



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física

Mestrado Profissional em Ensino de Física

Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física



## **O período de oscilação do movimento do pêndulo simples e sua relação com seu comprimento e sua amplitude inicial**

Mara Desidério Quirino

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Vitorvani Soares

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2020

# O período de oscilação do movimento do pêndulo simples e sua relação com seu comprimento e sua amplitude inicial

Mara Desidério Quirino

Orientador: Vitorvani Soares

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Prof. Vitorvani Soares (Presidente)

---

Prof. Antonio Carlos Fontes dos Santos

---

Profa. Wania Wolff

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2020

## Ficha catalográfica

Q81p Quirino, Mara Desidério

O período de oscilação do movimento do pêndulo simples e sua relação com seu comprimento e sua amplitude inicial / Mara Desidério Quirino. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2020.

xi, 44 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Vitorvani Soares.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2020.

Referências Bibliográficas: f. 44.

1. Ensino de Física. 2. Movimento harmônico. 3. Oscilação. I. Soares, Vitorvani. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. O período de oscilação do movimento do pêndulo simples e sua relação com seu comprimento e sua amplitude inicial.

*Dedico este trabalho a Deus e aos meus familiares e amigos pela compreensão da minha ausência nos eventos familiares durante o período investido aos estudos; e ao meu pai que, onde estiver, vibra pelas minhas conquistas.*

## **Agradecimentos**

Agradeço aos meus colegas pelo apoio durante a realização desse trabalho.

Agradeço aos professores do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro pelos conhecimentos acadêmicos passados durante o período de estudos.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Vitorvani Soares, e aos membros da banca, Professores Antonio Carlos Fontes dos Santos, Wania Wolff e José Augusto Oliveira Huguenin, pela leitura atenta dessa dissertação.

Agradeço à CAPES, ao MNPEF e à Sociedade Brasileira de Física pela concessão da bolsa de mestrado durante toda a realização desse projeto.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

PHYSICS is an exact Science and hence depends upon measurement, while all measurement itself requires sense-perception. Consequently all the ideas employed in Physics are derived from the world of sense-perception.

— MAX PLANCK, *The Universe in the light of modern physics*, 1931.

## RESUMO

### **O período de oscilação do movimento do pêndulo simples e sua relação com seu comprimento e sua amplitude inicial**

Mara Desidério Quirino

Orientador: Vitorvani Soares

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Apresentamos nesta dissertação um procedimento para a caracterização do período de oscilação de um pêndulo simples, a partir de um conjunto de atividades que discutem as propriedades do movimento harmônico e podem ser realizadas em um laboratório didático ou em uma sala de aula tradicional. Estabelecemos uma expressão algébrica que relaciona o período de oscilação do pêndulo simples, tanto com a amplitude inicial do seu movimento quanto com o comprimento do fio que o sustenta, a partir da observação das oscilações livres que o pêndulo realiza e da análise dos resultados obtidos durante as atividades. Neste estudo, privilegiamos a abordagem experimental do movimento oscilatório do pêndulo simples, de maneira que o estudante possa desenvolver suas competências e habilidades na observação de um fenômeno, na análise dos seus resultados e na construção de uma conclusão, conforme as orientações da ciência contemporânea. Esperamos, desse modo, despertar no aluno, com o auxílio do professor, a sua percepção e a sua capacidade em desenvolver um projeto ou uma atividade científica.

Palavras chave: Ensino de Física, Movimento harmônico, Oscilação.

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2020

## ABSTRACT

### **The period of oscillation of simple pendulum motion and its relationship to its length and initial amplitude**

Mara Desidério Quirino

Supervisor: Vitorvani Soares

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

In this dissertation we present a procedure for the characterization of the oscillation period of a simple pendulum, from a set of activities that discuss the properties of harmonic movement and can be performed in a didactic laboratory or in a traditional classroom. We establish an algebraic expression that relates the period of oscillation of the simple pendulum, both with the initial amplitude of its movement and with the length of the supporting wire, from observing the free oscillations that the pendulum performs and analyzing the results obtained during the measurements' activities. In this study, we privilege the experimental approach of the simple pendulum oscillatory movement, so that the student can develop his competences and skills in observing a phenomenon, analyzing its results and constructing a conclusion, according to the orientations of contemporary science. We hope to awaken in the student, with the help of the teacher, their perception and their ability to develop a project or a scientific activity.

Keywords: Physics education, Harmonic motion, Oscillation.

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2020

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Considerações didáticas</b>	<b>15</b>
2.1	Previsão	16
2.2	Observação	16
2.3	Explanação	16
<b>3</b>	<b>O experimento</b>	<b>18</b>
3.1	Montagem, aquisição e análise dos dados	18
3.2	Modelo matemático do pêndulo simples	32
<b>4</b>	<b>Aplicação das atividades com os alunos</b>	<b>37</b>
4.1	Aula 1: Introdução ao experimento e sua montagem	37
4.2	Aula 2: Coleta de dados	40
4.3	Aula 3: Análise dos resultados	42
<b>5</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>43</b>
	<b>Referências</b>	<b>44</b>

# Lista de ilustrações

Figura 1	Balança empregada no experimento . . . . .	18
Figura 2	Montagem experimental do pêndulo simples . . . . .	19
Figura 3	Trena metálica empregada no experimento . . . . .	19
Figura 4	Período vs. desvio angular ( $L = 1$ m) . . . . .	21
Figura 5	Período vs. desvio angular ( $L = 1,0$ e $2,0$ m) . . . . .	22
Figura 6	Período vs. desvio angular ( $L = 1,0; 1,50$ e $2,0$ m) . . . . .	23
Figura 7	Período vs. desvio angular ( $L = 1,0; 1,25; 1,50$ e $2,0$ m) . . . . .	24
Figura 8	Período vs. desvio angular ( $L = 1,0; 1,25; 1,50; 1,75$ e $2,0$ m) . . . . .	25
Figura 9	Período vs. desvio angular ( $L = 0,5; 1,0; 1,25; 1,50; 1,75$ e $2,0$ m) . . . . .	26
Figura 10	Período de oscilação $T_0$ vs. comprimento do pêndulo $L$ . . . . .	27
Figura 11	Razão $T/L$ vs. período de oscilação $T_0$ . . . . .	27
Figura 12	Razão $T_0^2/L$ vs. comprimento do pêndulo $L$ . . . . .	28
Figura 13	Período $T_0$ vs. comprimento $L$ . . . . .	29
Figura 14	Período normalizado $T/T_0$ , vs. ângulo inicial $\theta_0$ . . . . .	30
Figura 15	Período normalizado $T/T_0$ , vs. quadrado do ângulo inicial $\theta_0^2$ . . . . .	31
Figura 16	Circunferência que descreve a trajetória do movimento do pêndulo . . . . .	32
Figura 17	Circunferência auxiliar para a descrição da oscilação do pêndulo . . . . .	34
Figura 18	Aula de apresentação da atividade . . . . .	38
Figura 19	Montagem dos aparatos do experimento . . . . .	38
Figura 20	Modelo de tabela para coleta dos dados . . . . .	39
Figura 21	Gráfico $T$ vs. $\theta_0$ feito pelos alunos (lado direito) . . . . .	40
Figura 22	Gráfico $T$ vs. $\theta_0$ feito pelos alunos (lado esquerdo) . . . . .	41
Figura 23	Alunos do NEJA do módulo IV no C.E. Raymundo Corrêa . . . . .	42

## Lista de tabelas

Tabela 1	Período $T$ vs. ângulo da oscilação $\theta_0$ ( $L = 1,00$ m) . . . . .	20
Tabela 2	Período $T$ vs. ângulo da oscilação $\theta_0$ ( $L = 2,00$ m) . . . . .	21
Tabela 3	Período $T$ vs. ângulo da oscilação $\theta_0$ ( $L = 1,50$ m) . . . . .	22
Tabela 4	Período $T$ vs. ângulo da oscilação $\theta_0$ ( $L = 1,25$ m) . . . . .	23
Tabela 5	Período $T$ vs. ângulo da oscilação $\theta_0$ ( $L = 1,75$ m) . . . . .	24
Tabela 6	Período $T$ vs. ângulo da oscilação $\theta_0$ ( $L = 0,50$ m) . . . . .	25
Tabela 7	Período $T_0$ vs. comprimento do pêndulo $L$ . . . . .	26
Tabela 8	Período normalizado $T/T_0$ vs. ângulo da oscilação $\theta_0$ . . . . .	30

# 1 Introdução

O estudo do movimento do pêndulo simples é um dos problemas mais populares em livros de mecânica e seu impacto na ciência, na cultura e na educação é intensamente discutido, por exemplo, em Baker e Blackburn (2005) e Matthews, Gauld e Stinner (2005). Este estudo está associado, na sua forma mais simples, à observação do isocronismo das oscilações do pêndulo para pequenos arcos de trajetória. As condições desse comportamento são aproximadamente satisfeitas por um corpo de dimensões pequenas comparadas com as dimensões do fio que o mantém suspenso, massa bem maior que a do fio, e para pequenos deslocamentos do corpo em relação à sua posição de equilíbrio.

Entretanto, muito menos popular nos livros texto e em aulas introdutórias de física é a discussão do movimento do pêndulo simples quando a segunda condição não é satisfeita. Nas atividades propostas neste trabalho, procuramos atender a esta situação: identificamos com os alunos as principais propriedades físicas do movimento do pêndulo simples, a partir somente da realização e da observação do seu movimento; em seguida, analisamos os resultados experimentais obtidos para o comportamento do período de oscilação do pêndulo em função de diferentes ângulos de afastamento da sua posição de equilíbrio. Empregamos somente a análise algébrica da representação gráfica destes resultados, sem utilizar nenhuma informação a priori dos modelos físicos envolvidos neste problema. Desta forma, estabelecemos a expressão algébrica que relaciona o período de oscilação do pêndulo tanto com a amplitude do seu movimento quanto com o comprimento do fio que o mantém suspenso.

Adotamos, neste trabalho, uma abordagem mais prática no desenvolvimento dos experimentos com o aluno, de maneira a desenvolver suas competências e habilidades em relação ao conteúdo discutido em sala e relacioná-las ao seu dia a dia. Por esta razão, apresentamos uma descrição do funcionamento do pêndulo simples e as observações pertinentes para seu entendimento em uma linguagem voltada para alunos do Ensino Médio, em acordo com as orientações da Lei de Diretrizes e Bases (BRASIL, 1996) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1998; BRASIL, 2002a; BRASIL, 2002b; BRASIL, 2006).

Apresentamos ainda, nesta dissertação, uma descrição do funcionamento do pêndulo simples na qual procuramos transmitir para o aluno que os “modelos explicativos não são únicos nem finais”, como sinalizam as orientações dos PCNs de Física quanto ao estudo das Ciências Físicas no Ensino Médio (BRASIL, 2002b). Como outras observações fundamentais em ciência, ao construir com os alunos a representação do movimento do pêndulo simples procuramos mostrar que o modelo matemático é uma aproximação da realidade. A atividade proposta também é conduzida como uma prática científica moderna: constituída pela observação de um fenômeno, pela sua análise e uma conclusão.

No desenvolvimento de nosso trabalho, também procuramos seguir as orientações dos PCNs para considerar a Física uma ciência concebida em uma perspectiva histórica. Como discutido em (BRASIL, 2002b, Parte III, p. 27):

A Física percebida enquanto construção histórica, como atividade social humana, emerge da cultura e leva à compreensão de que modelos explicativos não são únicos nem finais, tendo se sucedido ao longo dos tempos, como o modelo geocêntrico, substituído pelo heliocêntrico, a teoria do calórico pelo conceito de calor como energia, ou a sucessão de vários modelos explicativos para a luz. O surgimento de teorias físicas mantém uma relação complexa com o contexto social em que ocorreram.

De fato, como discutido por Hall (1978), a história da física do pêndulo remonta às origens da ciência moderna, com a história, talvez fantasiosa, das observações de Galileu Galilei (1564-1642) sobre a oscilação dos candelabros da catedral de Pisa, ou às observações dos escolásticos franceses Jean Buridan (c. 1300–1358), professor na Université de Paris, e seu provável aluno Nicole Oresme (c. 1320–1382), realizadas duzentos e cinquenta anos antes do cientista italiano. Apesar disso, o trabalho realizado por Galileu é considerado o trabalho pioneiro ao apresentar todos os ingredientes da atividade científica moderna: a observação de um fenômeno, a sua análise e uma conclusão.

Galileu foi, sem dúvida, um dos primeiros cientistas modernos e o movimento do pêndulo está entre os primeiros temas da sua pesquisa científica: uma discussão sobre o pêndulo já aparece em uma de suas primeiras obras *De Motu*, publicada em 1590 (WISAN, 1974). Somente décadas mais tarde, em 1638, Galileu volta a descrever seus experimentos com os pêndulos na sua última obra, as *Duas Novas Ciências (Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze)* (GALILEI, 1954), em que descreve os seus derradeiros trinta anos de trabalho.

Após os trabalhos pioneiros de Galileu, ao final do século 16, a importância do pêndulo como um padrão para a escala de tempo foi amplamente reconhecida. O estudo do movimento do pêndulo conheceu um franco desenvolvimento experimental e teórico durante o transcorrer do século 17, e o primeiro relógio de pêndulo foi construído, em 1657, por Christian Huygens (1629-1695) (YODER, 2004). As propriedades do movimento pendular foram muito bem estabelecidas e, dentre elas, uma das mais marcantes é a isocronia do movimento do pêndulo simples causado por pequenos desvios angulares em relação a sua posição de equilíbrio: praticamente, o período da oscilação do pêndulo simples depende somente do seu comprimento.

Como apoio didático para a realização das atividades propostas em nosso trabalho, foi utilizada a técnica de Previsão–Observação–Explicação, desenvolvida por White e Gunstone (1992) e conhecida como *Estratégia POE*. Esta técnica nos permitiu abordar o tema desse trabalho com os alunos de forma que eles, ao realizarem as atividades, participassem do processo de descoberta do fenômeno e delineassem as possíveis estratégias para contornar as dificuldades ocorridas ao longo de sua execução.

---

Para uma apresentação e discussão detalhada do nosso trabalho, organizamos a nossa dissertação da seguinte maneira: no Capítulo 2 discutimos os aspectos didáticos do nosso procedimento; no Capítulo 3 descrevemos o experimento do pêndulo simples; no Capítulo 4 apresentamos a aplicação das atividades com os alunos; e, no último capítulo deste trabalho, apresentamos as nossas considerações finais.

## 2 Considerações didáticas

Como referencial teórico para a realização das atividades propostas em nosso trabalho, adotamos as linhas gerais da técnica de Previsão–Observação–Explicação (*Estratégia POE*), desenvolvida por White e Gunstone (1992). A *Estratégia POE* estabelece as tarefas que devem ser executadas pelo aluno durante a aula, sem que seja passado a ele algum conhecimento teórico prévio sobre o assunto a ser abordado. O aluno deve procurar solucionar um determinado problema, definido pelo professor, sem que ele, aluno, tenha conhecimento do modelo associado ao problema. A ideia central da estratégia é fornecer ao alunos condições para que ele, sob a supervisão do professor, aprenda a utilizar individualmente as informações adquiridas durante o experimento que lhe permitirão construir uma solução para o problema proposto.

A *Estratégia POE* sugere que o aluno faça uma previsão sobre qual tarefa deve ser executada para a resolução do problema proposto e prepare uma breve justificativa sobre a sua previsão para o resultado; após a realização da tarefa, o aluno descreve o que foi observado; em seguida, é feita uma conexão entre o que foi observado por ele com o que foi por ele previsto. Nas palavras de White e Gunstone (1992, p. 46)<sup>1</sup>:

Quando a ação ocorre, todos os alunos devem anotar suas observações individuais. Como alguns dos nossos exemplos mostrarão, haverá algumas ocasiões em que diferentes estudantes perceberão coisas diferentes. Se as observações [dos alunos] não forem registradas no momento em que elas ocorreram, alguns estudantes modificarão suas observações porque ouviram as afirmativas dos outros [colegas].

Esses autores ainda acrescentam, na mesma página, que:

O último passo é os estudantes ajustarem qualquer discrepância entre o que eles previram e o que eles observaram. Em geral, eles acham difícil [esta tarefa] e, então, tudo o que você [professor] pode fazer é encorajá-los a considerar quaisquer possibilidades que eles possam pensar. O encorajamento é importante porque as explicações que os alunos apresentam nessa etapa revelam muito sobre a sua compreensão [do problema].

Empregamos *Estratégia POE* neste trabalho por ser uma estratégia que nos revela a qualidade do desempenho dos alunos no momento em que a atividade é aplicada. Esta técnica permite que o professor, ainda durante as aulas, avalie o conhecimento adquirido pelos alunos e onde estão suas dificuldades. Mais ainda, se for necessário o professor pode intervir no momento em que os alunos apresentam maiores dificuldades em resolver o problema proposto.

Com esta abordagem, as respostas às questões propostas não são dadas prontamente. O aluno precisa investigar, associar, assimilar e interpretar seus conhecimentos prévios

<sup>1</sup> Tradução livre feita pela autora

e aqueles adquiridos durante o experimento. A tarefa dada pelo professor exige que o aluno estabeleça uma estratégia sobre como abordar o assunto para que ele seja resolvido. A *Estratégia POE* é composta de três etapas: a previsão, a observação e a explanação, descritas a seguir.

## 2.1 Previsão

A primeira etapa da *Estratégia POE* é a previsão. Nesta etapa, o professor apresenta um problema ou uma tarefa e os alunos fazem suas previsões sobre o resultado a ser obtido ou um pequeno entendimento do que pode acontecer. Para que a técnica seja satisfatória em sua aplicação, é necessário que o professor garanta que todos os alunos tenham entendido a proposta da tarefa.

Para a apresentação da tarefa aos alunos, o professor pode utilizar a estrutura que lhe for mais conveniente, seja um texto, um vídeo, um jogo, uma figura, ou simplesmente fazer uma discussão durante a aula, o importante é identificar que todos os alunos participam da discussão e que todos eles entendam o tema proposto. Esta etapa é importante para que cada aluno, individualmente, tenha claro qual o problema proposto, garantindo o seu entendimento e que não haja influência nas respostas uns dos outros por escutarem as respostas dos colegas. Cada aluno deve escrever de maneira sucinta a sua própria resposta, de maneira que eles não sejam mutuamente influenciados em suas respostas. Para que isto ocorra, é necessário que todos os alunos estejam presentes no início da atividade. Este procedimento permite que o professor controle o entendimento do procedimento individualizado e as respostas neutras de cada aluno.

## 2.2 Observação

Nesta etapa, a *Estratégia POE* sugere que os alunos observem o fenômeno acontecendo e se o que foi previsto por eles se assemelhou com o que ocorreu. Como o professor não apresentou o conteúdo já pronto com suas definições fechadas e não influenciou nos caminhos escolhidos pelos alunos em suas estratégias – apenas esclareceu as dúvidas encontradas por eles –, as observações feitas por cada aluno não apresentam influência nem do professor nem dos outros alunos, considerando-se que eles já haviam descrito suas previsões. Portanto, nesta etapa, eles somente comparam suas hipóteses com os fatos ocorridos durante a observação do experimento.

## 2.3 Explanação

Nesta etapa, a *Estratégia POE* sugere que o professor incentive o aluno a conciliar a sua previsão com a sua observação, de modo que ele faça um resumo do que ocorreu. Para os alunos pode ser uma dificuldade conciliar a sua previsão com o que foi de fato

observado. É necessário que o aluno analise os dois processos e escreva uma conclusão, ainda que sucinta. A importância do professor aqui é encorajar os alunos a cultivar este método de trabalho e se sintam à vontade em fazer suas análises. Outra importância do papel professor como mediador reside em perceber o nível de compreensão que cada aluno adquiriu ao registrarem suas conclusões sobre a questão proposta.

Ainda que pareça complexa, para o professor a *Estratégia POE* é uma técnica simples e de rápida aplicação. As respostas dos alunos para o professor são imediatas. Ao propor o tema, e garantir que o aluno entendeu a proposta de trabalho, o professor orienta o aluno a fazer uma breve previsão dos resultados, planejar a execução do experimento, a executá-lo e a observar o que ocorre durante sua evolução. Neste momento é importante que não haja interferência dos outros alunos sobre as observações de cada participante. Após a conclusão da atividade por cada um dos alunos, o professor ajuda o aluno a concluir o processo: cada um deles deve descrever o que ocorreu e apresentar as diferenças e/ou semelhanças entre sua previsão e sua observação.

Observamos que, apesar de relativamente simples para o professor, esta etapa da *Estratégia POE* se mostrou a parte mais difícil e trabalhosa para os alunos. Fazê-los descrever um fenômeno é algo novo e muito trabalhoso para eles. Assim, o professor se torna parte importante na mediação do trabalho individual dos alunos. Ficou claro também, nesta etapa, qual o nível de compreensão que cada aluno alcançou em relação ao assunto abordado. O aluno que estrutura sua resposta sem interferência dos outros colegas apresenta maior autonomia na execução completa da tarefa.

Contudo, apesar dos alunos apresentarem alguma dificuldade, em um primeiro momento, em entender e aceitar o processo, quando eles começam a sua execução, eles percebem que ele é trabalhoso mas é possível executá-lo em tempo hábil. Com receio inicialmente, os alunos logo se despem do preconceito em relação ao novo, e executam todas as tarefas com muito empenho. Esta resposta dos alunos abre caminho para abordarmos outros conteúdos ou disciplinas desta mesma forma.

## 3 O experimento

Neste capítulo discutimos o experimento do pêndulo simples, como o realizamos e analisamos. O material aqui apresentado serve de *Guia para o Professor*. Neste experimento definimos os conceitos de pêndulo simples, amplitude, frequência e período. Discutimos também as aproximações do movimento do pêndulo para o caso de oscilações de pequena e grande amplitude.

### 3.1 Montagem, aquisição e análise dos dados

No presente trabalho foram utilizados:

- uma massa  $m$  (que irá oscilar);
- uma haste fixa para suporte do pêndulo;
- um fio longo  $L$  (preso a uma haste em uma extremidade e a outra presa à massa);
- um transferidor (para medir os ângulos de partida);
- uma trena (para medir o comprimento do fio);
- uma balança de precisão (para medir a massa);
- um cronômetro (para determinarmos a duração da oscilação);

Descrevemos, a seguir, o procedimento empregado por nós para a realização do experimento. Inicialmente, medimos a massa  $m$  na balança de precisão. A figura 1 mostra a balança que empregamos em nossa atividade.

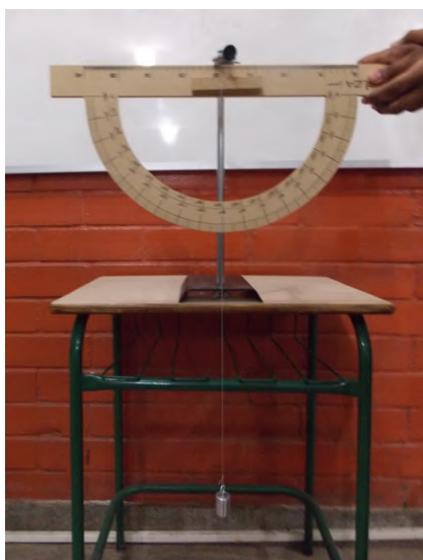


**Figura 1.** – Balança disponível no laboratório de ciências da escola e empregada por nós para a realização das medidas da massa dos objetos considerados no experimento.

Foi utilizada a balança de precisão porque a escola possui laboratório de ciências, mas pode ser utilizado qualquer tipo de balança desde que ela tenha sensibilidade para medir valores pequenos, como sugestão, uma balança de cozinha pode ser muito bem-vinda; a massa  $m$  utilizada no experimento possui valor de 31,52 g; o fio empregado no

experimento foi de número 10 (linha de pipa comum); a haste envolvida na tarefa possui 30 cm de altura e ela é fixa a sua base metálica, mas pode ser utilizado qualquer suporte que sirva para pendurar o fio e que possua o plano livre para que o pêndulo possa oscilar sem obstáculos; o transferidor utilizado para a coleta de dados foi um transferidor escolar do professor, confeccionado em MDF, mas o transferidor utilizado pelos alunos foi um transferidor de plástico simples que pode ser encontrado em qualquer papelaria.

Em seguida, amarramos o fio longo na haste fixa ao suporte; Depois, amarramos a massa  $m$  à outra extremidade do fio longo, como indicado na figura 2; Por fim, enrolamos o fio até o comprimento  $L$  que desejamos, com o auxílio de uma trena. No primeiro experimento escolhemos o comprimento  $L = 1,0$  m.



**Figura 2.** – Montagem experimental do nosso pêndulo simples: consideramos o fio inextensível, as dimensões do fio são muito maiores do que as do objeto que ele mantém suspenso e a massa do fio é muito menor do que a do objeto.

A figura 3 mostra a trena que utilizamos. Definimos este nosso objeto como um pêndulo simples: consideramos o fio inextensível, o comprimento do fio é muito maior do que as dimensões do objeto que ele mantém suspenso e a massa do fio é muito menor do que a massa do objeto suspenso.



**Figura 3.** – Trena metálica empregada em nosso experimento e que serviu para determinar o comprimento  $L$  do fio.

Agora, com o auxílio do transferidor, como indicado na figura 2, colocamos o fio na vertical, posicionamos o zero do transferidor ao longo do fio, com o seu centro na haste

fixa e, assim, medimos os diferentes ângulos de partida,  $\theta_0$ , para o nosso pêndulo simples.

Deslocamos, então, o objeto da sua posição de equilíbrio e o elevamos até uma certa posição, mantendo o fio esticado. Com o ângulo de partida agora definido (a amplitude  $\theta_0$ ), pegamos o cronômetro e permitimos que a massa  $m$  oscile livremente. Ao alcançar a sua posição de equilíbrio, sobre a vertical, no vale da trajetória, acionamos o cronômetro e contamos dez passagens sobre esta posição, no mesmo sentido (a frequência  $f$  da oscilação). Desligamos o cronômetro e anotamos a duração desse movimento ( $\Delta t$ ). Faremos este procedimento para cada ângulo de partida previamente estabelecido.

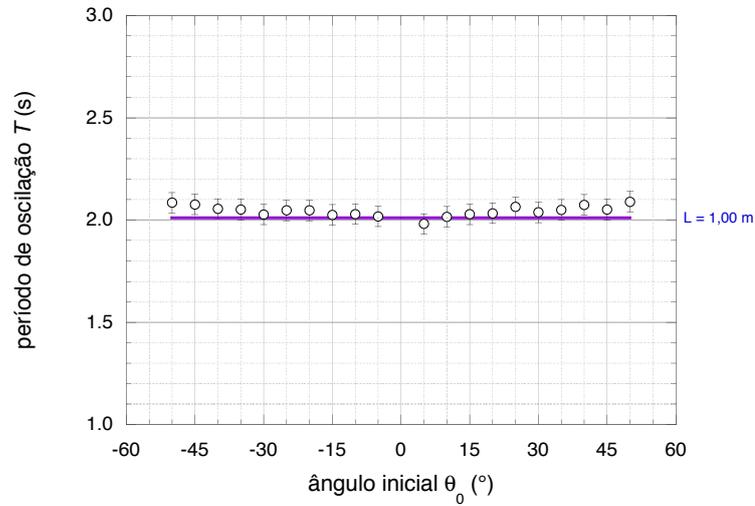
Por definição, período de oscilação  $T$  de um oscilador é o intervalo de tempo que o objeto oscilante precisa para passar pela sua posição de equilíbrio com a velocidade no mesmo sentido. Em nosso caso, como a frequência de oscilação corresponde a  $f = 10/\Delta t$ , o período de oscilação  $T$  do nosso pêndulo corresponde a  $T = \Delta t/10$ . Deste modo, ao observar a oscilação do objeto durante dez períodos de oscilação minimizamos a incerteza na determinação deste parâmetro físico. Cometemos um erro da ordem de decimo de segundo, ao ligar e desligar o cronômetro, e consideramos a incerteza da medida do período na casa dos centésimos de segundo. Assim, garantimos uma melhor precisão na medida do período de oscilação. As medidas realizadas para a determinação do período de oscilação estão apresentadas na tabela 1.

**Tabela 1.** – Período de oscilação  $T$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para um pêndulo simples de comprimento  $L = 1,00(1)$  m.

		esquerda		direita	
$\theta_0(^{\circ})$	ângulo inicial $\theta_0(\text{rad})$	intervalo de tempo $\Delta t(\text{s})$	período $T(\text{s})$	intervalo de tempo $\Delta t(\text{s})$	período $T(\text{s})$
5(1)	0,09(1)	20,18(10)	2,02(1)	19,81(10)	1,98(1)
10(1)	0,17(1)	20,29(10)	2,03(1)	20,16(10)	2,02(1)
15(1)	0,26(1)	20,25(10)	2,03(1)	20,28(10)	2,03(1)
20(1)	0,35(1)	20,47(10)	2,05(1)	20,33(10)	2,03(1)
25(1)	0,44(1)	20,46(10)	2,05(1)	20,64(10)	2,06(1)
30(1)	0,52(1)	20,27(10)	2,03(1)	20,37(10)	2,04(1)
35(1)	0,61(1)	20,51(10)	2,05(1)	20,50(10)	2,05(1)
40(1)	0,70(1)	20,54(10)	2,05(1)	20,74(10)	2,07(1)
45(1)	0,79(1)	20,76(10)	2,08(1)	20,51(10)	2,05(1)
50(1)	0,87(1)	20,84(10)	2,08(1)	20,89(10)	2,09(1)

Em seguida, com os dados apresentados na tabela 1, construímos um gráfico do período de oscilação  $T$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para este pêndulo simples, como representado na figura 4.

Observamos da figura 4 que o período de oscilação  $T$  permanece praticamente constante e igual a  $T_0 = 2,04(2)$  s para o intervalo de ângulos iniciais até  $35^{\circ}$ . Podemos nos perguntar se esse comportamento se repete se modificarmos o comprimento  $L$  do



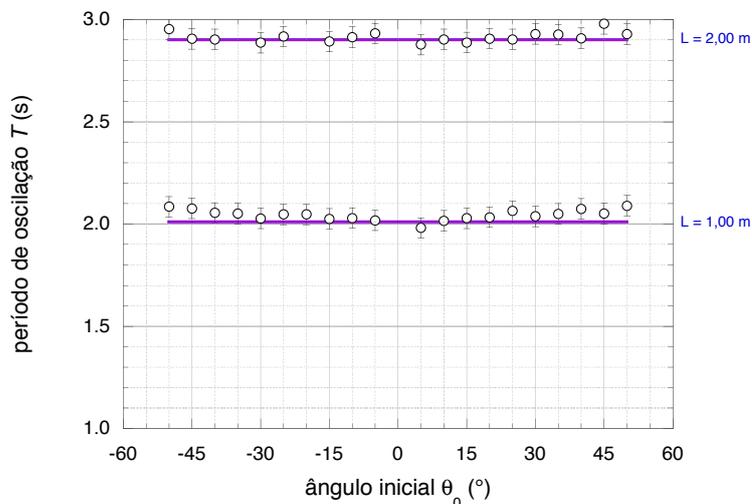
**Figura 4.** – Período de oscilação  $T$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para um pêndulo simples de comprimento  $L = 1,00(1)$  m. Observamos que, para pequenos ângulos, o período é constante e igual a  $T_0 = 2,04(2)$  s, determinado pelo coeficiente linear da reta indicada no gráfico, enquanto que para ângulos iniciais  $\theta_0$  maiores que  $35^\circ$  o período parece variar.

fi. Realizamos, então, um novo experimento, agora com o comprimento do fio igual a  $L = 2,00(1)$  m. Os dados obtidos estão reunidos na tabela 2 e representados na figura 5.

**Tabela 2.** – Período de oscilação  $T$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para um pêndulo simples de comprimento  $L = 2,00(1)$  m.

		esquerda		direita	
ângulo inicial		intervalo de tempo	período	intervalo de tempo	período
$\theta_0$ (°)	$\theta_0$ (rad)	$\Delta t$ (s)	$T$ (s)	$\Delta t$ (s)	$T$ (s)
5(1)	0,09(1)	29,32(10)	2,93(1)	28,77(10)	2,88(1)
10(1)	0,17(1)	29,13(10)	2,91(1)	29,03(10)	2,90(1)
15(1)	0,26(1)	28,92(10)	2,89(1)	28,88(10)	2,89(1)
20(1)	0,35(1)	31,97(10)	3,20(1)	29,06(10)	2,91(1)
25(1)	0,44(1)	29,16(10)	2,92(1)	29,03(10)	2,90(1)
30(1)	0,52(1)	28,86(10)	2,89(1)	29,29(10)	2,93(1)
35(1)	0,61(1)	31,86(10)	3,19(1)	29,26(10)	2,93(1)
40(1)	0,70(1)	29,02(10)	2,90(1)	29,08(10)	2,91(1)
45(1)	0,79(1)	29,05(10)	2,90(1)	29,79(10)	2,98(1)
50(1)	0,87(1)	29,53(10)	2,95(1)	29,28(10)	2,93(1)

Percebemos mais uma vez que o período de oscilação  $T$  permanece constante para ângulos iniciais  $\theta_0$  dentro do mesmo intervalo anterior, quando o comprimento do fio era igual  $L = 1,00(1)$  m. Entretanto, a constante  $T_0$  mudou de valor em cerca de 45%. Este é um comportamento intrigante: ao aumentarmos o comprimento do fio, o período de osci-



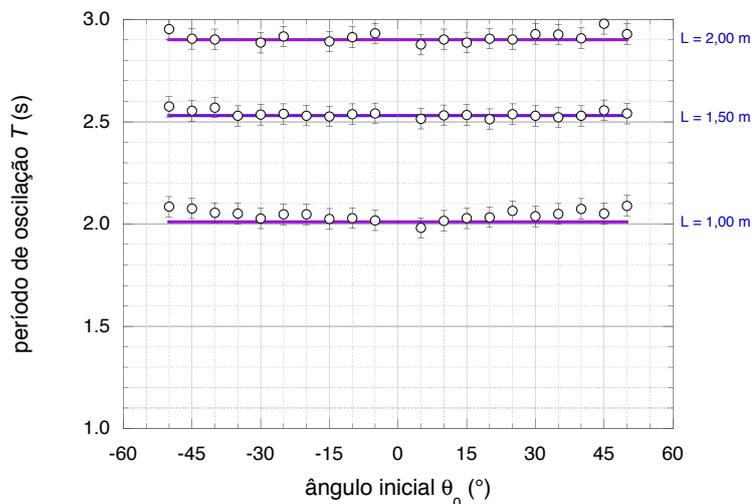
**Figura 5.** – Período de oscilação  $T$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para um pêndulo simples de comprimento  $L = 1,00(1)$  m e  $2,00(1)$  m. Observamos que, para pequenos ângulos, o período é constante e igual a  $T_0 = 2,04(2)$  s para o fio de comprimento menor; para o fio de comprimento maior, temos  $T_0 = 2,90(2)$  s.

lação para pequenos ângulos também aumenta. Realizamos uma vez mais o experimento, agora com um fio de comprimento intermediário:  $L = 1,50(1)$  m. Os dados obtidos nesta nova atividade estão reunidos na tabela 3 e representados na figura 6.

**Tabela 3.** – Período de oscilação  $T$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para um pêndulo simples de comprimento  $L = 1,50(1)$  m.

		esquerda		direita	
ângulo inicial	intervalo de tempo	período	intervalo de tempo	período	
$\theta_0(^{\circ})$	$\theta_0(\text{rad})$	$\Delta t(\text{s})$	$T(\text{s})$	$\Delta t(\text{s})$	$T(\text{s})$
5(1)	0,09(1)	25,41(10)	2,54(1)	25,15(10)	2,51(1)
10(1)	0,17(1)	25,37(10)	2,54(1)	25,31(10)	2,53(1)
15(1)	0,26(1)	25,26(10)	2,53(1)	25,33(10)	2,53(1)
20(1)	0,35(1)	25,30(10)	2,53(1)	25,13(10)	2,51(1)
25(1)	0,44(1)	25,38(10)	2,54(1)	25,37(10)	2,54(1)
30(1)	0,52(1)	25,35(10)	2,54(1)	25,29(10)	2,53(1)
35(1)	0,61(1)	25,29(10)	2,53(1)	25,21(10)	2,52(1)
40(1)	0,70(1)	25,69(10)	2,57(1)	25,28(10)	2,53(1)
45(1)	0,79(1)	25,53(10)	2,55(1)	25,56(10)	2,56(1)
50(1)	0,87(1)	25,74(10)	2,57(1)	25,40(10)	2,54(1)

Mais uma vez observamos que o período de oscilação permaneceu constante para ângulos iniciais dentro do mesmo intervalo anterior, quando o comprimento do fio é igual  $L = 1,00(1)$  m e  $L = 2,00(1)$  m. Entretanto, o valor  $T_0$  do período aumentou menos: agora, para um fio de comprimento  $L = 1,50(1)$  m temos, para pequenos ângulos iniciais,



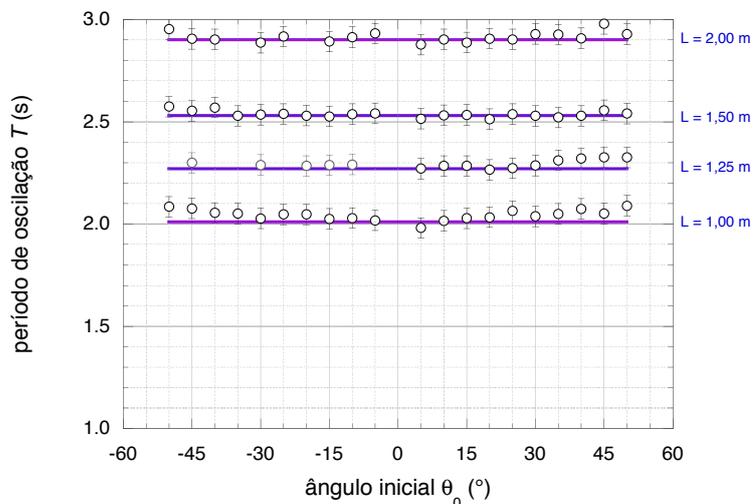
**Figura 6.** – Período de oscilação  $T$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para um pêndulo simples de comprimento  $L = 1,00(1)$  m,  $1,50(1)$  m e  $2,00(1)$  m. Observamos que, para pequenos ângulos, o período é constante e igual a  $T_0 = 2,04(1)$  s,  $2,53(2)$  s e  $2,90(3)$  s, respectivamente; para ângulos iniciais  $\theta_0$  maiores que  $30^\circ$ , o período varia com o ângulo inicial.

um período igual a  $T_0 = 2,53(3)$  s. Realizamos uma vez mais o experimento, agora com um fio de um outro comprimento intermediário:  $L = 1,25(1)$  m. Os dados obtidos nesta nova atividade estão reunidos na tabela 4 e representados na figura 7.

**Tabela 4.** – Período de oscilação  $T$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para um pêndulo simples de comprimento  $L = 1,25(1)$  m.

ângulo inicial $\theta_0(^{\circ})$	ângulo inicial $\theta_0(\text{rad})$	esquerda		direita	
		intervalo de tempo $\Delta t(\text{s})$	período $T(\text{s})$	intervalo de tempo $\Delta t(\text{s})$	período $T(\text{s})$
5(1)	0,09(1)	25,41(10)	2,54(1)	25,15(10)	2,51(1)
10(1)	0,17(1)	25,37(10)	2,54(1)	25,31(10)	2,53(1)
15(1)	0,26(1)	25,26(10)	2,53(1)	25,33(10)	2,53(1)
20(1)	0,35(1)	25,30(10)	2,53(1)	25,13(10)	2,51(1)
25(1)	0,44(1)	25,38(10)	2,54(1)	25,37(10)	2,54(1)
30(1)	0,52(1)	25,35(10)	2,54(1)	25,29(10)	2,53(1)
35(1)	0,61(1)	25,29(10)	2,53(1)	25,21(10)	2,52(1)
40(1)	0,70(1)	25,69(10)	2,57(1)	25,28(10)	2,53(1)
45(1)	0,79(1)	25,53(10)	2,55(1)	25,56(10)	2,56(1)
50(1)	0,87(1)	25,74(10)	2,57(1)	25,40(10)	2,54(1)

Mais uma vez observamos, a partir da figura 7, que o período de oscilação permanece constante para ângulos iniciais mas dentro de um intervalo menor do que os anteriores, quando o comprimento do fio era igual a  $L = 1,00(1)$  m,  $1,50(1)$  m e  $2,00(1)$  m. Da fi-



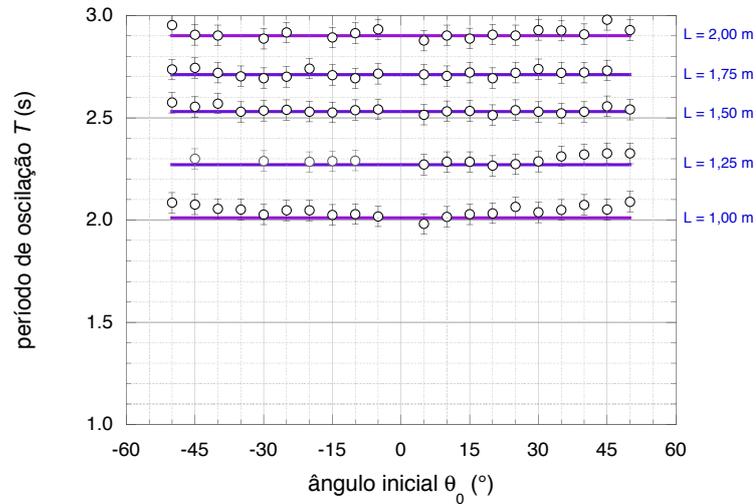
**Figura 7.** – Período de oscilação  $T$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para um pêndulo simples de comprimento  $L = 1,00(1) \text{ m}, 1,25(1) \text{ m}, 1,50(1) \text{ m}$  e  $2,00(1) \text{ m}$ . Observamos que, para pequenos ângulos, o período é constante e igual a  $T_0 = 2,04(1) \text{ s}, 2,27(2) \text{ s}, 2,53(2) \text{ s}$  e  $2,90(3) \text{ s}$ , respectivamente; para ângulos iniciais  $\theta_0$  maiores que  $20^\circ$  o período varia.

gura 7 também percebemos que, de fato, o período de oscilação  $T$  é constante somente para ângulos inferiores a  $20^\circ$  e o valor dessa constante,  $T_0$ , aumenta a medida em que aumentamos o comprimento  $L$  do fio. As medidas também revelam uma dependência do período de oscilação  $T$  não somente com o comprimento  $L$  do fio, mas também com o ângulo inicial de oscilação,  $\theta_0$ .

Realizamos, então, uma vez mais o experimento com um fio de comprimento  $L = 1,75(1) \text{ m}$  e os dados obtidos estão reunidos na tabela 5 e representados na figura 8.

**Tabela 5.** – Período de oscilação  $T$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para um pêndulo simples de comprimento  $L = 1,75(1) \text{ m}$ .

		esquerda		direita	
ângulo inicial $\theta_0(^\circ)$	ângulo inicial $\theta_0(\text{rad})$	intervalo de tempo $\Delta t(\text{s})$	período $T(\text{s})$	intervalo de tempo $\Delta t(\text{s})$	período $T(\text{s})$
5(1)	0,09(1)	27,15(10)	2,71(1)	27,11(10)	2,71(1)
10(1)	0,17(1)	26,92(10)	2,69(1)	27,04(10)	2,70(1)
15(1)	0,26(1)	27,08(10)	2,71(1)	27,21(10)	2,72(1)
20(1)	0,35(1)	27,41(10)	2,74(1)	26,94(10)	2,69(1)
25(1)	0,44(1)	27,00(10)	2,70(1)	27,20(10)	2,72(1)
30(1)	0,52(1)	26,93(10)	2,69(1)	27,38(10)	2,74(1)
35(1)	0,61(1)	27,03(10)	2,70(1)	27,19(10)	2,72(1)
40(1)	0,70(1)	27,20(10)	2,72(1)	27,21(10)	2,72(1)
45(1)	0,79(1)	27,43(10)	2,74(1)	27,31(10)	2,73(1)
50(1)	0,87(1)	27,36(10)	2,74(1)	30,08(10)	3,01(1)



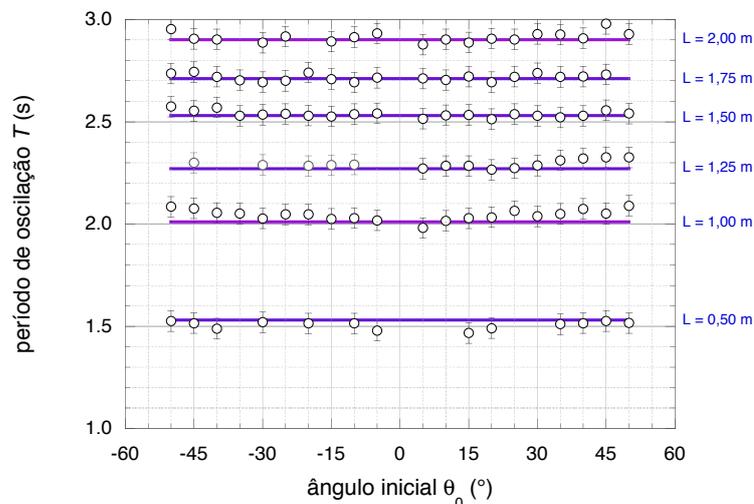
**Figura 8.** – Período de oscilação  $T$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para um pêndulo simples de comprimento  $L = 1,00\text{ m}, 1,25\text{ m}, 1,50\text{ m}, 1,75\text{ m}$  e  $2,00\text{ m}$ . Observamos que, para pequenos ângulos, o período é constante e igual a  $T_0 = 2,04(1)\text{ s}, 2,27(2)\text{ s}, 2,53(2)\text{ s}, 2,71(3)\text{ s}$  e  $2,90(3)\text{ s}$ , respectivamente; para ângulos iniciais  $\theta_0$  maiores que  $20^\circ$  o período varia.

Da figura 8, observamos que o período de oscilação permaneceu constante para ângulos iniciais mas dentro de um intervalo menor do que os anteriores. Também percebemos que o período é constante para ângulos inferiores a  $20^\circ$  e o valor dessa constante,  $T_0$ , aumenta com o aumento do comprimento  $L$  do fio. As medidas também revelam uma dependência do período  $T$  com o comprimento  $L$  do fio e com o ângulo inicial de oscilação,  $\theta_0$ .

Por último, realizamos uma vez mais o experimento com um fio de comprimento  $L = 0,50(1)\text{ m}$  e os dados obtidos estão reunidos na tabela 6 e representados na figura 9.

**Tabela 6.** – Período de oscilação  $T$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para um pêndulo simples de comprimento  $L = 0,50(1)\text{ m}$ .

		esquerda		direita	
ângulo inicial		intervalo de tempo	período	intervalo de tempo	período
$\theta_0(^\circ)$	$\theta_0(\text{rad})$	$\Delta t(\text{s})$	$T(\text{s})$	$\Delta t(\text{s})$	$T(\text{s})$
5(1)	0,09(1)	14,79(10)	1,48(1)	11,55(10)	1,15(1)
10(1)	0,17(1)	15,14(10)	1,51(1)	13,31(10)	1,33(1)
15(1)	0,26(1)	15,96(10)	1,60(1)	14,67(10)	1,47(1)
20(1)	0,35(1)	15,14(10)	1,51(1)	14,91(10)	1,49(1)
25(1)	0,44(1)	15,95(10)	1,60(1)	15,98(10)	1,60(1)
30(1)	0,52(1)	15,20(10)	1,52(1)	15,97(10)	1,60(1)
35(1)	0,61(1)	15,95(10)	1,60(1)	15,10(10)	1,51(1)
40(1)	0,70(1)	14,89(10)	1,49(1)	15,15(10)	1,51(1)
45(1)	0,79(1)	15,15(10)	1,51(1)	15,26(10)	1,53(1)
50(1)	0,87(1)	15,26(10)	1,53(1)	15,16(10)	1,52(1)



**Figura 9.** – Período de oscilação  $T$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para um pêndulo simples de comprimento  $L = 0,50\text{ m}, 1,00\text{ m}, 1,25\text{ m}, 1,50\text{ m}, 1,75\text{ m}$  e  $2,00\text{ m}$ . Observamos que para pequenos ângulos, o período é constante e igual a  $T_0 = 1,53(2)\text{ s}, 2,04(1)\text{ s}, 2,27(2)\text{ s}, 2,53(2)\text{ s}, 2,71(3)\text{ s}$  e  $2,90(3)\text{ s}$ , respectivamente; para ângulos iniciais  $\theta_0$  maiores que  $20^\circ$  o período varia.

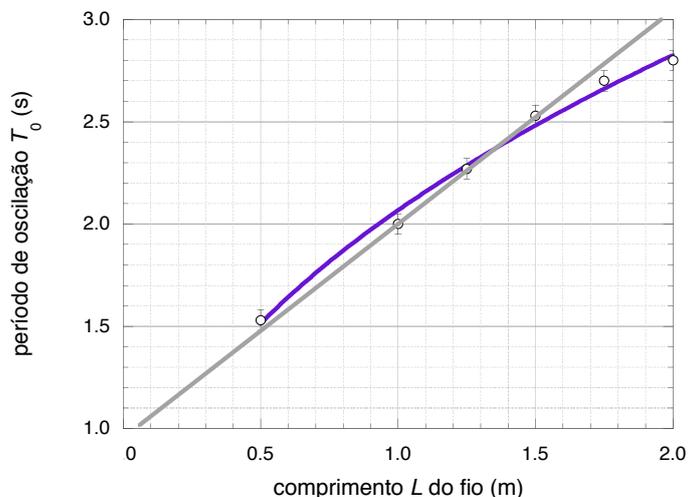
Observamos, uma vez mais, a partir da figura 9, que o período de oscilação permaneceu constante para ângulos iniciais mas dentro de um intervalo menor do que os anteriores. Da figura 9 também percebemos que, de fato, o período de oscilação  $T$  é constante somente para ângulos inferiores a  $20^\circ$  e o valor dessa constante,  $T_0$ , aumenta a medida em que aumentamos o comprimento  $L$  do fio. As medidas também revelam uma dependência do período de oscilação  $T$  não somente com o comprimento  $L$  do fio, mas também com o ângulo inicial de oscilação,  $\theta_0$ .

Podemos então estudar a dependência do período com o comprimento do fio, para ângulos menores do que  $20^\circ$ . Os dados obtidos nesta nova atividade estão reunidos na tabela 7 e representados na figura 10.

**Tabela 7.** – Período  $T_0$  vs. comprimento do pêndulo  $L$  para um pêndulo simples.

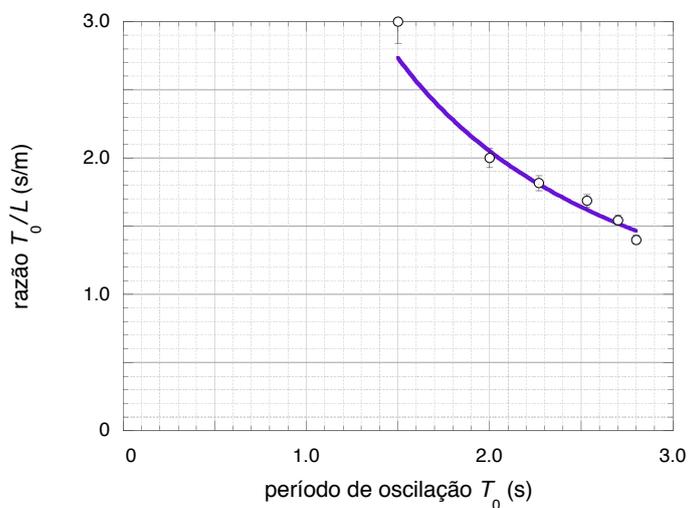
$L(\text{m})$	$T_0(\text{s})$	$T_0/L(\text{s m}^{-1})$	$T_0^2/L(\text{s}^2/\text{m})$
0,50(1)	1,53(2)	3,00(2)	4,5(4)
1,00(1)	2,04(2)	2,00(7)	4,0(2)
1,25(1)	2,27(3)	1,82(7)	4,1(2)
1,50(1)	2,53(2)	1,69(4)	4,3(2)
1,75(1)	2,71(3)	1,54(5)	4,2(2)
2,00(1)	2,90(3)	1,40(5)	3,9(2)

A figura 10, nos revela que a constante  $T_0$ , em média, aumenta conforme aumentamos



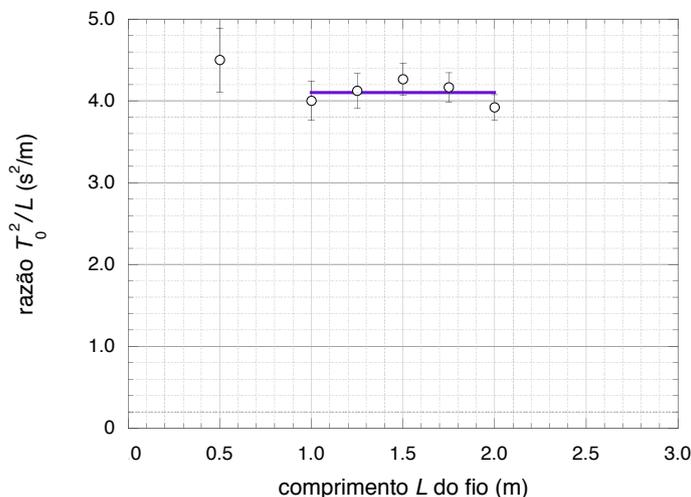
**Figura 10.** – Período de oscilação  $T_0$  vs. comprimento do pêndulo  $L$  para um pêndulo simples. Observamos que uma relação linear entre estes parâmetros não é aceitável: para comprimento  $L = 0$  temos um período diferente de zero!

o comprimento  $L$  do fio. Aparentemente, as medidas variam linearmente. Entretanto este é um resultado não aceitável porque, para a abscissa nula a ordenada não é nula. Mais ainda, ao aumentarmos o comprimento do fio, o valor da constante não aumenta na mesma proporção. Por esse motivo, analisamos o comportamento da razão entre o valor da constante  $T_0$  e o comprimento do fio,  $T_0/L$ , vs. o período de oscilação  $T_0$ . Este comportamento está ilustrado na figura 11.



**Figura 11.** – Razão entre o período de oscilação e o comprimento do fio  $T_0/L$  vs. períodos de oscilação  $T_0$  para um pêndulo simples deslocado da posição de equilíbrio por pequenos ângulos  $\theta_0$ .

Da figura 11 observamos que a razão entre o período de oscilação e o comprimento do fio,  $T_0/L$ , diminui conforme o período de oscilação  $T_0$  aumenta. Mais ainda, uma relação linear entre esses parâmetros também não é aceitável, pois teríamos uma razão diferente de zero para período nulo. Podemos notar, a partir do gráfico da figura, que ao traçarmos uma curva suave sobre as medidas, obtemos uma figura que sugere uma hipérbole: a área sob a curva para pares de valores da razão  $T_0/L$  e do período  $T_0$  correspondente definem áreas iguais. Podemos testar esta hipótese construindo o gráfico da razão entre o quadrado do período e o comprimento do fio,  $T_0^2/L$ , vs. o comprimento do fio, como representado na figura 12.



**Figura 12.** – Razão entre o quadrado dos períodos de oscilação e o comprimento do fio  $T_0^2/L$  vs. comprimento  $L$  do fio, para um pêndulo simples deslocado da posição de equilíbrio por pequenos ângulos  $\theta_0$ . Observamos que esta razão é essencialmente uma constante igual a  $4,1(2) s^2/m$  para a região de comprimentos do fio considerada.

Da figura 12 observamos que o quadrado do período e o comprimento do fio,  $T_0^2/L$ , vs. o comprimento do fio pode ser representado por uma reta de coeficiente angular nulo e coeficiente linear  $a$  diferente de zero. Portanto, podemos concluir que, para o intervalo de medidas considerado, temos

$$\frac{T_0^2}{L} \approx a \quad (3.1)$$

e que

$$a \approx 4,1(2) s^2/m, \quad (3.2)$$

uma constante com dimensão do inverso de uma aceleração. Desse modo, podemos comparar o valor de  $a$  com uma outra constante bastante famosa e já familiar ao estudante em estudos realizados anteriormente: o inverso da aceleração gravitacional  $g = 9,78 m/s^2$ :

$$\frac{a}{1/g} \approx 40(1). \quad (3.3)$$

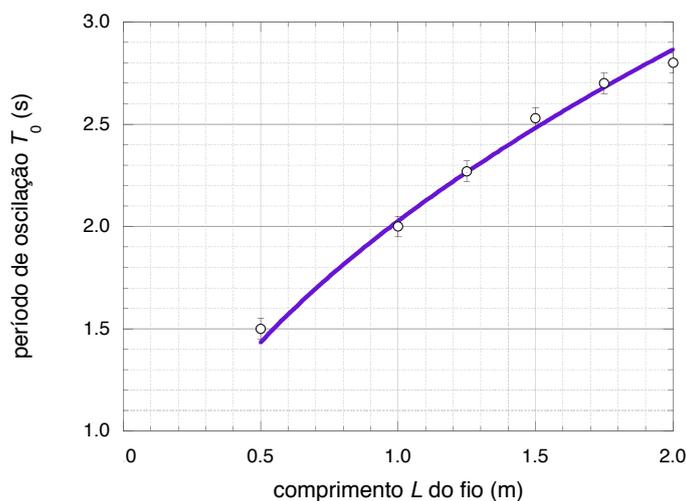
Substituindo (3.3) em (3.1), obtemos

$$T_0 \approx \sqrt{40(1)} \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3.4)$$

ou, ainda, que

$$T_0 \approx 6,33(2) \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (3.5)$$

Concluimos, assim, que o período de oscilação  $T_0$  varia com a raiz quadrada do comprimento  $L$  do fio do pêndulo. Este comportamento está ilustrado na figura 13.



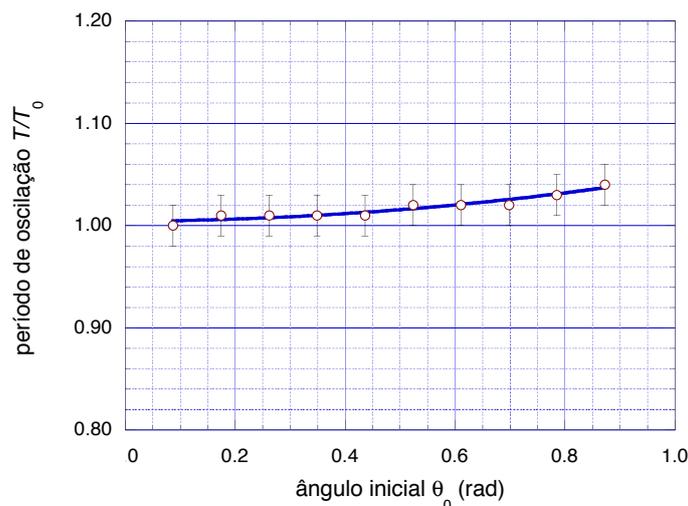
**Figura 13.** – Períodos de oscilação  $T_0$ (s) vs. comprimento  $L$ (m) de um pêndulo simples. A curva representa a função raiz quadrada indicada pela expressão (3.5).

Observamos também, da figura 13, que o período da oscilação,  $T$ , varia com o ângulo inicial de deslocamento da posição de equilíbrio,  $\theta_0$ . Podemos investigar, a partir da figura 13, se as curvas apresentadas nesta figura não diferem uma das outras que por um fator de escala. Na tabela 8 apresentamos as medidas realizadas do período de oscilação normalizado  $T/T_0$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para um pêndulo simples de comprimento  $L = 0,50(1)$  m,  $1,00(1)$  m,  $1,25(1)$  m,  $1,50(1)$  m,  $1,75(1)$  m e  $2,00(1)$  m. O comportamento das medidas normalizadas está representado na figura 14.

Observamos da figura 14 um ligeiro aumento do período com o aumento do ângulo inicial de deslocamento. Esta dependência não pode ser linear, porque a curva deve ser simétrica para deslocamentos para a esquerda e para a direita da posição de equilíbrio do pêndulo. Não é difícil perceber, a partir das observações representadas na figura 14,

**Tabela 8.** – Período de oscilação normalizado  $T/T_0$  vs. ângulo inicial da oscilação  $\theta_0$  para um pêndulo simples de comprimento  $L = 0,50(1) \text{ m}$ ,  $1,00(1) \text{ m}$ ,  $1,25(1) \text{ m}$ ,  $1,50(1) \text{ m}$ ,  $1,75(1) \text{ m}$  e  $2,00(1) \text{ m}$ .

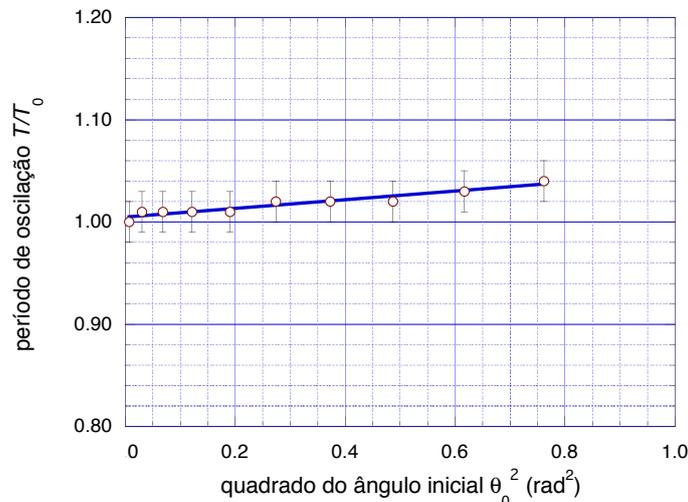
$L$	0,50(1) m	1,00(1) m	1,25(1) m	1,50(1) m	1,75(1) m	2,00(1) m	média
$\theta_0$ (rad)	$T/T_0$	$T/T_0$	$T/T_0$	$T/T_0$	$T/T_0$	$T/T_0$	$T/T_0$
0,087(1)			1,00(2)	0,99(2)	1,00(2)	1,03(2)	1,00(2)
0,175(1)		1,01(2)	1,01(2)	1,00(2)	1,00(2)	1,04(2)	1,01(2)
0,262(1)	0,98(2)	1,01(2)	1,01(2)	1,00(2)	1,01(2)	1,03(2)	1,01(2)
0,349(1)	0,99(2)	1,02(2)	1,00(2)	0,99(2)	1,00(2)	1,04(2)	1,01(2)
0,436(1)		1,03(2)	1,00(2)	1,00(2)	1,01(2)	1,04(2)	1,01(2)
0,524(1)		1,02(2)	1,01(2)	1,00(2)	1,01(2)	1,05(2)	1,02(2)
0,611(1)	1,01(2)	1,02(2)	1,02(2)	1,00(2)	1,01(2)	1,05(2)	1,02(2)
0,698(1)	1,01(2)	1,04(2)	1,02(2)	1,00(2)	1,01(2)	1,04(2)	1,02(2)
0,785(1)	1,02(2)	1,03(2)	1,02(2)	1,01(2)	1,01(2)	1,06(2)	1,03(2)
0,873(1)	1,01(2)	1,04(2)	1,02(2)	1,00(2)		1,05(2)	1,04(2)



**Figura 14.** – Razão entre o período de oscilação para qualquer ângulo inicial e o período de oscilação para ângulos pequenos,  $T/T_0$ , vs. ângulo inicial  $\theta_0$  de um pêndulo simples. Observamos da figura o ligeiro aumento do período com o aumento do ângulo inicial de deslocamento.

que o valor do período para ângulos pequenos deve ser um mínimo da função procurada. Desse modo, devemos procurar um polinômio de grau superior. Para determinarmos uma possível relação para a razão entre o período de oscilação para qualquer ângulo inicial e o período de oscilação para ângulos pequenos,  $T/T_0$ , com o ângulo inicial  $\theta_0(^{\circ})$ , vamos fazer um novo gráfico, representando agora o produto destes dois parâmetros em função do quadrado do ângulo inicial, como ilustrado na figura 15.

O gráfico da figura 15 nos revela uma relação linear entre a razão do período de



**Figura 15.** – Razão entre o período de oscilação para qualquer ângulo inicial e o período de oscilação para ângulos pequenos,  $T/T_0$ , vs. quadrado do ângulo inicial  $\theta_0^2$  de um pêndulo simples. Observamos da figura o aumento linear do período com o quadrado do ângulo inicial de deslocamento.

oscilação para qualquer ângulo inicial e o período de oscilação para ângulos pequenos,  $T/T_0$ , e o quadrado do ângulo inicial  $\theta_0$  de desvio do equilíbrio. Desse modo, podemos concluir que

$$\frac{T}{T_0} = \alpha + \beta \theta_0^2, \quad (3.6)$$

onde o coeficiente linear  $\alpha$  é dado por

$$\alpha \approx 0,98(2) \approx 1,0 \quad (3.7)$$

e o coeficiente angular  $\beta$  corresponde a

$$\beta \approx \frac{0,060}{1,000} \approx \frac{1}{16}, \quad (3.8)$$

A incerteza  $\delta\beta$  do coeficiente  $b$  é

$$\delta\beta \approx \frac{0,010}{1,000} = \frac{1}{100}. \quad (3.9)$$

Finalmente, substituindo (3.5), (3.7) e (3.8) em (3.6), podemos concluir que a relação entre o período de oscilação  $T$ , o comprimento  $L$  do fio e o ângulo inicial  $\theta_0$  deve ser satisfeita pela expressão:

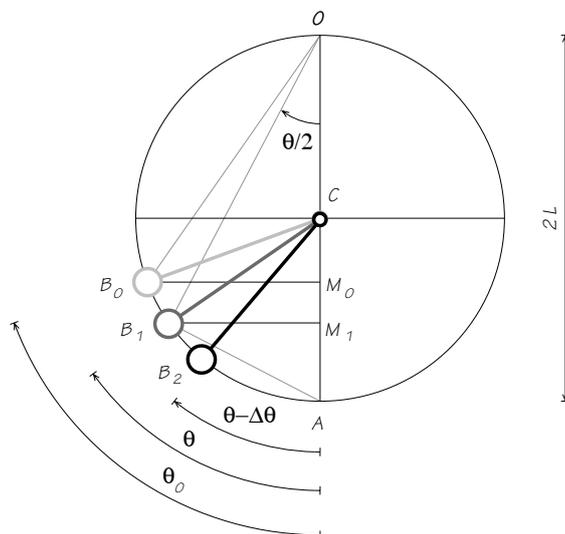
$$T \approx 6,40(2) \sqrt{\frac{L}{g}} \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right). \quad (3.10)$$

Concluimos, assim, que o período de oscilação  $T$  varia com a raiz quadrada do comprimento  $L$  do fio do pêndulo e varia com o quadrado do ângulo inicial de partida do

seu movimento de oscilação. A representação dos ângulos em radianos, na figura 15, permite que o coeficiente angular  $\beta$  possa ser comparado com o valor indicado na literatura (BAKER; BLACKBURN, 2005) e discutido na seção 3.2.

### 3.2 Modelo matemático do pêndulo simples

Apresentamos, nessa seção, o modelo idealizado do pêndulo simples: uma barra rígida de comprimento  $L$  e massa  $m_L$  que está conectada à um eixo de rotação por uma das suas extremidades e, em sua extremidade livre, ela sustenta um corpo de massa  $m$ , muito maior do que sua massa. Consideramos também que o corpo possui dimensões bem inferiores ao comprimento da barra, como ilustrado na figura (16), e se move sem atrito ao longo de um arco de circunferência de raio  $L$  contido no plano vertical.



**Figura 16.** – Arco de circunferência que descreve a trajetória do movimento do pêndulo simples de comprimento  $L$ . O segmento de reta  $B_1C = L$  define o ângulo  $\theta$  com o raio  $CA$ . O segmento de reta  $B_1O$  define o ângulo  $\theta/2$  com o diâmetro  $AO$ .

O pêndulo é deslocado da sua posição de equilíbrio de um ângulo  $\theta_0$  e, em seguida, é deixado somente sob a ação da força gravitacional a partir dessa posição com velocidade inicial nula. O corpo, ao se mover ao longo do arco  $B_0B_1$ , cai de uma altura

$$M_0M_1 = L (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (3.11)$$

e ganha velocidade  $v$ . O corpo percorre então a distância  $L = v\Delta t$  correspondente ao comprimento do arco  $B_1B_2 = L\Delta\theta$ . Desse modo, sua velocidade na posição  $\theta$  é igual a  $v = L\Delta\theta/\Delta t$ , e sua energia cinética na mesma posição é igual a

$$\frac{m}{2}v^2 = \frac{mL^2}{2} \left( \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right)^2. \quad (3.12)$$

Esta energia cinética corresponde ao trabalho realizado pela força gravitacional para levá-lo da posição inicial até a posição  $\theta$ . Portanto, podemos empregar a seguinte igualdade:

$$\frac{mL^2}{2} \left( \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right)^2 = mgL (\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (3.13)$$

Da figura (16) observamos que

$$\begin{aligned} L (\cos \theta - \cos \theta_0) &= 2L \left[ \text{sen}^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) - \text{sen}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \\ &= 2L \left[ k^2 - \text{sen}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde fizemos  $k^2 = \text{sen}^2(\theta_0/2)$ . Substituímos (3.14) em (3.13) e solucionamos a expressão encontrada para  $\Delta t$ . O resultado obtido corresponde ao intervalo de tempo  $\Delta t$  necessário para percorrer o arco de circunferência  $L\Delta\theta$ , a partir do ângulo  $\theta$ :

$$\Delta t = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \left[ \frac{1}{k^2 - \text{sen}^2(\theta/2)} \right]^{1/2} \Delta\theta. \quad (3.15)$$

O sinal negativo é escolhido para indicar que o ângulo associado à posição do corpo diminui quando o corpo evolui em direção à sua posição de equilíbrio, dada pelo ângulo  $\theta = 0$ , a partir da sua posição inicial  $\theta_0$ .

Para determinar a duração do intervalo de tempo necessário para percorrer essa distância, dividimos esse percurso em  $N$  intervalos tais que para cada instante de tempo  $t_n$  corresponde uma posição angular  $\theta_n$  e um deslocamento angular  $\Delta\theta_n$  realizado no intervalo de tempo  $\Delta t_n$ :

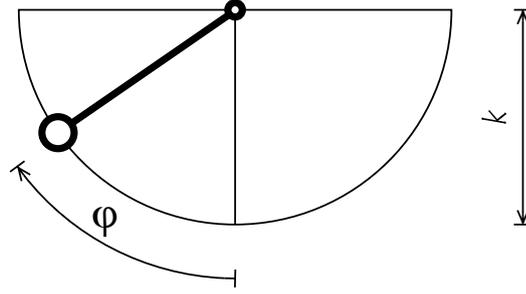
$$\Delta t_n = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \left[ \frac{1}{k^2 - \text{sen}^2(\theta_n/2)} \right]^{1/2} \Delta\theta_n, \quad (3.16)$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ . Associamos essa duração a um quarto do período de oscilação  $T$  do corpo em torno de sua posição de equilíbrio e, assim, podemos escrever que o período de oscilação  $T$  corresponde a

$$\begin{aligned} T &= 4 \sum_{n=1}^N \Delta t_n \\ &= -4 \sqrt{\frac{L}{g}} \sum_{n=1}^N \left[ \frac{1}{k^2 - \text{sen}^2(\theta_n/2)} \right]^{1/2} \frac{\Delta\theta_n}{2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Observamos de (3.17) que o período de oscilação do pêndulo depende da raiz quadrada da razão entre o comprimento  $L$  do pêndulo e da aceleração gravitacional  $g$ . Observamos também, a partir da mesma equação, que o período  $T$  depende do valor de  $k$  e, por consequência, depende do ângulo de partida  $\theta_0$ .

Para determinar o valor da somatória, consideramos uma semicircunferência auxiliar, de raio  $k$ , tal que o movimento do pêndulo ao longo do arco de circunferência  $B_0A$



**Figura 17.** – Semicircunferência auxiliar para a descrição da oscilação do pêndulo simples. O ângulo  $\varphi$  está relacionado com o ângulo  $\theta$  pela expressão (3.18).

corresponde ao movimento sobre essa semicircunferência auxiliar entre  $-\pi/2$  e 0, como indicado na figura 17.

Nesse caso, temos que

$$\text{sen} \left( \frac{\theta_n}{2} \right) = k \text{sen} \varphi_n \quad (3.18)$$

e

$$\cos^2 \left( \frac{\theta_n}{2} \right) = 1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi_n. \quad (3.19)$$

Para pequenos incrementos  $\Delta\theta_n$ , podemos escrever que

$$\begin{aligned} \text{sen} \left( \frac{\theta_{n+1}}{2} \right) &= \text{sen} \left( \frac{\theta_n - \Delta\theta_n}{2} \right) \\ &= \cos \left( \frac{\Delta\theta_n}{2} \right) \text{sen} \left( \frac{\theta_n}{2} \right) - \text{sen} \left( \frac{\Delta\theta_n}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta_n}{2} \right) \\ &\approx \text{sen} \left( \frac{\theta_n}{2} \right) - \frac{\Delta\theta_n}{2} \cos \left( \frac{\theta_n}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

e

$$\begin{aligned} \text{sen} \varphi_{n+1} &= \text{sen} (\varphi_n - \Delta\varphi_n) \\ &= \cos \Delta\varphi_n \text{sen} \varphi_n - \text{sen} \Delta\varphi_n \cos \varphi_n \\ &\approx \text{sen} \varphi_n - \Delta\varphi_n \cos \varphi_n \end{aligned} \quad (3.21)$$

Multiplicamos (3.21) por  $k$  e subtraímos (3.20). Usamos as identidades (3.18) e (3.19) na expressão resultante e a solucionamos para  $\Delta\theta_n$ . Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\theta_n}{2} &= \frac{k \cos \varphi_n}{\cos(\theta_n/2)} \Delta\varphi_n \\ &= \frac{\sqrt{k^2 - \text{sen}^2(\theta_n/2)}}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi_n}} \Delta\varphi_n. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A expressão (3.22) permite reescrever a somatória em (3.17) na forma

$$\sum_{n=1}^N \left[ \frac{1}{k^2 - \text{sen}^2(\theta_n/2)} \right]^{1/2} \frac{\Delta\theta_n}{2} = \sum_{n=1}^N \left[ \frac{1}{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi_n} \right]^{1/2} \Delta\varphi_n \quad (3.23)$$

A somatória

$$\sum_{n=1}^N \left[ \frac{1}{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_n} \right]^{1/2} \Delta\varphi_n \quad (3.24)$$

é conhecida como a integral elíptica de primeira espécie e não pode ser reduzida a funções elementares. Entretanto, podemos realizar algumas estimativas do seu valor. Observamos que o valor de  $k$  é sempre menor que a unidade e, nesse caso, podemos considerar

$$x = k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_n < 1 \quad (3.25)$$

e usar as seguintes aproximações

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x \quad (3.26)$$

e

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{1-x} \right)^{1/2} &\approx (1+x)^{1/2} \\ &\approx 1 + \frac{x}{2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Desse modo, (3.23) reduz-se a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left[ \frac{1}{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_n} \right]^{1/2} \Delta\varphi_n &\approx \sum_{n=1}^N \left[ 1 + \frac{k^2}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi_n \right] \Delta\varphi_n \\ &\approx \sum_{n=1}^N \Delta\varphi_n + \frac{k^2}{2} \sum_{n=1}^N \operatorname{sen}^2 \varphi_n \Delta\varphi_n \end{aligned} \quad (3.28)$$

A primeira parcela do lado direito de (3.28) corresponde à metade da semicircunferência auxiliar:

$$\sum_{n=1}^N \Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad (3.29)$$

e a segunda parcela do lado direito de (3.28) corresponde à média ponderada dos sucessivos deslocamentos  $\Delta\varphi_n$  sobre esse mesmo arco:

$$\sum_{n=1}^N \operatorname{sen}^2 \varphi_n \Delta\varphi_n \quad (3.30)$$

Para resolver esta soma, observamos que

$$\sum_{n=1}^N \operatorname{sen}^2 \varphi_n \Delta\varphi_n = \sum_{n=1}^N \cos^2 \varphi_n \Delta\varphi_n \quad (3.31)$$

e, portanto, podemos escrever que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \operatorname{sen}^2 \varphi_n \Delta\varphi_n &= \sum_{n=1}^N (1 - \cos^2 \varphi_n) \Delta\varphi_n \\ &= \sum_{n=1}^N \Delta\varphi_n - \sum_{n=1}^N \cos^2 \varphi_n \Delta\varphi_n \\ &= -\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^N \operatorname{sen}^2 \varphi_n \Delta\varphi_n. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Desse modo,

$$\sum_{n=1}^N \sin^2 \varphi_n \Delta \varphi_n = -\frac{\pi}{4}. \quad (3.33)$$

Após a substituição de (3.29) e (3.33) em (3.28), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left[ \frac{1}{1 - k^2 \sin^2 (\theta_n/2)} \right]^{1/2} \Delta \varphi_n &\approx -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} k^2 \\ &\approx -\frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{4} \right), \end{aligned} \quad (3.34)$$

em uma primeira aproximação. Concluímos desses resultados que o período  $T$  de oscilação, indicado em e (3.17), corresponde a

$$\begin{aligned} T &\approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left( 1 + \frac{k^2}{4} \right) \\ &\approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Observamos ainda que a função  $\sin x$  corresponde à serie

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \quad (3.36)$$

válida para qualquer valor de  $z$ , seja ele pequeno ou grande. Portanto, para amplitudes iniciais pequenas, podemos escrever que

$$\sin \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \approx \frac{\theta_0}{2}. \quad (3.37)$$

Desse modo, para esse caso, o período de oscilação  $T$  se reduz à

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right), \quad (3.38)$$

uma função parabólica em relação à amplitude inicial, com um valor mínimo em  $2\pi \sqrt{L/g}$ .

## 4 Aplicação das atividades com os alunos

A aplicação do trabalho foi realizada no Colégio Estadual Raymundo Corrêa em turmas do Núcleo de Educação de Jovens e Adultos (NEJA) do módulo IV do ensino médio. Foram utilizados seis tempos de aula, de 40 minutos cada, para a aplicação do material didático discutido nesta dissertação. Os alunos desta unidade não haviam visto nenhum conteúdo prévio sobre os conceitos envolvidos na discussão do movimento do pêndulo simples. Por esse motivo, utilizamos a *Estratégia POE* de Previsão-Observação-Explicação de um problema como um método para a construção das ideias principais relativas à caracterização desse movimento. Obter a equação que descreve o período de oscilação do pêndulo foi a questão principal proposta para os alunos. A solução do problema, entretanto, deve ser construída a partir da análise de um conjunto de medidas que relacionam os períodos  $T$  de oscilação para diferentes ângulos de partida  $\theta_0$  e diferentes comprimentos  $L$  do pêndulo. Para uma melhor realização das atividades com os alunos, distribuimos as tarefas propostas em três aulas, descritas a seguir.

### 4.1 Aula 1: Introdução ao experimento e sua montagem

Na primeira aula, introduzimos uma brevíssima história sobre a medida do tempo, a evolução do relógio de areia (ampulheta), o relógio de água (clepsidra), o relógio de Sol até a criação do pêndulo simples, utilizados pelos povos antigos, até os relógios utilizados atualmente, como os relógios digitais e relógios nucleares. Essa abordagem foi empregada para contextualizarmos o aprendizado do conteúdo proposto. De fato, sabemos que os relógios de pêndulo ainda existem. Entretanto, apesar de não serem mais populares, ainda os encontramos em museus ou em coleções particulares. Ao apresentarmos o contexto histórico, político, social e econômico em que se encontrava a nossa sociedade nos séculos 16 e 17, procuramos chamar a atenção dos alunos para a importância da medida do tempo na evolução da nossa história.

Em seguida a essa introdução histórica, apresentamos o experimento com o pêndulo simples. Chamamos a atenção dos alunos para o seu movimento oscilatório, definimos sua construção e apresentamos os acessórios necessários para a sua montagem. Após essa etapa, dividimos a turma em seis grupos, cada grupo associado a um pêndulo de comprimento particular, pré-estabelecidos pelo professor. Cada aluno de cada grupo deve observar a oscilação do pêndulo para diferentes ângulos de partida.

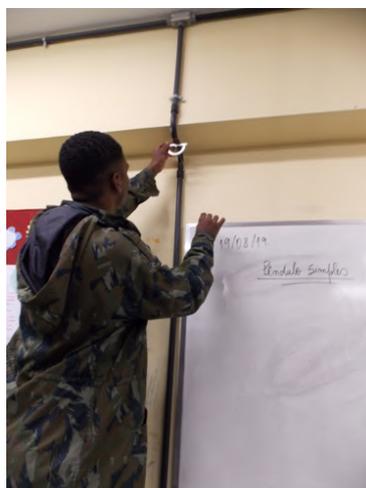
Conforme a *Estratégia POE*, sugerimos que os alunos reflitam sobre como montar o aparato, quais são os instrumentos adequados para medir o período de oscilação do pêndulo e qual o valor esperado desses intervalos de tempo associados aos diferentes ângulos de partida. Cada grupo, já sabendo o comprimento do fio e os materiais necessários,



**Figura 18.** – Aplicação do produto sobre o pêndulo simples para os alunos do NEJA do módulo IV no Colégio Estadual Raymundo Corrêa. Aula de apresentação sobre o conteúdo, o contexto histórico, político e econômico da época para a descoberta do relógio pendular e montagem dos equipamentos para iniciar a coleta de dados.

se organiza para realizar a tarefa sugerida. Cada aluno, de cada grupo, prepara o seu pêndulo e coleta as suas medidas de intervalo de tempo para um certo ângulo de partida, definido previamente, com os instrumentos adequados.

Com o auxílio da trena, o aluno mede o comprimento do fio, amarra uma de suas extremidades em um suporte sobre a mesa e, na outra extremidade, ele fixa a massa que foi posta para oscilar. O cronômetro foi utilizado para marcar o tempo de cinco oscilações e a quantidade de oscilações foi empregada para reduzir o erro na determinação do período. Utilizamos o intervalo de tempo para cinco oscilações nas medidas coletadas pelos alunos por conta da curta duração das aulas do curso noturno do NEJA. Desse modo, os alunos determinam o período para cada oscilação dividindo o intervalo de tempo encontrado por cinco e anotam os valores na tabela fornecida pelo professor. Mostramos na figura 19 a montagem do experimento por um dos alunos e, na figura 20, exibimos uma imagem dessa tabela.



**Figura 19.** – Aplicação do produto sobre o pêndulo simples para os alunos do NEJA do módulo IV no Colégio Estadual Raymundo Corrêa. Iniciando a montagem dos aparatos do experimento do pêndulo simples, execução da experiência e coleta de dados.

A figura 19 mostra também um dos alunos aprendendo a medir os ângulos de partida com o auxílio de um transferidor. Neste mesmo momento, outro aluno deste mesmo grupo, aprende como utilizar o cronômetro, e todos os alunos aprendem a fazer a contagem das oscilações, a partir do ponto de equilíbrio, de um período completo.

Colégio Estadual Raymundo Corrêa

L = 1,00 m					
m = 31,52 g					
n	$\theta(^{\circ})$	Direita		Esquerda	
		$\Delta t(s)$	T(s)	$\Delta t(s)$	T(s)
1	5	11.62	2.324	12.03	2.406
2	10	11.79	2.358	12.69	2.538
3	15	11.84	2.368	11.94	2.388
4	20	11.93	2.386	11.75	2.350
5	25	11.62	2.324	11.82	2.370
6	30	11.94	2.388	11.90	2.380
7	35	11.85	2.370	11.94	2.388
8	40	11.78	2.356	11.88	2.376
9	45	11.97	2.394	11.96	2.392
10	50	11.96	2.392	12.06	2.412

Names:

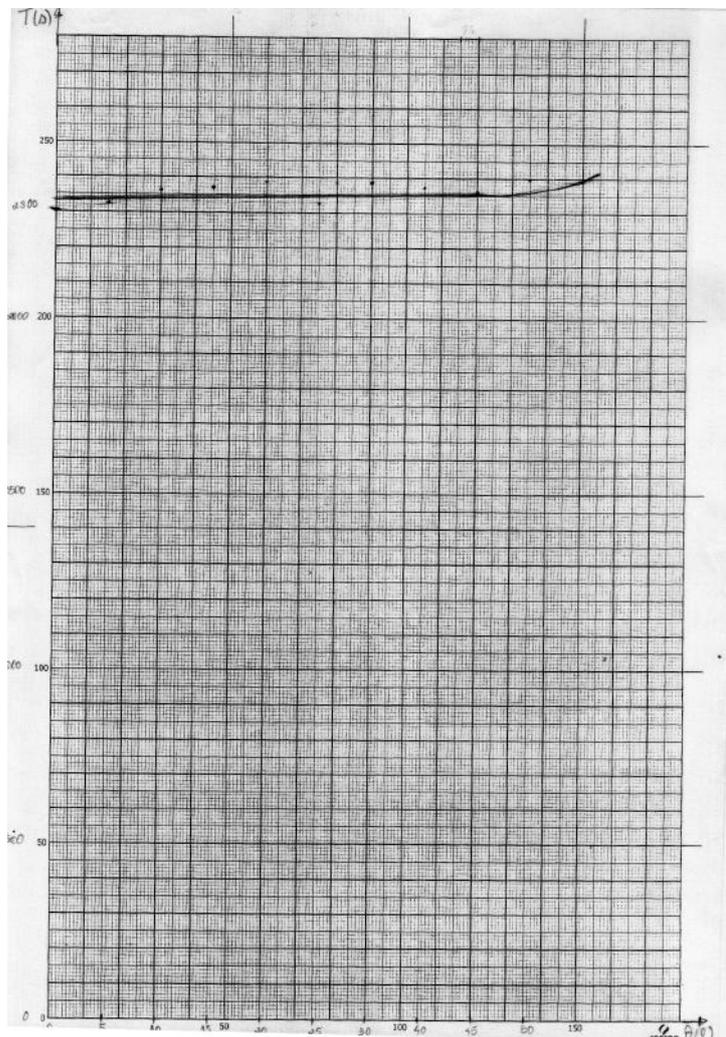
1. Cleide Pereira dos Santos
2. Antonia Elizabeth Soares
3. Mayara Fustoni Romarino de Oliveira
4. Simone R de Lima
5. Leticia Gomes Baptista dos Santos
6. Apraima Sales de Freitas
7. Igor de Andrade Silva
- 8.

**Figura 20.** – Aplicação do produto sobre o pêndulo simples para os alunos do NEJA do módulo IV no Colégio Estadual Raymundo Corrêa. Modelo de tabela para coletar os dados preenchida pelos alunos, confeccionada pelo professor.

A figura 20 mostra uma tabela já preenchida pelos alunos. Os grupos usam esta tabela durante a aula para anotar os dados coletados na execução do experimento. É interessante notar que, ao coletar os primeiros dados para os intervalos de tempo de oscilação, os alunos “explicam” que “não precisam mais continuar a realizar a experiência porque já sabiam quais seriam os próximos valores para novos deslocamentos angulares”. Eles antecipam que os valores da duração das oscilações vai se repetir. Entretanto, ao se depararem com a mudança repentina quando os ângulos já não são tão pequenos, os alunos se desorientam. Há a necessidade, neste momento, da intervenção do professor de maneira a assegurá-los que tal comportamento faz parte do experimento e que esse fenômeno será estudado mais à frente.

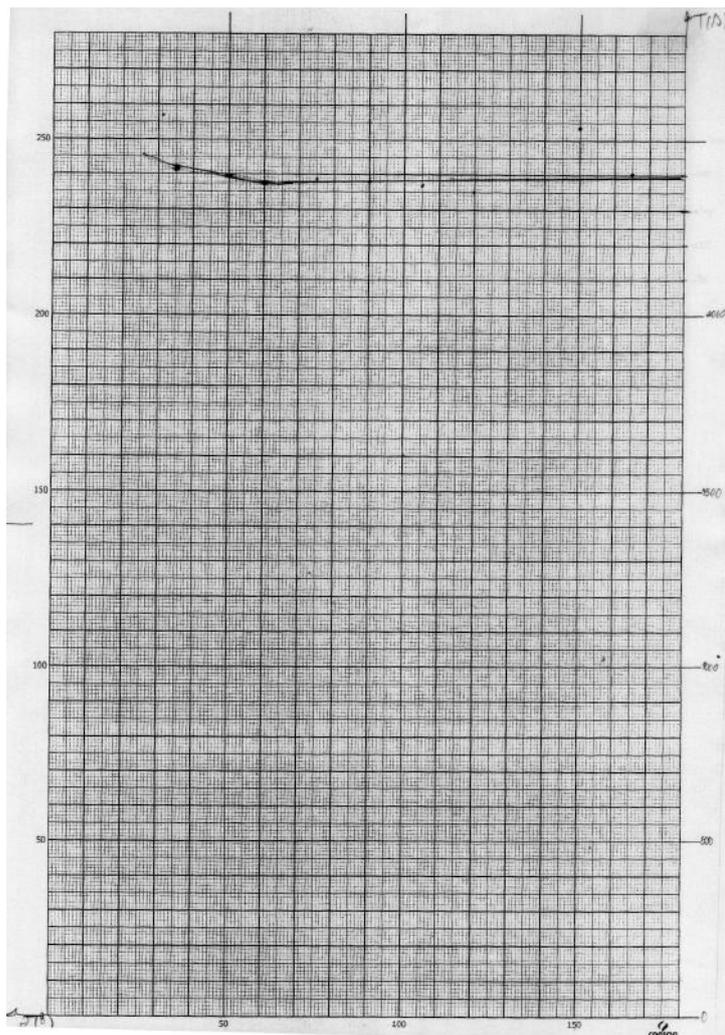
## 4.2 Aula 2: Coleta de dados

Para alcançar o objetivo proposto na Aula 1, determinar uma expressão que relacione o período  $P$  do pêndulo utilizando os parâmetros relevantes do problema – o comprimento  $L$  do fio e o ângulo de partida  $\theta_0$  –, usamos a Aula 2 para que os alunos construam, em papel milimetrado, os gráficos representativos dos dados coletados na primeira aula. A figura 21 apresenta um desses gráficos, com o período medido para oscilações iniciadas pelo lado direito da posição de equilíbrio.



**Figura 21.** – Aplicação do produto sobre o pêndulo simples para os alunos do NEJA do módulo IV no Colégio Estadual Raymundo Corrêa. A figura representa o gráfico  $T$  vs.  $\theta_0$ , feito pelos alunos sobre papel milimetrado. Também observamos na figura o período medido para oscilações iniciadas pelo lado direito da posição de equilíbrio.

A figura 22 mostra o gráfico do período de oscilação do pêndulo,  $T$ , medido em função do ângulo inicial de deslocamento,  $\theta_0$ , feito sobre papel milimetrado, pelos alunos de cada grupo, na primeira aula. Neste gráfico, podemos observar que se trata de períodos medidos a partir de oscilações iniciadas pelo lado esquerdo da posição de equilíbrio. Também observamos que a ordenada sofre mudança ao variarmos o comprimento do fio.



**Figura 22.** – Aplicação do produto sobre o pêndulo simples para os alunos do NEJA do módulo IV no Colégio Estadual Raymundo Corrêa. A figura representa o gráfico período de oscilação do pêndulo,  $T$ , medido em função do ângulo inicial de deslocamento,  $\theta_0$ , feito em papel milimetrado. Também observamos na figura o período medido para oscilações iniciadas pelo lado esquerdo da posição de equilíbrio.

A figura 23 mostra os alunos separados em grupos e construindo, em papel milimetrado, os gráficos do período de oscilação do pêndulo,  $T$ , medido em função do ângulo inicial de deslocamento,  $\theta_0$ .



**Figura 23.** – Aplicação do produto sobre o pêndulo simples para os alunos do NEJA do módulo IV no Colégio Estadual Raymundo Corrêa. Montagem pelos grupos dos gráficos  $T$  vs.  $\theta_0$ , dos lados direito e esquerdo..

Devido à curta duração das aulas, é necessário prever o uso de uma planilha eletrônica para agilizar os cálculos e a confecção dos gráficos necessários para a análise dos resultados.

### 4.3 Aula 3: Análise dos resultados

Utilizamos a Aula 3 para fazer a análise dos dados coletados pelos alunos, durante a Aula 1, com o auxílio do computador. Cada grupo digita os dados obtidos anteriormente, em uma planilha eletrônica, e fazem o gráfico do período em função do ângulo de partida no documento Excel preparado previamente pelo professor.

Com os gráficos realizados, passamos à formalização matemática. Esta etapa não é familiar aos alunos do ensino médio e, por esta razão, a formalização foi feita no quadro pelo professor durante a aula. Seguimos as etapas descritas no Capítulo 3, e concluímos, junto com os alunos, que o período de oscilação varia com a raiz quadrada do comprimento do fio e também varia com o quadrado do ângulo de partida.

## 5 Considerações finais

Descrevemos no presente trabalho um material didático para a discussão e caracterização do movimento do pêndulo simples. Este material pode ser inserido no currículo do Ensino Médio como um conteúdo de física com ênfase na atividade investigativa experimental e teórica. Procuramos fazer com que o estudante seja parte integrante do processo de construção do seu conhecimento, e permitir que ele desenvolva a sua potencialidade como um futuro pesquisador ao realizar as atividades propostas nesse trabalho.

Também seguimos, nesta dissertação, as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) em relação ao emprego de parâmetros geométricos e algébricos no exercício de abstrações matemáticas necessárias para a fixação dos conceitos físicos envolvidos na descrição das características do pêndulo simples, de maneira que o aluno, sob a supervisão do professor, possa explorar estas mesmas técnicas em outros problemas físicos.

O conjunto de atividades propostas neste trabalho permitem aos alunos desenvolver suas habilidades e competências em diferentes áreas da sua formação como, para citar alguns exemplos, o entendimento dos conceitos de posição de equilíbrio de um corpo, frequência e período de oscilação, o domínio das técnicas de construção e análise de gráficos.

Parte do Capítulo 3 aqui discutido foi publicado nos *Resumos* do XXIII SNEF (QUIRINO; SOARES, 2019). Esperamos que a abordagem que apresentamos nesta dissertação seja o início do desenvolvimento de outras atividades relacionadas com o mesmo tema. Concluir que o período de oscilação do pêndulo varia com a raiz quadrada do seu comprimento e também depende do quadrado do ângulo de partida da oscilação oferece ao aluno uma oportunidade para se discutir as propriedades geométricas dos modelos físicos e matemáticos e seu domínio de validade. Não deixa de ser surpreendente observar a “coincidência” entre a constante adimensional experimental  $6,33 \approx 2\pi$ , indicada na equação (3.5), e a trajetória do corpo oscilante sobre o arco da semicircunferência auxiliar, discutida no Capítulo 3. Mais surpreendente ainda é perceber que o pêndulo de comprimento  $L = 1,00$  m corresponde ao período de oscilação  $T = 2,04$  s. Portanto, meia oscilação deste pêndulo tem duração igual 1,02 s e difere do segundo de referência por somente 2%, apesar das definições do metro e do segundo não estarem formalmente relacionadas uma com a outra. Esta inesperada relação entre as unidades de comprimento e de tempo é discutida por Agnoli e D’Agostini (2005).

## Referências

- AGNOLI, P.; D'AGOSTINI, G. Why does the meter beat the second. *arXiv preprint physics/0412078v2*, 2005.
- BAKER, G. L.; BLACKBURN, J. A. *The pendulum: a case study in physics*. Oxford: Oxford University Press, 2005.
- BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Brasília: Congresso Nacional, 1996. Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Disponível em: <<http://www.mec.gov.br>>. Acesso em: março de 2019.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais; Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BRASIL. *PCN+Física: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2006.
- GALILEI, G. *Dialogues Concerning Two New Sciences*. New York: Dover Publications, 1954.
- HALL, B. S. The scholastic pendulum. *Ann. Sci.*, v. 35, n. 5, p. 441–442, 1978.
- MATTHEWS, M. R.; GAULD, C. F.; STINNER, A. *The pendulum: Scientific, historical, philosophical and educational perspectives*. New York: Springer Science & Business Media, 2005.
- PLANCK, M. *The universe in the light of modern physics*. London: George Allen & Unwin Ltd., 1931.
- QUIRINO, M. D.; SOARES, V. Uma introdução ao estudo do pêndulo simples. In: *Resumos do XXIII Simpósio Nacional de Ensino de Física*. Salvador: Sociedade Brasileira de Física - Instituto Federal da Bahia, 2019. Disponível em: <<https://sec.sbfisica.org.br/eventos/snef/xxiii/sys/resumos/T0561-1.pdf>>. Acesso em: 15 de dezembro de 2019.
- WHITE, R.; GUNSTONE, R. *Probing understanding*. Beistol: The Falmer Press, 1992.
- WISAN, W. L. The new science of motion: A study of galileo's de motu locali. *Archive for history of exact sciences*, Springer, v. 13, n. 2-3, p. 103–306, 1974.
- YODER, J. G. *Unrolling time: Christiaan Huygens and the mathematization of nature*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.