



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física
Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física



O período de oscilação do movimento do pêndulo simples e sua relação com seu comprimento e sua amplitude inicial

(Guia de orientação para o professor)

Mara Desidério Quirino
Vitorvani Soares

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Mara Desidério Quirino, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2020

Ficha catalográfica

Q81p Quirino, Mara Desidério

O período de oscilação do movimento do pêndulo simples e sua relação com seu comprimento e sua amplitude inicial (Guia de orientação para o professor) / Mara Desidério Quirino

Vitorvani Soares. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2020.

v, 28 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Vitorvani Soares.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2020.

Referências Bibliográficas: f. 33.

1. Ensino de Física. 2. Movimento harmônico. 3. Oscilação. I. Soares, Vitorvani. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. O período de oscilação do movimento do pêndulo simples e sua relação com seu comprimento e sua amplitude inicial (Guia de orientação para o professor).

Sumário

1	Introdução	6
2	O experimento	7
2.1	Montagem, aquisição e análise dos dados	7
2.2	Modelo matemático do pêndulo simples	21
3	Aplicação das atividades com os alunos	26
3.1	Aula 1: Introdução ao experimento e sua montagem	26
3.2	Aula 2: Coleta de dados	29
3.3	Aula 3: Análise dos resultados	31
4	Considerações finais	32
	Referências	33

Lista de ilustrações

Figura 1	Balança empregada no experimento	7
Figura 2	Montagem experimental do pêndulo simples	8
Figura 3	Trena metálica empregada no experimento	8
Figura 4	Período vs. desvio angular ($L = 1$ m)	10
Figura 5	Período vs. desvio angular ($L = 1,0$ e $2,0$ m)	11
Figura 6	Período vs. desvio angular ($L = 1,0; 1,50$ e $2,0$ m)	12
Figura 7	Período vs. desvio angular ($L = 1,0; 1,25; 1,50$ e $2,0$ m)	13
Figura 8	Período vs. desvio angular ($L = 1,0; 1,25; 1,50; 1,75$ e $2,0$ m)	14
Figura 9	Período vs. desvio angular ($L = 0,5; 1,0; 1,25; 1,50; 1,75$ e $2,0$ m)	15
Figura 10	Período de oscilação T_0 vs. comprimento do pêndulo L	16
Figura 11	Razão T/L vs. período de oscilação T_0	16
Figura 12	Razão T_0^2/L vs. comprimento do pêndulo L	17
Figura 13	Período T_0 vs. comprimento L	18
Figura 14	Período normalizado T/T_0 , vs. ângulo inicial θ_0	19
Figura 15	Período normalizado T/T_0 , vs. quadrado do ângulo inicial θ_0^2	20
Figura 16	Circunferência que descreve a trajetória do movimento do pêndulo	21
Figura 17	Circunferência auxiliar para a descrição da oscilação do pêndulo	23
Figura 18	Aula de apresentação da atividade	27
Figura 19	Montagem dos aparatos do experimento	27
Figura 20	Modelo de tabela para coleta dos dados	28
Figura 21	Gráfico T vs. θ_0 feito pelos alunos (lado direito)	29
Figura 22	Gráfico T vs. θ_0 feito pelos alunos (lado esquerdo)	30
Figura 23	Alunos do NEJA do módulo IV no C.E. Raymundo Corrêa	31

Lista de tabelas

Tabela 1	Período T vs. ângulo da oscilação θ_0 ($L = 1.00$ m)	9
Tabela 2	Período T vs. ângulo da oscilação θ_0 ($L = 2.00$ m)	10
Tabela 3	Período T vs. ângulo da oscilação θ_0 ($L = 1.50$ m)	11
Tabela 4	Período T vs. ângulo da oscilação θ_0 ($L = 1.25$ m)	12
Tabela 5	Período T vs. ângulo da oscilação θ_0 ($L = 1.75$ m)	13
Tabela 6	Período T vs. ângulo da oscilação θ_0 ($L = 0.50$ m)	14
Tabela 7	Período T_0 vs. comprimento do pêndulo L	15
Tabela 8	Período normalizado T/T_0 vs. ângulo da oscilação θ_0	19

1 Introdução

Apresentamos, neste *Guia para o Professor*, um procedimento para a caracterização do período de oscilação de um pêndulo simples, a partir de um conjunto de atividades que discutem as propriedades do movimento harmônico e podem ser realizadas em um laboratório didático ou em uma sala de aula tradicional. Estabelecemos uma expressão algébrica que relaciona o período de oscilação do pêndulo simples, tanto com a amplitude inicial do seu movimento quanto com o comprimento do fio que o sustenta, a partir da observação das oscilações livres que o pêndulo realiza e da análise dos resultados obtidos durante as atividades.

Neste estudo, privilegiamos a abordagem experimental do movimento oscilatório do pêndulo simples, de maneira que o estudante possa desenvolver suas competências e habilidades na observação de um fenômeno, na análise dos seus resultados e na construção de uma conclusão, conforme as orientações da ciência contemporânea. Esperamos, desse modo, despertar no aluno, com o auxílio do professor, a sua percepção e a sua capacidade em desenvolver um projeto ou uma atividade científica.

Para uma apresentação e discussão detalhada do nosso trabalho, organizamos este guia da seguinte maneira: no Capítulo 2 descrevemos o experimento do pêndulo simples; e, no Capítulo 3 apresentamos a aplicação das atividades com os alunos.

Este material instrucional está associado à dissertação de mestrado de Mara Desidério Quirino (2020), apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

2 O experimento

Neste capítulo discutimos o experimento do pêndulo simples, como o realizamos e analisamos. O material aqui apresentado serve de *Guia para o Professor*. Neste experimento definimos os conceitos de pêndulo simples, amplitude, frequência e período. Discutimos também as aproximações do movimento do pêndulo para o caso de oscilações de pequena e grande amplitude.

2.1 Montagem, aquisição e análise dos dados

No presente trabalho foram utilizados:

- uma massa m (que irá oscilar);
- uma haste fixa para suporte do pêndulo;
- um fio longo L (preso a uma haste em uma extremidade e a outra presa à massa);
- um transferidor (para medir os ângulos de partida);
- uma trena (para medir o comprimento do fio);
- uma balança de precisão (para medir a massa);
- um cronômetro (para determinarmos a duração da oscilação);

Descrevemos, a seguir, o procedimento empregado por nós para a realização do experimento. Inicialmente, medimos a massa m na balança de precisão. A figura 1 mostra a balança que empregamos em nossa atividade.



Figura 1. – Balança disponível no laboratório de ciências da escola e empregada por nós para a realização das medidas da massa dos objetos considerados no experimento.

Foi utilizada a balança de precisão porque a escola possui laboratório de ciências, mas pode ser utilizado qualquer tipo de balança desde que ela tenha sensibilidade para medir valores pequenos, como sugestão, uma balança de cozinha pode ser muito bem-vinda; a massa m utilizada no experimento possui valor de 31.52 g; o fio empregado no

experimento foi de número 10 (linha de pipa comum); a haste envolvida na tarefa possui 30 cm de altura e ela é fixa a sua base metálica, mas pode ser utilizado qualquer suporte que sirva para pendurar o fio e que possua o plano livre para que o pêndulo possa oscilar sem obstáculos; o transferidor utilizado para a coleta de dados foi um transferidor escolar do professor, confeccionado em MDF, mas o transferidor utilizado pelos alunos foi um transferidor de plástico simples que pode ser encontrado em qualquer papelaria.

Em seguida, amarramos o fio longo na haste fixa ao suporte; Depois, amarramos a massa m à outra extremidade do fio longo, como indicado na figura 2; Por fim, enrolamos o fio até o comprimento L que desejamos, com o auxílio de uma trena. No primeiro experimento escolhemos o comprimento $L = 1.0$ m.

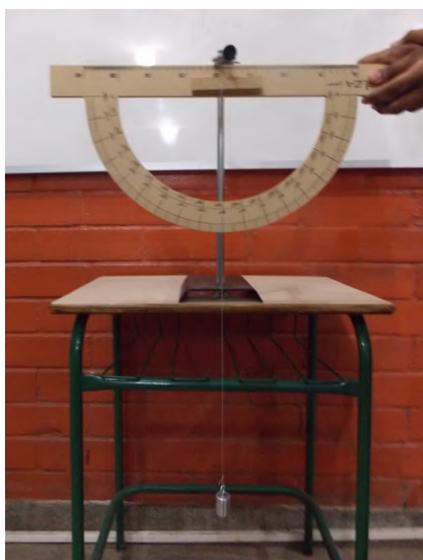


Figura 2. – Montagem experimental do nosso pêndulo simples: consideramos o fio inextensível, as dimensões do fio são muito maiores do que as do objeto que ele mantém suspenso e a massa do fio é muito menor do que a do objeto.

A figura 3 mostra a trena que utilizamos. Definimos este nosso objeto como um pêndulo simples: consideramos o fio inextensível, o comprimento do fio é muito maior do que as dimensões do objeto que ele mantém suspenso e a massa do fio é muito menor do que a massa do objeto suspenso.



Figura 3. – Trena metálica empregada em nosso experimento e que serviu para determinar o comprimento L do fio.

Agora, com o auxílio do transferidor, como indicado na figura 2, colocamos o fio na vertical, posicionamos o zero do transferidor ao longo do fio, com o seu centro na haste

fixa e, assim, medimos os diferentes ângulos de partida, θ_0 , para o nosso pêndulo simples.

Deslocamos, então, o objeto da sua posição de equilíbrio e o elevamos até uma certa posição, mantendo o fio esticado. Com o ângulo de partida agora definido (a amplitude θ_0), pegamos o cronômetro e permitimos que a massa m oscile livremente. Ao alcançar a sua posição de equilíbrio, sobre a vertical, no vale da trajetória, acionamos o cronômetro e contamos dez passagens sobre esta posição, no mesmo sentido (a frequência f da oscilação). Desligamos o cronômetro e anotamos a duração desse movimento (Δt). Faremos este procedimento para cada ângulo de partida previamente estabelecido.

Por definição, período de oscilação T de um oscilador é o intervalo de tempo que o objeto oscilante precisa para passar pela sua posição de equilíbrio com a velocidade no mesmo sentido. Em nosso caso, como a frequência de oscilação corresponde a $f = 10/\Delta t$, o período de oscilação T do nosso pêndulo corresponde a $T = \Delta t/10$. Deste modo, ao observar a oscilação do objeto durante dez períodos de oscilação minimizamos a incerteza na determinação deste parâmetro físico. Cometemos um erro da ordem de decimo de segundo, ao ligar e desligar o cronômetro, e consideramos a incerteza da medida do período na casa dos centésimos de segundo. Assim, garantimos uma melhor precisão na medida do período de oscilação. As medidas realizadas para a determinação do período de oscilação estão apresentadas na tabela 1.

Tabela 1. – Período de oscilação T vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para um pêndulo simples de comprimento $L = 1.00(1)$ m.

ângulo inicial		esquerda		direita	
$\theta_0(^{\circ})$	$\theta_0(\text{rad})$	intervalo de tempo $\Delta t(\text{s})$	período $T(\text{s})$	intervalo de tempo $\Delta t(\text{s})$	período $T(\text{s})$
5(1)	0,09(1)	20,18(10)	2,02(1)	19,81(10)	1,98(1)
10(1)	0,17(1)	20,29(10)	2,03(1)	20,16(10)	2,02(1)
15(1)	0,26(1)	20,25(10)	2,03(1)	20,28(10)	2,03(1)
20(1)	0,35(1)	20,47(10)	2,05(1)	20,33(10)	2,03(1)
25(1)	0,44(1)	20,46(10)	2,05(1)	20,64(10)	2,06(1)
30(1)	0,52(1)	20,27(10)	2,03(1)	20,37(10)	2,04(1)
35(1)	0,61(1)	20,51(10)	2,05(1)	20,50(10)	2,05(1)
40(1)	0,70(1)	20,54(10)	2,05(1)	20,74(10)	2,07(1)
45(1)	0,79(1)	20,76(10)	2,08(1)	20,51(10)	2,05(1)
50(1)	0,87(1)	20,84(10)	2,08(1)	20,89(10)	2,09(1)

Em seguida, com os dados apresentados na tabela 1, construímos um gráfico do período de oscilação T vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para este pêndulo simples, como representado na figura 4.

Observamos da figura 4 que o período de oscilação T permanece praticamente constante e igual a $T_0 = 2.04(2)$ s para o intervalo de ângulos iniciais até 35° . Podemos nos perguntar se esse comportamento se repete se modificarmos o comprimento L do

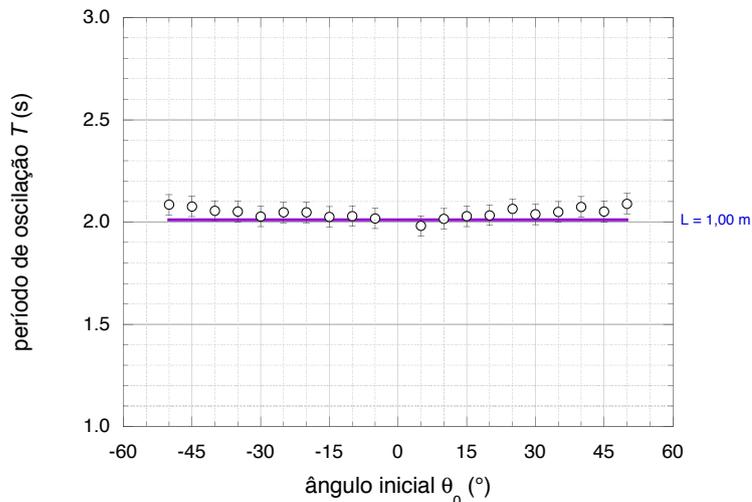


Figura 4. – Período de oscilação T vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para um pêndulo simples de comprimento $L = 1.00(1)$ m. Observamos que, para pequenos ângulos, o período é constante e igual a $T_0 = 2.04(2)$ s, determinado pelo coeficiente linear da reta indicada no gráfico, enquanto que para ângulos iniciais θ_0 maiores que 35° o período parece variar.

fo. Realizamos, então, um novo experimento, agora com o comprimento do fio igual a $L = 2.00(1)$ m. Os dados obtidos estão reunidos na tabela 2 e representados na figura 5.

Tabela 2. – Período de oscilação T vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para um pêndulo simples de comprimento $L = 2.00(1)$ m.

ângulo inicial		esquerda		direita	
θ_0 (°)	θ_0 (rad)	intervalo de tempo Δt (s)	período T (s)	intervalo de tempo Δt (s)	período T (s)
5(1)	0,09(1)	29,32(10)	2,93(1)	28,77(10)	2,88(1)
10(1)	0,17(1)	29,13(10)	2,91(1)	29,03(10)	2,90(1)
15(1)	0,26(1)	28,92(10)	2,89(1)	28,88(10)	2,89(1)
20(1)	0,35(1)	31,97(10)	3,20(1)	29,06(10)	2,91(1)
25(1)	0,44(1)	29,16(10)	2,92(1)	29,03(10)	2,90(1)
30(1)	0,52(1)	28,86(10)	2,89(1)	29,29(10)	2,93(1)
35(1)	0,61(1)	31,86(10)	3,19(1)	29,26(10)	2,93(1)
40(1)	0,70(1)	29,02(10)	2,90(1)	29,08(10)	2,91(1)
45(1)	0,79(1)	29,05(10)	2,90(1)	29,79(10)	2,98(1)
50(1)	0,87(1)	29,53(10)	2,95(1)	29,28(10)	2,93(1)

Percebemos mais uma vez que o período de oscilação T permanece constante para ângulos iniciais θ_0 dentro do mesmo intervalo anterior, quando o comprimento do fio era igual $L = 1.00(1)$ m. Entretanto, a constante T_0 mudou de valor em cerca de 45%. Este é um comportamento intrigante: ao aumentarmos o comprimento do fio, o período de osci-

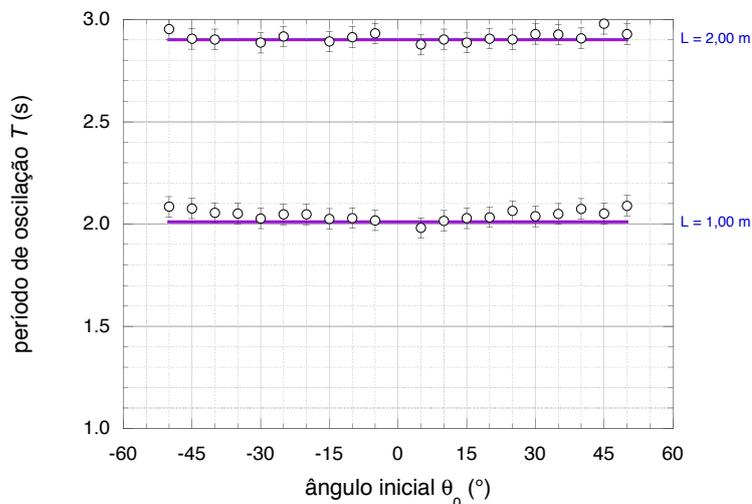


Figura 5. – Período de oscilação T vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para um pêndulo simples de comprimento $L = 1.00(1)$ m and $2.00(1)$ m. Observamos que, para pequenos ângulos, o período é constante e igual a $T_0 = 2.04(2)$ s para o fio de comprimento menor; para o fio de comprimento maior, temos $T_0 = 2.90(2)$ s.

lação para pequenos ângulos também aumenta. Realizamos uma vez mais o experimento, agora com um fio de comprimento intermediário: $L = 1.50(1)$ m. Os dados obtidos nesta nova atividade estão reunidos na tabela 3 e representados na figura 6.

Tabela 3. – Período de oscilação T vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para um pêndulo simples de comprimento $L = 1.50(1)$ m.

		esquerda		direita	
ângulo inicial	intervalo de tempo	período	intervalo de tempo	período	
$\theta_0(^{\circ})$	$\theta_0(\text{rad})$	$\Delta t(\text{s})$	$T(\text{s})$	$\Delta t(\text{s})$	$T(\text{s})$
5(1)	0,09(1)	25,41(10)	2,54(1)	25,15(10)	2,51(1)
10(1)	0,17(1)	25,37(10)	2,54(1)	25,31(10)	2,53(1)
15(1)	0,26(1)	25,26(10)	2,53(1)	25,33(10)	2,53(1)
20(1)	0,35(1)	25,30(10)	2,53(1)	25,13(10)	2,51(1)
25(1)	0,44(1)	25,38(10)	2,54(1)	25,37(10)	2,54(1)
30(1)	0,52(1)	25,35(10)	2,54(1)	25,29(10)	2,53(1)
35(1)	0,61(1)	25,29(10)	2,53(1)	25,21(10)	2,52(1)
40(1)	0,70(1)	25,69(10)	2,57(1)	25,28(10)	2,53(1)
45(1)	0,79(1)	25,53(10)	2,55(1)	25,56(10)	2,56(1)
50(1)	0,87(1)	25,74(10)	2,57(1)	25,40(10)	2,54(1)

Mais uma vez observamos que o período de oscilação permaneceu constante para ângulos iniciais dentro do mesmo intervalo anterior, quando o comprimento do fio é igual $L = 1.00(1)$ m e $L = 2.00(1)$ m. Entretanto, o valor T_0 do período aumentou menos: agora, para um fio de comprimento $L = 1.50(1)$ m temos, para pequenos ângulos iniciais,

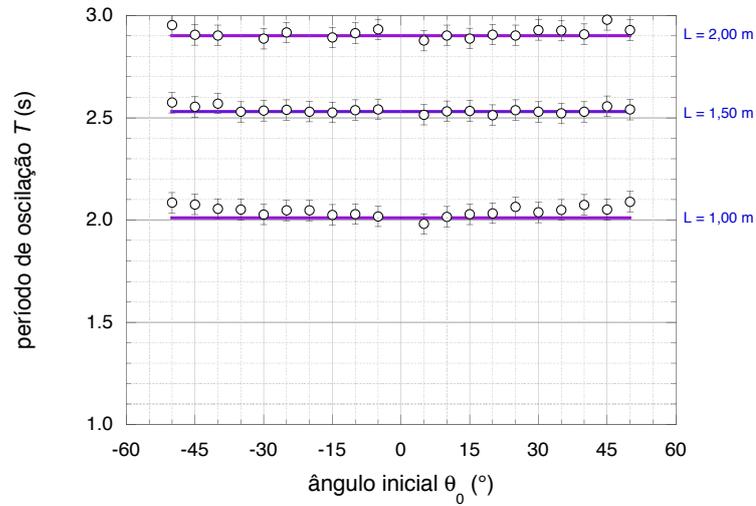


Figura 6. – Período de oscilação T vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para um pêndulo simples de comprimento $L = 1.00(1)$ m, $1.50(1)$ m and $2.00(1)$ m. Observamos que, para pequenos ângulos, o período é constante e igual a $T_0 = 2.04(1)$ s, $2.53(2)$ s and $2.90(3)$ s, respectivamente; para ângulos iniciais θ_0 maiores que 30° , o período varia com o ângulo inicial.

um período igual a $T_0 = 2.53(3)$ s. Realizamos uma vez mais o experimento, agora com um fio de um outro comprimento intermediário: $L = 1.25(1)$ m. Os dados obtidos nesta nova atividade estão reunidos na tabela 4 e representados na figura 7.

Tabela 4. – Período de oscilação T vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para um pêndulo simples de comprimento $L = 1.25(1)$ m.

		esquerda		direita	
ângulo inicial	intervalo de tempo	período	intervalo de tempo	período	
$\theta_0(^\circ)$	$\theta_0(\text{rad})$	$\Delta t(\text{s})$	$T(\text{s})$	$\Delta t(\text{s})$	$T(\text{s})$
5(1)	0,09(1)	25,41(10)	2,54(1)	25,15(10)	2,51(1)
10(1)	0,17(1)	25,37(10)	2,54(1)	25,31(10)	2,53(1)
15(1)	0,26(1)	25,26(10)	2,53(1)	25,33(10)	2,53(1)
20(1)	0,35(1)	25,30(10)	2,53(1)	25,13(10)	2,51(1)
25(1)	0,44(1)	25,38(10)	2,54(1)	25,37(10)	2,54(1)
30(1)	0,52(1)	25,35(10)	2,54(1)	25,29(10)	2,53(1)
35(1)	0,61(1)	25,29(10)	2,53(1)	25,21(10)	2,52(1)
40(1)	0,70(1)	25,69(10)	2,57(1)	25,28(10)	2,53(1)
45(1)	0,79(1)	25,53(10)	2,55(1)	25,56(10)	2,56(1)
50(1)	0,87(1)	25,74(10)	2,57(1)	25,40(10)	2,54(1)

Mais uma vez observamos, a partir da figura 7, que o período de oscilação permanece constante para ângulos iniciais mas dentro de um intervalo menor do que os anteriores, quando o comprimento do fio era igual a $L = 1.00(1)$ m, $1.50(1)$ m and $2.00(1)$ m. Da

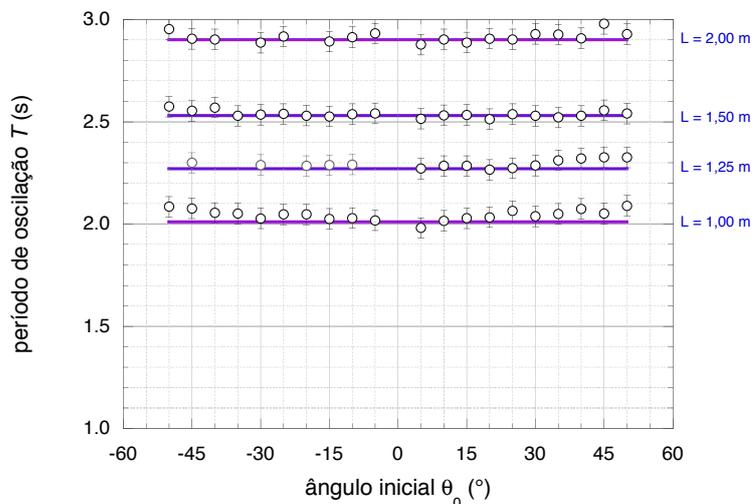


Figura 7. – Período de oscilação T vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para um pêndulo simples de comprimento $L = 1.00(1) \text{ m}, 1.25(1) \text{ m}, 1.50(1) \text{ m}$ and $2.00(1) \text{ m}$. Observamos que, para pequenos ângulos, o período é constante e igual a $T_0 = 2.04(1) \text{ s}, 2.27(2) \text{ s}, 2.53(2) \text{ s}$ and $2.90(3) \text{ s}$, respectivamente; para ângulos iniciais θ_0 maiores que 20° o período varia.

figura 7 também percebemos que, de fato, o período de oscilação T é constante somente para ângulos inferiores a 20° e o valor dessa constante, T_0 , aumenta a medida em que aumentamos o comprimento L do fio. As medidas também revelam uma dependência do período de oscilação T não somente com o comprimento L do fio, mas também com o ângulo inicial de oscilação, θ_0 .

Realizamos, então, uma vez mais o experimento com um fio de comprimento $L = 1.75(1) \text{ m}$ e os dados obtidos estão reunidos na tabela 5 e representados na figura 8.

Tabela 5. – Período de oscilação T vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para um pêndulo simples de comprimento $L = 1.75(1) \text{ m}$.

		esquerda		direita	
ângulo inicial $\theta_0(^\circ)$	ângulo inicial $\theta_0(\text{rad})$	intervalo de tempo $\Delta t(\text{s})$	período $T(\text{s})$	intervalo de tempo $\Delta t(\text{s})$	período $T(\text{s})$
5(1)	0,09(1)	27,15(10)	2,71(1)	27,11(10)	2,71(1)
10(1)	0,17(1)	26,92(10)	2,69(1)	27,04(10)	2,70(1)
15(1)	0,26(1)	27,08(10)	2,71(1)	27,21(10)	2,72(1)
20(1)	0,35(1)	27,41(10)	2,74(1)	26,94(10)	2,69(1)
25(1)	0,44(1)	27,00(10)	2,70(1)	27,20(10)	2,72(1)
30(1)	0,52(1)	26,93(10)	2,69(1)	27,38(10)	2,74(1)
35(1)	0,61(1)	27,03(10)	2,70(1)	27,19(10)	2,72(1)
40(1)	0,70(1)	27,20(10)	2,72(1)	27,21(10)	2,72(1)
45(1)	0,79(1)	27,43(10)	2,74(1)	27,31(10)	2,73(1)
50(1)	0,87(1)	27,36(10)	2,74(1)	30,08(10)	3,01(1)

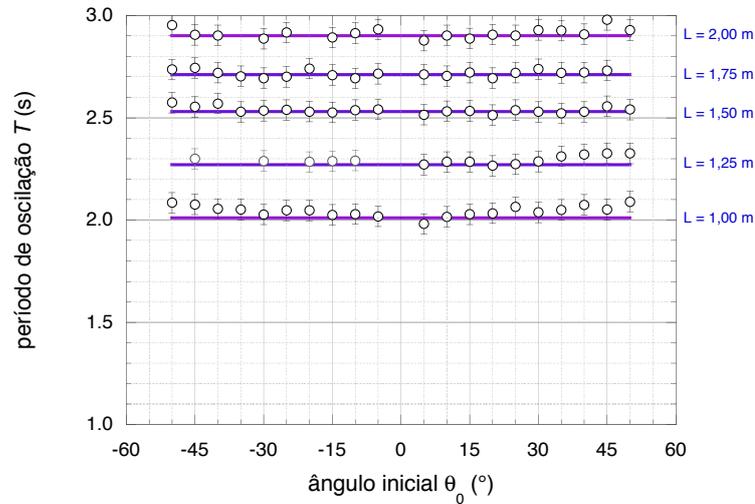


Figura 8. – Período de oscilação T vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para um pêndulo simples de comprimento $L = 1.00\text{ m}, 1.25\text{ m}, 1.50\text{ m}, 1.75\text{ m}$ and 2.00 m . Observamos que, para pequenos ângulos, o período é constante e igual a $T_0 = 2.04(1)\text{ s}, 2.27(2)\text{ s}, 2.53(2)\text{ s}, 2.71(3)\text{ s}$ and $2.90(3)\text{ s}$, respectivamente; para ângulos iniciais θ_0 maiores que 20° o período varia.

Da figura 8, observamos que o período de oscilação permaneceu constante para ângulos iniciais mas dentro de um intervalo menor do que os anteriores. Também percebemos que o período é constante para ângulos inferiores a 20° e o valor dessa constante, T_0 , aumenta com o aumento do comprimento L do fio. As medidas também revelam uma dependência do período T com o comprimento L do fio e com o ângulo inicial de oscilação, θ_0 .

Por último, realizamos uma vez mais o experimento com um fio de comprimento $L = 0.50(1)\text{ m}$ e os dados obtidos estão reunidos na tabela 6 e representados na figura 9.

Tabela 6. – Período de oscilação T vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para um pêndulo simples de comprimento $L = 0.50(1)\text{ m}$.

		esquerda		direita	
ângulo inicial		intervalo de tempo	período	intervalo de tempo	período
$\theta_0(^\circ)$	$\theta_0(\text{rad})$	$\Delta t(\text{s})$	$T(\text{s})$	$\Delta t(\text{s})$	$T(\text{s})$
5(1)	0,09(1)	14,79(10)	1,48(1)	11,55(10)	1,15(1)
10(1)	0,17(1)	15,14(10)	1,51(1)	13,31(10)	1,33(1)
15(1)	0,26(1)	15,96(10)	1,60(1)	14,67(10)	1,47(1)
20(1)	0,35(1)	15,14(10)	1,51(1)	14,91(10)	1,49(1)
25(1)	0,44(1)	15,95(10)	1,60(1)	15,98(10)	1,60(1)
30(1)	0,52(1)	15,20(10)	1,52(1)	15,97(10)	1,60(1)
35(1)	0,61(1)	15,95(10)	1,60(1)	15,10(10)	1,51(1)
40(1)	0,70(1)	14,89(10)	1,49(1)	15,15(10)	1,51(1)
45(1)	0,79(1)	15,15(10)	1,51(1)	15,26(10)	1,53(1)
50(1)	0,87(1)	15,26(10)	1,53(1)	15,16(10)	1,52(1)

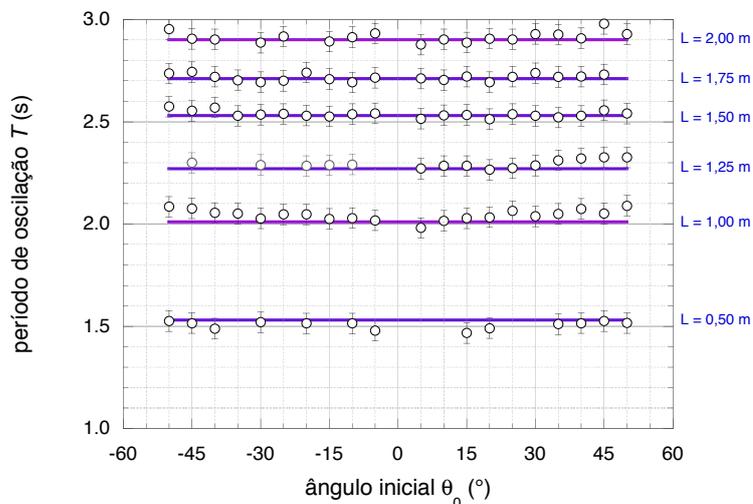


Figura 9. – Período de oscilação T vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para um pêndulo simples de comprimento $L = 0.50$ m, 1.00 m, 1.25 m, 1.50 m, 1.75 m e 2.00 m. Observamos que para pequenos ângulos, o período é constante e igual a $T_0 = 1.53(2)$ s, $2.04(1)$ s, $2.27(2)$ s, $2.53(2)$ s, $2.71(3)$ s e $2.90(3)$ s, respectivamente; para ângulos iniciais θ_0 maiores que 20° o período varia.

Observamos, uma vez mais, a partir da figura 9, que o período de oscilação permaneceu constante para ângulos iniciais mas dentro de um intervalo menor do que os anteriores. Da figura 9 também percebemos que, de fato, o período de oscilação T é constante somente para ângulos inferiores a 20° e o valor dessa constante, T_0 , aumenta a medida em que aumentamos o comprimento L do fio. As medidas também revelam uma dependência do período de oscilação T não somente com o comprimento L do fio, mas também com o ângulo inicial de oscilação, θ_0 .

Podemos então estudar a dependência do período com o comprimento do fio, para ângulos menores do que 20° . Os dados obtidos nesta nova atividade estão reunidos na tabela 7 e representados na figura 10.

Tabela 7. – Período T_0 vs. comprimento do pêndulo L para um pêndulo simples.

L (m)	T_0 (s)	T_0/L (s m ⁻¹)	T_0^2/L (s ² /m)
0,50(1)	1,53(2)	3,00(2)	4,5(4)
1,00(1)	2,04(2)	2,00(7)	4,0(2)
1,25(1)	2,27(3)	1,82(7)	4,1(2)
1,50(1)	2,53(2)	1,69(4)	4,3(2)
1,75(1)	2,71(3)	1,54(5)	4,2(2)
2,00(1)	2,90(3)	1,40(5)	3,9(2)

A figura 10, nos revela que a constante T_0 , em média, aumenta conforme aumentamos

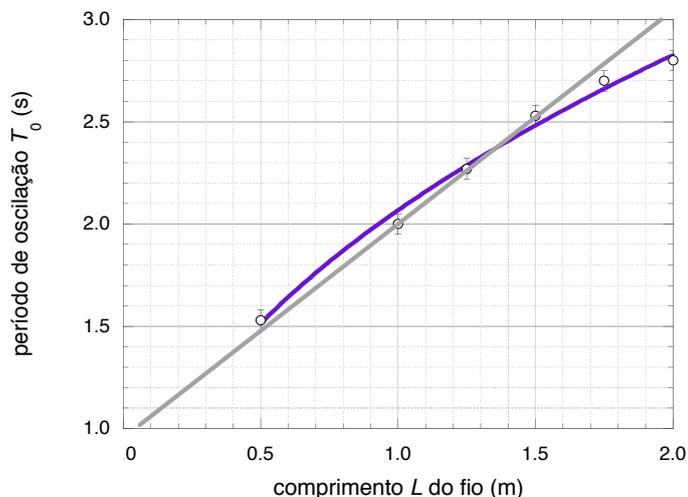


Figura 10. – Período de oscilação T_0 vs. comprimento do pêndulo L para um pêndulo simples. Observamos que uma relação linear entre estes parâmetros não é aceitável: para comprimento $L = 0$ temos um período diferente de zero!

o comprimento L do fio. Aparentemente, as medidas variam linearmente. Entretanto este é um resultado não aceitável porque, para a abscissa nula a ordenada não é nula. Mais ainda, ao aumentarmos o comprimento do fio, o valor da constante não aumenta na mesma proporção. Por esse motivo, analisamos o comportamento da razão entre o valor da constante T_0 e o comprimento do fio, T_0/L , vs. o período de oscilação T_0 . Este comportamento está ilustrado na figura 11.

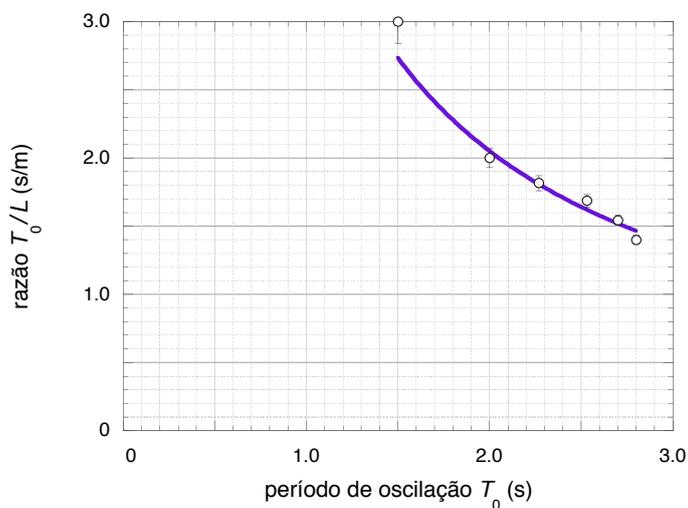


Figura 11. – Razão entre o período de oscilação e o comprimento do fio T_0/L vs. períodos de oscilação T_0 para um pêndulo simples deslocado da posição de equilíbrio por pequenos ângulos θ_0 .

Da figura 11 observamos que a razão entre o período de oscilação e o comprimento do fio, T_0/L , diminui conforme o período de oscilação T_0 aumenta. Mais ainda, uma relação linear entre esses parâmetros também não é aceitável, pois teríamos uma razão diferente de zero para período nulo. Podemos notar, a partir do gráfico da figura, que ao traçarmos uma curva suave sobre as medidas, obtemos uma figura que sugere uma hipérbole: a área sob a curva para pares de valores da razão T_0/L e do período T_0 correspondente definem áreas iguais. Podemos testar esta hipótese construindo o gráfico da razão entre o quadrado do período e o comprimento do fio, T_0^2/L , vs. o comprimento do fio, como representado na figura 12.

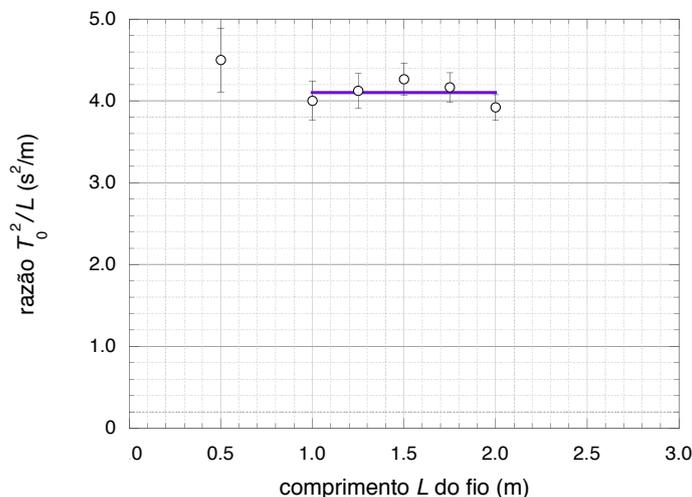


Figura 12. – Razão entre o quadrado dos períodos de oscilação e o comprimento do fio T_0^2/L vs. comprimento L do fio, para um pêndulo simples deslocado da posição de equilíbrio por pequenos ângulos θ_0 . Observamos que esta razão é essencialmente uma constante igual a $4.1(2) s^2/m$ para a região de comprimentos do fio considerada.

Da figura 12 observamos que o quadrado do período e o comprimento do fio, T_0^2/L , vs. o comprimento do fio pode ser representado por uma reta de coeficiente angular nulo e coeficiente linear a diferente de zero. Portanto, podemos concluir que, para o intervalo de medidas considerado, temos

$$\frac{T_0^2}{L} \approx a \quad (2.1)$$

e que

$$a \approx 4.1(2) s^2/m, \quad (2.2)$$

uma constante com dimensão do inverso de uma aceleração. Desse modo, podemos comparar o valor de a com uma outra constante bastante famosa e já familiar ao estudante em estudos realizados anteriormente: o inverso da aceleração gravitacional $g = 9.78 m/s^2$:

$$\frac{a}{1/g} \approx 40(1). \quad (2.3)$$

Substituindo (2.3) em (2.1), obtemos

$$T_0 \approx \sqrt{40(1)} \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2.4)$$

ou, ainda, que

$$T_0 \approx 6.33(2) \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (2.5)$$

Concluimos, assim, que o período de oscilação T_0 varia com a raiz quadrada do comprimento L do fio do pêndulo. Este comportamento está ilustrado na figura 13.

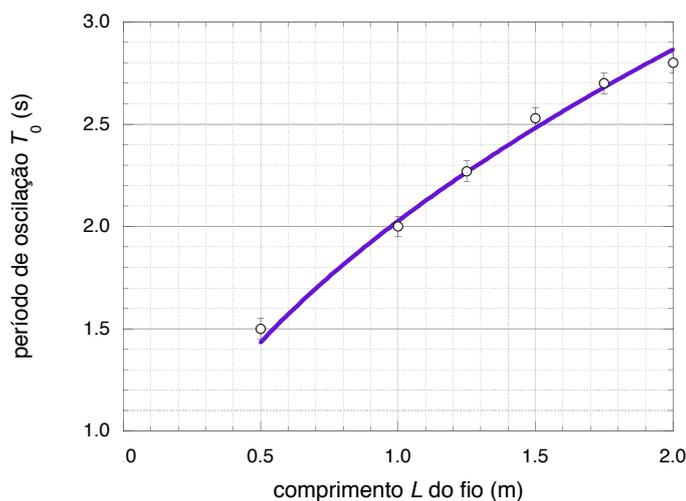


Figura 13. – Períodos de oscilação T_0 (s) vs. comprimento L (m) de um pêndulo simples. A curva representa a função raiz quadrada indicada pela expressão (2.5).

Observamos também, da figura 13, que o período da oscilação, T , varia com o ângulo inicial de deslocamento da posição de equilíbrio, θ_0 . Podemos investigar, a partir da figura 13, se as curvas apresentadas nesta figura não diferem uma das outras que por um fator de escala. Na tabela 8 apresentamos as medidas realizadas do período de oscilação normalizado T/T_0 vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para um pêndulo simples de comprimento $L = 0.50(1)$ m, $1.00(1)$ m, $1.25(1)$ m, $1.50(1)$ m, $1.75(1)$ m e $2.00(1)$ m. O comportamento das medidas normalizadas está representado na figura 14.

Observamos da figura 14 um ligeiro aumento do período com o aumento do ângulo inicial de deslocamento. Esta dependência não pode ser linear, porque a curva deve ser simétrica para deslocamentos para a esquerda e para a direita da posição de equilíbrio do pêndulo. Não é difícil perceber, a partir das observações representadas na figura 14,

Tabela 8. – Período de oscilação normalizado T/T_0 vs. ângulo inicial da oscilação θ_0 para um pêndulo simples de comprimento $L = 0.50(1)$ m, $1.00(1)$ m, $1.25(1)$ m, $1.50(1)$ m, $1.75(1)$ m e $2.00(1)$ m.

L	0,50(1) m	1,00(1) m	1,25(1) m	1,50(1) m	1,75(1) m	2,00(1) m	média
θ_0 (rad)	T/T_0	T/T_0	T/T_0	T/T_0	T/T_0	T/T_0	T/T_0
0,087(1)			1,00(2)	0,99(2)	1,00(2)	1,03(2)	1,00(2)
0,175(1)		1,01(2)	1,01(2)	1,00(2)	1,00(2)	1,04(2)	1,01(2)
0,262(1)	0,98(2)	1,01(2)	1,01(2)	1,00(2)	1,01(2)	1,03(2)	1,01(2)
0,349(1)	0,99(2)	1,02(2)	1,00(2)	0,99(2)	1,00(2)	1,04(2)	1,01(2)
0,436(1)		1,03(2)	1,00(2)	1,00(2)	1,01(2)	1,04(2)	1,01(2)
0,524(1)		1,02(2)	1,01(2)	1,00(2)	1,01(2)	1,05(2)	1,02(2)
0,611(1)	1,01(2)	1,02(2)	1,02(2)	1,00(2)	1,01(2)	1,05(2)	1,02(2)
0,698(1)	1,01(2)	1,04(2)	1,02(2)	1,00(2)	1,01(2)	1,04(2)	1,02(2)
0,785(1)	1,02(2)	1,03(2)	1,02(2)	1,01(2)	1,01(2)	1,06(2)	1,03(2)
0,873(1)	1,01(2)	1,04(2)	1,02(2)	1,00(2)		1,05(2)	1,04(2)

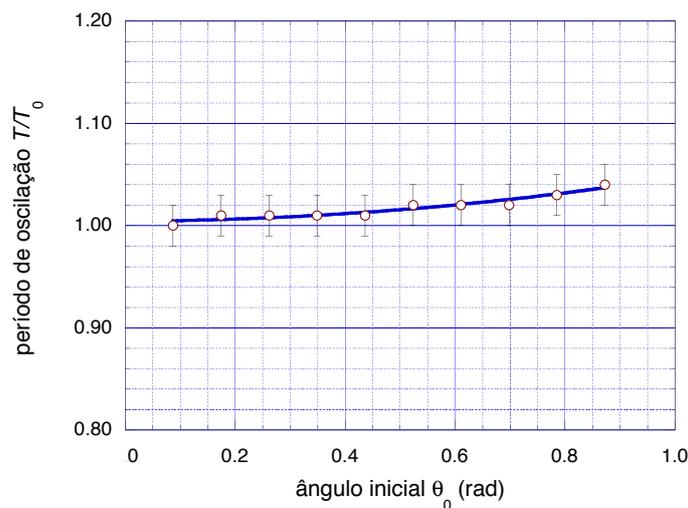


Figura 14. – Razão entre o período de oscilação para qualquer ângulo inicial e o período de oscilação para ângulos pequenos, T/T_0 , vs. ângulo inicial θ_0 de um pêndulo simples. Observamos da figura o ligeiro aumento do período com o aumento do ângulo inicial de deslocamento.

que o valor do período para ângulos pequenos deve ser um mínimo da função procurada. Desse modo, devemos procurar um polinômio de grau superior. Para determinarmos uma possível relação para a razão entre o período de oscilação para qualquer ângulo inicial e o período de oscilação para ângulos pequenos, T/T_0 , com o ângulo inicial $\theta_0(^{\circ})$, vamos fazer um novo gráfico, representando agora o produto destes dois parâmetros em função do quadrado do ângulo inicial, como ilustrado na figura 15.

O gráfico da figura 15 nos revela uma relação linear entre a razão do período de

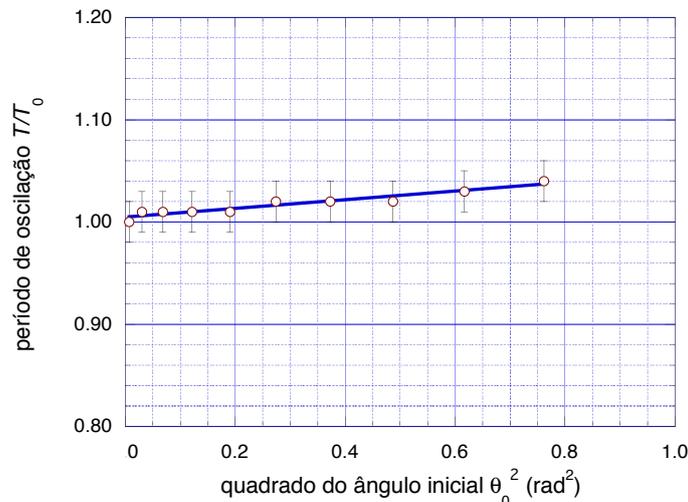


Figura 15. – Razão entre o período de oscilação para qualquer ângulo inicial e o período de oscilação para ângulos pequenos, T/T_0 , vs. quadrado do ângulo inicial θ_0^2 de um pêndulo simples. Observamos da figura o aumento linear do período com o quadrado do ângulo inicial de deslocamento.

oscilação para qualquer ângulo inicial e o período de oscilação para ângulos pequenos, T/T_0 , e o quadrado do ângulo inicial θ_0 de desvio do equilíbrio. Desse modo, podemos concluir que

$$\frac{T}{T_0} = \alpha + \beta \theta_0^2, \quad (2.6)$$

onde o coeficiente linear α é dado por

$$\alpha \approx 0.98(2) \approx 1.0 \quad (2.7)$$

e o coeficiente angular β corresponde a

$$\beta \approx \frac{0,060}{1,000} \approx \frac{1}{16}, \quad (2.8)$$

A incerteza $\delta\beta$ do coeficiente b é

$$\delta\beta \approx \frac{0,010}{1,000} = \frac{1}{100}. \quad (2.9)$$

Finalmente, substituindo (2.5), (2.7) e (2.8) em (2.6), podemos concluir que a relação entre o período de oscilação T , o comprimento L do fio e o ângulo inicial θ_0 deve ser satisfeita pela expressão:

$$T \approx 6.40(2) \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right). \quad (2.10)$$

Concluimos, assim, que o período de oscilação T varia com a raiz quadrada do comprimento L do fio do pêndulo e varia com o quadrado do ângulo inicial de partida do

Esta energia cinética corresponde ao trabalho realizado pela força gravitacional para levá-lo da posição inicial até a posição θ . Portanto, podemos empregar a seguinte igualdade:

$$\frac{mL^2}{2} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right)^2 = mgL (\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (2.13)$$

Da figura (16) observamos que

$$\begin{aligned} L (\cos \theta - \cos \theta_0) &= 2L \left[\text{sen}^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) - \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \\ &= 2L \left[k^2 - \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde fizemos $k^2 = \text{sen}^2(\theta_0/2)$. Substituímos (2.14) em (2.13) e solucionamos a expressão encontrada para Δt . O resultado obtido corresponde ao intervalo de tempo Δt necessário para percorrer o arco de circunferência $L\Delta\theta$, a partir do ângulo θ :

$$\Delta t = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \left[\frac{1}{k^2 - \text{sen}^2(\theta/2)} \right]^{1/2} \Delta\theta. \quad (2.15)$$

O sinal negativo é escolhido para indicar que o ângulo associado à posição do corpo diminui quando o corpo evolui em direção à sua posição de equilíbrio, dada pelo ângulo $\theta = 0$, a partir da sua posição inicial θ_0 .

Para determinar a duração do intervalo de tempo necessário para percorrer essa distância, dividimos esse percurso em N intervalos tais que para cada instante de tempo t_n corresponde uma posição angular θ_n e um deslocamento angular $\Delta\theta_n$ realizado no intervalo de tempo Δt_n :

$$\Delta t_n = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \left[\frac{1}{k^2 - \text{sen}^2(\theta_n/2)} \right]^{1/2} \Delta\theta_n, \quad (2.16)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots, N$. Associamos essa duração a um quarto do período de oscilação T do corpo em torno de sua posição de equilíbrio e, assim, podemos escrever que o período de oscilação T corresponde a

$$\begin{aligned} T &= 4 \sum_{n=1}^N \Delta t_n \\ &= -4 \sqrt{\frac{L}{g}} \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{k^2 - \text{sen}^2(\theta_n/2)} \right]^{1/2} \frac{\Delta\theta_n}{2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Observamos de (2.17) que o período de oscilação do pêndulo depende da raiz quadrada da razão entre o comprimento L do pêndulo e da aceleração gravitacional g . Observamos também, a partir da mesma equação, que o período T depende do valor de k e, por consequência, depende do ângulo de partida θ_0 .

Para determinar o valor da somatória, consideramos uma semicircunferência auxiliar, de raio k , tal que o movimento do pêndulo ao longo do arco de circunferência B_0A

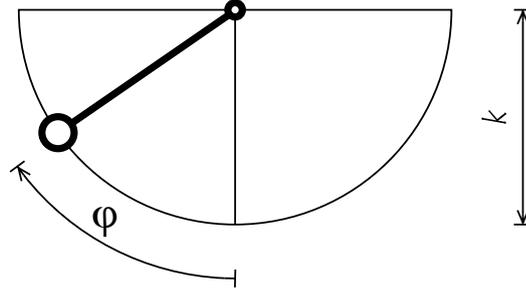


Figura 17. – Semicircunferência auxiliar para a descrição da oscilação do pêndulo simples. O ângulo φ está relacionado com o ângulo θ pela expressão (2.18).

corresponde ao movimento sobre essa semicircunferência auxiliar entre $-\pi/2$ e 0, como indicado na figura 17.

Nesse caso, temos que

$$\text{sen} \left(\frac{\theta_n}{2} \right) = k \text{sen} \varphi_n \quad (2.18)$$

e

$$\cos^2 \left(\frac{\theta_n}{2} \right) = 1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi_n. \quad (2.19)$$

Para pequenos incrementos $\Delta\theta_n$, podemos escrever que

$$\begin{aligned} \text{sen} \left(\frac{\theta_{n+1}}{2} \right) &= \text{sen} \left(\frac{\theta_n - \Delta\theta_n}{2} \right) \\ &= \cos \left(\frac{\Delta\theta_n}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{\theta_n}{2} \right) - \text{sen} \left(\frac{\Delta\theta_n}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_n}{2} \right) \\ &\approx \text{sen} \left(\frac{\theta_n}{2} \right) - \frac{\Delta\theta_n}{2} \cos \left(\frac{\theta_n}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

e

$$\begin{aligned} \text{sen} \varphi_{n+1} &= \text{sen} (\varphi_n - \Delta\varphi_n) \\ &= \cos \Delta\varphi_n \text{sen} \varphi_n - \text{sen} \Delta\varphi_n \cos \varphi_n \\ &\approx \text{sen} \varphi_n - \Delta\varphi_n \cos \varphi_n \end{aligned} \quad (2.21)$$

Multiplicamos (2.21) por k e subtraímos (2.20). Usamos as identidades (2.18) e (2.19) na expressão resultante e a solucionamos para $\Delta\theta_n$. Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\theta_n}{2} &= \frac{k \cos \varphi_n}{\cos(\theta_n/2)} \Delta\varphi_n \\ &= \frac{\sqrt{k^2 - \text{sen}^2(\theta_n/2)}}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi_n}} \Delta\varphi_n. \end{aligned} \quad (2.22)$$

A expressão (2.22) permite reescrever a somatória em (2.17) na forma

$$\sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{k^2 - \text{sen}^2(\theta_n/2)} \right]^{1/2} \frac{\Delta\theta_n}{2} = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi_n} \right]^{1/2} \Delta\varphi_n \quad (2.23)$$

A somatória

$$\sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_n} \right]^{1/2} \Delta\varphi_n \quad (2.24)$$

é conhecida como a integral elíptica de primeira espécie e não pode ser reduzida a funções elementares. Entretanto, podemos realizar algumas estimativas do seu valor. Observamos que o valor de k é sempre menor que a unidade e, nesse caso, podemos considerar

$$x = k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_n < 1 \quad (2.25)$$

e usar as seguintes aproximações

$$\frac{1}{1 - x} \approx 1 + x \quad (2.26)$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1 - x} \right)^{1/2} &\approx (1 + x)^{1/2} \\ &\approx 1 + \frac{x}{2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Desse modo, (2.23) reduz-se a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_n} \right]^{1/2} \Delta\varphi_n &\approx \sum_{n=1}^N \left[1 + \frac{k^2}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi_n \right] \Delta\varphi_n \\ &\approx \sum_{n=1}^N \Delta\varphi_n + \frac{k^2}{2} \sum_{n=1}^N \operatorname{sen}^2 \varphi_n \Delta\varphi_n \end{aligned} \quad (2.28)$$

A primeira parcela do lado direito de (2.28) corresponde à metade da semicircunferência auxiliar:

$$\sum_{n=1}^N \Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (2.29)$$

e a segunda parcela do lado direito de (2.28) corresponde à média ponderada dos sucessivos deslocamentos $\Delta\varphi_n$ sobre esse mesmo arco:

$$\sum_{n=1}^N \operatorname{sen}^2 \varphi_n \Delta\varphi_n \quad (2.30)$$

Para resolver esta soma, observamos que

$$\sum_{n=1}^N \operatorname{sen}^2 \varphi_n \Delta\varphi_n = \sum_{n=1}^N \cos^2 \varphi_n \Delta\varphi_n \quad (2.31)$$

e, portanto, podemos escrever que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \operatorname{sen}^2 \varphi_n \Delta\varphi_n &= \sum_{n=1}^N (1 - \cos^2 \varphi_n) \Delta\varphi_n \\ &= \sum_{n=1}^N \Delta\varphi_n - \sum_{n=1}^N \cos^2 \varphi_n \Delta\varphi_n \\ &= -\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^N \operatorname{sen}^2 \varphi_n \Delta\varphi_n. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Desse modo,

$$\sum_{n=1}^N \sin^2 \varphi_n \Delta \varphi_n = -\frac{\pi}{4}. \quad (2.33)$$

Após a substituição de (2.29) e (2.33) em (2.28), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{1 - k^2 \sin^2(\theta_n/2)} \right]^{1/2} \Delta \varphi_n &\approx -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} k^2 \\ &\approx -\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} \right), \end{aligned} \quad (2.34)$$

em uma primeira aproximação. Concluímos desses resultados que o período T de oscilação, indicado em e (2.17), corresponde a

$$\begin{aligned} T &\approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{k^2}{4} \right) \\ &\approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Observamos ainda que a função $\sin x$ corresponde à serie

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \quad (2.36)$$

válida para qualquer valor de z , seja ele pequeno ou grande. Portanto, para amplitudes iniciais pequenas, podemos escrever que

$$\sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \approx \frac{\theta_0}{2}. \quad (2.37)$$

Desse modo, para esse caso, o período de oscilação T se reduz à

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right), \quad (2.38)$$

uma função parabólica em relação à amplitude inicial, com um valor mínimo em $2\pi \sqrt{L/g}$.

3 Aplicação das atividades com os alunos

A aplicação do trabalho foi realizada no Colégio Estadual Raymundo Corrêa em turmas do Núcleo de Educação de Jovens e Adultos (NEJA) do módulo IV do ensino médio. Foram utilizados seis tempos de aula, de 40 minutos cada, para a aplicação do material didático discutido nesta dissertação. Os alunos desta unidade não haviam visto nenhum conteúdo prévio sobre os conceitos envolvidos na discussão do movimento do pêndulo simples. Por esse motivo, utilizamos a *Estratégia POE* de Previsão-Observação-Explicação de um problema como um método para a construção das ideias principais relativas à caracterização desse movimento. Obter a equação que descreve o período de oscilação do pêndulo foi a questão principal proposta para os alunos. A solução do problema, entretanto, deve ser construída a partir da análise de um conjunto de medidas que relacionam os períodos T de oscilação para diferentes ângulos de partida θ_0 e diferentes comprimentos L do pêndulo. Para uma melhor realização das atividades com os alunos, distribuimos as tarefas propostas em três aulas, descritas a seguir.

3.1 Aula 1: Introdução ao experimento e sua montagem

Na primeira aula, introduzimos uma brevíssima história sobre a medida do tempo, a evolução do relógio de areia (ampulheta), o relógio de água (clepsidra), o relógio de Sol até a criação do pêndulo simples, utilizados pelos povos antigos, até os relógios utilizados atualmente, como os relógios digitais e relógios nucleares. Essa abordagem foi empregada para contextualizarmos o aprendizado do conteúdo proposto. De fato, sabemos que os relógios de pêndulo ainda existem. Entretanto, apesar de não serem mais populares, ainda os encontramos em museus ou em coleções particulares. Ao apresentarmos o contexto histórico, político, social e econômico em que se encontrava a nossa sociedade nos séculos 16 e 17, procuramos chamar a atenção dos alunos para a importância da medida do tempo na evolução da nossa história.

Em seguida a essa introdução histórica, apresentamos o experimento com o pêndulo simples. Chamamos a atenção dos alunos para o seu movimento oscilatório, definimos sua construção e apresentamos os acessórios necessários para a sua montagem. Após essa etapa, dividimos a turma em seis grupos, cada grupo associado a um pêndulo de comprimento particular, pré-estabelecidos pelo professor. Cada aluno de cada grupo deve observar a oscilação do pêndulo para diferentes ângulos de partida.

Conforme a *Estratégia POE*, sugerimos que os alunos reflitam sobre como montar o aparato, quais são os instrumentos adequados para medir o período de oscilação do pêndulo e qual o valor esperado desses intervalos de tempo associados aos diferentes ângulos de partida. Cada grupo, já sabendo o comprimento do fio e os materiais necessários,



Figura 18. – Aplicação do produto sobre o pêndulo simples para os alunos do NEJA do módulo IV no Colégio Estadual Raymundo Corrêa. Aula de apresentação sobre o conteúdo, o contexto histórico, político e econômico da época para a descoberta do relógio pendular e montagem dos equipamentos para iniciar a coleta de dados.

se organiza para realizar a tarefa sugerida. Cada aluno, de cada grupo, prepara o seu pêndulo e coleta as suas medidas de intervalo de tempo para um certo ângulo de partida, definido previamente, com os instrumentos adequados.

Com o auxílio da trena, o aluno mede o comprimento do fio, amarra uma de suas extremidades em um suporte sobre a mesa e, na outra extremidade, ele fixa a massa que foi posta para oscilar. O cronômetro foi utilizado para marcar o tempo de cinco oscilações e a quantidade de oscilações foi empregada para reduzir o erro na determinação do período. Utilizamos o intervalo de tempo para cinco oscilações nas medidas coletadas pelos alunos por conta da curta duração das aulas do curso noturno do NEJA. Desse modo, os alunos determinam o período para cada oscilação dividindo o intervalo de tempo encontrado por cinco e anotam os valores na tabela fornecida pelo professor. Mostramos na figura 19 a montagem do experimento por um dos alunos e, na figura 20, exibimos uma imagem dessa tabela.

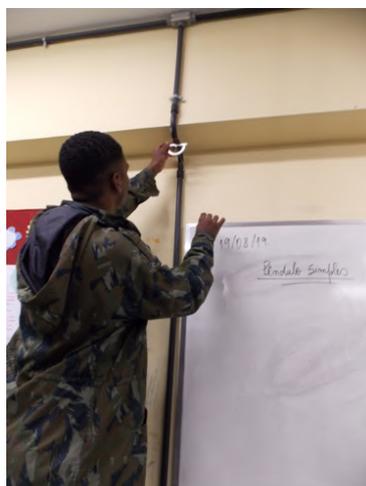


Figura 19. – Aplicação do produto sobre o pêndulo simples para os alunos do NEJA do módulo IV no Colégio Estadual Raymundo Corrêa. Iniciando a montagem dos aparatos do experimento do pêndulo simples, execução da experiência e coleta de dados.

A figura 19 mostra também um dos alunos aprendendo a medir os ângulos de partida com o auxílio de um transferidor. Neste mesmo momento, outro aluno deste mesmo grupo, aprende como utilizar o cronômetro, e todos os alunos aprendem a fazer a contagem das oscilações, a partir do ponto de equilíbrio, de um período completo.

Colégio Estadual Raymundo Corrêa

L = 1,00 m					
m = 31,52 g					
		Direita		Esquerda	
n	$\theta(^{\circ})$	$\Delta t(s)$	T(s)	$\Delta t(s)$	T(s)
1	5	11.62	2.324	12.03	2.406
2	10	11.79	2.358	12.69	2.538
3	15	11.84	2.368	11.94	2.388
4	20	11.93	2.386	11.75	2.350
5	25	11.62	2.324	11.82	2.370
6	30	11.94	2.388	11.90	2.380
7	35	11.85	2.370	11.94	2.388
8	40	11.78	2.356	11.88	2.376
9	45	11.97	2.394	11.96	2.392
10	50	11.96	2.392	12.06	2.412

Nome:

1. Cleide Pereira dos Santos
2. Antonia Elizabeth Soares
3. Mayara Fátima Romarino de Oliveira
4. Simone R de Lima
5. Látiana Gomes Baptista dos Santos
6. Apraiva Sales de Freitas
7. Joo de Andrade Silva
- 8.

Figura 20. – Aplicação do produto sobre o pêndulo simples para os alunos do NEJA do módulo IV no Colégio Estadual Raymundo Corrêa. Modelo de tabela para coletar os dados preenchida pelos alunos, confeccionada pelo professor.

A figura 20 mostra uma tabela já preenchida pelos alunos. Os grupos usam esta tabela durante a aula para anotar os dados coletados na execução do experimento. É interessante notar que, ao coletar os primeiros dados para os intervalos de tempo de oscilação, os alunos “explicam” que “não precisam mais continuar a realizar a experiência porque já sabiam quais seriam os próximos valores para novos deslocamentos angulares”. Eles antecipam que os valores da duração das oscilações vai se repetir. Entretanto, ao se depararem com a mudança repentina quando os ângulos já não são tão pequenos, os alunos se desorientam. Há a necessidade, neste momento, da intervenção do professor de maneira a assegurá-los que tal comportamento faz parte do experimento e que esse fenômeno será estudado mais à frente.

3.2 Aula 2: Coleta de dados

Para alcançar o objetivo proposto na Aula 1, determinar uma expressão que relacione o período P do pêndulo utilizando os parâmetros relevantes do problema – o comprimento L do fio e o ângulo de partida θ_0 –, usamos a Aula 2 para que os alunos construam, em papel milimetrado, os gráficos representativos dos dados coletados na primeira aula. A figura 21 apresenta um desses gráficos, com o período medido para oscilações iniciadas pelo lado direito da posição de equilíbrio.

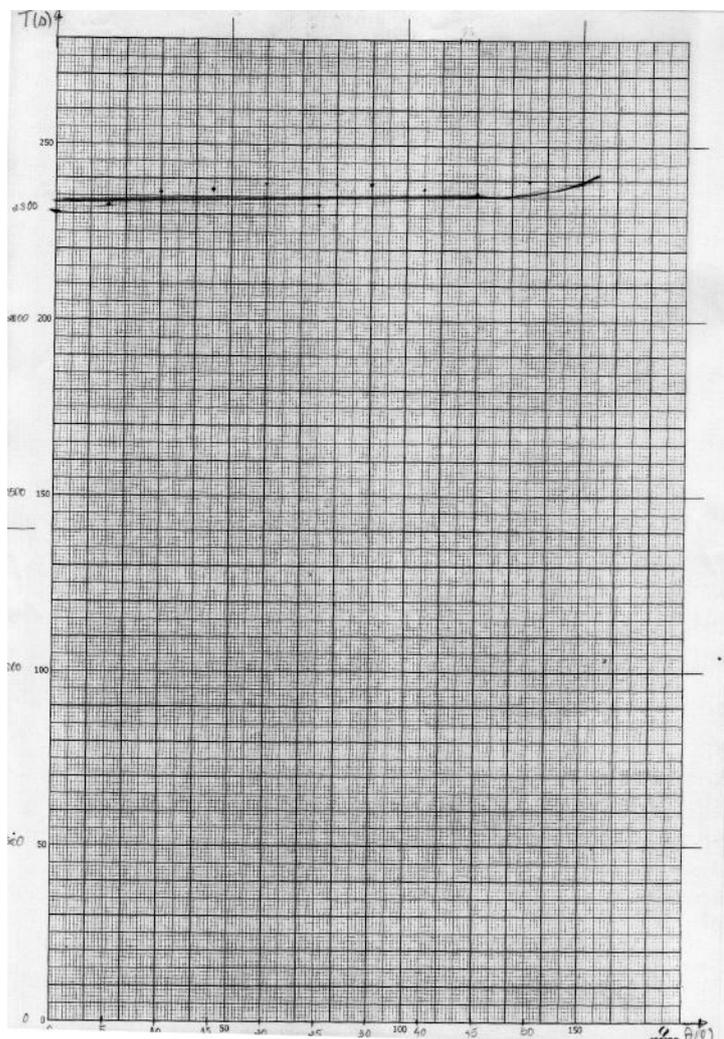


Figura 21. – Aplicação do produto sobre o pêndulo simples para os alunos do NEJA do módulo IV no Colégio Estadual Raymundo Corrêa. A figura representa o gráfico T vs. θ_0 , feito pelos alunos sobre papel milimetrado. Também observamos na figura o período medido para oscilações iniciadas pelo lado direito da posição de equilíbrio.

A figura 22 mostra o gráfico do período de oscilação do pêndulo, T , medido em função do ângulo inicial de deslocamento, θ_0 , feito sobre papel milimetrado, pelos alunos de cada grupo, na primeira aula. Neste gráfico, podemos observar que se trata de períodos medidos a partir de oscilações iniciadas pelo lado esquerdo da posição de equilíbrio. Também observamos que a ordenada sofre mudança ao variarmos o comprimento do fio.

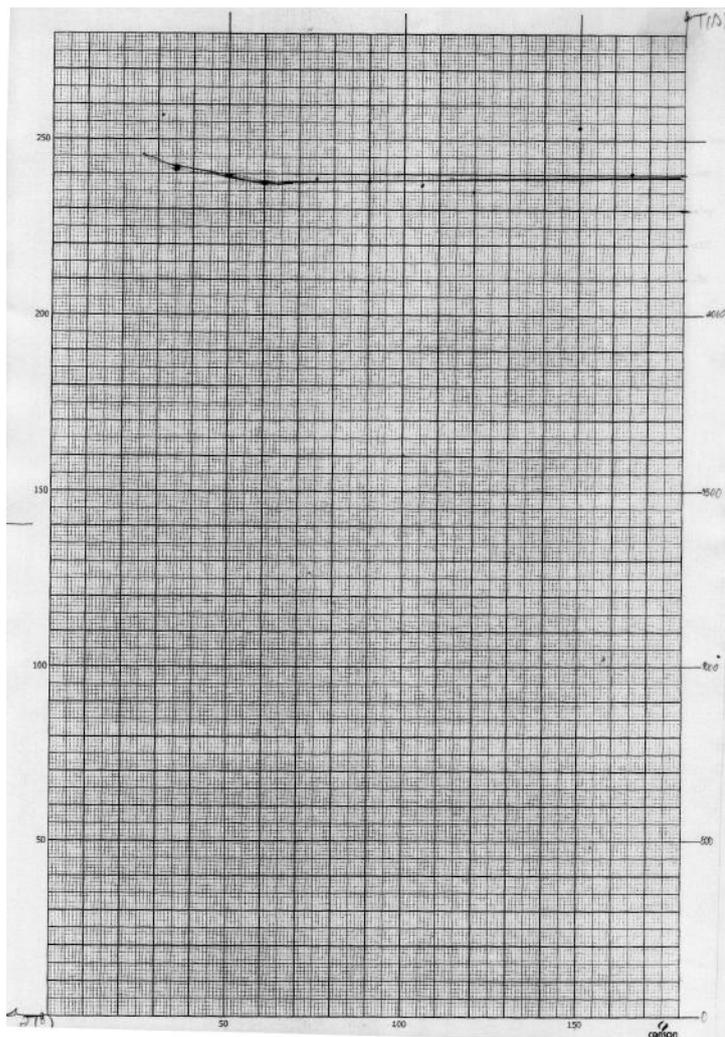


Figura 22. – Aplicação do produto sobre o pêndulo simples para os alunos do NEJA do módulo IV no Colégio Estadual Raymundo Corrêa. A figura representa o gráfico período de oscilação do pêndulo, T , medido em função do ângulo inicial de deslocamento, θ_0 , feito em papel milimetrado. Também observamos na figura o período medido para oscilações iniciadas pelo lado esquerdo da posição de equilíbrio.

A figura 23 mostra os alunos separados em grupos e construindo, em papel milimetrado, os gráficos do período de oscilação do pêndulo, T , medido em função do ângulo inicial de deslocamento, θ_0 .



Figura 23. – Aplicação do produto sobre o pêndulo simples para os alunos do NEJA do módulo IV no Colégio Estadual Raymundo Corrêa. Montagem pelos grupos dos gráficos T vs. θ_0 , dos lados direito e esquerdo..

Devido à curta duração das aulas, é necessário prever o uso de uma planilha eletrônica para agilizar os cálculos e a confecção dos gráficos necessários para a análise dos resultados.

3.3 Aula 3: Análise dos resultados

Utilizamos a Aula 3 para fazer a análise dos dados coletados pelos alunos, durante a Aula 1, com o auxílio do computador. Cada grupo digita os dados obtidos anteriormente, em uma planilha eletrônica, e fazem o gráfico do período em função do ângulo de partida no documento Excel preparado previamente pelo professor.

Com os gráficos realizados, passamos à formalização matemática. Esta etapa não é familiar aos alunos do ensino médio e, por esta razão, a formalização foi feita no quadro pelo professor durante a aula. Seguimos as etapas descritas no Capítulo 2, e concluímos, junto com os alunos, que o período de oscilação varia com a raiz quadrada do comprimento do fio e também varia com o quadrado do ângulo de partida.

4 Considerações finais

Descrevemos no presente *Guia para o Professor* um material didático para a discussão e caracterização do movimento do pêndulo simples. Este material pode ser inserido no currículo do Ensino Medio como um conteúdo de física com ênfase na atividade investigativa experimental e teórica. Procuramos fazer com que o estudante seja parte integrante do processo de construção do seu conhecimento, e permitir que ele desenvolva a sua potencialidade como um futuro pesquisador ao realizar as atividades propostas nesse trabalho.

O conjunto de atividades propostas neste guia permitem aos alunos desenvolver suas habilidades e competências em diferentes áreas da sua formação como, para citar alguns exemplos, o entendimento dos conceitos de posição de equilíbrio de um corpo, frequência e período de oscilação, o domínio das técnicas de construção e análise de gráficos.

Parte do Capítulo 2 aqui discutido foi publicada nos *Resumos* do XXIII SNEF (QUIRINO; SOARES, 2019). Esperamos que a abordagem que apresentamos nesta dissertação seja o início do desenvolvimento de outras atividades relacionadas com o mesmo tema. Concluir que o período de oscilação do pêndulo varia com a raiz quadrada do seu comprimento e também depende do quadrado do ângulo de partida da oscilação oferece ao aluno uma oportunidade para se discutir as propriedades geométricas dos modelos físicos e matemáticos e seu domínio de validade. Não deixa de ser surpreendente observar a “coincidência” entre a constante adimensional experimental $6,33 \approx 2\pi$, indicada na equação (2.5), e a trajetória do corpo oscilante sobre o arco da semicircunferência auxiliar, discutida no Capítulo 2. Mais surpreendente ainda é perceber que o pêndulo de comprimento $L = 1.00\text{ m}$ corresponde ao período de oscilação $T = 2.04\text{ s}$. Portanto, meia oscilação deste pêndulo tem duração igual 1.02 s e difere do segundo de referência por somente 2%, apesar das definições do metro e do segundo não estarem formalmente relacionadas uma com a outra. Esta inesperada relação entre as unidades de comprimento e de tempo é discutida por Agnoli e D’Agostini (2005).

Referências

AGNOLI, P.; D'AGOSTINI, G. Why does the meter beat the second. *arXiv preprint physics/0412078v2*, 2005.

BAKER, G. L.; BLACKBURN, J. A. *The pendulum: a case study in physics*. Oxford: Oxford University Press, 2005.

QUIRINO, M. D. *O período de oscilação do movimento do pêndulo simples e sua relação com seu comprimento e sua amplitude inicial*. Tese (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, fevereiro 2020.

QUIRINO, M. D.; SOARES, V. Uma introdução ao estudo do pêndulo simples. In: *Resumos do XXIII Simpósio Nacional de Ensino de Física*. Salvador: Sociedade Brasileira de Física - Instituto Federal da Bahia, 2019. Disponível em: <<https://sec.sbfisica.org.br/eventos/snef/xxiii/sys/resumos/T0561-1.pdf>>. Acesso em: 15 de dezembro de 2019.