



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Slides das Aulas

(Material de apoio para professores)

Edward Céspedes Carageorge
Carlos Augusto Domingues Zarro

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Edward Céspedes Carageorge, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

Março de 2020

Neste material instrucional, vamos apresentar os slides utilizados nas quatro aulas.

Aula 01: Geometria não Euclidiana

 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

1

Atividade 01

- Lápis
- Papel A4
- Tiras de cartolina
- Fita crepe
- Régua
- Transferidor
- Bola de plástico grande, de preferência



 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

2

Atividade 01

- Na folha de papel, desenhe um triângulo qualquer e meça os seus ângulos.



- Agora use as tiras de papel para fazer um triângulo sobre a esfera. Prenda-as com o durex. Retire cuidadosamente as tiras da superfície e meça os ângulos desse novo triângulo



 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

3

Atividade 01

- No primeiro experimento, quanto deu a soma dos ângulos internos do triângulo?
- Esse valor coincidiu com o esperado?
- No segundo experimento, quanto deu a soma dos ângulos internos do triângulo? É maior, menor ou igual ao primeiro?
- Esse valor coincidiu com o esperado?
- Como esse experimento poderia ser usado para demonstrar que a Terra é curva e não plana??
- Existe alguma relação dos triângulos com a gravidade?

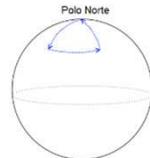
 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

4

Enigma

- *Um urso sai da sua casa e anda 1 km para o Sul, em seguida 1 km para o Leste e então 1 km para o Norte, retornando ao ponto em que começou a se mover. Qual é a cor do urso?*

- A trajetória do urso pode ser representada pela figura.



- Finalmente, podemos dizer que o urso é branco, visto que é um urso polar.

@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

5

Atividade 02 - Geodésica

- Duas partículas livres descrevem trajetórias como a do vídeo ao lado.
- As partículas se afastam e depois se aproximam.
- Qual a interação que você acha existir entre elas? Uma força de atração? Repulsão?



@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

6

Geodésica

- Existe uma maneira de descrever a trajetória dessas partículas sem usar força.
- Mudando a geometria na qual elas estão inseridas é mais fácil descrever a sua trajetória.
- Assim, o faremos com a gravidade. No lugar de usar uma força para descrever o movimento, usaremos uma mudança da geometria que seja equivalente aos efeitos gravitacionais.



@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

7

Geodésica

- É o menor caminho possível entre dois pontos em uma superfície
 - Não é uma linha reta?
- Esse é o percurso das partículas livres (sob ação gravitacional) e dos raios de luz
 - Em óptica chamamos de princípio de Fermat
- Como descrever uma geodésica em uma superfície curva?
 - Toda curva pode ser reduzida em pedaços infinitesimais planos
 - Localmente será dada por uma linha reta
- Volte no mapa anterior e veja quais são os menores percursos do polo norte ao sul
 - Qualquer meridiano



@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

8

Geodésica



- Para uma esfera, consideremos uma linha que começa no equador ao norte e é localmente reta.
- Essa linha é chamada de meridiano.
- Duas linhas de longitude são paralelas no equador, mas em direção ao polo norte eles convergem.
- As paralelas se encontram!

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

9

Mapas

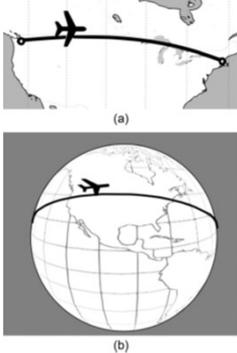


- Em muitas situações é necessário estudar a geometria de outras superfícies. Para planejar uma grande viagem de avião ou barco, por exemplo, é preciso compreender a geometria de uma superfície esférica.
- Olhe para o mapa e localize dois lugares em uma mesma latitude.
- Para onde um avião deveria seguir viagem para percorrer o menor caminho entre as duas cidades?
- Uma linha reta? Essa é um ótima reposta.
- Vamos desenhar essa reta no globo para verificar o caminho.
- Observe que o avião não voa diretamente para oeste, ele deve voar para noroeste, virando para oeste e finalmente para sudeste como pode ser visto na figura

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

10

Mapas



- Observe que o avião não voa diretamente para leste, ele deve voar para nordeste, virando para leste e finalmente para sudoeste como pode ser visto na figura

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

11

Atividade 03

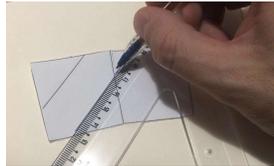
- "Eu chamo o nosso mundo de Flatland[...]. Imagine uma vasta folha de papel sobre a qual [...] figuras [...] se movem livremente, mas sem o poder de elevar-se ou afundar-se abaixo dela, muito parecido com sombras".
- Os flatlanders se movem em duas dimensões (frente-trás ou direita-esquerda), a terceira dimensão (cima-baixo) não é apenas inacessível para eles, mas está além de sua imaginação.
- Na falta do conceito de cima e para baixo, eles não podem conceber uma superfície curvada a um espaço tridimensional de encaixe.
- Será que eles seriam capazes de descobrir se estão em um mundo plano ou curvo? Já respondemos a essa pergunta com a soma dos ângulos internos do triângulo.
- Nós somos flatlanders, familiarizados com três dimensões, mas incapazes de conceber um espaço dimensional superior, podemos examinar a curvatura do nosso espaço tridimensional da mesma maneira que os flatlanders examinam as superfícies curvas no plano.

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

12

Modelos de Setores

- Vamos ver agora um recurso geométrico visual para desenharmos as geodésicas
- Os modelos representam setores de superfícies esféricas: como se fossem os gomos
- Pegue um deles e comece a desenhar uma geodésica
 - Localmente são linhas retas

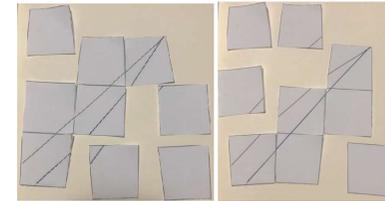


 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

13

Modelos de Setores

- O que acontece quando desenhamos duas geodésicas que começam paralelas entre si numa superfície esférica?
- Como as peças dos setores não se encaixam, cada reta deve ser traçada unindo os seus pedaços como na figura abaixo

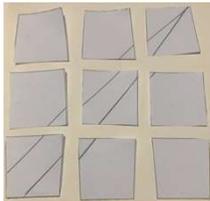


 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

14

Modelos de Setores

- Como nosso setor é derivada de uma esfera, ao traçarmos as geodésicas que se iniciam paralelas, elas convergem



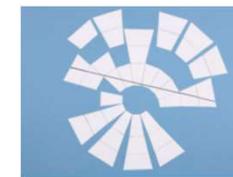
- Qual você acha que é a relação desse traçado com a interação gravitacional?

 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

15

Atividade 04 – Buraco negro

- O que você acha que os BN têm de especial?
- O caminho da luz próximo a um BN pode ser descrito geometricamente?



- Sem nenhuma conta conseguimos descrever a trajetória do raio de luz próximo a um BN

 @edwardfisica
  Prof Edward Física
  profedwardfisica

16

Aula 02: Noções básicas de relatividade geral

 @edwardfisica
  Prof Edward Fisica
  profedwardfisica

17

Princípio da equivalência

- Massa inercial: é a medida do seu coeficiente de inércia, ou seja, da sua resistência em ter seu estado de movimento alterado

$$\vec{F} = m_i \vec{a}$$

- Massa gravitacional ativa: é capaz de provocar forças em outros corpos, ou em termos modernos, ser fonte de campo gravitacional.

$$g = \frac{G}{d^2} m_{g(a)}$$

- Massa gravitacional passiva: é a propriedade do corpo que o faz sofrer ação da força peso, também chamada de uma carga gravitacional.

$$\vec{P} = m_{g(p)} \vec{g}$$

 @edwardfisica
  Prof Edward Fisica
  profedwardfisica

18

Princípio da equivalência

- Todos os corpos independentemente da massa e do formato são submetidos à mesma aceleração gravitacional



 @edwardfisica
  Prof Edward Fisica
  profedwardfisica

19

Princípio da equivalência

- Será que é tão óbvio que todas essas massas são iguais?
- Isaac Newton verificou a coincidência entre essas massas
- Vários experimentos nos séculos XIX e XX mostraram a equivalência entre as massas com um erro menor que 10^{-12}
 - Sendo esse um dos melhores resultados estabelecidos na física

- Analogamente será que a carga elétrica também é igual à massa inercial?

$$q\vec{E} = m_i \vec{a}$$

- “Em 1907, Einstein teve “a ideia mais feliz de sua vida”: o princípio da equivalência. Para um observador em queda livre não há gravidade nas suas proximidades. Assim se ele abandonar um corpo qualquer, ele permanecerá em repouso para esse observador”

 @edwardfisica
  Prof Edward Fisica
  profedwardfisica

20

Princípio da equivalência

- Como um referencial sob ação do campo gravitacional vê objetos em queda livre

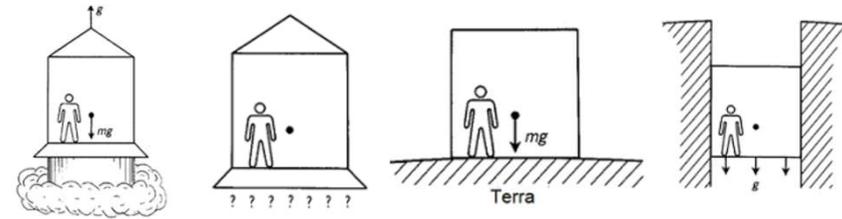


@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

21

Campo gravitacional

- Claramente, do ponto de vista do astronauta, as situações 1 e 3 são indistinguíveis, assim como 2 e 4.
- Portanto, a gravidade pode ser criada por aceleração (princípio da equivalência).



@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

22

Princípio de equivalência

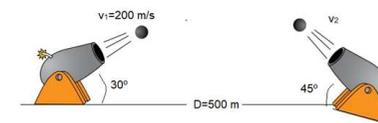
- "A grande vantagem do Princípio da Equivalência é que os efeitos produzidos por um campo gravitacional uniforme não precisamos da teoria da gravitação [...] Tudo o que devemos fazer é supor que os sistemas considerados possuem aceleração em relação a um referencial inercial"

@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

23

Exercício

- Dois canhões são posicionados conforme a figura abaixo e seus projéteis são lançados simultaneamente. Determine a velocidade v_2 para que os projéteis se interceptem.

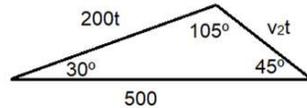


@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

24

Solução

- Usando um corpo em queda livre como referencial, temos que os projéteis executam MRU.



- Lei dos senos:

$$\frac{200 \cdot t}{\sin(45^\circ)} = \frac{500}{\sin(105^\circ)} = \frac{v_2 \cdot t}{\sin(30^\circ)} \Rightarrow v_2 = 100\sqrt{2} \approx 141 \text{ m/s}$$

$$t \approx 1,83 \text{ s}$$

@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

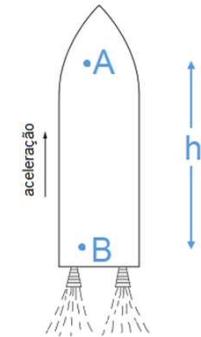
25

Redshift – Desvio para o vermelho

- Considere a luz viajando de baixo para o topo de um foguete em constante aceleração de módulo a , como na figura abaixo. Seja o referencial S no ponto A na parte inferior da nave espacial e S' no ponto B , na parte superior distante h . Qual é a razão entre as frequências da luz emitida por um laser em A e detectada em B ?

$$f' = f \left(\frac{c - v_{obs}}{c} \right) = f \left(1 - \frac{gt}{c} \right) = f \left(1 - \frac{gh}{c^2} \right)$$

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T} \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right) \Rightarrow T' \approx T \left(1 + \frac{\varphi}{c^2} \right)$$

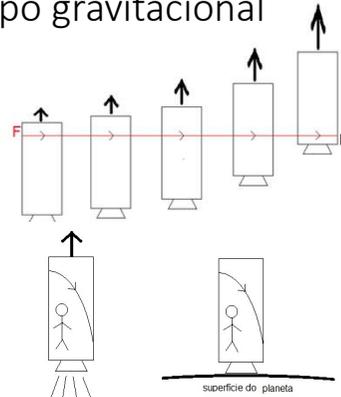


@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

26

Desvio da luz em um campo gravitacional

- Considere um foguete em acelerado para cima, isolado de outras interações gravitacionais, com uma fonte de luz F emitindo um raio de luz na direção horizontal.
- Qual será a trajetória para um observador dentro e outro fora do foguete?



@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

27

Exercício

- Considere o trajeto de um raio luminoso sob ação do campo gravitacional terrestre na superfície com $g = 10 \text{ m/s}^2$. Após percorrer 1 km, qual será o seu desvio vertical devido à ação gravitacional?

$$t = \frac{d}{c} = \frac{1 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \approx 0,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

$$h = \frac{g \cdot t^2}{2} = \frac{10 \cdot (0,3 \cdot 10^{-5})^2}{2} \approx 0,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

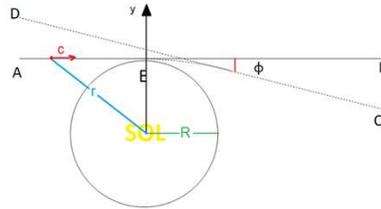
28

Exercício – Um pouco mais difícil

- Aplicando um raciocínio análogo ao da questão anterior, calcule o ângulo de deflexão gravitacional de um raio luminoso que, propagando-se no vácuo, tangencia um corpo esfericamente simétrico de raio R e massa M , percorrendo uma distância muito maior que R . Estime o resultado para o desvio próximo ao Sol

$$M = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$R = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$$



@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

29

Solução

- A velocidade “adquirida” devido à interação gravitacional pode ser calculada pelo teorema do impulso

$$m \cdot v_x = \int F_x \cdot dt = \int F_x \cdot \frac{dy}{v_y} = \frac{1}{c} \int \frac{GMm}{d^2} \sin(\theta) \cdot dy$$

$$v_x = \frac{1}{c} \int \frac{GM}{d^2} \frac{r_0}{d} \cdot dy = \frac{1}{c} \int \frac{GM r_0}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}} \cdot dy = -\frac{GM r_0}{c} \frac{-2}{(r_0^2 + y^2)^{1/2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{2GM}{Rc}$$

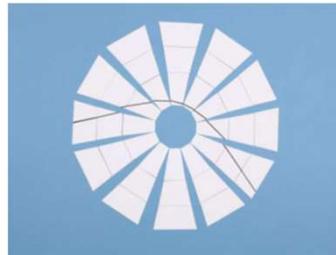
$$\tan \phi = \frac{v_x}{v_y} = \frac{2GM}{Rc^2} \Rightarrow \phi \cong 0,87''$$

@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

30

Desvio da luz em um campo gravitacional

- Relembre do trajeto da luz desenhado usando os modelos de seção.
 - A matemática usada é condizente com o desenho do desvio da luz?
- Eclipse de Sobral
 - O resultado real foi o dobro da conta que realizamos. Por que essa diferença?
 - Onde “está” a outra metade do desvio?
- Einstein atribui
 - metade dessa deflexão ao efeito do campo Newtoniano de atração do Sol
 - e a outra metade à curvatura apenas do espaço causada pela presença do Sol.
 - Quando esses efeitos são somados, temos o resultado previsto pela TRG.



@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

31

Aula 03: Métrica

@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

32

Relatividade restrita

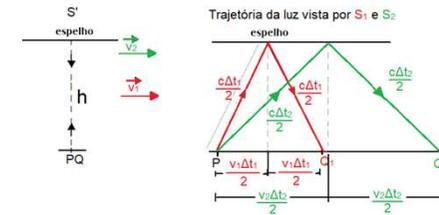
- **Postulado 1:** Todas as leis da física são as mesmas em todos os sistemas de referência inercial, ou seja, não existe referencial preferencial.
- **Postulado 2:** A velocidade da luz no vácuo é a mesma todos os referenciais

@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

33

Relatividade restrita

- Imagine um trem que viaja com velocidade horizontal constante de módulo v . Dentro dele, existe um relógio de luz, composto por uma fonte no chão do trem e um espelho plano no teto a uma distância h .
- O nosso **segundo** será o tempo que o raio de luz leva para sair da fonte, ser refletido pelo espelho e retornar para um detector no chão.



@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

34

Relógio de luz

- Para S' : $\Delta t' = 2h/c$
- Para o referencial S , usamos o teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 - \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = h^2 \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - c^2/v^2}}$$
- Se fizermos isso para dois referenciais S_1 e S_2 , teremos:

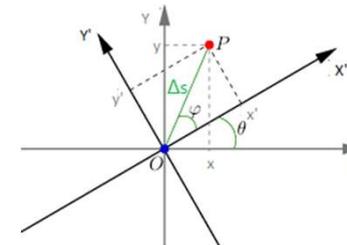
$$(c\Delta t_1)^2 - (v_1\Delta t_1)^2 = (c\Delta t_2)^2 - (v_2\Delta t_2)^2 = 4h^2 = -\Delta s^2$$
- Esse valor $-\Delta s^2$ é um invariante, ou seja, é constante independente do referencial e chamado intervalo espaço-temporal.

@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

35

Geometria não-Euclidiana

- Invariância da distância por rotação



@edwardfisica Prof Edward Física profedwardfisica

36

Geometria não-Euclidiana

$$dS^2 = (a \cdot \text{sen}\theta \cdot d\phi)^2 + (a \cdot d\theta)^2 = a^2 \left((d\theta)^2 + \text{sen}^2\theta \cdot (d\phi)^2 \right)$$

$$C = \oint dS = \int_0^{2\pi} a \cdot \text{sen}\theta \cdot d\phi = 2\pi a \cdot \text{sen}\theta$$

$$r = \int dS = \int_0^{\Theta} a \cdot d\phi = a \cdot \Theta \Rightarrow \Theta = \frac{r}{a}$$

$$C = 2\pi a \cdot \text{sen}\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} C = 2\pi a \frac{r}{a} = 2\pi r$$

Equador

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

37

Coordenadas espaço-temporais

- Elemento de linha: é o infinitésimo do intervalo espaço-temporal, em 4 dimensões pode ser escrito em coordenadas:

- Cartesianas: $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$
- Esféricas: $ds^2 = -(cdt)^2 + dr^2 + r^2 \cdot d\theta^2 + r^2 \cdot \text{sen}^2\theta \cdot d\phi$

- A mudança da coordenada temporal já foi observada no *desvio para o vermelho* com alteração do tempo pelo potencial gravitacional ϕ
- Podemos reescrever as coordenadas cartesianas como:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

38

Coordenadas do espaço-tempo

- A teoria clássica previa um desvio da luz provocado pela ação gravitacional. No entanto, o valor encontrado pelos astrônomos foi o dobro do previsto pela teoria Newtoniana.
- Em uma exposição simplificada de suas ideias, publicada em 1920, Einstein atribui metade dessa deflexão ao efeito do campo newtoniano de atração do Sol e a outra metade à curvatura do espaço causada pela presença do Sol.
- Essa curvatura pode ser expressa como uma alteração na métrica (Schwarzschild) do espaço pela seguinte equação:

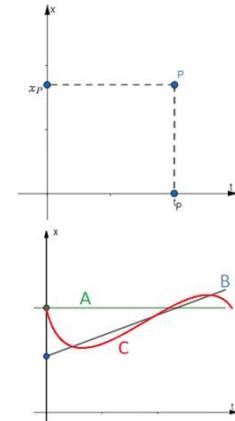
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)(c \cdot dt)^2$$

@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

39

Diagramas de espaço-tempo

- Para conseguirmos expressar os eventos usando a geometria, vamos descrever um sistema quadridimensional (t, x, y, z) , que será representado por um **diagrama de espaço-tempo**
- Os eventos serão representados por um ponto P dizendo onde x_p e quando t_p ele ocorreu.
- Uma partícula descreverá sua trajetória espaço-temporal por uma linha de mundo.
- Assim como na cinemática tradicional, a inclinação da reta nos fornecerá o valor da velocidade

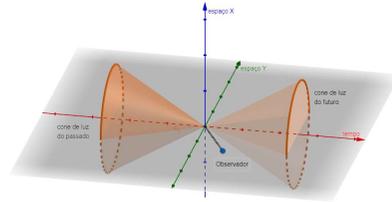


@edwardfisica Prof Edward Fisica profedwardfisica

40

Cones de luz

- Representam a trajetória de um raio de luz em um diagrama espaço-tempo
- A luz é uma velocidade limite para o movimento dos corpos, portanto, nada pode se mover mais rápido que a luz
- Esse limite define no espaço uma região de passado e futuro denominada cone de luz.
- Qualquer linha de mundo deve estar contida no cone de luz
- Cada geratriz do cone está inclinada 45° em relação ao eixo espaço-tempo

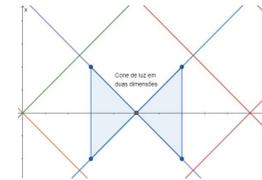


@edwardfisica
 Prof Edward Física
 profedwardfisica

41

Cones de luz

- Vamos trabalhar de maneira simplificada em apenas duas dimensões: uma espacial e outra temporal.
- Os cones de luz serão uma malha de retas inclinadas de 45° indicando de onde partem os raios de luz e o sentido do seu movimento

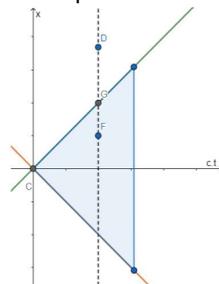


@edwardfisica
 Prof Edward Física
 profedwardfisica

42

Cones de luz

- O elemento de linha, ds^2 , pode assumir três tipos de valores:
 - $ds^2 > 0$: tipo tempo (F),
 - $ds^2 = 0$: tipo nulo (G),
 - $ds^2 < 0$: tipo espaço (D).



@edwardfisica
 Prof Edward Física
 profedwardfisica

43

Aula 04: Fenômenos gravitacionais

@edwardfisica
 Prof Edward Física
 profedwardfisica

44

Geodésica

- "A curvatura do espaço-tempo explorada pela teoria da relatividade geral é estudada através da trajetória de uma partícula de teste e um raio de luz. Apenas partículas livres ou em queda livre serão consideradas"
- A trajetória seguida por uma partícula livre entre dois pontos do tipo tempo extremiza o tempo próprio entre eles, matematicamente pode ser representado por:

$$\int (-\eta_{ab} dx^a dx^b)^{1/2} = 0$$

- Isso é análogo ao princípio de Fermat na óptica geométrica

 @edwardfisica  Prof Edward Física  profedwardfisica

45

Equação de Einstein

- A equação de Einstein governa a geometria do espaço-tempo curvo, equação básica da relatividade geral [...] Ela é o equivalente das equações de Maxwell para o eletromagnetismo.
- Dessa forma, qualquer fonte pode provocar uma deformação na métrica espacial representada por uma função $f(\phi)$, originando um elemento de linha com a forma

$$ds^2 = f(\phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (1 + 2\phi)dt^2$$

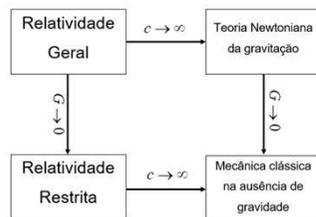
- Qual é a origem dessa deformação?

 @edwardfisica  Prof Edward Física  profedwardfisica

46

Princípio da Correspondência

- "Qualquer nova teoria tem que ser consistente com as teorias anteriores dentro do seu limite de validade. Assim a relatividade geral deve levar à relatividade restrita na ausência de gravidade, quando G tende a 0 e à gravitação newtoniana em campos gravitacionais fracos e com velocidades pequenas quando comparadas a da luz, ou seja, quando c tende para infinito. Para ambas as condições satisfeitas, a mecânica clássica deve prevalecer."



 @edwardfisica  Prof Edward Física  profedwardfisica

47

Equação de Einstein

- A equação de Einstein relaciona a curvatura do espaço-tempo com sua fonte (massa-energia da matéria) em um conjunto de dez equações diferenciais de segunda ordem não lineares e não independentes, o que torna sua solução muito complicada
 - G é o tensor de curvatura, associada com a estrutura geométrica do espaço-tempo. Essa grandeza que diz qual será a métrica do espaço.
 - T é o tensor de energia-momento, que depende da distribuição de matéria e energia do universo.

$$G = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

- A gravitação newtoniana surge da relatividade geral quando uma deformação na parte espacial da métrica é considerada cujo valor depende do potencial gravitacional, diretamente proporcional à massa.
- No limite newtoniano, ou seja, para pequenas massas e velocidades muito menores que a da luz, as equações da relatividade geral devem reproduzir a lei do inverso do quadrado das distâncias

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2}$$

 @edwardfisica  Prof Edward Física  profedwardfisica

48

Desvio para o vermelho gravitacional

- Agora vamos usar a métrica de Schwarzschild para mostrar que ela também deriva o mesmo resultado.
- Consideremos sinais a propagarem-se no eixo x emitidos a partir de um ponto A em x_A e recebidos em por um ponto B em x_B .
- Note que, como em um espaço-tempo curvo, a linha de mundo do raio de luz não será mais uma reta com 45° de inclinação.
- As linhas de mundo dos sinais emitidos terão a mesma forma pois a geometria não depende do tempo.
- A distância temporal entre dois sinais consecutivos será Δt , porém o tempo próprio medido em x_A e x_B serão diferentes entre si, pois

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2$$

 @edwardfisica  Prof Edward Fisica  profedwardfisica

49

Desvio para o vermelho gravitacional

- Para A e B , temos que $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ de modo que o tempo próprio para a emissão usando a métrica de Schwarzschild será:

$$\Delta \tau = (1 + 2\Phi(x))^{1/2} \Delta t \approx (1 + \Phi(x)) \Delta t$$

$$\Delta \tau_B \approx (1 + \Phi(x_B) - \Phi(x_A)) \Delta \tau_A$$

$$\frac{\Delta \tau_B}{\Delta \tau_A} \approx \frac{(1 + \Phi(x_B)) \Delta t}{(1 + \Phi(x_A)) \Delta t} \approx (1 + \Phi(x_B) - \Phi(x_A))$$

$$\Delta \tau_B \approx (1 + \Phi(x_B) - \Phi(x_A)) \Delta \tau_A$$

 @edwardfisica  Prof Edward Fisica  profedwardfisica

50

Buraco negro

- Como surgem?
- O que aconteceria com a órbita da Terra e demais planetas do sistema solar se o Sol se transformasse subitamente em um buraco negro.
- Métrica de Schwarzschild em unidades geometrizadas
 - $c=1$ e $G=1$

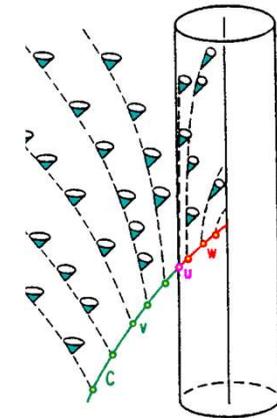
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

 @edwardfisica  Prof Edward Fisica  profedwardfisica

51

Buraco negro

- Não temos acesso a todo o espaço-tempo!
- Surge um horizonte de eventos.
- Nada consegue atravessar o horizonte de dentro para fora.
- No centro do buraco negro há uma divergência na curvatura.



 @edwardfisica  Prof Edward Fisica  profedwardfisica

52

Buraco negro

- Cálculo do raio do horizonte de eventos de um buraco negro.
- Curiosamente este é mesmo raio calculado por Michell e Laplace como sendo o raio de uma estrela de massa M de modo que nem a luz consiga escapar da atração do seu campo gravitacional.
- Vamos usar a equação da velocidade de escape e determinar esse raio:

$$E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}} = 0 \Rightarrow \frac{mv_{\text{escape}}^2}{2} - \frac{GMm}{r_s} = 0$$

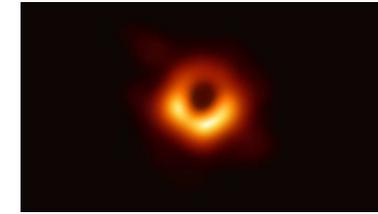
$$v_{\text{escape}} = c = \sqrt{\frac{2GM}{r_s}} \Rightarrow r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

 @edwardfisica  Prof Edward Fisica  profedwardfisica

53

Buraco negro: bônus

- Tiramos a primeira foto de um buraco negro em Abril de 2019
- Assista ao vídeo para entender melhor o processo que levou a essa fotografia
- Canal Veritasium
 - Como Entender a Imagem de um Buraco Negro
 - <https://youtu.be/zUyH3XhpLTo>

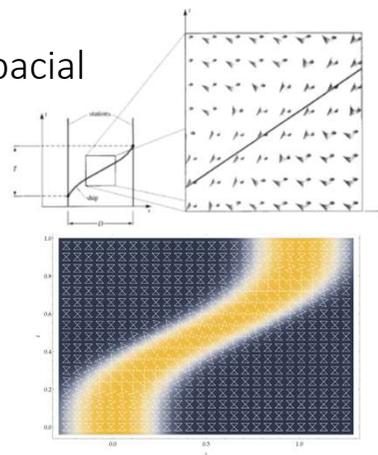


 @edwardfisica  Prof Edward Fisica  profedwardfisica

54

Velocidade de Dobra Espacial

- Observe na figura onde o espaço é curvo,
- Os cones de luz estão inclinados em relação ao usual 45° .
- Outra característica surge se considerarmos duas estações espaciais estacionárias A e B e uma nave se deslocando entre esses pontos num tempo $T < D$.
- Para os observadores nas estações, onde o espaço-tempo é plano, a nave se deslocou com velocidade maior que a da luz.
- No entanto, o espaço-tempo é curvo, e a linha de mundo da nave é sempre interior aos cones de luz, que estão desviados.
- Ou seja, a nave está sempre com velocidade menor que a da luz



 @edwardfisica  Prof Edward Fisica  profedwardfisica

55

Então podemos viajar com velocidade maior que a da luz?

- *"O fato de que esta expressão (a densidade de energia) é negativa em todos os pontos implica que condições de energia fraca e dominante, assim como a forte são violadas [...] Dessa forma, assim como ocorre em buracos de minhoca, é necessário matéria exótica para viajar mais rápido que a luz. Contudo, mesmo que essa energia seja proibida classicamente, sabe-se que campos quânticos permitem a existência de regiões com densidade negativa de energia, como no efeito Casimir. A necessidade da matéria exótica não elimina a possibilidade de usar a distorção do espaço-tempo como a descrita acima para viagens interestelares hiper-rápidas"*

 @edwardfisica  Prof Edward Fisica  profedwardfisica

56

Referências

- [1] AAKER, D. A.; KUMAR, V.; DAY, G. S. *Marketing research*. John Wiley & Sons, 2008.