0(1)
109,0(5)	105(1)	2,0(1)
139,0(5)	135(1)	1,0(1)
190,0(5)	186(1)	0,5(1)

Os dados da Tabela 6 estão representados no gráfico da Figura 9. Para comparação, representamos na mesma figura o comportamento da evolução da coluna de água para uma altura inicial de  $H = 16,0$  cm.

Novamente, observamos que somente com a construção do gráfico dos dados de escoamento, representado na Figura 9, não é possível determinar com precisão em qual altura  $h$  ou instante  $t$  a velocidade de escoamento é nula. Para resolver esse problema, devemos fazer um gráfico que represente a velocidade  $v$  da superfície livre vs. instante de tempo  $t$ .

A Tabela 7 representa a velocidade da superfície livre  $v$  da coluna de água vs. instantes de tempo  $t$ , para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm. O comportamento desses dados pode ser observado no gráfico da Figura 10.

A Figura 10 revela que, em primeira aproximação, a velocidade  $v$  da coluna de água varia linearmente com o instante de tempo  $t$ , no intervalo de tempo considerado, e pode



**Figura 9.** – Altura  $h$  da coluna de água vs. instante de tempo  $t$  para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm e  $H = 16,0$  cm, para o recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm, até a água do recipiente parar de escoar.

**Tabela 7.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. instantes de tempo  $t$ , para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

instante de tempo $t$ (s)	velocidade $v$ (cm s <sup>-1</sup> )
13(1)	0,08(1)
28(1)	0,063(8)
44(1)	0,056(7)
64(1)	0,051(6)
84(1)	0,047(6)
109(1)	0,038(4)
146(1)	0,019(3)

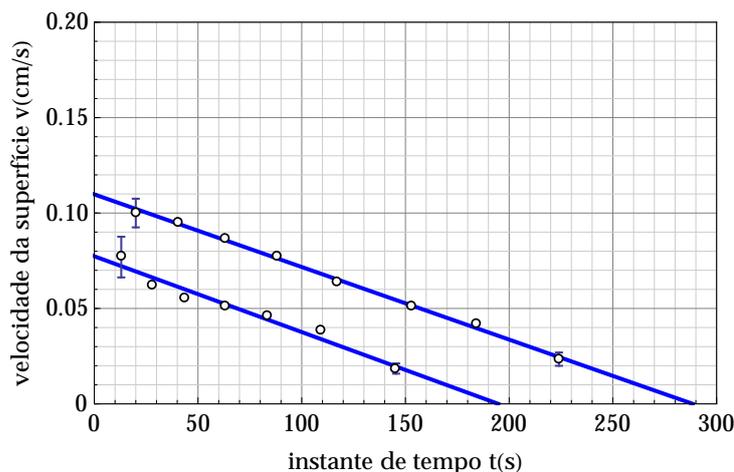
ser representada algebricamente pela forma:

$$v = v_0 - at, \tag{2.12}$$

onde  $v_0 = 0,08(1)$  cm s<sup>-1</sup> corresponde ao coeficiente linear da reta, com dimensão de velocidade, e  $a = 3,79(3) \cdot 10^{-4}$  cm/s<sup>2</sup>, o coeficiente angular da reta, corresponde à aceleração a qual a superfície livre está submetida. Observamos que esta aceleração é a mesma que aquela obtida na seção 2.3.1. O comportamento temporal da velocidade representado na Figura 10 também nos revela que o movimento da coluna tem velocidade nula quando  $t_{\text{esc}} = 195$  s, em acordo com o observado experimentalmente.

Como observado na seção 2.3.1, da mesma Figura 10 também podemos concluir que a evolução da altura da coluna de água pode ser descrita pela expressão

$$h = h_0 - v_0t + \frac{1}{2}at^2, \tag{2.13}$$



**Figura 10.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. instantes de tempo  $t$ , para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm (curva inferior) e  $H = 16,0$  cm (curva superior). para o recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm. Observamos que as duas retas possuem coeficiente linear  $v_0$  diferentes mas apresentam o mesmo coeficiente angular  $a$ . Observamos ainda que menor a altura de partida, menor é o tempo de escoamento.

onde  $h_0 = H = 8,0$  cm, delineada na Figura 9. Podemos desse modo, afirmar que o movimento da coluna de água pode ser representado de forma aproximada pela expressão do movimento uniformemente retardado.

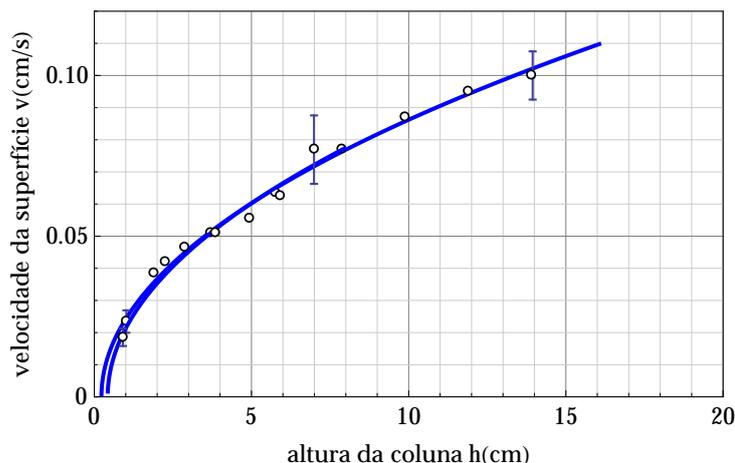
### 2.3.2.2 A velocidade vs. altura

Com o auxílio da equação (2.13) podemos substituir os instantes de tempo indicados na Tabela 7 e estudar o comportamento da velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água em função da altura  $h$  da coluna. O resultado está indicado na Tabela 8 e seu comportamento não linear representado na Figura 11.

**Tabela 8.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

altura $h$ (cm)	velocidade $v$ (cm s <sup>-1</sup> )
7,0(1)	0,08(1)
6,0(1)	0,063(8)
4,9(1)	0,056(7)
3,9(1)	0,051(6)
2,9(1)	0,047(6)
1,9(1)	0,038(5)
0,9(1)	0,019(3)

Indicamos também, na mesma Figura 11, a curva obtida para o movimento da coluna partindo da altura  $H = 16,0$  cm. A superposição das duas curvas indica que apenas pela observação do gráfico só podemos distinguir os dois movimentos conhecendo-se a



**Figura 11.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm e  $H = 16,0$  cm, para o recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm. Observamos que ocorre uma superposição das duas curvas e que elas são distinguíveis somente conhecendo-se a altura inicial da coluna de água. Este comportamento sugere que  $v \approx \sqrt{2ah}$  para ambos os movimentos.

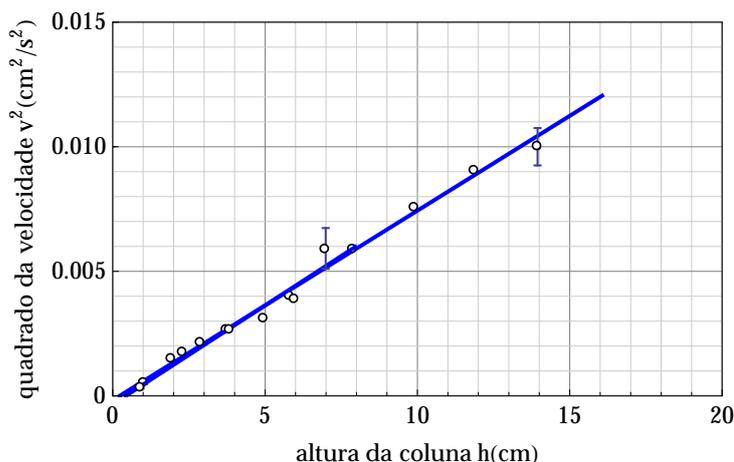
altura inicial  $H$ . Podemos assim conjecturar que as as velocidades dos dois movimentos obedecem a mesma dependência com a altura:  $v \approx \sqrt{2ah}$ . Construímos então a Tabela 9, onde o quadrado da velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água é descrito em função da altura  $h$  da coluna de água.

**Tabela 9.** – Quadrado da velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

altura $h$ (cm)	quadrado da velocidade $v^2$ (cm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
7,0(1)	0,0059(8)
6,0(1)	0,0039(5)
4,9(1)	0,0031(4)
3,9(1)	0,0026(3)
2,9(1)	0,0022(3)
1,9(1)	0,0015(2)
0,9(1)	0,00034(5)

O comportamento dos dados da Tabela 9 pode ser observado no gráfico da Figura 12.

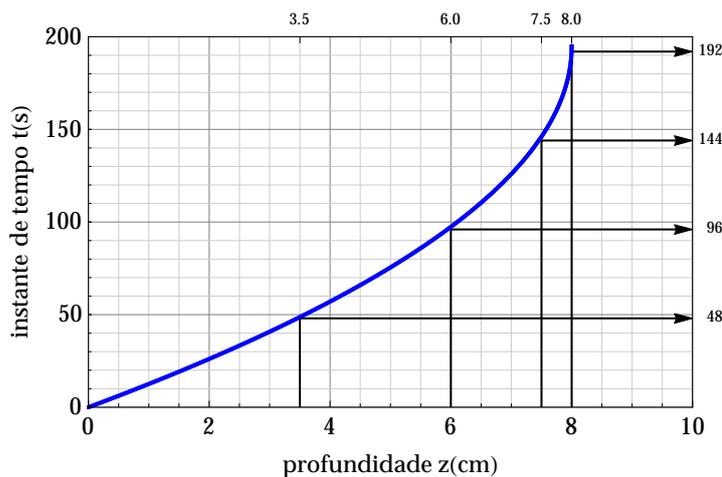
Observamos mais uma vez, da Figura 12, o comportamento linear entre o quadrado da velocidade da superfície livre e a altura da coluna de água. Observamos também o afastamento desse comportamento no início do movimento, quando a coluna sai do repouso e adquire uma velocidade não nula, e no final do movimento, quando a velocidade se anula para uma altura da coluna de água comparável ao raio do orifício.



**Figura 12.** – Quadrado da velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm e  $H = 16,0$  cm, para o recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm. Notamos mais uma vez a superposição das duas curvas e que elas são distinguíveis somente conhecendo-se a altura inicial da coluna de água. Notamos também o afastamento do comportamento linear no início e no fim dos respectivos movimentos.

### 2.3.2.3 O tempo vs. profundidade

Dos resultados obtidos para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm, também podemos descrever os instantes de tempo vs. a altura da coluna de água, como representado na Figura 13. Desse modo, temos um cronômetro onde os instantes de tempo são indicados pela altura da coluna de água.



**Figura 13.** – Instante de tempo  $t$  vs. profundidade  $z$ , para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm. Observamos no gráfico a proporção 1:3:5:7 associada ao movimento uniformemente acelerado.

Observamos também, da mesma Figura 13, a proporção 1:3:5:7 associada ao movimento uniformemente acelerado.

### 2.3.3 Evolução da coluna de água para altura inicial $H = 10, 12,$ e $14$ cm

Estudamos nesta seção o comportamento do escoamento da água, a partir da altura da coluna de água igual a  $H = 10,0$  cm,  $12,0$  cm e  $14,0$  cm, para o recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm. Seguimos as mesmas orientações da seção 2.3.1

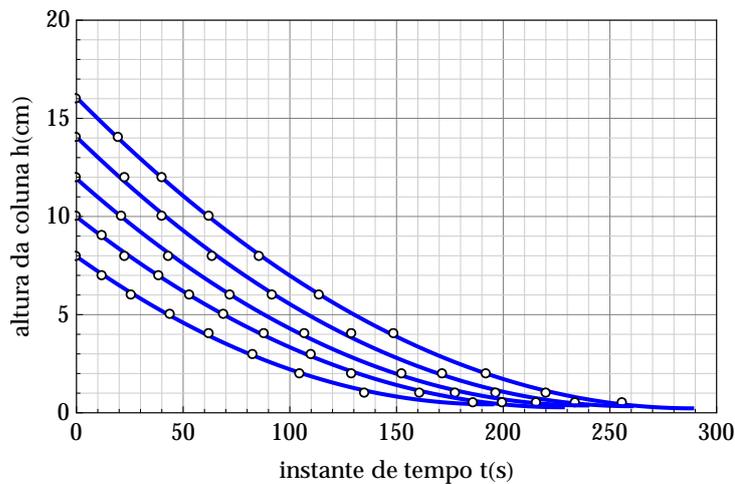
#### 2.3.3.1 A altura vs. tempo

A Tabela 10 apresenta as diferentes alturas da coluna de água vs. instante de tempo, e tempo de escoamento  $t_{esc} = 260$  s,  $270$  s e  $280$  s, respectivamente.

**Tabela 10.** – Altura  $h$  da coluna de água vs. instante de tempo  $t$  para uma altura inicial  $H = 10,0$  cm,  $12,0$  cm e  $14,0$  cm, e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

$H = 10,0$ cm			$H = 12,0$ cm			$H = 14,0$ cm		
$t'(s)$	$t(s)$	$h(cm)$	$t'(s)$	$t(s)$	$h(cm)$	$t'(s)$	$t(s)$	$h(cm)$
3,0(5)	0(1)	10,0(1)	4,0(5)	0(1)	12,0(1)	3,0(5)	0(1)	14,0(1)
15,0(5)	12(1)	9,0(1)	25,0(5)	21(1)	10,0(1)	26,0(5)	23(1)	12,0(1)
26,0(5)	23(1)	8,0(1)	47,0(5)	43(1)	8,0(1)	43,0(5)	40(1)	10,0(1)
42,0(5)	39(1)	7,0(1)	76,0(5)	72(1)	6,0(1)	67,0(5)	64(1)	8,0(1)
56,0(5)	53(1)	6,0(1)	111,0(5)	107(1)	4,0(1)	95,0(5)	92(1)	6,0(1)
72,0(5)	69(1)	5,0(1)	157,0(5)	153(1)	2,0(1)	132,0(5)	129(1)	4,0(1)
91,0(5)	88(1)	4,0(1)	182,0(5)	178(1)	1,0(1)	175,0(5)	172(1)	2,0(1)
113,0(5)	110(1)	3,0(1)	220,0(5)	216(1)	1,0(1)	200,0(5)	197(1)	1,0(1)
132,0(5)	129(1)	2,0(1)				237,0(5)	234(1)	0,5(1)
164,0(5)	161(1)	1,0(1)						
203,0(5)	200(1)	0,5(1)						

Os dados da Tabela 10 estão representados no gráfico da Figura 14.



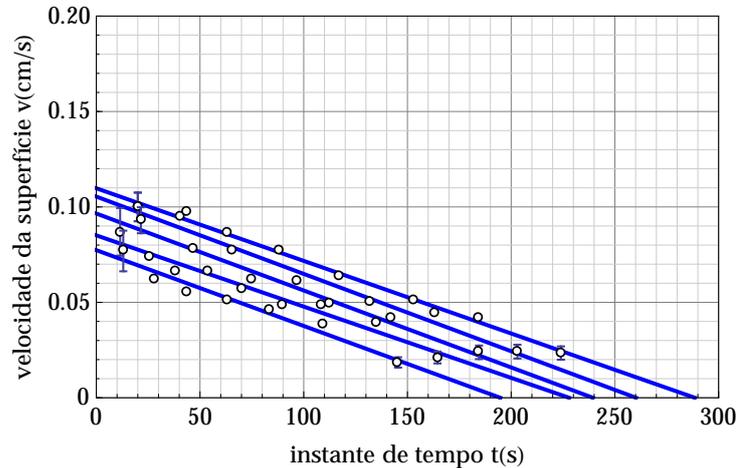
**Figura 14.** – Altura  $h$  da coluna de água vs. instante de tempo  $t$  para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm,  $10,0$  cm,  $12,0$  cm,  $14,0$  cm e  $16,0$  cm. O recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

Como discutido na seção 2.3.1, construímos a Tabela 11 para determinar uma expressão algébrica para o movimento da coluna de água e o intervalo de tempo de escoamento do recipiente. A Tabela 11 representa a velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. instante de tempo  $t$ , para as alturas iniciais  $H = 10,0$  cm,  $12,0$  cm e  $14,0$  cm.

**Tabela 11.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. instante de tempo  $t$ , para uma altura inicial  $H = 10,0$  cm,  $12,0$  cm e  $14,0$  cm, e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

$H = 10,0$ cm		$H = 12,0$ cm		$H = 14,0$ cm	
$t$ (s)	$v$ (cm s <sup>-1</sup> )	$t$ (s)	$v$ (cm s <sup>-1</sup> )	$t$ (s)	$v$ (cm s <sup>-1</sup> )
12(1)	0,09(1)	22(1)	0,093(7)	20(1)	0,100(8)
26(1)	0,07(1)	47(1)	0,078(5)	44(1)	0,098(7)
38(1)	0,067(9)	73(1)	0,063(4)	66(1)	0,077(5)
54(1)	0,067(9)	113(1)	0,049(3)	97(1)	0,062(4)
71(1)	0,057(7)	143(1)	0,042(3)	132(1)	0,050(3)
89(1)	0,049(6)	185(1)	0,024(4)	163(1)	0,044(4)
109(1)	0,049(6)			203(1)	0,024(4)
136(1)	0,039(5)				
165(1)	0,021(3)				

O comportamento dos dados da Tabela 11 pode ser observado no gráfico representado na Figura 15.



**Figura 15.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. instantes de tempo  $t$ , para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm,  $10,0$  cm,  $12,0$  cm,  $14,0$  cm e  $16,0$  cm, para o recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

A Figura 15 sugere que a velocidade  $v$  da coluna de água varia linearmente com o tempo  $t$ , no intervalo de tempo considerado, e pode ser representada algebricamente pela

forma:

$$v = v_0 - at, \quad (2.14)$$

onde  $v_0$  corresponde ao coeficiente linear da reta, com dimensão de velocidade, e  $a$ , o coeficiente angular da reta, corresponde à aceleração a qual a superfície livre está submetida. Reunimos na Tabela 12 esses dois parâmetros vs. a altura inicial  $H$  correspondente.

**Tabela 12.** – Resultados obtidos para os parâmetros  $v_0$  e aceleração  $a$  para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm,  $10,0$  cm,  $12,0$  cm,  $14,0$  cm e  $16,0$  cm, e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

$H(\text{cm})$	$v_0(\text{cm/s})$	$a(10^{-4}\text{cm/s}^2)$
8,0(1)	0,08(1)	3,79(3)
10,0(1)	0,09(1)	3,75(3)
12,0(1)	0,10(1)	3,79(3)
14,0(1)	0,105(5)	3,81(3)
16,0(1)	0,11(1)	3,79(3)

Da mesma Figura 15, como discutido na seção 2.3.1, também podemos concluir que a evolução da altura da coluna de água pode ser descrita pela expressão

$$h = h_0 - v_0t + \frac{1}{2}at^2, \quad (2.15)$$

onde  $h_0 = H$ . A expressão algébrica (2.15) representa a evolução da altura da superfície livre da coluna de água durante o processo de escoamento para todas as diferentes alturas iniciais, e corresponde às curvas contínuas delineadas na Figura 14. Podemos desse modo, afirmar que o movimento da coluna de água pode ser representado de forma aproximada pela expressão do movimento uniformemente retardado para todas as diferentes alturas iniciais  $H$  consideradas.

### 2.3.3.2 A velocidade vs. altura

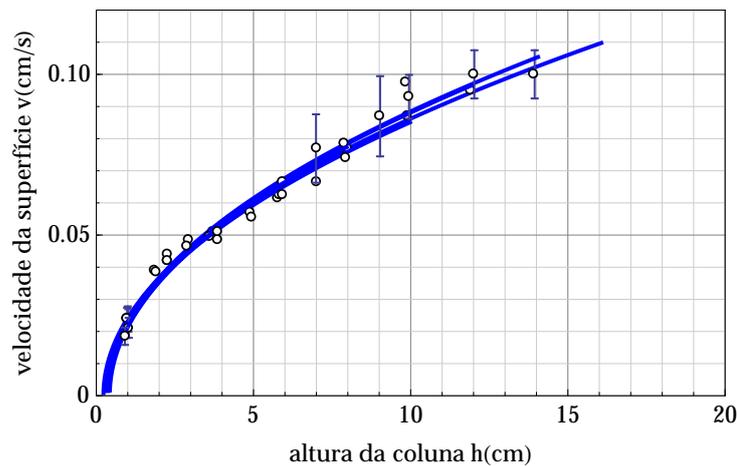
Com o auxílio da equação (2.15) podemos substituir os instantes de tempo indicados na Tabela 11 e representar o comportamento da velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água em função da altura  $h$  da coluna. O resultado obtido está representado na Tabela 13.

O comportamento não linear dos dados da Tabela 13 pode ser observado no gráfico representado na Figura 16.

Da Figura 16 observamos ainda que todas as curvas se superpõem e que elas são distinguíveis somente conhecendo-se a altura inicial da coluna de água. Este comportamento sugere que  $v \approx \sqrt{2ah}$  para todos os movimentos.

**Tabela 13.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 10,0$  cm,  $12,0$  cm e  $14,0$  cm, e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

$H = 10,0$ cm		$H = 12,0$ cm		$H = 14,0$ cm	
$h$ (cm)	$v$ (cm s <sup>-1</sup> )	$h$ (cm)	$v$ (cm s <sup>-1</sup> )	$h$ (cm)	$v$ (cm s <sup>-1</sup> )
9,0(1)	0,09(1)	9,9(1)	0,093(7)	12,0(1)	0,100(8)
7,9(1)	0,07(1)	7,9(1)	0,078(5)	9,8(1)	0,098(7)
7,0(1)	0,067(9)	5,8(1)	0,063(4)	8,0(1)	0,077(5)
5,9(1)	0,067(9)	3,6(1)	0,051(3)	5,8(1)	0,062(4)
4,9(1)	0,057(7)	2,3(1)	0,046(3)	3,7(1)	0,050(3)
3,9(1)	0,049(6)	1,0(1)	0,038(4)	2,3(1)	0,044(3)
2,9(1)	0,049(6)			1,0(1)	0,024(4)
1,9(1)	0,039(5)				
1,0(1)	0,021(5)				



**Figura 16.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm,  $10,0$  cm,  $12,0$  cm,  $14,0$  cm e  $16,0$  cm, para o recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm. Observamos que ocorre uma superposição das cinco curvas e que elas podem ser representadas por  $\sqrt{2ah}$ .

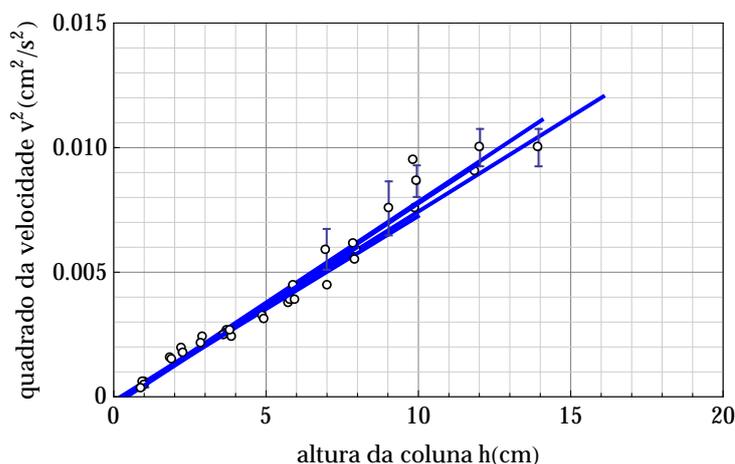
Para observar esse comportamento construímos a Tabela 14, onde o quadrado da velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água é descrito em função da altura  $h$  da coluna.

O comportamento dos dados da Tabela 13 está ilustrado no gráfico da Figura 17.

Observamos mais uma vez, da Figura 17, o comportamento linear entre o quadrado da velocidade da superfície livre e a altura da coluna de água ao longo do escoamento. Observamos também o afastamento desse comportamento no início do movimento, quando a coluna sai do repouso e adquire uma velocidade não nula, e no final do movimento, quando a altura da coluna de água é comparável ao raio do orifício.

**Tabela 14.** – Quadrado da velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 10,0$  cm,  $12,0$  cm e  $14,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

$H = 10,0$ cm		$H = 12,0$ cm		$H = 14,0$ cm	
$h$ (cm)	$v^2$ (cm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$h$ (cm)	$v^2$ (cm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$h$ (cm)	$v^2$ (cm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
9,0(1)	0,008(1)	9,9(1)	0,0086(6)	12,0(1)	0,0100(7)
7,9(1)	0,0055(8)	7,9(1)	0,0062(4)	9,8(1)	0,0095(7)
7,0(1)	0,0044(6)	5,8(1)	0,0039(3)	8,0(1)	0,0060(4)
5,9(1)	0,0044(6)	3,6(1)	0,0024(2)	5,8(1)	0,0038(2)
4,9(1)	0,0033(4)	2,3(1)	0,0018(1)	3,7(1)	0,0025(2)
3,9(1)	0,0024(3)	1,0(1)	0,000 57(8)	2,3(1)	0,0020(2)
2,9(1)	0,0024(3)			1,0(1)	0,000 59(9)
1,9(1)	0,0015(2)				
1,0(1)	0,000 45(7)				



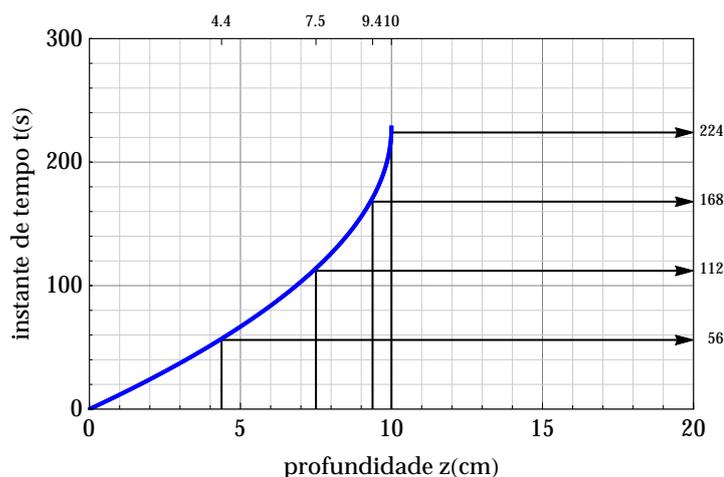
**Figura 17.** – Quadrado da velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 8,0$  cm,  $10,0$  cm,  $12,0$  cm,  $14,0$  cm e  $16,0$  cm, para o recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm.

### 2.3.3.3 O tempo vs. profundidade

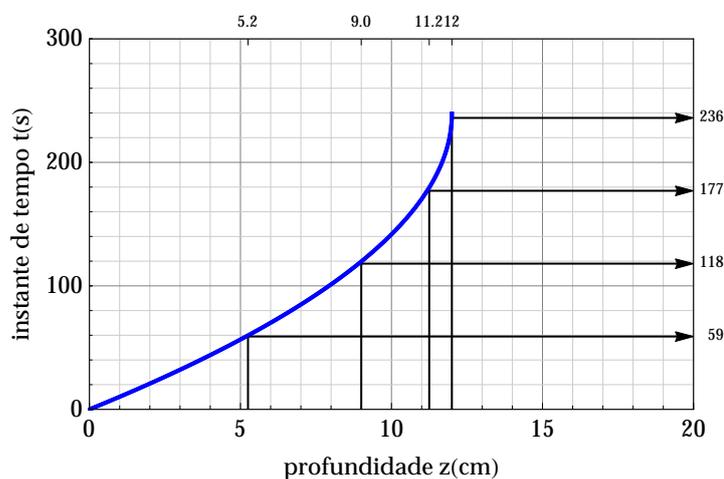
Dos resultados obtidos para uma altura inicial  $H = 10,0$  cm,  $12,0$  cm e  $14,0$  cm, também podemos descrever o instante de tempo vs. a altura da coluna de água, como representado na Figura 18 e na Figura 19. Desse modo, temos um cronômetro onde os instantes de tempo  $t$  são indicados pelas respectivas alturas  $h$  da coluna de água, ao longo dos diferentes movimentos.

Indicamos na Figura 18 e na Figura 19 a proporção 1:3:5:7 associada ao movimento uniformemente acelerado.

Observamos que em qualquer um dos movimentos discutidos poderíamos ter empregado um outro sistema de contagem diferente do cronômetro que usamos; a única exi-



(a)

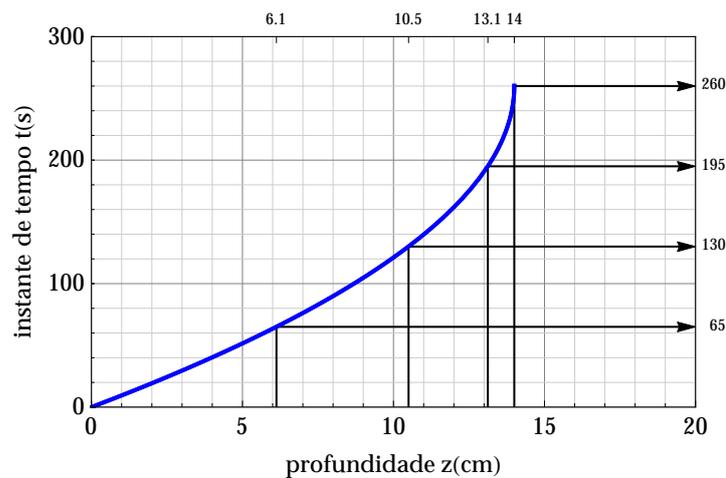


(b)

**Figura 18.** – Instante de tempo  $t$  vs. profundidade  $z$ , para uma altura inicial (a)  $H = 10,0$  cm e (b)  $H = 12,0$  cm, e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm. Observamos no gráfico a proporção 1:3:5:7 associada ao movimento uniformemente acelerado.

gência é que o novo sistema tenha uma frequência definida de contagem. Por exemplo, o aplauso ritmado ou a contagem oral realizada por um dos estudantes, apresentaria o mesmo resultado; o que muda é somente a unidade de tempo adotada.

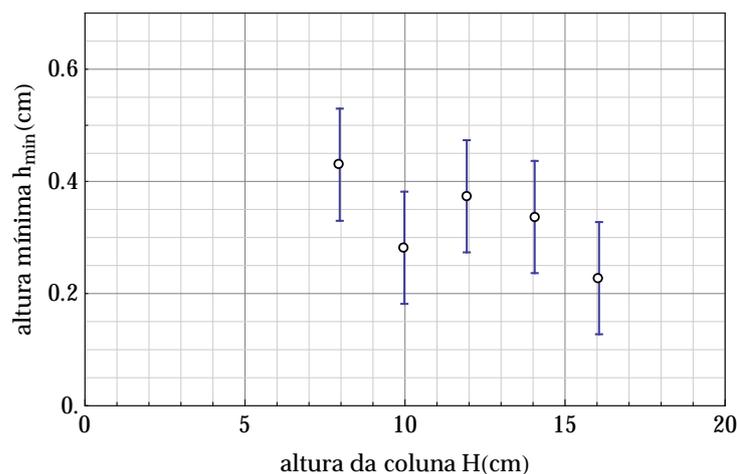
Os alunos podem escolher e imprimir qualquer um dos gráficos da Figura 18 e da Figura 19, em uma escala adequada, e colar o gráfico escolhido sobre a superfície da garrafa de maneira que, ao variar o seu nível durante o escoamento, a superfície da água na ordenada indique na abscissa o correspondente intervalo de tempo transcorrido.



**Figura 19.** – Instante de tempo  $t$  vs. profundidade  $z$ , para uma altura inicial  $H = 14,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 3,0$  mm. Observamos no gráfico a proporção 1:3:5:7 associada ao movimento uniformemente acelerado.

### 2.3.4 Os parâmetros $h_{\min}$ , $v_0$ e o tempo de escoamento

Definimos a altura  $h_{\min}$  como a altura correspondente ao instante de tempo  $t$  igual ao tempo de escoamento. Ela pode ser determinado graficamente ou com o auxílio das correspondentes expressões algébricas para a velocidade e a altura em função do tempo. Na Figura 20, representamos o comportamento do parâmetro  $h_{\min}$  vs. altura inicial da coluna de água.

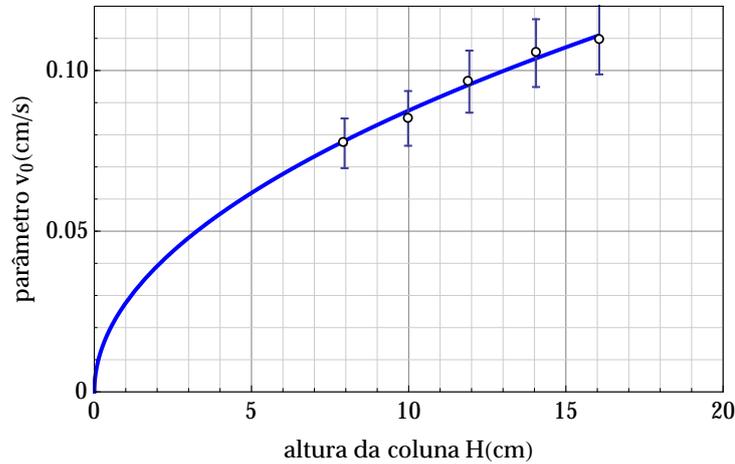


**Figura 20.** – Comportamento do parâmetro  $h_{\min}$  vs. altura inicial da coluna de água. Quanto menor a altura da coluna de água maior é a altura mínima prevista pela representação do movimento como um movimento uniformemente retardado.

Observamos, da Figura 20, que, para as alturas iniciais consideradas, as alturas mínimas são da ordem de grandeza do diâmetro do orifício e que quanto menor a altura da

coluna de água maior é a altura mínima prevista pela representação do movimento como um movimento uniformemente retardado.

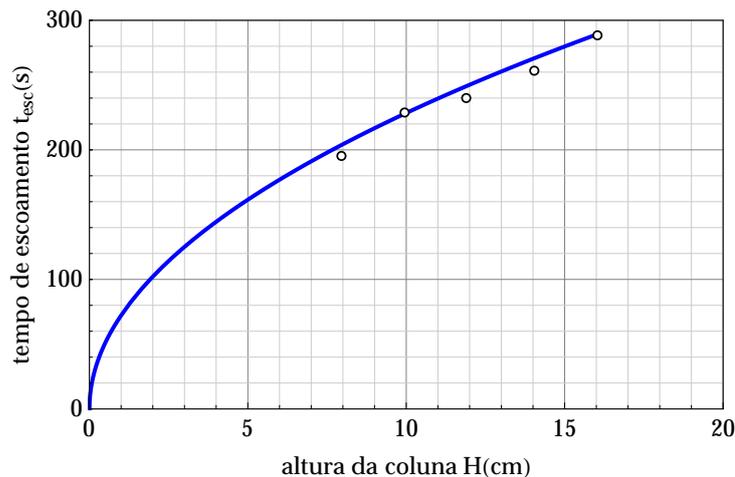
Na Figura 20, representamos o comportamento do parâmetro  $v_0$  vs. altura inicial da coluna de água.



**Figura 21.** – Comportamento do parâmetro  $v_0$  vs. altura inicial da coluna de água. A linha contínua representa a aproximação  $v_0 = \sqrt{2ah_0}$ .

Observamos, da Figura 21, que, para as alturas iniciais consideradas, podemos adotar a aproximação  $v_0 = \sqrt{2ah_0}$ .

Na Figura 22, representamos o comportamento do tempo de escoamento  $t_{\text{esc}}$  vs. altura inicial da coluna de água.



**Figura 22.** – Comportamento do tempo de escoamento  $t_{\text{esc}}$  vs. altura inicial da coluna de água. A linha contínua na Figura 22 corresponde à equação (3.49), discutida no Capítulo 3.

Observamos, da Figura 22, que, para as alturas iniciais consideradas, podemos adotar a aproximação  $t_{\text{esc}} \approx \sqrt{h_0}$ , sugerida pela descrição do movimento como um movimento

uniformemente retardado. A linha contínua na Figura 22 corresponde à equação (3.49), discutida no Capítulo 3, e adaptada para as condições da Atividade 1.

## 2.4 Escoamento da água – Atividade 2

Apresentamos nesta seção as medidas e a análise dos resultados para a evolução da altura da coluna de água em função do tempo para o escoamento da água a partir da altura inicial  $H = 16,0$  cm, para o recipiente com orifício de diâmetro  $d = 1,2$  mm.

### 2.4.1 Evolução da coluna de água para altura inicial $H = 16$ cm

Seguimos o mesmo procedimento discutido na Atividade 1, para caracterizar a evolução da altura da coluna de água em função do tempo para o escoamento da água.

#### 2.4.1.1 A altura vs. tempo

A Tabela 15 apresenta a altura da coluna de água vs. instante de tempo para o escoamento a partir da altura inicial  $H = 16,0$  cm, para o recipiente com orifício de diâmetro  $d = 1,2$  mm e tempo de escoamento  $t_{\text{esc}} = 1980$  s.

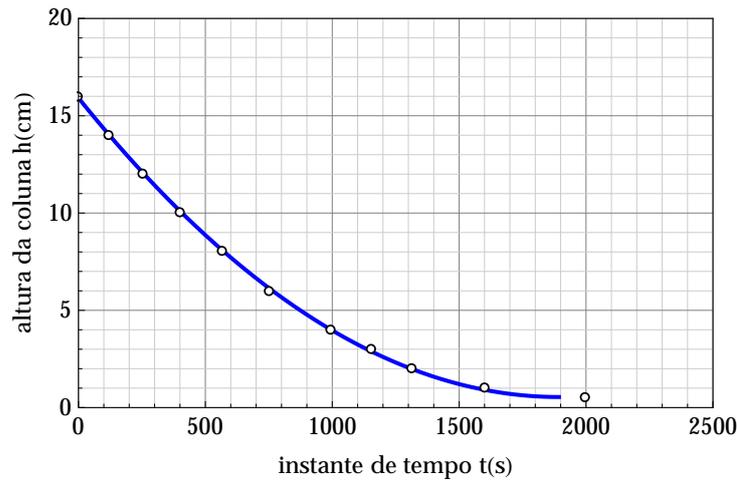
**Tabela 15.** – Altura  $h$  da coluna de água vs. instante de tempo  $t$  para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 1,2$  mm.

instante de tempo $t'$ (s)	instante de tempo $t$ (s)	altura $h$ da coluna $t$ (cm)
3,0(5)	0(1)	16,0(1)
127,0(5)	124(1)	14,0(1)
260,0(5)	257(1)	12,0(1)
404,0(5)	401(1)	10,0(1)
574,0(5)	571(1)	8,0(1)
755,0(5)	752(1)	6,0(1)
1000,0(5)	997(1)	4,0(1)
1160,0(5)	1157(1)	3,0(1)
1317,0(5)	1314(1)	2,0(1)
1606,0(5)	1603(1)	1,0(1)
2000,0(5)	1997(1)	0,5(1)

Os dados da Tabela 15 podem ser bem observados no gráfico representado na Figura 23.

Construímos, em seguida, a Tabela 16 que representa a velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. instante de tempo  $t$ , para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 1,2$  mm.

O comportamento dos dados da Tabela 16 pode ser observado no gráfico representado na Figura 24.



**Figura 23.** – Altura  $h$  da coluna de água vs. instante de tempo  $t$  para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 1,2$  mm. A linha contínua representa a evolução da altura até a água do recipiente parar de escoar.

**Tabela 16.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. instante de tempo  $t$ , para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 1,2$  mm.

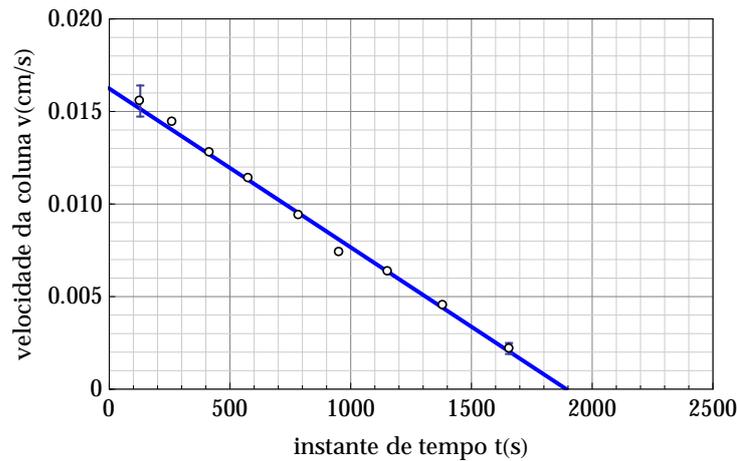
instante de tempo $t$ (s)	velocidade $v$ (cm s <sup>-1</sup> )
129(1)	0,0156(8)
263(1)	0,0144(8)
414(1)	0,0127(7)
577(1)	0,0114(6)
784(1)	0,0094(5)
955(1)	0,0074(5)
1160(1)	0,0063(7)
1380(1)	0,0045(5)
1660(1)	0,0022(3)

A Figura 24 também sugere que a velocidade da coluna de água varia linearmente com o tempo, e pode ser representada algebricamente pela forma:

$$v = v_0 - at, \quad (2.16)$$

onde  $v_0 = 0,016(1)$  cm s<sup>-1</sup> corresponde ao coeficiente linear da reta, com dimensão de velocidade, e  $a = 8,4(8) \cdot 10^{-6}$  cm/s<sup>2</sup>, o coeficiente angular da reta, corresponde à aceleração média a qual a superfície livre está submetida. O comportamento temporal da velocidade representado na Figura 24 também nos revela que o movimento da coluna tem velocidade nula quando  $t_{\text{esc}} = 1900$  s, em acordo com o observado experimentalmente.

Podemos, desse modo, afirmar que o movimento da coluna de água, para as condições da Atividade 2 também pode ser representado de forma aproximada pela expressão do



**Figura 24.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. instante de tempo  $t$ , para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 1,2$  mm.

movimento uniformemente retardado.

$$h = h_0 - v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad (2.17)$$

onde  $h_0 = H = 16,0$  cm. A expressão algébrica (2.17) representa a evolução da altura da superfície livre da coluna de água durante o processo de escoamento, e corresponde à curva contínua delineada na Figura 23.

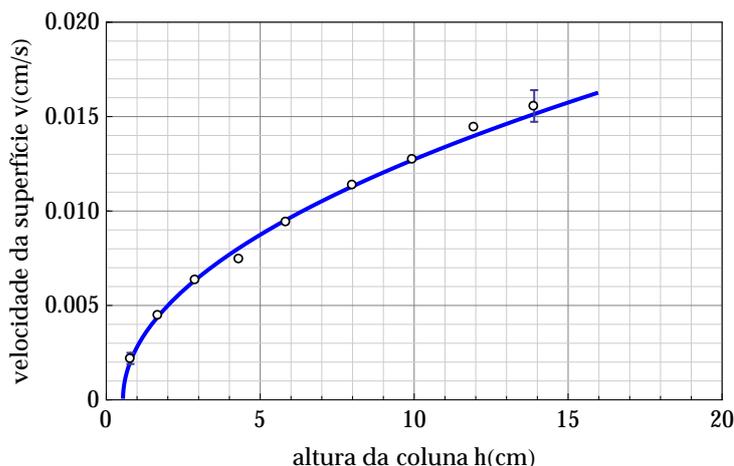
#### 2.4.1.2 A velocidade vs. altura

Com o auxílio da equação (2.17) podemos substituir os instantes de tempo indicados na Tabela 16 e descrever o comportamento da velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água em função da altura  $h$  da coluna de água. O resultado está indicado na Tabela 17.

**Tabela 17.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm, e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 1,2$  mm.

altura $h$ (cm)	velocidade $v$ (cm s <sup>-1</sup> )
13,9(1)	0,0156(8)
11,9(1)	0,0144(8)
9,9(1)	0,0127(7)
8,0(1)	0,0114(6)
5,8(1)	0,0094(5)
4,3(1)	0,0074(5)
2,9(1)	0,0063(7)
1,7(1)	0,0045(5)
0,8(1)	0,0022(3)

O comportamento não linear dos dados da Tabela 17 pode ser observado no gráfico representado na Figura 25.



**Figura 25.** – Velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm, e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 1,2$  mm.

A Figura 25 sugere que a velocidade  $v$  da superfície livre desse movimento também pode ser descrita de forma aproximada pela expressão  $v \approx \sqrt{2ah}$ . Para investigar essa hipótese, construímos a Tabela 18.

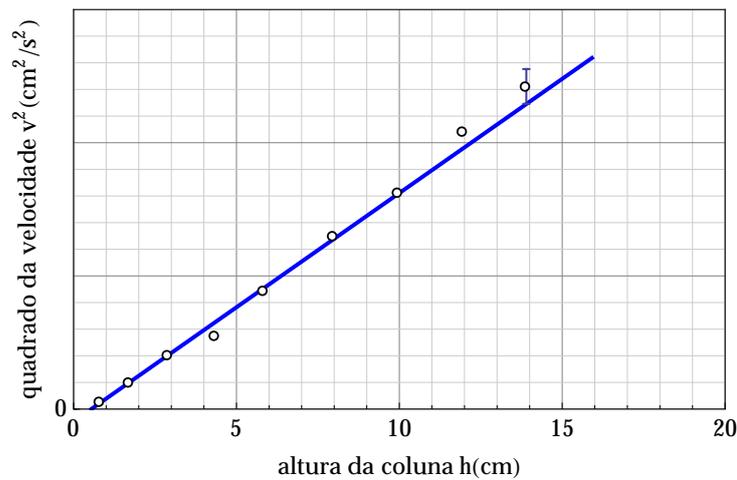
**Tabela 18.** – Quadrado da velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 1,2$  mm.

altura $h$ (cm)	quadrado da velocidade $v^2$ (cm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )
13,9(1)	0,000 24(1)
11,9(1)	0,000 21(1)
9,9(1)	0,000 162(9)
8,0(1)	0,000 130(7)
5,8(1)	0,000 088(5)
4,3(1)	0,000 055(4)
2,9(1)	0,000 040(4)
1,7(1)	0,000 020 0(2)
0,8(1)	0,000 004 8(2)

O comportamento dos dados da Tabela 17 pode ser observado no gráfico representado na Figura 25.

Observamos, da Figura 25. o comportamento linear entre o quadrado da velocidade da superfície livre e a altura da coluna de água ao longo do escoamento. Observamos também o afastamento desse comportamento no início do movimento, quando a coluna sai do repouso e adquire uma velocidade não nula, e no final do movimento, quando a altura da coluna de água é comparável ao raio do orifício.

Esses resultados nos permitem descrever o comportamento da evolução da coluna de água durante o escoamento e, mais ainda, permite controlar os parâmetros do experimento

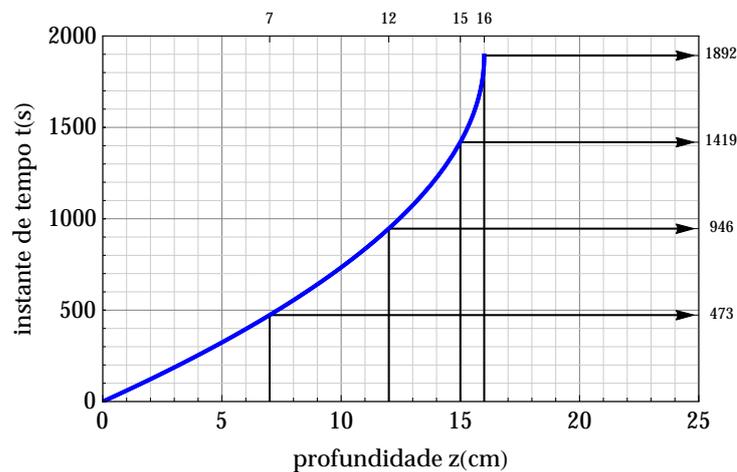


**Figura 26.** – Quadrado da velocidade  $v$  da superfície livre da coluna de água vs. altura  $h$ , para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 1,2$  mm.

de maneira a modificar a escala de tempo conforme o desejado.

### 2.4.1.3 O tempo vs. profundidade

Dos resultados obtidos, podemos descrever os instantes de tempo vs. a altura da coluna de água, como representado na Figura 27. Desse modo, temos novamente um cronômetro onde os instantes de tempo são indicados pela altura da coluna de água.



**Figura 27.** – Instante de tempo  $t$  vs. profundidade  $z$ , para uma altura inicial  $H = 16,0$  cm e recipiente com orifício de diâmetro  $d = 1,2$  mm.

Observamos na mesma Figura 27 a proporção 1:3:5:7 associada ao movimento uniformemente acelerado. Observamos também que poderíamos ter empregado um outro sistema de contagem diferente do cronômetro que usamos, a única exigência é que o novo sistema tenha uma frequência definida de contagem, como discutido na Atividade 1.

## 2.5 Tempo de escoamento e o orifício de saída

Analisamos agora uma relação entre o tempo de escoamento e o diâmetro do orifício de escoamento. Da análise dos dados das Atividades 1 e 2, percebemos que para um mesmo recipiente e mesma altura inicial, quanto menor for o orifício de saída maior será o tempo de escoamento. Para a altura inicial  $H = 16,0$  cm, temos os tempos de escoamento  $t_1 = 290$  s e  $t_2 = 1900$  s para os diâmetros do orifício  $d = 3,0$  mm e  $d = 1,2$  mm, respectivamente. Desse modo, temos

$$\frac{t_2}{t_1} = 6,6. \quad (2.18)$$

Entretanto, a razão entre os diâmetros corresponde a

$$\frac{d_1}{d_2} = 2,5. \quad (2.19)$$

Observamos que a vazão da água é proporcional a área do círculo definido pelo orifício considerado. Nesse caso, a razão entre as áreas corresponde a

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 6,3. \quad (2.20)$$

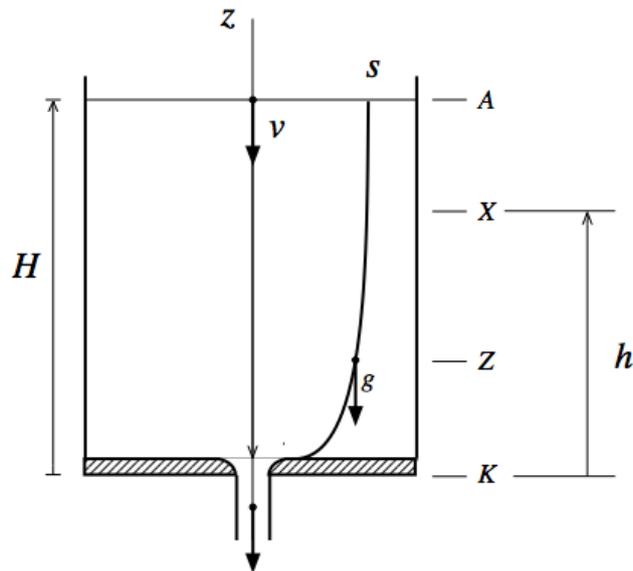
Podemos, assim, concluir que

$$\frac{t_2}{t_1} \approx \frac{S_1}{S_2}. \quad (2.21)$$

Essa relação permite construir relógios de água com diferentes intervalos de tempo de escoamento. Uma discussão mais detalhada dos limites de validade da relação (2.21) é feita no Capítulo 3.

### 3 Um modelo matemático para o fluxo de água

Consideramos o nosso recipiente na forma de um cilindro de revolução reto de altura  $H$ . A abertura superior possui área  $A$  de raio igual a  $R_A$ ; o fluido escorre através de uma abertura na base de área  $K$  e raio igual a  $R_K$ , como ilustrado na Figura 28. Tanto a abertura superior quanto a abertura inferior estão em contato com a atmosfera.



**Figura 28.** – Recipiente cilíndrico regular reto, preenchido com água. A coluna de água tem altura inicial  $H$  e assume os valores  $h$  ao longo do movimento. O movimento da água ocorre na direção  $ds$ , onde  $s$  indica o caminho percorrido pelos componentes do fluido na profundidade  $z$  abaixo da superfície livre;  $g(dz/ds)$  corresponde à componente da gravidade ao longo de  $ds$  e  $v$  a sua velocidade.

#### 3.1 Número de Reynolds

Para uma discussão de fluxo de fluidos, é conveniente agrupar os parâmetros envolvidos no problema em um parâmetro adimensional  $R$  denominado número de Reynolds (CARLTON, 2019). Este parâmetro  $R$  distingue as linhas de fluxo do fluido entre o regime laminar e turbulento, e é definido pela fórmula

$$R = \frac{\rho v d}{\eta}, \quad (3.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $v$  é sua velocidade relativa ao recipiente,  $d$  é algum comprimento característico do recipiente, e  $\eta$  seu coeficiente de viscosidade.

Os experimentos indicam que para  $R$  menor que 2000, o fluxo é sempre laminar não importando o valor da densidade ou da viscosidade do fluido. Em geral, para  $R$  maiores

que 2000 temos um fluxo turbulento. Para a água à 10 °C temos os seguintes valores para a densidade de 999,7 kg/m<sup>3</sup>, viscosidade cinemática  $\eta/\rho = 0,000\,001\,308\,4\text{ m}^2/\text{s}$  e altura do recipiente de 0,16 m. Desse modo, para intervalos de tempo de escoamento maiores que 5,0 min,

$$R < \frac{(1)(0,16/300)(0,16)}{0,000\,001\,308\,4} \approx 66. \quad (3.2)$$

Nessas condições, os fluxos da água nos recipientes observados nas Atividades 1 e 2 são provavelmente fluxos em regime laminar.

### 3.2 Nível do fluido constante

Para descrever a dinâmica do fluxo de água mantendo constante o seu nível no recipiente, seguimos a discussão de Besant (1859). Escolhemos a superfície livre da água como a origem de coordenadas. A equação que descreve o movimento da água é a equação de Euler

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = g \frac{dz}{ds} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}, \quad (3.3)$$

onde assumimos que o movimento da água ocorre na direção  $ds$ , onde  $ds$  indica o caminho percorrido pelos componentes do fluido na profundidade  $z$  abaixo da superfície livre;  $gdz/ds$  corresponde à componente da gravidade ao longo de  $ds$ ;  $p$  representa a pressão sobre a camada e  $v$  a sua velocidade.

Observamos, da Figura 28, que  $ds = dz/\cos\theta = \epsilon(\theta)dz$  e, para o nosso cilindro,

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{ds}{dz} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} \\ &\approx \sqrt{1 + 0} \\ &\approx 1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ao adotarmos a hipótese dos planos paralelos, admitimos que todas as camadas do fluido se movem verticalmente para baixo, ao longo da direção  $z$  e, ao longo do movimento, na posição  $z$ , a camada antecedente ocupa o lugar da camada subsequente. Nesse caso, (3.3) se reduz a

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.5)$$

Consideramos que o deslocamento da água ocorre em planos paralelos, e esta hipótese exige que seja satisfeita a seguinte condição de continuidade para o fluxo do fluido:

$$AU = Ku = Zv, \quad (3.6)$$

onde  $U$  corresponde à velocidade da água na superfície livre, de área  $A$ , localizada em  $z = 0$ ;  $u$  corresponde à velocidade da água no orifício de saída, de área  $K$ , localizada

em  $z = H$ ; e  $v$  corresponde à velocidade da água na posição  $z$ , de área  $Z$ , localizada na posição  $z$ .

Como o recipiente está sempre cheio, a velocidade  $U$  em  $z = 0$  depende somente do tempo, e observamos também que a área  $Z$  depende somente de  $z$ . Desse modo, das identidades (3.6) podemos concluir que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{A}{Z} \frac{dU}{dt} = \frac{K}{Z} \frac{du}{dt}. \quad (3.7)$$

Substituímos  $\partial v/\partial t = (A/Z)dU/dt$  na equação (3.5), a integramos entre  $z = 0$  e  $z = H$  e obtemos o resultado

$$A \frac{dU}{dt} \int_0^H \frac{dz}{Z} + \frac{u^2}{2} - \frac{U^2}{2} = gH - \frac{p(H) - p(0)}{\rho}. \quad (3.8)$$

Como as pressões em  $z = 0$  e  $z = H$  correspondem à pressão atmosférica  $p_{\text{atm}}$

$$p(0) = p(H) = p_{\text{atm}} \quad (3.9)$$

e, de (3.6), temos

$$u^2 = \frac{A^2}{K^2} U^2. \quad (3.10)$$

Assim, a equação (3.8) se reduz a

$$A \frac{dU}{dt} \int_0^H \frac{dz}{Z} = gH - \frac{U^2}{2} \left( \frac{A^2}{K^2} - 1 \right). \quad (3.11)$$

Definimos os parâmetros

$$2b = \left( \frac{A^2}{K^2} - 1 \right) \quad (3.12)$$

e

$$k = \int_0^H \frac{dz}{Z}. \quad (3.13)$$

Para nosso recipiente, temos  $A/Z = 1$ , e portanto  $k = H/A$ . Nesse caso, a equação (3.11) se reduz a

$$H \frac{dU}{dt} = gH - bU^2. \quad (3.14)$$

Esta equação é similar à equação do movimento de um corpo sob a ação gravitacional e de uma força resistiva proporcional ao quadrado da sua velocidade.

Consideramos inicialmente que as passagens de entrada e saída de água estão fechadas. Ao abrirmos simultaneamente as duas passagens, a passagem de entrada fornece a mesma quantidade de água que escoar pelo orifício de saída, e a água na superfície livre inicia seu movimento com velocidade nula. Nesse início do movimento, (3.14) se reduz a

$$H \frac{dU}{dt} = gH > 0 \quad (3.15)$$

e esta camada de água é acelerada com aceleração igual a  $g$ . Sua velocidade  $U$  aumenta até que a força resistiva anula a ação gravitacional. Nesse instante a camada de água alcança a velocidade  $U = U_t$ ,  $dU/dt = 0$  e (3.14) se reduz a

$$0 = gH - bU_t^2. \quad (3.16)$$

Concluimos, assim, que a velocidade  $U_t$  corresponde a

$$U_t = \sqrt{\frac{gH}{b}} \quad (3.17)$$

e denominamos  $U_t$  a velocidade terminal da camada de água, na altura  $H$ .

### 3.2.1 Determinação da velocidade $U$

Fazemos a mudança de variável

$$y = \frac{U}{U_t} \quad (3.18)$$

e definimos o parâmetro  $\tau = 1/\alpha$ , com dimensão de inverso de tempo, e  $\alpha$  corresponde a

$$\alpha = \sqrt{\frac{gb}{H}}. \quad (3.19)$$

Com o auxílio de (3.18) e (3.19), resolvemos a equação (3.15) pelo método de separação de variáveis:

$$\begin{aligned} \alpha dt &= \frac{dy}{1-y^2} \\ &= \frac{dy}{2} \left( \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

O movimento se inicia com velocidade nula. Portanto, para  $t = 0$  temos  $y(0) = 0$ . Desse modo, ao integrarmos (3.20), obtemos

$$2\alpha t = \ln \left( \frac{1+y}{1-y} \right). \quad (3.21)$$

Solucionamos a equação (3.21) para  $y$  e obtemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^{2\alpha t} - 1}{e^{2\alpha t} + 1} \\ &= \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{e^{2\alpha t} + e^{-\alpha t}} \\ &= \frac{\sinh(\alpha t)}{\cosh(\alpha t)} \\ &= \tanh(\alpha t). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Substituímos (3.17) e (3.18) em (3.22) e a velocidade  $U$  fica determinada em função do tempo:

$$U(t) = \sqrt{\frac{gH}{b}} \tanh(\alpha t). \quad (3.23)$$

Observamos que o parâmetro  $\tau = 1/\alpha$  corresponde a uma constante de tempo definida pelas condições geométricas do sistema e a região geográfica onde o cilindro está localizado. A velocidade  $u$  de escoamento através do orifício inferior do cilindro fica determinada com o auxílio de (3.6):

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{A}{K}U(t) \\ &= \sqrt{\frac{2gH}{1 - K^2/A^2}} \tanh(\alpha t) \\ &= \sqrt{\frac{2gH}{1 - K^2/A^2}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gb}{H}}t\right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Para  $K/A \ll 1$ ,  $b \gg 1$ , temos  $\alpha \gg 1$ . Nessa condição, as velocidades  $U$  e  $u$  do fluido rapidamente assumem os valores limites  $U = U_t \gtrsim 0$  e  $u \approx \sqrt{2gH}$ . Este último resultado é conhecido como o Teorema de Torricelli.

### 3.3 Nível do fluido variável

Escolhemos a altura  $H$  como a origem de coordenadas  $z$  e assumimos que o movimento da água ocorre no sentido vertical para baixo, como no caso anterior. A hipótese dos planos paralelos também exige que seja satisfeita a seguinte condição de continuidade para o fluxo da água:

$$XU = Ku = Zv, \quad (3.25)$$

onde  $U$  corresponde à velocidade da água na superfície livre, de área  $X$ , localizada na profundidade  $z = H - h$ ;  $u$  corresponde à velocidade da água no orifício de saída, de área  $K$ , localizada em  $z = H$ ; e  $v$  corresponde à velocidade da água na profundidade  $z$ , de área  $Z$ , localizada na posição  $z$ .

Observamos que o nível de água no recipiente diminui e, portanto, a velocidade  $U$  na profundidade  $z = H - h$  depende de  $h$  e do tempo; observamos também que as áreas  $A$ ,  $X$  e  $Z$  são constantes. Desse modo, das identidades (3.6), podemos concluir que para o cilindro reto  $X = A = Z$  temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{XU}{Z} \right) = K \frac{d}{dt} \left( \frac{u}{Z} \right) \\ &= \frac{A}{Z} \frac{dU}{dt} = \frac{K}{Z} \frac{du}{dt}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Substituímos  $\partial v/\partial t = (A/Z)dU/dt$  na equação (3.5), a integramos entre  $z = H$  e  $z = H - h$  e obtemos o resultado

$$A \int_{H-h}^H \frac{dU}{dt} \frac{dz}{Z} + \frac{u^2}{2} - \frac{U^2}{2} = gh - \frac{p(H) - p(H-h)}{\rho} \quad (3.27)$$

Como as pressões em  $z = H$  e  $z = H - h$  correspondem à pressão atmosférica  $p_{\text{atm}}$

$$p(H) = p(H-h) = p_{\text{atm}} \quad (3.28)$$

e, de (3.25), temos

$$u^2 = \frac{A^2}{K^2} U^2 \quad (3.29)$$

a equação (3.27) se reduz a

$$A \frac{dU}{dt} \int_{H-h}^H \frac{dz}{Z} = gh - \frac{U^2}{2} \left( \frac{A^2}{K^2} - 1 \right). \quad (3.30)$$

Fazemos

$$2b = \left( \frac{A^2}{K^2} - 1 \right), \quad (3.31)$$

$$k = \int_{H-h}^H \frac{dz}{Z}. \quad (3.32)$$

Para o cilindro reto, temos  $Z = A$  e, portanto,  $k = h/A$ . Nesse caso, a equação (3.30) se reduz a

$$h \frac{dU}{dt} = gh - 2b \left( \frac{U^2}{2} \right), \quad (3.33)$$

onde observamos que  $h$  é uma função do tempo e  $U = -dh/dt$ . A equação (3.33) decreve a evolução da velocidade  $U$  da superfície livre da água ao longo do tempo, em diferentes alturas da coluna de água. Quando  $h = H$ , temos  $U = 0$  e a camada de água na superfície livre é acelerada com aceleração igual a  $g$ ; quando  $h = 0$ , temos a velocidade  $U = 0$ . Portanto, a velocidade  $U$  apresenta um máximo para  $0 \leq h = h_M \leq H$ . De fato, para  $dU/dt = 0$  temos

$$U(h_M) = \sqrt{\frac{gh_M}{b}} \quad (3.34)$$

Na seção seguinte determinamos a velocidade  $U$  para qualquer altura  $h$ .

### 3.3.1 Determinação da velocidade $U$

Para a determinação da velocidade  $U$  usamos como referência o artigo de Hong (2009). Realizamos as mudanças de variáveis

$$y = \frac{U^2}{2} \quad (3.35)$$

e

$$\lambda = \ln \left( \frac{h}{H} \right). \quad (3.36)$$

Desse modo, obtemos

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\lambda} = -h \frac{dU}{dt}. \quad (3.37)$$

A equação (3.33) se reduz a

$$-\frac{dy}{d\lambda} = gHe^\lambda - 2by. \quad (3.38)$$

uma equação diferencial linear para  $y(\lambda)$  que pode ser resolvida pelo fator integrante. Sua solução é dada na forma

$$y(\lambda) = \frac{gH}{2b-1} (e^\lambda - e^{2b\lambda}). \quad (3.39)$$

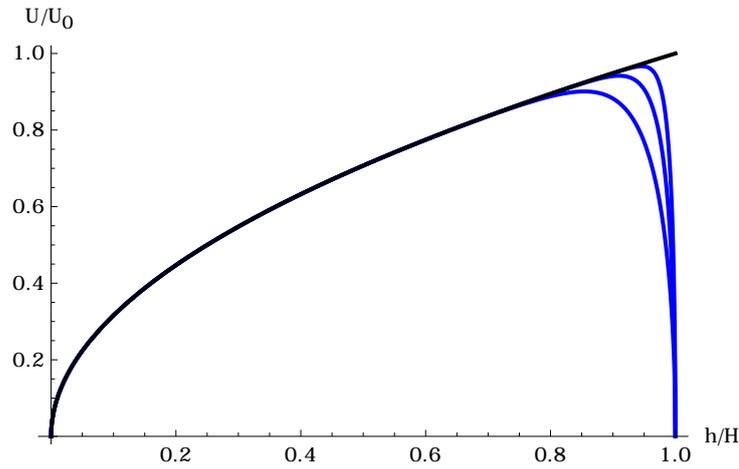
Substituímos (3.35) e (3.36) em (3.39) e obtemos

$$U(h) = \sqrt{\frac{2gH}{2b-1}} \left[ \frac{h}{H} - \left( \frac{h}{H} \right)^{2b} \right]^{1/2} \quad (3.40)$$

ou, ainda,

$$U(h) = \sqrt{\frac{2gh}{2b-1}} \left[ 1 - \left( \frac{h}{H} \right)^{2b-1} \right]^{1/2}. \quad (3.41)$$

Definimos o parâmetro  $U_0 = [2gH/(2b-1)]^{1/2}$ , normalizamos a velocidade  $U$  e representamos na Figura 29 o seu comportamento em função da altura da coluna de água.



**Figura 29.** – Velocidade reduzida  $U/U_0$  da superfície livre da coluna de água vs. sua altura reduzida  $h/H$ , para valores de  $b = 10, 20$  e  $40$ . Quanto maior o valor de  $b$ , mais a curva se aproxima de  $\sqrt{h/H}$  durante todo o movimento.

A velocidade  $U$  tem um máximo na altura

$$h_M = H \left( \frac{1}{2b} \right)^{\frac{1}{2b-1}}. \quad (3.42)$$

Para  $A \gg K$  temos  $2b \gg 1$  e  $(1/2b)^{1/2b} \approx 1$ . Nesse caso,  $h_M \approx H$ , a velocidade  $U$  alcança seu máximo quando a superfície livre ainda se encontra próxima a altura  $H$ , em um instante de tempo  $t = t_{\max} \approx 0$ . Após alcançar o seu máximo ( $0 \leq h \lesssim h_{\max}$ ), ela se comporta como uma função parabólica

$$U(h) \approx \sqrt{\frac{gh}{b}}. \quad (3.43)$$

Observamos que as velocidades  $U$  desenvolvidas pela superfície livre são pequenas e  $U(h_M) = \sqrt{gh_M/b}$ , como indicado em (3.34).

A velocidade  $u$  de escoamento através do orifício inferior do cilindro corresponde a

$$\begin{aligned} u(h) &= \frac{A}{K}U \\ &= \sqrt{\frac{2gH}{1 - K^2/A^2}} \left[ \frac{h}{H} - \left(\frac{h}{H}\right)^{2b} \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{2gh}{1 - K^2/A^2}} \left[ 1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{2b-1} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Para  $A/K \gg 1$  e  $0 \leq h \lesssim h_{\max}$ , temos, no orifício de saída, a velocidade  $u \approx \sqrt{2gh}$ , e reobtemos o resultado de Torricelli.

### 3.4 O relógio de água

Podemos usar a altura  $h$  da coluna de água como um relógio. Das equações  $U = -dh/dt$  e (3.43) podemos escrever que

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{gh}{b}} \quad (3.45)$$

ou ainda

$$dt = -\sqrt{\frac{bH}{g}} \frac{dh/H}{\sqrt{h/H}} \quad (3.46)$$

Integramos (3.46) entre  $t = t_{\max} \approx 0$  e  $t$

$$t \approx -2\sqrt{\frac{bH}{g}} \left| \sqrt{\frac{h}{H}} \right|_H^{h/H} \quad (3.47)$$

e obtemos

$$t \approx 2\sqrt{\frac{bH}{g}} \left( 1 - \sqrt{\frac{h}{H}} \right) \quad (3.48)$$

A equação (3.48) representa os instantes de tempo em função da altura  $h$  da coluna de água. Quando  $h = 0$  determinamos o tempo

$$t_{\text{esc}} = 2\sqrt{\frac{bH}{g}}, \quad (3.49)$$

que corresponde ao tempo de escoamento da água do interior do cilindro.

## 4 Considerações finais

Apresentamos nessa dissertação duas atividades didáticas que envolvem a realização do experimento de escoamento de água de um recipiente e a análise das observações realizadas no processo como principais ferramentas didáticas para estudo dos conceitos da cinemática desse movimento. Ao preparar essas atividades procuramos oferecer aos alunos as condições para que eles participem do experimento: meçam as grandezas físicas relevantes nas atividades, procurem estabelecer relações algébricas entre elas, com auxílio de diferentes representações gráficas e, ao final do trabalho, cheguem a uma conclusão.

Apresentamos também, nesta dissertação, um modelo físico-matemático do escoamento para servir de orientação ao professor na condução das atividades com os alunos ou para discussão em uma turma mais avançada. Ao descrever esse modelo, procuramos mostrar que o experimento proporciona uma medida do fluir do tempo, e que o uso do escoamento de água como um cronômetro exige um sistema de calibração adequado. Com o auxílio do modelo apresentado, discutimos também os limites de uma representação matemática de um fenômeno físico.

Com as sequências apresentadas em nosso trabalho, podemos realizar a construção do relógio de água, e esperamos oferecer ao aluno uma oportunidade para ele perceber que a medida do fluir do tempo não se limita a observar os ponteiros de um relógio ou o painel de um cronômetro. São medidas que exigiram a observação e o desenvolvimento, ao longo de nossa História, de procedimentos físicos e matemáticos para a sua caracterização.

Como destacamos na Introdução dessa dissertação, relógios de água ou clepsidras eram conhecidos desde tempos antigos. Entretanto, o tema ainda é bastante rico e atual, como observa Plofker (2011), ao oferecer a oportunidade ao professor de combinar a História com o ensino de Física e Matemática. Possíveis desdobramentos do nosso trabalho seria o estudo do escoamento para recipientes de geometrias diferentes e seus possíveis efeitos sobre o tempo de escoamento.

Procuramos também, em acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, apresentar as atividades de maneira que os estudantes possam “focalizar a interpretação de fenômenos naturais e processos tecnológicos de modo a possibilitar aos estudantes a apropriação de conceitos, procedimentos e teorias dos diversos campos das Ciências da Natureza” (BRASIL, 2018, p. 537).

Ainda em acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 538), as atividades aqui discutidas proporcionam aos estudantes a oportunidade de

“enfrentar questões que demandam a aplicação dos conhecimentos sobre Matéria e Energia em uma perspectiva fenomenológica, com o objetivo de introduzir a prática da investigação científica e ressaltar a importância dessa temática na análise do mundo contemporâneo. No Ensino Médio, espera-se uma diversificação de situações-problema, incluindo aquelas

que permitam aos jovens a aplicação de modelos com maior nível de abstração e de propostas de intervenção em contextos mais amplos e complexos.”

Para concluir, ainda em conformidade com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 539), observamos que as atividades propostas também permitem “que os estudantes ampliem as [suas] habilidades investigativas desenvolvidas no Ensino Fundamental, apoiando-se em análises quantitativas e na avaliação e na comparação de modelos explicativos;” e procuram oferecer as condições para que “os estudantes aprofundem e ampliem suas reflexões a respeito das tecnologias, tanto no que concerne aos seus meios de produção e seu papel na sociedade atual como também em relação às perspectivas futuras de desenvolvimento tecnológico.”

## Referências

- AGOSTINHO, S. *Confissões; De magistro = Do mestre*. Confissões, tradução de J. Oliveira Santos e A. Ambrósio de Pina; De magistro, tradução de Ângelo Ricci. 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1980. (Os Pensadores).
- BESANT, W. H. *A treatise on hydrostatics and hydrodynamics*. London: Deighton, Bell, 1859.
- BONJORNO, J. R. et al. *Física 2 – Termologia, Óptica e Ondulatória*. 3. ed. São Paulo: FTD, 2016.
- BRASIL. *PCN+Física: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio*. Brasília, DF: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica., 2018. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC\\_EnsinoMedio\\_embaixa\\_site\\_110518.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf)>. Acesso em: julho de 2021.
- CALLENDER, C.; EDNEY, R. *Introducing time: a graphic guide*. London: Icon Books, 2014. (Introducing).
- CARLTON, J. The propeller environment. In: CARLTON, J. (Ed.). *Marine Propellers and Propulsion*. 4. ed. Butterworth-Heinemann, 2019. cap. 4, p. 47–57. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780081003664000043>>. Acesso em: junho de 2021.
- DICIO. *Dicionário Online de Português*. 2021. Disponível em: <<https://www.dicio.com.br/tempo/>>. Acesso em: junho de 2021.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *Lições de Física: (the feyman lectures on physics)*. Tradução de Adriana Válio Roque da Silva e Kaline Rabelo Coutinho. 1. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- GUIMARÃES, O.; PIQUEIRA, J. R.; CARRON, W. *Física*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2014.
- HONG, S.-I. An exact solution to the draining reservoir problem of the incompressible and non-viscous liquid. *European Journal of Physics*, v. 30, n. 2, p. 277, 2009.
- KAZUHITO, Y.; FUKU, L. F. *Física para o Ensino Médio 1 – Mecânica*. 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.
- MÁXIMO, A.; ALVARENGA, B. *Curso de Física — v. 1*. 5. ed. São Paulo: Editora Scipione, 2000.
- MICHAELIS. *Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa*. 2021. Disponível em: <<https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/tempo/>>. Acesso em: junho de 2021.

- NEWTON, I. *Princípios matemáticos da filosofia natural*. Tradução e notas de comentários de J. Resina Rodrigues. 2. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2017. (Textos Clássicos).
- OLIVEIRA, M. P. P. de et al. *Física em contextos — Pessoal, Social, Histórico*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2011.
- PLAUSKA, G. C. *Experimento e aprendizagem: Uma aula introdutória à mecânica dos fluidos*. Tese (Mestrado) — Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física—Instituto de Física, Instituto de Física, Rio de Janeiro, Janeiro 2013.
- PLOFKER, K. The mathematics of measuring time. In: JARDINE, D.; SHELL-GELLASCH, A. (Ed.). *Mathematical time capsules: Historical modules for the mathematics classroom*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2011. cap. 8, p. 55.
- SAVOIE, D. *Sundials: Design, Construction, and Use*. Berlim: Springer, 2009.
- SCHOMBERG, A. The Karnak Clepsydra and its successors: Egypt's contribution to the invention of time measurement. In: BERKING, J. (Ed.). *Water Management in Ancient Civilizations*. Berlim: Eidition Yopoi, 2018. p. 321–346.
- SILVA, F. D. da. *A análise gráfica como instrumento para o ensino de calorimetria no ensino médio*. Tese (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, janeiro 2020.
- STROGATZ, S. *Infinite powers: How calculus reveals the secrets of the universe*. Boston: Houghton Mifflin Harcourt, 2019.
- TORRES, C. M. A. et al. *Física Ciência e Tecnologia*. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2016.
- VÁLIO, A. B. M. et al. *Ser protagonista – Física*. 3. ed. São Paulo: Edições SM, 2016.
- XAVIER, C.; BENIGNO, B. *Física aula por aula*. 2. ed. São Paulo: FTD, 2010.

# A Plano de Aula

Apresentamos nesse apêndice o Plano de Aula. Esse modelo de roteiro descreve o conteúdo a ser trabalhado, objetivo da aula, as estratégias, os recursos utilizados, a duração a aula e a avaliação.

## **Tema**

A clepsidra como instrumento de construção dos conceitos da cinemática.

## **Conteúdo**

Noções básicas de cinemática:

- Tempo
- Intervalo de tempo
- Posição
- Deslocamento
- velocidade
- Aceleração

Noções Básicas de matemática:

- Função de primeiro grau
- Função de segundo grau

## **Objetivo**

Esperamos que os alunos sejam capazes de:

- Estabelecer a relação entre o tempo e a altura de líquido na clepsidra;
- Estabelecer a relação entre o tempo e a velocidade de líquido na clepsidra;
- Estabelecer a relação entre a velocidade e a altura de líquido na clepsidra;

- Estabelecer a relação entre o quadrado da velocidade e a altura de líquido na clepsidra;
- Realizar medidas com os aparatos experimentais;
- Construir gráficos e interpretá-los;
- Desenvolver, através da análise gráfica, as relações existentes entre as grandezas físicas;
- Adquirir competências que o possibilitem realizar medidas diminuindo a incerteza.

### **Desenvolvimento**

A proposta dessa aula é ensinar, através da construção de uma clepsidra, os conceitos básicos da cinemática a partir da observação da descrição do seu funcionamento.

O ponto de partida dessa aula será uma brevíssima história sobre a medida do tempo, a evolução do relógio de Sol, relógio de areia (ampulheta), o relógio de água (clepsidra), do pêndulo simples, utilizados pelos povos antigos, até os relógios utilizados atualmente, como os relógios digitais e relógios nucleares. Essa abordagem foi empregada para contextualizarmos o aprendizado do conteúdo proposto, assim procuramos chamar a atenção dos alunos para a importância da medida do tempo na evolução da nossa história.

Em seguida a essa introdução histórica, apresentamos o experimento com a clepsidra, definimos sua construção e apresentamos os acessórios necessários para a sua montagem.

Após essa etapa, dividimos a turma em grupos, cada grupo associado a uma clepsidra de altura particular, pré-estabelecidas pelo professor. Cada aluno de cada grupo deve observar o escoamento da água para diferentes alturas de partida.

### **Recursos didáticos**

Atividades didáticas 1 e 2, apresentadas nesse trabalho.

### **Duração**

3h

### **Avaliação**

Será feita na observação do envolvimento de cada grupo e na análise do relatório que cada grupo deverá entregar no próximo encontro.