



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

# **Princípios Físicos e Matemáticos da Teoria da Relatividade Geral**

(Textos de apoio para professores e alunos)

**Edward Cespedes Carageorge**  
**Carlos Augusto Domingues Zarro**

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Edward Cespedes Carageorge, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Rio de Janeiro**

**Março de 2020**

Neste material, vamos apresentar os conteúdos básicos da teoria da relatividade geral (TRG) como os princípios físicos e matemáticos que guiaram Albert Einstein na sua busca pela TRG. Ele servirá tanto para o professor que deseja lecionar o conteúdo quanto para o aluno que quiser se aprofundar no tema.

## 1 Princípios físicos da TRG

### 1.1 Princípio da equivalência

Para entendermos o significado desse princípio, lembremos do experimento de Galileu ao abandonar dois corpos com diferentes massas do alto da torre de Pisa e constatar que eles chegam simultaneamente ao solo. Essa é uma constatação de que a aceleração devido à ação gravitacional, nas vizinhanças da superfície da Terra, é a mesma para todos os corpos, independente de suas massas, formas ou composição. E pode ser ilustrado por um vídeo da BBC disponível no YouTube <https://youtu.be/E43-CfukEgs?t=169> em que uma pena e uma bola de boliche são abandonados de uma mesma altura em uma câmara de vácuo e elas caem juntas no solo [13]. Esta mesma ideia é o que acontece com os astronautas em órbita, uma nave orbitando a Terra está em queda livre ao redor do planeta, juntamente com todos os corpos dentro da nave, por isso a tripulação parece estar flutuando, mas cada astronauta está em repouso em relação aos outros.

A massa inercial  $m_i$  de um corpo é a medida do seu coeficiente de inércia, ou seja, da sua resistência em ter seu estado de movimento alterado e corresponde ao termo que aparece na 2ª lei de Newton conforme a Eq. (1). A priori  $m_i$  não possui nenhuma relação com gravitação.

$$\vec{F} = m_i \vec{a}, \quad (1)$$

onde  $\vec{F}$  é a força resultante que atua no corpo e  $\vec{a}$  é a aceleração.

A força gravitacional por sua vez é outro tipo de força provocada em corpos que possuem uma *carga gravitacional*, denominada massa gravitacional passiva  $m_{g(p)}$ . Na lei

da gravitação de Newton aparece um outro tipo de massa que é capaz de provocar forças em outros corpos, ou em termos modernos, ser fonte de campo gravitacional. Essa é a massa gravitacional ativa  $m_{g(a)}$ .

Considere um corpo 1 que *produz* uma força gravitacional  $F_{1(2)}^{\vec{}}$  com sua massa gravitacional ativa  $m_{g1(a)}$  e outro que sofre essa força por ter uma massa gravitacional passiva  $m_{g2(p)}$ , usando a lei da gravitação Newtoniana, temos:

$$F_{1(2)}^{\vec{}} = -G \frac{m_{g1(a)} m_{g2(p)}}{r_{1(2)}^2} r_{1(2)}^{\vec{}}, \quad (2)$$

onde  $r_{1(2)}^{\vec{}}$  é o vetor que liga o centro de massa do corpo 1 ao do 2.

Analogamente a força gravitacional sobre o corpo 1 devido ao 2  $F_{2(1)}^{\vec{}}$  deve ser escrita como:

$$F_{2(1)}^{\vec{}} = -G \frac{m_{g2(a)} m_{g1(p)}}{r_{2(1)}^2} r_{2(1)}^{\vec{}}, \quad (3)$$

onde  $r_{2(1)}^{\vec{}} = -r_{1(2)}^{\vec{}}$  é o vetor que liga o centro de massa do corpo 2 ao do 1. Mas sabemos, pela 3ª Lei de Newton, que  $F_{2(1)}^{\vec{}} = -F_{1(2)}^{\vec{}}$ , dessa forma:

$$m_{g1(a)} m_{g2(p)} = m_{g2(a)} m_{g1(p)} \Rightarrow \frac{m_{g1(a)}}{m_{g1(p)}} = \frac{m_{g2(a)}}{m_{g2(p)}}, \quad (4)$$

mostramos que razão entre as massas gravitacionais ativa e passiva é a mesma para quaisquer corpos. Logo, podemos tomar, sem perda de generalidade, essa constante como 1, obtendo uma única quantidade de massa gravitacional  $m_g$

$$\frac{m_{g(p)}}{m_{g(a)}} = 1 \Rightarrow m_{g(p)} = m_{g(a)} = m_g. \quad (5)$$

No entanto, já era um fato conhecido pelos experimentos da queda livre de Galileu que a aceleração gravitacional  $\vec{g}$  nas proximidades da superfícies da Terra é a mesma para todos os corpos, assim podemos igualar a força gravitacional  $\vec{F}_g$  à força resultante  $\vec{F}_r$ :

$$\vec{F}_g = \vec{F}_r \Rightarrow m_i \vec{a} = m_{g(p)} \vec{g} \Rightarrow \frac{m_i}{m_{g(p)}} = \text{constante}, \quad (6)$$

podemos arbitrar essa constante como 1.

$$\frac{m_g}{m_i} = 1 \Rightarrow m_g = m_i. \quad (7)$$

Este resultado da Eq. (7) foi reconhecido por Isaac Newton como uma coincidência. Vários experimentos nos séculos XIX e XX mostraram a equivalência entre as massas com um erro menor que  $10^{-12}\%$ . Sendo esse um dos melhores resultados estabelecidos na física [4].

*“Em 1907, Einstein teve ‘a ideia mais feliz de sua vida’: o princípio da equivalência. Para um observador em queda livre não há gravidade nas suas proximidades. Assim se ele abandonar um corpo qualquer, ele permanecerá em repouso para esse observador.” [1]*

Essa propriedade surpreendente verificada pela mecânica clássica é o fato das forças gravitacionais serem proporcionais à massa inercial, assim como as forças de inércia. Assim, a gravidade não apenas pode ser eliminada por um referencial em queda livre, mas pode ser criada por uma aceleração. A ideia central de Einstein foi tratar a força gravitacional como uma força inercial.

Vamos ilustrar essa equivalência do campo gravitacional uniforme com aceleração constante usando um experimento de pensamento<sup>1</sup>. Seja um astronauta confinado em um foguete sem janelas nem meios de contato com outras pessoas. Ele possui uma bola, um cronômetro e uma fita métrica para realizar alguns experimentos simples. Vamos considerar quatro situações descritas abaixo e representadas pelas Figs. 1-4

- **Situação 1:** o foguete é colocado no espaço em um local infinitamente distante de quaisquer outros corpos. Os seus motores são ligados, fazendo-o acelerar para cima

---

<sup>1</sup>*Gedankenexperiment*, do alemão.

com aceleração constante de módulo  $g$ . Quando o astronauta abandona a bola, ele percebe que ela cai em direção ao solo como aceleração  $g$ .

- **Situação 2:** os motores do foguete são desligados, então ele segue com velocidade constante. Quando o astronauta abandona a bola, ela permanece parada em relação a ele.
- **Situação 3:** o foguete é trazido para superfície da Terra. Desprezando os efeitos de rotação, um corpo abandonado irá cair em direção ao solo da nave com aceleração constante de módulo  $g$ .
- **Situação 4:** por último, o foguete é abandonado caindo livremente sob ação do campo gravitacional uniforme, próximo à superfície da Terra, em direção ao centro do planeta. Um corpo abandonado permanece em repouso em relação ao astronauta que também está caindo junto da nave.

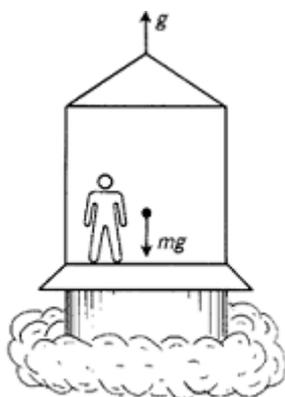


Figura 1: Situação 1: O astronauta abandona um corpo dentro de um foguete acelerado para cima com aceleração de módulo  $g$ . Disponível em [5].

Claramente, do ponto de vista do astronauta, as situações **1** e **3** são indistinguíveis. Assim como **2** e **4**. Vamos usá-los para traçar argumentos que nos levem aos conceitos do espaço não plano, ou seja, curvo.

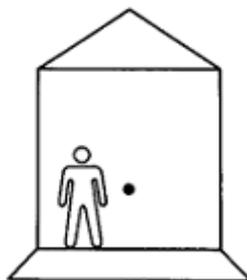


Figura 2: Situação 2: O astronauta abandona um corpo dentro de um foguete sem aceleração. Disponível em [5].

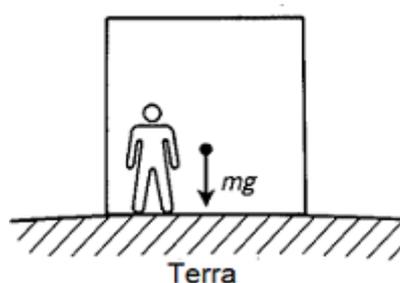


Figura 3: Situação 3: O astronauta abandona um corpo dentro de um foguete posicionado na superfície da Terra. Disponível em [5].

## 1.2 Desvio para o vermelho

Outro experimento de pensamento no qual Einstein aplicou o princípio de equivalência foi no desvio para o vermelho (*redshift*).

Suponha um prédio com altura  $h$ , como o da Fig. 5, com duas pessoas, uma na parte inferior,  $\mathcal{S}$ , que envia um sinal luminoso de frequência  $f$  para o outra na parte superior,  $\mathcal{S}'$ . Qual a frequência  $f'$  medida por  $\mathcal{S}'$ ?

Vamos aplicar o princípio de equivalência substituindo a ação gravitacional no prédio por um foguete acelerado para cima. Assim, teremos o observador de cima se afastando da luz emitida, sendo a frequência recebida afetada pelo efeito Doppler.

Considere  $\mathcal{S}'$  partindo do repouso e ganhando velocidade para cima devido à aceleração  $g$ . Seja  $\Delta t$  o tempo que a luz, com velocidade constante  $c$ , leva para atingir a parte superior do foguete. Supondo a velocidade da luz muito grande, podemos desprezar a variação da posição do foguete até que ela chegue na parte superior ( $\Delta h \ll h$ ), sendo assim:

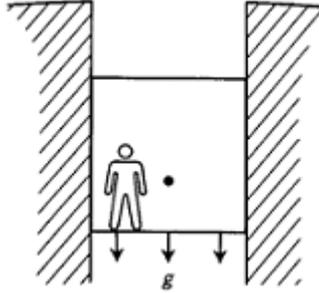


Figura 4: Situação 4: O astronauta abandona um corpo dentro de um foguete em queda livre próximo à superfície da Terra. Disponível em [5].

$$\Delta t = \frac{h}{c}. \quad (8)$$

Nesse mesmo intervalo de tempo, o foguete acelerado terá uma velocidade igual a:

$$v = g\Delta t = g\frac{h}{c}. \quad (9)$$

Usando a equação do efeito Doppler não relativístico e supondo o módulo da velocidade do foguete  $v \ll c$ , temos:

$$f' = f\frac{c-v}{c}. \quad (10)$$

Assim, teremos:

$$f' = f\frac{c-g\frac{h}{c}}{c} = f\frac{c^2-gh}{c^2} \Rightarrow f' = f\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right). \quad (11)$$

Identificando o potencial gravitacional  $\Phi = gh$  próximo à superfície da Terra, temos que o período  $T'$  medido por  $\mathcal{S}'$  em relação ao período  $T$  de  $\mathcal{S}$  vale<sup>2</sup>:

$$T' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f\left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right)} = T\left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right)^{-1} \Rightarrow T' \approx T\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \quad (12)$$

Assim,  $\mathcal{S}'$  medirá um período maior para o sinal, dessa forma teremos uma frequência menor nesse referencial, por isso esse efeito é chamado de desvio para o vermelho gravitacional (*gravitational redshift*).

<sup>2</sup>Usando a aproximação de Bernoulli  $(1+x)^n \approx 1+nx$ ,  $x \ll 1$ .

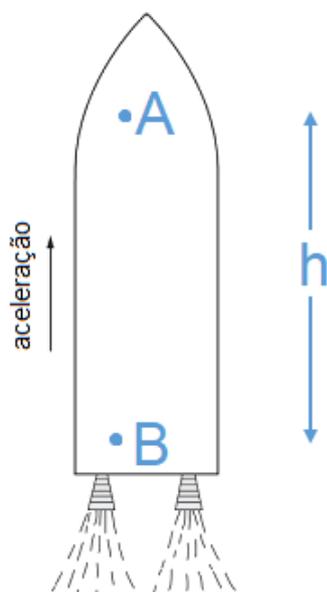


Figura 5: Desvio para o vermelho gravitacional da luz ao se mover para cima em uma região com campo gravitacional. Fonte: disponível em <http://homepage.physics.uiowa.edu>

De outra maneira, podemos imaginar que esse sinal emitido possa ser usado para quantificar o tempo, por exemplo, dois sinais consecutivos são emitidos em um segundo. Assim quando um receptor está num potencial gravitacional maior que o emissor, os sinais são recebidos mais devagar do que são emitidos. Já quando um receptor está num potencial gravitacional menor que o emissor, os sinais são recebidos mais rapidamente do que são emitidos. Concluímos assim que os relógios passam mais devagar quando afetados pelo campo gravitacional mais intenso.

Há uma comprovação prática do desvio para o vermelho que é o experimento de Pound-Rebka [8] de 1959, uma medida do redshift feita na superfície da Terra com raios- $\gamma$  emitidos do topo de um prédio até o solo. Não entraremos em detalhes sobre o experimento, mas ele foi realizado em uma distância de 22,5 m avaliando uma diferença de energia relativa entre o fóton emitido e recebido da ordem de  $2,5 \cdot 10^{-15}$ . O resultado confirmou as previsões da teoria da relatividade geral com uma precisão de 10%. Outros testes envolvendo hidrogênio [9] na década de 1980 aumentaram a precisão para 0,01%.

### 1.3 Deflexão da luz em um campo gravitacional

O poder do princípio de equivalência reside na sua aplicação a todas as leis da física. Consideremos o foguete em queda livre num campo gravitacional uniforme  $\vec{g}$  com uma fonte de luz  $F$ , emitindo um raio de luz perpendicular ao campo de acordo com a Fig. 6. Para o observador  $\mathcal{S}'$ , dentro do foguete, a luz viaja em linha reta e sai pelo orifício  $P$ . Entretanto para um observador externo  $\mathcal{S}$ , o raio luminoso descreverá uma parábola. Portanto, há deflexão dos raios luminosos num campo gravitacional.

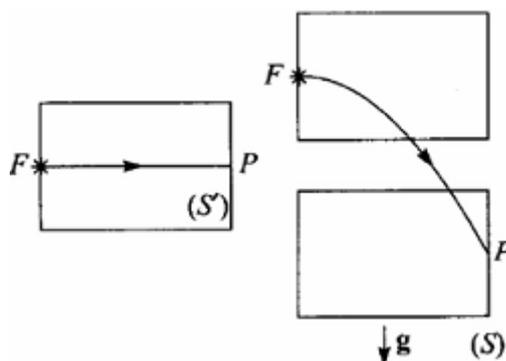


Figura 6: Deflexão gravitacional da luz. Uma fonte de luz em  $F$  emite um raio em direção a  $P$ , localizado em uma mesma altura de  $F$ . Na figura da esquerda, temos a trajetória da luz vista por um referencial solidário ao foguete: uma linha reta. Na direita, vemos a trajetória vista por um referencial externo ao foguete, para quem os efeitos do campo gravitacional são observados: uma parábola. Fonte: disponível em [4]

A existência da deflexão da luz exigida pela teoria foi comprovada fotograficamente durante o eclipse solar em maio de 1919 por duas expedições organizadas pela *Royal Astronomical Society*, uma delas à África e outra ao Brasil, sob a direção dos astrônomos Eddington e Crommelin<sup>3</sup>.

Cabe ressaltar que Einstein não foi o primeiro a propor que a luz pode sofrer um desvio na sua trajetória. Em 1801, Johhan von Sodner escreve um artigo em que desenvolve ideias Newtonianas de atração gravitacional para mostrar a influência da gravidade na trajetória de um raio luminoso [12]. Vamos fazer uma abordagem simplificada do problema.

<sup>3</sup>Para mais detalhes recomenda-se [11].

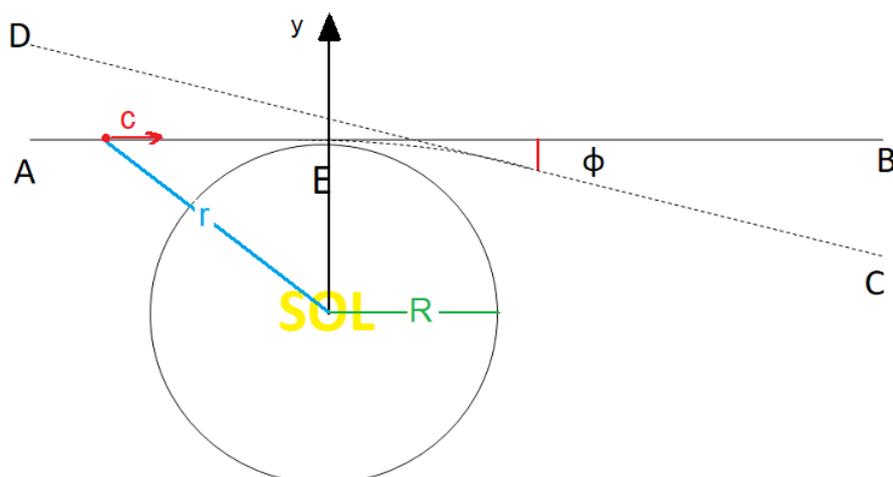


Figura 7: Deflexão gravitacional da luz passando próximo ao Sol. Um raio de luz vindo do infinito seguindo a trajetória de A para B, tangente ao Sol. Mas ao ser atraído pelo astro, com massa  $M$  e raio  $R$ , ele é defletido pela ação gravitacional e segue a trajetória para C, onde um observador pensa que a luz fora emitida do ponto D.

Nesse método para calcular a deflexão da luz, assumimos, baseado na óptica Newtoniana, que a luz é um corpúsculo que sofre ação gravitacional como qualquer outro corpo, independente da sua massa. Essa aceleração gravitacional fará com que a luz adquira velocidade vertical devido à atração do Sol, como exemplificado na Fig. 7. Portanto há uma deflexão  $\phi$  no percurso desse raio luminoso, que pode ser calculado pela razão entre a velocidade vertical *adquirida* pela interação gravitacional e a velocidade da luz na horizontal assim:

$$\tan \phi = \frac{v_y}{c}. \quad (13)$$

Usando a aceleração gravitacional, temos:

$$a = \frac{GM}{r^2}. \quad (14)$$

onde  $r$  é a distância do corpúsculo luz até o centro do Sol.

Somente a componente vertical será levada em consideração, pois na horizontal o ganho de velocidade será desprezado e a luz continuará com velocidade constante  $c$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y = \int_0^\infty \frac{GM}{cr^2} \cos(\theta) dy = \int_0^\infty \frac{GMR}{c(R^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{2GM}{cR}. \quad (15)$$

Substituindo os dados no SI para um raio que tangencia o Sol  $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ ,  $M = 2,0 \cdot 10^{30}$ ,  $R = 7,0 \cdot 10^8$  e  $c = 3,0 \cdot 10^8$ , temos:

$$\tan \frac{v_y}{c} = \tan \frac{2GM}{c^2 R} \Rightarrow \tan \phi = 0,87''.$$

Esse resultado é metade do valor previsto pela TRG, comprovada pelo Eclipse de 1919. Einstein atribui metade dessa deflexão ao efeito do campo Newtoniano de atração do Sol e a outra metade à curvatura apenas do espaço causada pela presença do Sol [3]. Quando esses efeitos são somados, temos o resultado previsto pela TRG.

## 2 Curvatura do espaço-tempo

A ideia central da relatividade geral é que a gravidade surge da curvatura do espaço-tempo, ou seja, gravidade é geometria. De maneira simplificada, imagine uma malha feita por varetas formando um quase contínuo espaço Euclidiano bidimensional. Se esse conjunto de varetas sofrer um aquecimento desigual, ou seja, cada uma se dilatar de uma maneira especial, teremos um modelo de um espaço não-Euclidiano ou Gaussiano como mostrado na Fig. 8.

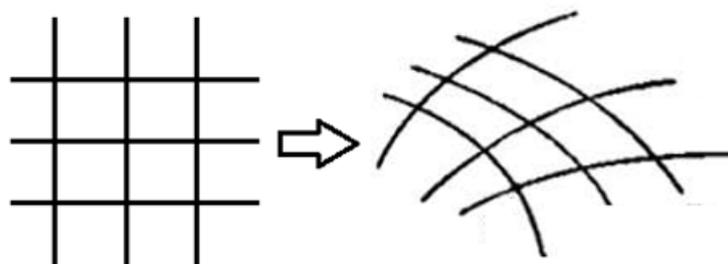


Figura 8: Modelo de espaços Euclidiano e Gaussiano. Na esquerda, temos uma malha representando o espaço Euclidiano (plano), em que todos os pontos adjacentes são equidistantes entre si. Na direita, temos um espaço curvo qualquer, em que a distância entre pontos adjacentes dependem da sua posição. Fonte: adaptado de [3].

Como já falamos no princípio de equivalência, apenas no campo gravitacional todos os corpos realmente se movem da mesma maneira dadas as mesmas condições iniciais. A ideia de Einstein foi que a unicidade desses percursos poderia ser explicada em termos de uma geometria quadridimensional, denominada espaço-tempo<sup>4</sup>. Dessa forma, os corpos se moveriam em trajetórias *retilíneas* nesse espaço-tempo curvo.

## 2.1 Descrição da curvatura

A descrição geométrica pode ser facilmente ilustrada em duas dimensões. Na geometria Euclidiana, por exemplo, temos que a soma dos ângulos internos  $\alpha_i$  de um triângulo vale:

$$\Sigma(\alpha_i) = \pi. \quad (16)$$

Outra relação define a razão entre o comprimento  $C$  da circunferência com seu raio  $r$  dada por:

$$\frac{C}{r} = 2\pi. \quad (17)$$

Veremos agora um exemplo de geometria espacial não-Euclidiana sobre uma superfície esférica de raio  $R$  para ilustração de uma diferente geometria bidimensional. Primeiro vamos aprender a desenhar uma linha reta nessa esfera. A definição continua a mesma do espaço Euclidiano, menor distância entre dois pontos distintos. Mas como somos obrigados a permanecer sobre a superfície da esfera, essa menor distância estará sobre um *grande círculo*, uma circunferência traçada entre os dois pontos e o centro dessa esfera, como representado na Fig. 9.

Uma relação curiosa é que a soma dos ângulos internos  $\alpha_i$  de um triângulo, como o da Fig. 10, depende da sua área  $A$ :

$$\Sigma(\alpha_i) = \pi + \frac{A}{R^2}. \quad (18)$$

---

<sup>4</sup>Do inglês *spacetime*.

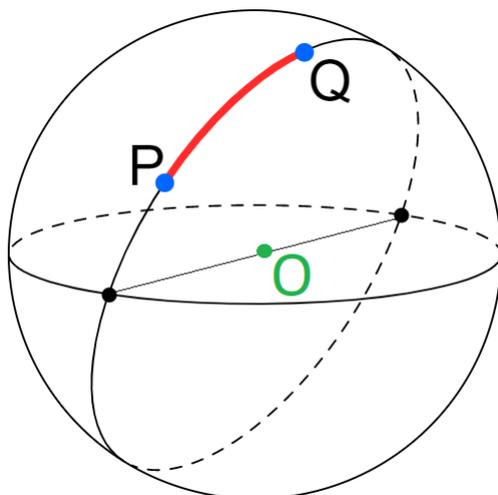


Figura 9: Um diagrama ilustrando um grande círculo para representar a menor distância entre dois pontos  $P$  e  $Q$  sobre a esfera.

## Coordenadas

A ideia chave para descrição da geometria é usar cálculo diferencial para reduzir toda a geometria através de distâncias entre cada par de pontos próximos. A partir disso, a distância entre pontos distantes será dada por integração. E linhas retas são curvas que minimizam a distância entre dois pontos.

Uma maneira sistemática de rotular pontos é um pré-requisito para uma especificação dessa distância entre pontos próximos. Um sistema de coordenadas atribui rótulos exclusivos a cada ponto e há muitos sistemas que fazem isso. Em três dimensões, por exemplo, há as coordenadas Cartesianas  $(x, y, z)$  e esféricas  $(r, \theta, \phi)$ .

Como o sistema de coordenadas pode ser qualquer um, usaremos uma grandeza invariante chamada de **intervalo espaçotemporal**, representada por  $ds^2$ , que é descrito pelos elementos de linha. Já o elemento de linha especifica a geometria espaçotemporal utilizada. Vamos mostrar um exemplo do espaço-tempo de Minkowski<sup>5</sup>:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (19)$$

A parte espacial da Eq. (19) pode ser transformada em coordenadas esféricas, melhor

<sup>5</sup>Essa é a formulação geométrica da relatividade restrita.

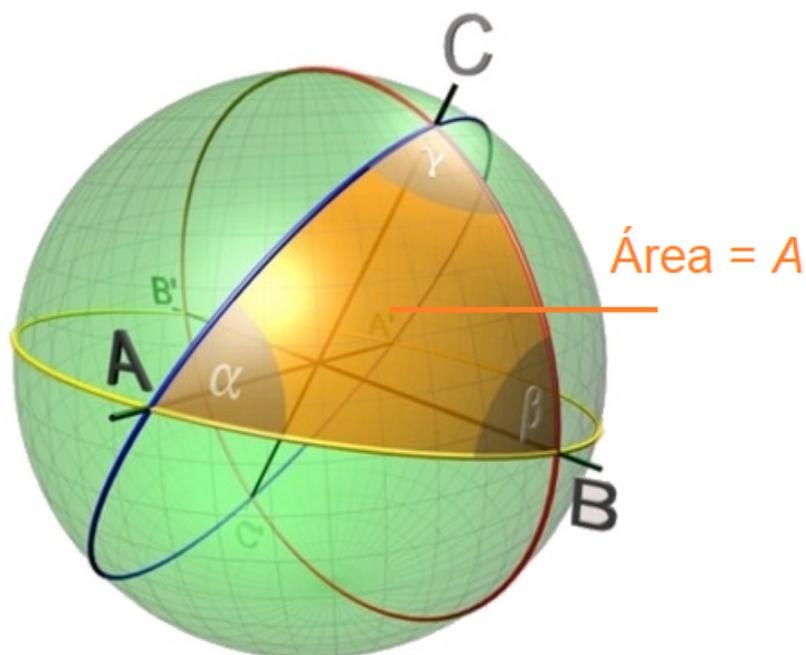


Figura 10: Um triângulo representado sobre a superfície de uma esfera, de raio  $R$ , obtido por três pontos de interseção (A, B e C) entre grandes círculos desenhados sobre a superfície dessa esfera. Fonte: adaptado de <http://commons.wikimedia.org/>.

observada na Fig. 11, através das relações:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \quad (20a)$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \quad (20b)$$

$$z = r \cos \theta \quad (20c)$$

Assim, as relações entre as derivadas em ambos os sistemas valem:

$$dx = dr \operatorname{sen} \theta \cos \phi + r \cos \theta d\theta \cos \phi - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi d\phi,$$

$$dy = dr \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + r \cos \theta d\theta \operatorname{sen} \phi + r \operatorname{sen} \theta \cos \phi d\phi,$$

$$dz = dr \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta d\theta.$$

Finalmente, podemos calcular  $ds^2 = (cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$  em coordenadas esféricas:

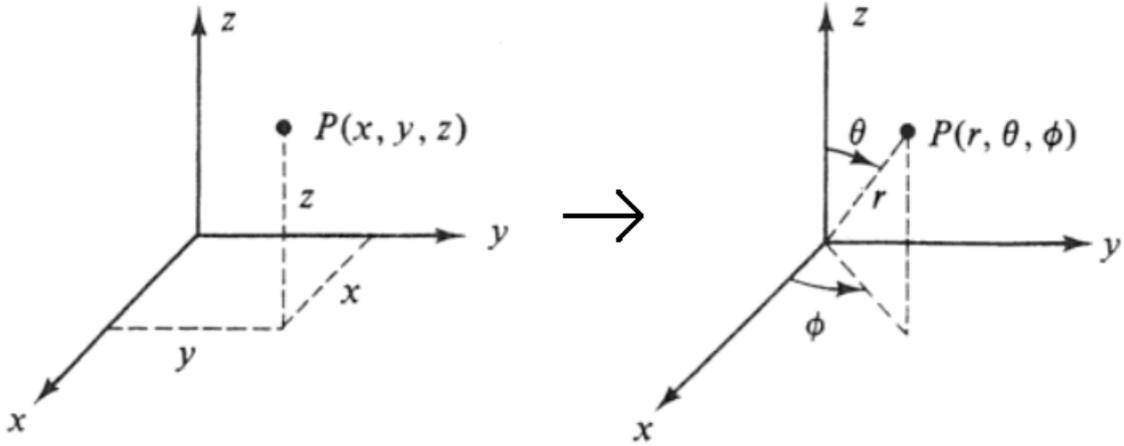


Figura 11: As coordenadas cartesianas são representadas por 3 valores,  $(x, y, z)$ . Quando são convertidos em coordenadas esféricas, os novos valores serão representados como  $(r, \theta, \phi)$ . Fonte: disponível em <https://bit.ly/3ckxNNV>.

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -(cdt)^2 + (dr \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta d\theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi d\phi)^2 + \\
 &+ (dr \sin \theta \sin \phi + r \cos \theta d\theta \sin \phi + r \sin \theta \cos \phi d\phi)^2 + (dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta)^2 \Rightarrow \\
 ds^2 &= -(cdt)^2 + dr^2 + (rd\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2,
 \end{aligned} \tag{21}$$

que é o elemento de linha do espaço de Minkowski em coordenadas esféricas.

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \tag{22}$$

Para descrição de uma geometria genérica, devemos usar o sistema quadridimensional  $x^a$ , com  $a$  sendo 0, 1, 2 ou 3, para mapear os pontos<sup>6</sup> e especificar o elemento de linha  $ds^2$  entre por dois pontos próximos separados pelo intervalo coordenado  $dx^a$ . De forma geral, o elemento de linha pode ser escrito como:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b, \tag{23}$$

onde  $g_{ab}$  é a métrica do espaço-tempo .

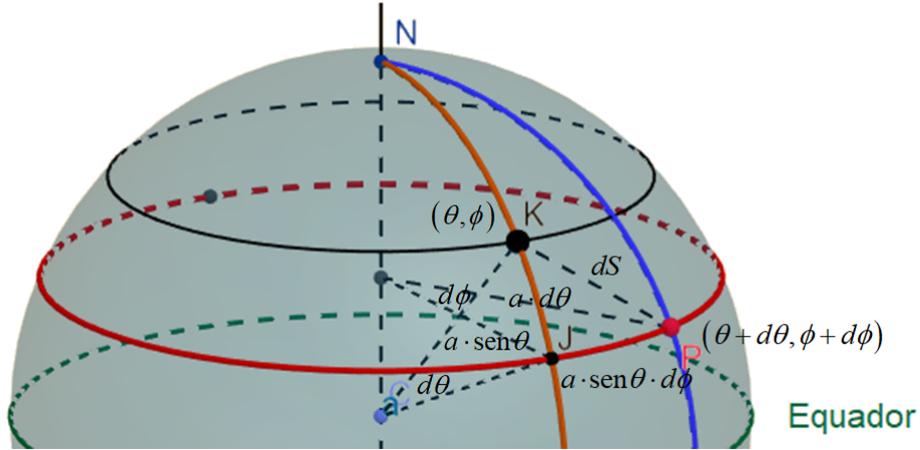


Figura 12: Representação do elemento de linha em coordenadas esféricas. Dois pontos K e P separados por uma distância infinitesimal estão localizados em  $(\theta, \phi)$  e  $(\theta + d\theta, \phi + d\phi)$ . A distância entre os pontos J e P, localizados na mesma latitude  $\theta$ , vale  $R \sin\theta d\phi$ . A distância entre K e J, localizados na mesma longitude  $\phi$ , vale  $R d\theta$ . Usando o teorema de Pitágoras, podemos determinar o valor  $ds^2$ , distância entre os pontos K e P. Adaptado de [6].

### Geometria sobre uma esfera

Para descrevermos outras propriedades, usaremos as coordenadas  $(\theta, \phi)$  conforme mostra a Fig. 12. O seu elemento de linha  $dS^2$  apenas nas componentes espaciais, com  $r = R$  constante, será dado por:

$$dS^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (24)$$

Vamos agora calcular a razão entre o perímetro da circunferência de raio  $r$  pelo seu raio nessa geometria esférica. Colocando o centro da circunferência no polo norte da esfera, O perímetro  $C$  será a integral de  $dS$  em torno do círculo de  $\theta$  constante, ou seja,  $\theta = \Theta$ .

$$C = \oint dS = \int_0^{2\pi} R \sin\Theta d\phi = 2\pi R \sin\Theta. \quad (25)$$

Já o raio  $r$  é a integral ao longo de qualquer curva onde  $\phi$  é constante, portanto vale:

$$r = \int dS = \int_0^\Theta R d\phi = R\Theta \Rightarrow \Theta = \frac{r}{R}. \quad (26)$$

<sup>6</sup>No espaço de Minkowski temos  $x^0 = t$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$  e  $x^3 = z$ .

Substituindo a (26) em (25), obtemos:

$$C = 2\pi R \operatorname{sen} \left( \frac{r}{R} \right) \quad (27)$$

Quando  $r \ll R$ , recuperamos a relação clássica da geometria

$$C = \lim_{\frac{r}{R} \rightarrow 0} 2\pi R \operatorname{sen} \left( \frac{r}{R} \right) = 2\pi R \left( \frac{r}{R} \right) = 2\pi r \quad (28)$$

Não é necessário deixar a superfície da Terra para determinar sua geometria. Pode-se medir os ângulos de um triângulo ou o comprimento e raio de uma circunferência. Pela aplicação das Eqs. (18) e (27), podemos determinar o raio  $R$  de curvatura da nossa geometria.

A mudança da componente temporal já foi observada no desvio para o vermelho gravitacional com alteração do tempo pelo potencial gravitacional representado pela Eq. (12). Aplicando esse resultado na componente temporal, temos a mudança dessa geometria por ação da gravidade:

$$ds^2 = - \left( 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) (cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (29)$$

onde  $\Phi$  é o potencial gravitacional<sup>7</sup>. Nota-se que no resultado da deflexão da luz utilizando o modelo Newtoniano não há nenhuma previsão na alteração na componente espacial, mas há na temporal.

Contudo na TRG, existe uma alteração na componente espacial da métrica provocada pelas massas<sup>8</sup>. Um exemplo é o campo gravitacional produzido por uma distribuição esférica de matéria, obtido pelo astrônomo alemão Karl Schwarzschild em 1916 [1]. Essa curvatura pode ser expressa por uma métrica (doravante chamada métrica de Schwarzschild) com a seguinte forma [6]:

$$ds^2 = - \left( 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) (cdt)^2 + \frac{1}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (30)$$

---

<sup>7</sup>O potencial gravitacional gerado por uma estrela, de massa  $M$ , como o Sol é dado por  $\Phi = -\frac{GM}{r^2}$ , onde  $G$  é a constante da gravitação e  $r$  é a distância do centro da estrela ao ponto onde estamos medindo o potencial.

<sup>8</sup>Pela relatividade restrita, existe uma equivalência entre massa e energia, no entanto, usaremos apenas a massa como causador das deformações no espaço-tempo.

Observe que a componente espacial também é modificada pelo potencial gravitacional.

## 2.2 Diagramas de espaço-tempo

Para conseguirmos expressar os eventos usando a geometria, vamos descrever um sistema quadridimensional  $(t, x, y, z)$ , que será representado por um diagrama **espaço-tempo**, como o da Fig. 13.

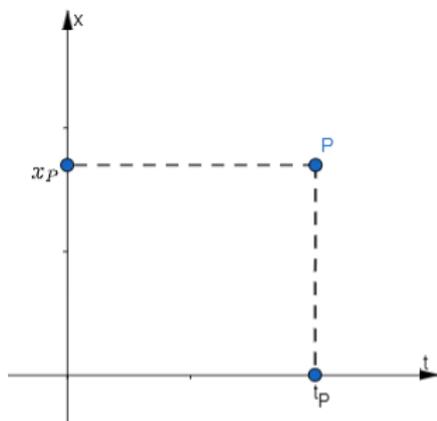


Figura 13: Diagrama espaço-tempo em duas dimensões  $(x, t)$ . A coordenada  $x_p$  indica a posição espacial da partícula e  $t_p$  indica a sua posição temporal.

Os eventos serão representados por um ponto P, e as coordenadas  $x_p$  e  $t_p$  trazem informações de onde e quando o evento ocorreu respectivamente. É conveniente transformarmos a coordenada temporal em espacial  $ct$ , aproveitando a constância da velocidade da luz a fim de que ambos os eixos tenham mesma dimensão.

Uma partícula descreverá sua trajetória espacotemporal por uma linha de mundo, alguns exemplos são ilustrados na Fig. 14.

A descrição matemática da geometria será dada pela sua métrica como, por exemplo, a de Minkowski (Eq. (19)) ou a de Schwarzschild (Eq. (30)), ambas em coordenadas Cartesianas.

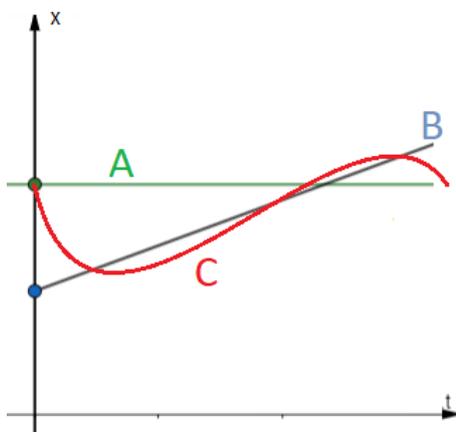


Figura 14: Linhas de mundo em um espaço-tempo bidimensional. A linha de mundo A representa uma partícula em repouso. A linha de mundo B representa uma partícula em movimento uniforme. A linha de mundo C representa uma partícula em movimento oscilatório.

### Cones de Luz

O elemento de linha,  $(ds^2)$ , pode assumir três tipos de valores: positivo, negativo ou nulo. Isso leva a três tipos de linhas de mundo: tipo tempo, tipo espaço ou nulo<sup>9</sup> cujos valores são representados por:

$$ds^2 > 0 \quad \text{tipo tempo,} \quad (31a)$$

$$ds^2 = 0 \quad \text{tipo nulo,} \quad (31b)$$

$$ds^2 < 0 \quad \text{tipo espaço.} \quad (31c)$$

A constância da velocidade da luz é o fator mais importante sobre o espaço-tempo na teoria da relatividade restrita. Observe que o valor de  $ds^2$  é nulo quando o *objeto* se move com velocidade  $v = c$ :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 dt^2 + (v dt)^2 = -c^2 dt^2 + (c dt)^2 \Rightarrow ds^2 = 0. \quad (32)$$

Esta propriedade pode ser expressa geometricamente nos diagramas espaço tempo com linhas inclinadas de  $45^\circ$ . Já se colocarmos com duas dimensões espaciais  $xy$ , teremos os

<sup>9</sup>Do inglês *timelike*, *spacelike* e *null*.

*cones de luz*, que podem ser vistos na Fig. 15. Para termos o cone de luz, não precisamos

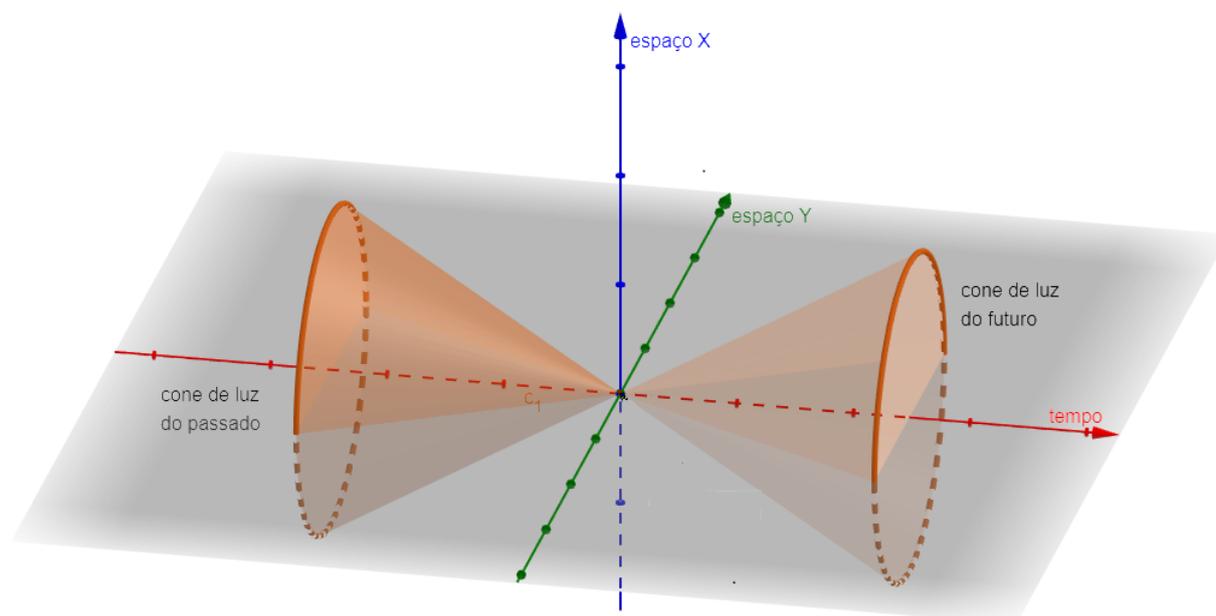


Figura 15: Representação de um cone de luz tridimensional  $(t, x, y)$ . Se você estiver no ponto **presente**, os eventos no interior do cone **futuro** representam todos os eventos que você consegue alcançar com um sinal físico, ou seja, viajando até eles em linhas do *tipo tempo* ou *tipo nulo*. Para esse mesmo ponto inicial, o cone do **passado** contém todos os eventos que podem chegar ao presente, ou seja, ele contém todos os eventos que podem afetar o presente. A região fora do cone não tem uma relação de causalidade com o presente, pois não pode fisicamente alcançá-lo.

que a luz esteja presente. Os cones mapeiam as trajetórias que a luz teria se partisse do **presente**. Para linhas do *tipo tempo*, o objeto se move com velocidade menor que a da luz, ou seja, possuem linhas de mundo com inclinação menor que  $45^\circ$  e sempre interior ao cone. Essas linhas representam trajetória de um objeto real, pois sua velocidade é sempre menor que a da luz. Para linhas do *tipo espaço*, o objeto teria que viajar com velocidade superior à da luz, o que é impossível frente à relatividade restrita.

## 2.3 O Princípio da Correspondência

A relatividade geral deve concordar com a relatividade restrita na ausência de gravidade  $G \rightarrow 0$  e com a gravitação Newtoniana para campos fracos e baixas velocidades

comparadas à da luz  $c \rightarrow \infty$ . E ambas devem levar à mecânica Newtoniana na ausência de gravitação quando as duas condições limites forem satisfeitas.

Isso dá origem ao princípio da correspondência como indicado na Fig. 16. No entanto a

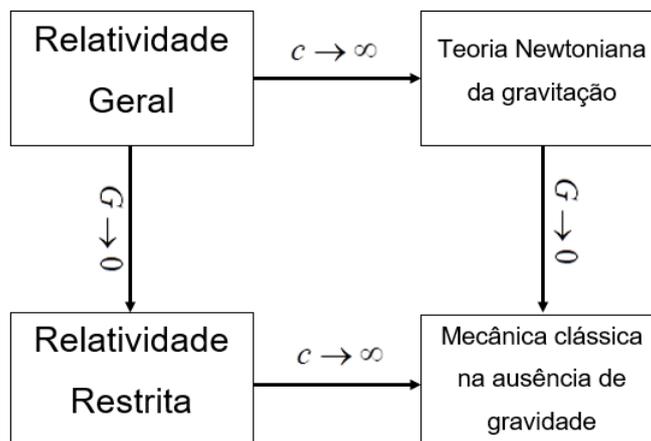


Figura 16: O princípio da correspondência para a relatividade geral.

lei da gravitação Newtoniana só aparece se considerarmos uma deformação na componente espacial como vimos no exemplo da métrica de Schwarzschild na Eq. (38). Tomando o limite  $\Phi \ll 1$  encontramos:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)(cdt)^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (33)$$

Este elemento de linha é conhecido como **estático** ou de **campo fraco** e é uma boa aproximação para a geometria do espaço-tempo gerada pelo Sol. Podemos deduzir a equação da gravitação Newtoniana usando esse formalismo e as equações de Euler-Lagrange<sup>10</sup>:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla\Phi \Rightarrow \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}, \quad (34)$$

onde  $M$  é a fonte de campo gravitacional;  $m$  é a carga gravitacional e  $r$  é a distância que separa o centro desses dois corpos.

## 2.4 Geodésica

O princípio para determinarmos o movimento de uma partícula livre num espaço-tempo curvo é o **Princípio Variacional**, cujo enunciado pode ser descrito como “a trajetória

<sup>10</sup>Para conhecer mais, consulte o Capítulo ?? dessa dissertação.

seguida por uma partícula livre entre dois pontos do tipo tempo extremiza o tempo próprio entre eles”, o que, matematicamente pode ser representado por [6]:

$$\delta \int \left(-g_{ab} dx^a dx^b\right)^{1/2} = 0. \quad (35)$$

Essa extremização dará origem ao *menor caminho* entre dois pontos, denominado geodésica. Cabe ressaltar que no espaço Euclidiano, a geodésica é simplesmente uma linha reta. E na geometria esférica, um arco de grande círculo como já representamos na Fig. 9.

#### 2.4.1 Modelos de Setores

Para nos prepararmos para este novo ponto de vista, descrevemos a visão de mundo dos *flatlanders*<sup>11</sup>, os habitantes de *Flatland* no conto de Edwin Abbott com o mesmo nome [15].

*“Eu chamo o nosso mundo de Flatland[...]. Imagine uma vasta folha de papel sobre a qual [...] figuras [...] se movem livremente, mas sem o poder de elevar-se ou afundar-se abaixo dela, muito parecido com sombras.” [15]*

Os *flatlanders* se movem em duas dimensões (frente-trás ou direita-esquerda), a terceira dimensão (cima-baixo) não é apenas inacessível para eles, mas está além de sua imaginação. Quando estendemos o *Flatland* de Abbott para superfícies curvas, os *flatlanders* ainda se movem apenas sobre a superfície: para a frente ou para trás e para a direita ou para a esquerda. Na falta do conceito de cima e para baixo, eles não podem conceber uma superfície curvada a um espaço tridimensional. No entanto, eles são capazes de estudar a curvatura do seu mundo. Nós somos *spacelanders*, familiarizados com três dimensões, mas incapazes de conceber um espaço dimensional superior, podemos examinar a curvatura do nosso espaço tridimensional da mesma maneira que os *flatlanders* examinam as superfícies planas curvas.

---

<sup>11</sup>Aqui vamos usar o termo original no lugar da tradução planistas.

Para visualizarmos os efeitos físicos de um espaço curvo, vamos introduzir os modelos de setores. Neles nós vamos subdividir uma superfície curva em pedaços pequenos o bastante para considerarmos planos. Observe na Fig. 17 em que *buracos* aparecem sempre que a peças de um espaço curvo são montadas em um um espaço Euclidiano.

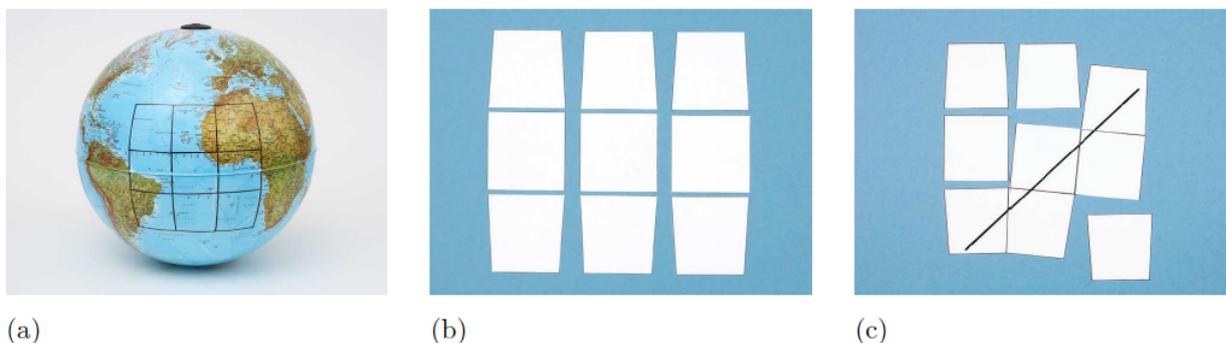


Figura 17: Modelo de seção de uma superfície esférica. (a) O espaço curvo de uma esfera é subdividido em pequenos elementos de área. (b) Os setores são construídos como pedaços planos com os mesmos comprimentos. (c) A geodésica é construída localmente como uma linha reta usando lápis e régua. Fonte: disponível em [16].

Como cada setor é pequeno, localmente a geodésica será uma linha reta. Essa linha mantém seu percurso de um setor a outro quando eles são encaixados sem nenhum *buraco* entre eles, ou seja, quando unidos por vértices em comum, como pode ser visto no item (c) da Fig. 17. Se um segunda geodésica for adicionada paralelamente à primeira no setor inferior esquerdo, pode-se ver an Fig. 18 que elas convergem. Isso demonstra a curvatura da nossa superfície.

Analogamente, podemos fazer modelos de setores que nos permitam construir geodésicas na vizinhança de um buraco negro

### Geodésicas próximas a um buraco negro

Vamos agora apresentar um modelo de setores que permita construir geodésicas na vizinhança de um buraco negro. O conjunto completo de setores representam um plano de simetria ao longo do plano equatorial e formam o arranjo da Fig. [?].

Observe que há *buracos* entre os setores indicando a curvatura do espaço. Para de-

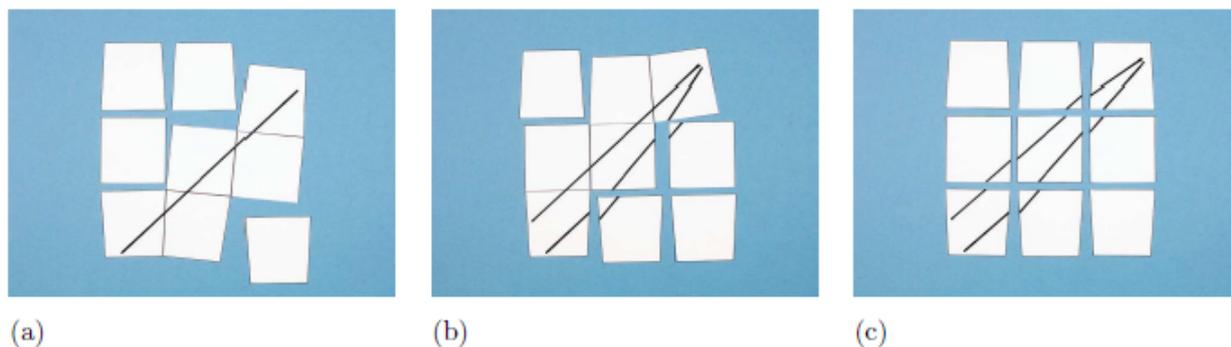


Figura 18: Geodésicas no modelo setorial de uma esfera. (a) Os setores são unidos para desenhar a primeira linha geodésica. (b) Nova disposição dos setores para desenhar a segunda geodésica acima da primeira. (c) As duas geodésicas começam paralelas na parte inferior, mas convergem na parte superior quando os setores retornam à sua posição original. Fonte: disponível em [16].

senharmos uma geodésica, faremos um método análogo aos anteriores: juntando setores vizinhos pelos vértices em comum e desenhando uma linha reta. Pode-se observar que a direção da linha desenhada muda, ilustrando a deflexão da luz sob ação de um campo gravitacional.

Devemos ter cuidado com o resultado do desenho da geodésica, pois, apesar de ser qualitativamente correto, os setores são representações aproximadas do espaço curvo, portanto a geodésica desenhada também é uma solução aproximada. Com o método fornecido em por Zahn e Kraus [16] temos um erro de aproximadamente 0,13% em relação às medidas na esfera<sup>12</sup>. Outro detalhe para termos em mente é que as linhas desenhadas nesses modelos não representam a trajetória de um raio de luz. A linha desenhada é uma geodésica no **espaço**, enquanto a luz se propaga em ambos **tempo** e **espaço**. Mesmo assim, trata-se de um excelente método para ilustrar algumas propriedades da geodésica.

### 3 Equação de Einstein

As equações de campo da relatividade geral ou equações de Einstein foram obtidas no final de 1915 por Albert Einstein e David Hilbert, de forma independente.

<sup>12</sup>O processo de construção desses modelos pode ser encontrado em [16].

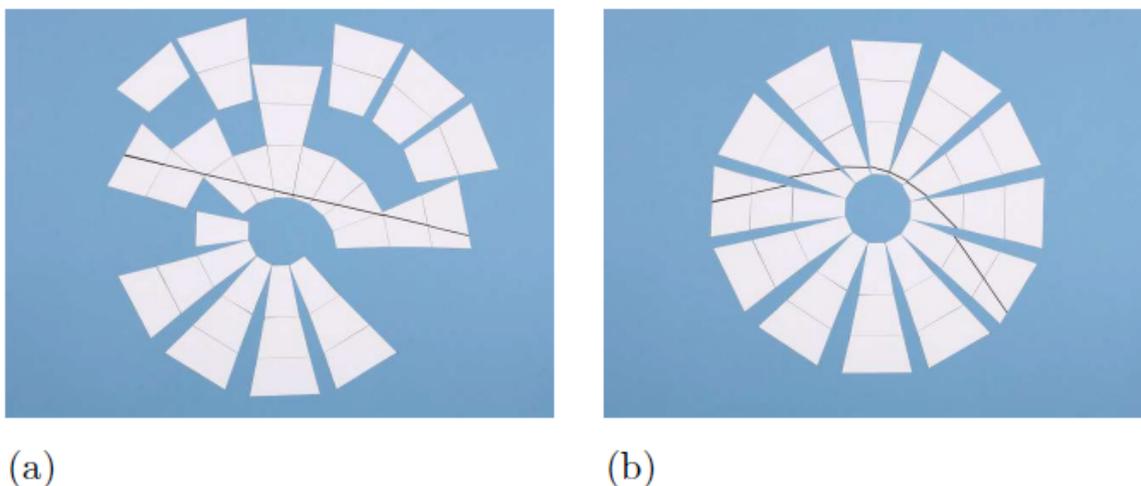


Figura 19: Uma geodésica no modelo de setores do plano equatorial de um buraco negro. As linhas são localmente retas, no entanto a direção de *entrada* é completamente diferente da de *saída*. (a) Os setores são unidos para desenhar a linha geodésica. (b) Os setores são colocados na sua posição *original* simetricamente, ilustrando a trajetória da luz. Fonte: disponível em [16].

*“[eles] perceberam que a métrica tensorial  $g_{ab}$  que descreve a geometria do espaço-tempo parecia depender da quantidade de matéria gravitacional na região.” [17]*

Devido à sua complexidade matemática, vamos apenas transmitir o significado físico da equação de Einstein sem apresentar a sua dedução.

Observe pela Eq. (34) que a gravitação Newtoniana surge da relatividade geral com uma deformação no espaço-tempo cujo valor depende do potencial gravitacional, diretamente proporcional à massa. A equação de Einstein relaciona a curvatura do espaço-tempo com sua fonte (massa) em um conjunto de dez equações diferenciais de segunda ordem não lineares e não independentes, o que torna sua solução muito complicada [6]. Dessa forma, qualquer fonte pode provocar uma deformação na componente espacial da métrica representada por uma função  $f(\Phi)$ , originando um elemento de linha em coordenadas esféricas com a forma da Eq. (36):

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)c^2 dt^2 + f(\Phi)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (36)$$

onde  $\Phi$  é o potencial gravitacional.

A equação de Einstein pode ser resumida como:

$$\mathbf{G} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T}, \quad (37)$$

onde  $\mathbf{G}$  é o tensor de curvatura, associado com a estrutura geométrica do espaço-tempo. Essa grandeza diz qual será a métrica do espaço.  $\mathbf{T}$  é o tensor de energia-momento, que depende da distribuição de matéria do universo.

No limite Newtoniano, ou seja, para pequenas massas e velocidades muito menores que a da luz, as equações da relatividade geral devem reproduzir a lei do inverso do quadrado das distâncias [6] (veja também a Eq. (34)).

## 4 Buracos Negros

Uma das ideias mais divulgadas sobre os buracos negros é de que eles *sugam* objetos para seu interior sem chance de escape e nem mesmo a luz resiste à sua atração gravitacional. Na verdade, um buraco negro de massa  $M$  causa a mesma interação que uma estrela de mesma massa<sup>13</sup>, porém sem emitir a luz que antes a estrela irradiava. Se o Sol de alguma forma se tornasse um buraco negro, as órbitas dos planetas do sistema solar se manteriam inalteradas, ou seja, o buraco negro não passa de uma estrela apagada com enorme densidade. Para descrever esses objetos vamos começar apresentando a métrica externa de uma distribuição de massa esférica de valor  $M$  e raio  $R$ . Ela é descrita pela métrica vista na Eq. (30). Ela veio da resolução das equações de Einstein em 1916 realizada pelo físico alemão Karl Schwarzschild [?]. Com ótima aproximação, o Sol pode ser usado para verificar experimentalmente essa métrica [6]. Em um sistema de coordenadas esféricas, o elemento de linha da geometria de Schwarzschild a uma distância  $r$  do centro da estrela é dada por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (38)$$

---

<sup>13</sup>Aqui estamos usando a aproximação para um buraco negro e uma estrela esféricos e sem rotação

Observe que se  $(\frac{2GM}{r} \ll 1)$ , podemos usar a aproximação de Bernoulli e escrever a métrica como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (39)$$

A Eq.(39) corresponde à forma exata para campos fracos e estáticos com o potencial gravitacional Newtoniano  $\Phi$  dado por:

$$\Phi = -\frac{GM}{r}. \quad (40)$$

Isto nos leva a verificar que de fato o valor  $M$  corresponde à massa, sendo ela a fonte da curvatura do espaço. E também que a métrica de Schwarzschild descreve um buraco negro estático de massa  $M$ .

Não mostraremos aqui, mas essa métrica pode ser usada para calcular diversos fenômenos como o desvio para o vermelho gravitacional, a precessão do periélio de Mercúrio e a deflexão da luz para campos gravitacionais simetricamente esféricos. Para um leitor interessado, sugere-se o Capítulo 15 da referência [1].

Voltando aos buracos negros, eles podem ser originados pela *morte* de uma estrela<sup>14</sup>. Se a estrela tiver massa suficiente, haverá um momento de desequilíbrio entre a força gravitacional e as forças de pressão da matéria dentro da estrela. Há, portanto, um colapso gravitacional com a criação de um buraco negro [6].

É comum nos livros de relatividade o uso de unidades onde  $G = 1$  e  $c = 1$ . Estas são chamadas de unidades geometrizadas. Nelas as equações da TRG tornam-se mais simples. A métrica de Schwarzschild, dada pela Eq. (38) pode ser simplificada como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (41)$$

Note que nessas unidades  $M$  tem dimensão de comprimento.

Observe que a métrica possui dois pontos de singularidade<sup>15</sup>  $r = 0$  e  $r = 2M$ . No caso de  $r = 2M$  é possível eliminar a singularidade por meio de uma transformação

<sup>14</sup>Morte aqui significa o fim do ciclo de fusão nuclear no interior de uma estrela.

<sup>15</sup>Pontos no sistema de coordenadas em que a métrica não é definida, ela diverge indo para infinito.

adequada de coordenadas [1]. Essa região é chamada de *horizonte de eventos* e a distância  $r$  é chamada de raio de Schwarzschild  $r_s$ . Para examinarmos essa superfície, é possível repetir o procedimento da Seção ?? para obtermos a seguinte estrutura de cones de luz nas proximidades de um horizonte de eventos, conforme mostra a Fig. 20. Note que o cone de luz tangencia a superfície  $r_s = 2M$  e o interior do cone de luz futuro não permite mais que um observador saia desta superfície daí o nome horizonte de eventos. De outro modo, tudo aquilo que cai dentro do horizonte de eventos é *sugado* e nem a luz pode escapar desta interação gravitacional. Em um paralelo com a gravitação Newtoniana, o horizonte de eventos seria a região do espaço cuja velocidade de escape é igual a da luz, cerca de 300.000 km/s. Já para  $r = 0$  não é possível eliminar a singularidade e ainda não conhecemos a física no interior dos buracos negros, mas devido ao horizonte de eventos, estamos isolados do que ocorre no interior.

Curiosamente este é mesmo raio ( $r_s = 2M$ ) calculado por Michell e Laplace como sendo o raio de uma estrela de massa  $M$  de modo que nem a luz consiga escapar da atração do seu campo gravitacional [18].

## 5 Velocidade de Dobra Espacial

Viajar com velocidade superior a da luz é um tema muito difundido em ficção científica. O artigo do físico mexicano Miguel Alcubierre de 1994 traz a abordagem matemática que poderia tornar esse sonho realidade. Vamos analisar qual deveria ser a métrica espaço-temporal para obtermos a chamada velocidade de dobra espacial<sup>16</sup>.

Consideremos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = -dt^2 + [dx - V_e(t)f(r_e)dt]^2 + dy^2 + dz^2 \quad (42)$$

onde  $V_e(t) \equiv dx_e(t)/dt$  é a velocidade associada com a curva,  $x_e(t)$  é a posição da nave em um instante  $t$  e  $r_e \equiv [(x - x_e(t))^2 + y^2 + z^2]$  representa uma distância ao redor da

---

<sup>16</sup>Do inglês *warp-drive*.

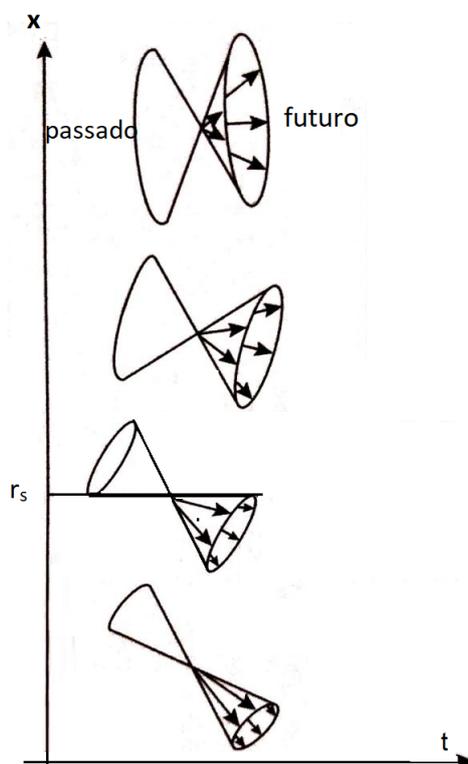


Figura 20: Cones de luz na vizinhança do raio de Schwarzschild. Dentro do buraco negro, ou seja, para  $r < r_s$ , todas as linhas de mundo de partículas apontam para dentro dele e permanecem confinadas. A fronteira  $r = r_s$  representa o *horizonte de eventos*. Na região externa  $r > r_s$ , o campo gravitacional do buraco negro continua atuando normalmente. Fonte: adaptado de [10].

nave. A função  $f(r_e)$  é qualquer função positiva suave que satisfaz a condição  $f(0) = 1$  e diminui quando se afasta da origem até chegar a zero para  $r_e > R$  para algum  $R$ . É como se formasse uma *bolha*, de raio  $R$ , ao redor da nave, onde o espaço-tempo seria distorcido. Observe que a geometria do espaço-tempo é plana quando a função  $f(r_e) = 0$ , mas curva quando não é. A figura 21 mostra o diagrama espaço-tempo para essa métrica.

Os cones de luz desse espaço-tempo curvo podem ser determinados pela Eq.(??) que resultará em:

$$ds^2 = -dt^2 + [dx - V_e(t)f(r_e)dt]^2 = 0, \quad (43)$$

ou, equivalentemente:

$$\frac{dx}{dt} = \pm 1 + V_s(t)f(r_s). \quad (44)$$

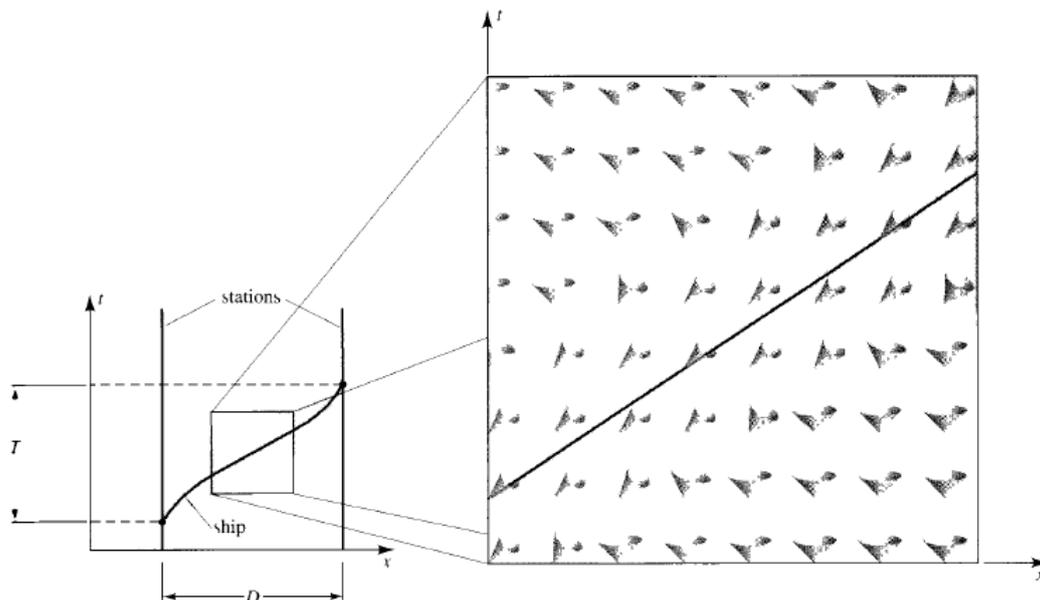


Figura 21: Cones de luz num espaço-tempo com velocidade de dobra. Uma nave espacial viajando entre duas estações espaciais seguindo a linha de mundo na figura da esquerda estaria às vezes se movendo com velocidade superior à da luz se o espaço fosse de Minkowski. Mas usando a métrica da Eq. (??), há uma bolha de curvatura espaçotemporal circundando a nave. No destaque da direita, os cones de luz de futuro estão entortados como descritos pela Eq. ?? . Mas em cada ponto, a linha de mundo da nave pertence ao interior do cone, ou seja, localmente a sua velocidade é sempre inferior à da luz. Contudo para um observador no espaço de Minkowski, fora da bolha, desconhecedor dessa curvatura, a nave teria viajado entre as duas estações em um tempo  $T$  menor do que a luz viajaria essa distância  $D$ . Fonte: Disponível de [6].

O sinal  $\pm$  corresponde às duas possíveis direções em que um raio de luz pode emergir a partir de um ponto. Deste resultado, vemos a possibilidade de ter  $\frac{dx}{dt} > 1$ , entretanto a linha de mundo da espaçonave encontra-se dentro do cone de luz. Observe pela Fig. ?? que dentro da região da bolha onde o espaço é curvo, os cones de luz estão inclinados em relação aos usuais  $45^\circ$ . Outra característica surge se considerarmos duas estações espaciais estacionárias  $A$  e  $B$  e uma nave se deslocando entre esses pontos num tempo  $T < D$ . Para os observadores nas estações, onde o espaço-tempo é plano, a nave se deslocou com velocidade aparentemente maior que a da luz conforme a Eq. (??). No entanto, o espaço-tempo é curvo, e a linha de mundo da nave é sempre interior aos cones de luz, que estão desviados. Ou seja, a nave está sempre com velocidade menor que a da

luz no seu referencial [6].

*“Poderia então uma civilização avançada construir uma espaçonave que criaria um espaço-tempo curvo como descrito pela métrica da Eq. (42)? [...] ele [espaço-tempo de Alcubierre] requer matéria ou campos com densidade de energia negativa. Todos os campos clássicos [...] possuem densidade de energia positiva. A mecânica quântica permite densidade de energia negativa, mas a física está longe de entender se ela pode ser aproveitada dessa forma.” [6]*

## Referências

- [1] D’INVERNO, R. A. *Introducing einstein’s relativity*. Clarendon Press, 1992. 4, 17, 27, 28
- [2] TAYLOR, E. F.; WHEELER, J. A.; BERTSCHINGER, E. *Exploring black holes: introduction to general relativity*. 2013.
- [3] EINSTEIN, A. *A teoria da relatividade especial e geral*. Contraponto Editora, 2003. 11
- [4] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica, 1: mecânica*. E. Blucher, 2013. 4, 9
- [5] NATARIO, J. *General relativity without calculus: a concise introduction to the geometry of relativity*. Springer Science & Business Media, 2011. 5, 6, 7
- [6] HARTLE, J. B. *Gravity: An introduction to einstein’s general relativity*, 2003. 16, 17, 22, 25, 26, 27, 30, 31
- [7] SCIAMA, D. W. *The physical foundations of general relativity*. 1969.
- [8] POUND, R. V.; REBKA JR, G. A. Gravitational red-shift in nuclear resonance. *Physical Review Letters*, New York, v. 3, n. 9, p. 439, 1959. 8

- [9] VESSOT, R. F.; LEVINE, M. W.; MATTISON, E. M.; BLOMBERG, E.; HOFFMAN, T.; NYSTROM, G.; FARREL, B.; DECHER, R.; EBY, P. B.; BAUGHER, C. et al. Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser. *Physical Review Letters*, New York, v. 45, n. 26, p. 2081, 1980. 8
- [10] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica*, 4. E. Blucher. 29
- [11] KENNEFICK, D. No shadow of doubt: Eddington, einstein and the 1919 eclipse. *Bulletin of the American Physical Society*, v. 64, 2019. 9
- [12] CÉSAR, H. L.; POMPEIA, P. J.; STUDART, N. A deflexão gravitacional da luz: De newton a einstein. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 41, 2019. 9
- [13] BBC. Brian cox visits the world's biggest vacuum | human universe - bbc. 2
- [14] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The large scale structure of space-time*. Cambridge university press, 1973. v. 1.
- [15] ABBOTT, E. *Flatland: a romance of many dimensions*. Penguin Books, 1987. 22
- [16] ZAHN, C.; KRAUS, U. Sector models—a toolkit for teaching general relativity: I. curved spaces and spacetimes. *European Journal of Physics*, Bristol, v. 35, n. 5, p. 055020, 2014. 23, 24, 25
- [17] FOSTER, J. A.; NIGHTINGALE, J. D. *A short course in general relativity*. Springer Science & Business Media, 2010. 25
- [18] MACHADO, R.; TORT, A. Michell, laplace e as estrelas negras: uma abordagem para professores do ensino médio. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 38, n. 2, p. e2314, 2016. 28
- [19] ALCUBIERRE, M. The warp drive: hyper-fast travel within general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, v. 11, n. 5, p. L73, 1994.

- [20] NATÁRIO, J. Warp drive with zero expansion. *Classical and Quantum Gravity*, v. 19, n. 6, p. 1157, 2002.
- [21] MAJOR, J. Warp drives may come with a killer downside.