



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Textos de aprofundamento

Artur Alberto Gomes Neto

Carlos Augusto Domingues Zarro

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Artur Alberto Gomes Neto, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
Janeiro de 2020

1 A Teoria da Relatividade Geral

Em 1905, Albert Einstein propõe a teoria da relatividade restrita (EINSTEIN, 2007). É baseada em dois postulados: o primeiro, chamado de *princípio da relatividade restrita*, afirma que todas as leis físicas são as mesmas para quaisquer referenciais inerciais, e o segundo, chamado de *postulado da constância da velocidade da luz*, estabelece que a velocidade da luz é um invariante, *i.e.*, tem o mesmo valor em qualquer referencial. Esta teoria resolve o aparente conflito entre o eletromagnetismo de Maxwell e a mecânica Newtoniana, levando a uma nova maneira de ver as relações do espaço e do tempo, em particular a noção de simultaneidade deixa de ser absoluta, como na mecânica Newtoniana.

O caráter privilegiado dos referenciais inerciais incomodou Einstein e este pôs-se a buscar uma teoria em que todas as leis físicas seriam as mesmas independentemente do referencial adotado. Ele chamou este fato de *princípio da relatividade geral* (EINSTEIN, 2007).

Como introduzir referenciais não inerciais? Na mecânica Newtoniana, nos referenciais não inerciais, existem as chamadas forças de inércia (NUSSENZVEIG, 2002). Uma característica destas forças é que são proporcionais a massa inercial.

Houve uma pista inesperada, quando Galileu notou que todos os corpos caíam pela força gravitacional, nas proximidades da superfície terrestre, com a mesma aceleração independente da forma, composição ou massa gravitacional. Isto leva a igualdade entre duas massas inicialmente distintas: a massa inercial, que mediria a inércia de um corpo e a massa gravitacional, que funciona como uma “carga gravitacional”. Este resultado passou como um detalhe curioso na mecânica Newtoniana, sem grandes consequências. Porém, para Einstein, isto foi fundamental no seu raciocínio, pois localmente, campos gravitacionais seriam equivalentes aos campos de aceleração, com isto enunciando o *princípio da equivalência*.

Assim, chegamos à gravidade. A lei da gravitação universal apresenta uma força de ação à distância, *i.e.*, a interação gravitacional ocorre instantaneamente e simultaneamente entre os corpos. Porém, posteriormente, vimos com a teoria da relatividade restrita que há um limite de velocidade

máximo dado pela velocidade da luz no vácuo. Temos agora um outro problema que seria como descrever a gravitação como uma interação satisfazendo os princípios da teoria da relatividade restrita. Einstein, em 1909, obteve um outro grande avanço, descrevendo a gravidade como uma teoria geométrica do espaço e do tempo (JAMMER, 2010). A identificação entre a gravidade e a geometria, ocorreu para Einstein na sua interpretação do chamado paradoxo de Ehrenfest (NUSSENZVEIG, 1998). Suponha um disco de raio R girando com velocidade angular constante ω . A borda do disco possui velocidade tangencial de $v = \omega R$. Pela relatividade restrita, o perímetro do disco sofrerá uma contração, sendo menor do que o esperado, ou seja, $2\pi R$. Os postulados fundamentais da geometria Euclidiana não são satisfeitos. Einstein então argumenta que a geometria adequada a este problema seria uma geometria não Euclidiana. O fato do disco estar girando leva-nos a um referencial não inercial e pelo princípio de equivalência, podemos pensar que um campo gravitacional pode ser descrito por uma geometria não Euclidiana.

Pela gravitação universal, não esperamos que a luz, dado que sua massa gravitacional é nula, seja influenciada pela interação gravitacional, mesmo havendo uma previsão clássica para o desvio, calculada através de artifícios matemáticos. Tal fato altera-se completamente na teoria da relatividade geral (TRG), a luz será defletida pelo campo gravitacional.

Temos então um teste para a TRG. Se medirmos a deflexão da luz num campo gravitacional, poderemos verificá-la ou não (KENNEFICK, 2019). Podemos mostrar que a deflexão de um raio luminoso passando tangencialmente ao Sol é dada por (LENZI, POMPEIA E STUDART, 2019)

$$\delta = \frac{4GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}}, \quad (1.1)$$

onde $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ é a constante, $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ é a massa do Sol, $R_{\odot} \approx 7 \times 10^8 \text{ m}$ é o raio do Sol e $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ é a velocidade da luz no vácuo. Substituindo estes valores na equação (1.1) acima, temos que o desvio da luz neste caso é de $\delta \approx 1,75''$. Este foi o valor obtido por Einstein em 1915 (LORENTZ, EINSTEIN E MINKOWSKI, 1971). Einstein propôs que se poderia observar estrelas durante um eclipse solar total e depois comparar a sua posição com a localização da mesma estrela sem a influência do Sol. Em 1919, este experimento foi realizado em Sobral, no Ceará e na ilha de Príncipe, antiga colônia portuguesa na África, por A. Eddington e F. Dyson. Um leitor interessado numa obra bastante completa sobre o assunto deve

consultar a referência (KENNEFICK, 2019). Uma referência bastante acessível em língua portuguesa é (CRISPINO E LIMA, 2018).

2 A Geometria do Espaço-tempo

Quando olhamos ao nosso redor, em casa, na escola, no trabalho, é inevitável nos depararmos com entes da geometria “básica”, a geometria de Euclides. Planos, retas, pontos, são utilizados por todos muitas vezes sem conhecer a fundo a “verdade” intrínseca existente, que está associada aos axiomas (uma espécie de definições que não se podem desconfiar). Possivelmente tais axiomas são obtidos com o auxílio de réguas, compassos e transferidores, tornando-os concretos e palpáveis ao homem. Por exemplo, podemos citar a reta que passa por dois pontos, está enraizado em nossos pensamentos que ela é unívoca, além de sabermos que o segmento que une os dois pontos é a menor distância entre eles. Este capítulo é inspirado na referência (EINSTEIN, 2007).

O sistema de coordenadas utilizado pela mecânica clássica é completamente refém de tais “verdades” da geometria. Para determinar a posição de um ponto, basta medirmos suas distâncias em relação à três planos perpendiculares entre si, então definimos a localização em relação a um sistema de coordenadas. Mas é fácil perceber que se nos baseássemos em outro conjunto de três planos, as medidas das distâncias seriam diferentes, obviamente, há uma dependência das coordenadas que faz toda a diferença. Isso se torna ainda mais evidente quando representamos uma trajetória, um conjunto de pontos ocupados no decorrer de um intervalo de tempo. Por exemplo, suponha um objeto caindo da janela de um trem em movimento uniforme, para o observador no interior do vagão a trajetória é vertical, mas alguém no solo veria um arco de parábola sendo descrito pelo mesmo objeto.

Vamos supor uma mesa, plana, de mármore, onde vamos apoiar bastõezinhos iguais, de maneira a formar quadrados idênticos, onde cada vértice pertence a quatro quadrados ao mesmo tempo. Com a superfície plana da mesa não há nenhuma surpresa em conseguir tal feito, entretanto se pudéssemos alterar a planicidade do mármore, os quadrados deixariam de ficar perfeitamente alinhados. Imaginemos que o centro da mesa seja aquecido gerando uma dilatação dos bastõezinhos, toda a configuração plana que temos será desfeita, já que os tamanhos dos bastões

não serão mais uniformes. Podemos dizer que a mesa não é mais um contínuo euclidiano, o mesmo acontece com um espaço curvo. Para representar tal situação precisaremos de outras geometrias, como a de Riemann, de Minkowski ou de Lobachevsky, figuras 1 e 2. Para uma referência bastante acessível sobre a história da Geometria, em especial sobre as geometrias não Euclidianas sugerimos (MLODINOW, 2004).

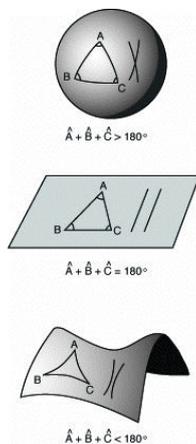


Figura 1. Concepção de espaços por Riemann, Euclides e Lobachevsky. Disponível em <https://medium.com/@eltonwade/geometrias-não-euclidianas-136daa0b82b6> (Acessado em 05/01/2020)

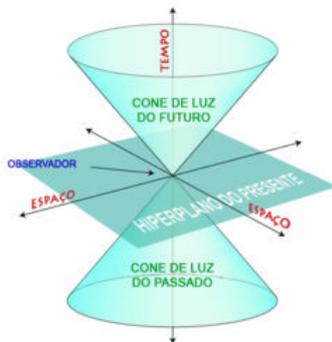


Figura 2. Concepção de Minkowski. Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Cone_de_luz (Acessado em 05/01/2020)

É fácil perceber que algumas “verdades” do espaço Euclidiano não valem em outros espaços, como por exemplo, duas retas paralelas que num plano jamais se tocam, mas sobre uma superfície esférica irão se cruzar em um dos polos e caso elas percorressem uma superfície tipo "cela de cavalo”, elas se afastariam. Outro exemplo interessante seria a soma dos ângulos internos de um triângulo, o resultado é maior que 180° quando a superfície é esférica, como indicado nas figura 3.

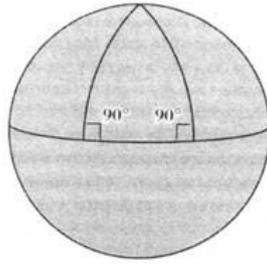


Figura 3. Um triângulo representado sobre uma superfície esférica pode conter dois ângulos retos, por exemplo Disponível em <https://sites.google.com/site/matematicainicio/geometria-nao-euclidiana> (Acessado em 05/01/2020)

Vejamos que uma “linha reta” sobre uma superfície esférica, pode ser encarada como uma curva quando analisada sob aspecto Euclidiano, porém essa “linha curva” está em total acordo com o princípio de Pierre Fermat (1601-1665), que diz: a luz percorre o caminho que minimiza o tempo entre dois pontos, que localmente podemos imaginar esse caminho sendo uma reta, no sentido de ser uma curva que minimiza a distância entre dois pontos, também chamada de *geodésica*. Então se a relatividade geral de Einstein apresenta a gravidade como resultado da deformação do espaço-tempo provocado por uma massa, atribuindo uma geometria não Euclidiana ao Universo, ao percorrer o espaço curvo a luz não seguirá um caminho retilíneo, mas sim um caminho que minimiza a distância entre dois pontos neste espaço. Obviamente uma geodésica no espaço Euclidiano é uma reta e qualquer superfície quando observada localmente pode ser aproximada para uma superfície plana e contínua, mas ao atravessar um espaço curvo a geodésica não será retilínea.

Apesar das superfícies apresentarem aspectos distintos, existem características que são comuns aos espaços, por exemplo, ambos são tridimensionais. Isto é, podemos descrever a posição de qualquer ponto em repouso através de três números: x , y e z , chamados de coordenadas, onde cada ponto possuirá apenas um conjunto de coordenadas, não podendo ser representado por outro. No entanto, Hermann Minkowski, matemático alemão de ascendência judia-lituana, teve uma ideia para o que ele chama de mundo dos eventos físicos, sua concepção está representada na figura 2. Além das três coordenadas de espaço, acrescentemos uma coordenada do tempo no nosso, agora, espaço-tempo. O fato dessa quarta coordenada não ser tão habitual, ocorre porque antes da relatividade restrita de Einstein o tempo era absoluto e independente do referencial, a relatividade restrita mostrou que o tempo também depende desse sistema de referência, caracterizando-o como

uma quarta coordenada capaz de descrever, com o auxílio das coordenadas do espaço, a “localização” de um ponto no espaço-tempo, conhecido como *evento*.

3 Princípio da Equivalência

Inegavelmente a teoria de Newton sobre o movimento dos corpos celestes fez um enorme sucesso, apesar de suas limitações. Uma observação curiosa em seus trabalhos é a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional, que a princípio deveriam ser distintas, já que a inercial define a “dificuldade” dos corpos em alterarem seu estado de movimento, *i.e.* em obterem aceleração quando sofrem a ação de uma força, e a massa gravitacional está associada a uma espécie de “carga gravitacional”. O nome carga gravitacional ocorre pela analogia com a carga elétrica, sendo a constante de proporcionalidade entre a força gravitacional que age no corpo e o campo gravitacional gerado pelos corpos ao redor. A igualdade entre as massas inercial e gravitacional, conforme mencionado na seção 1, permite que todos os corpos caiam com a mesma aceleração quando atraídos pela mesma massa central. Porém, as leis de Newton são válidas apenas em referenciais inerciais, gerando a necessidade de existir uma classe de referencias privilegiados. Esta condição foi rejeitada por Albert Einstein em sua Teoria da Relatividade Geral.

Albert Einstein propôs então uma experiência de pensamento (GAMOW, 2002), suponha um astronauta flutuando no interior de um foguete sem janelas, suficientemente distante de qualquer campo gravitacional a ponto de não sentir sua existência, conforme mostra a figura 4. Quando os motores forem ligados, acelerando o foguete, o astronauta experimentará essa aceleração no sentido oposto, em direção ao piso da nave. Para ele, não será possível distinguir o que está ocorrendo, a nave está acelerando ou ela se encontra imersa em algum campo gravitacional? Ele não pode ter certeza, pois nos dois casos os resultados seriam equivalentes. Agora, nosso amigo astronauta deixará cair duas esferas de massas distintas dentro do foguete acelerado, tal qual Galileu havia previsto, ele observará as duas esferas atingindo o “piso” do foguete simultaneamente, como se estivessem submetidas a uma atração gravitacional, contudo, um observador do lado de fora, veria o “piso” do foguete atingir as esferas e não uma queda das mesmas. Com isso, Einstein iniciou sua nova teoria da Gravitação estabelecendo o Princípio da Equivalência entre um campo gravitacional e uma “sala” acelerada. Analogamente, para o mesmo foguete acima, em queda livre nas proximidades da superfície da Terra (desprezando-se a resistência do ar), um observador dentro do

foguete terá uma sensação de imponderabilidade e qualquer experimento realizado será incapaz de distinguir se o foguete é um referencial inercial ou está em queda livre. Isso indica que as leis físicas são as mesmas quando estamos em um referencial em queda livre num campo gravitacional uniforme ou num referencial inercial na ausência de campo gravitacional. Mas isso não ficou restrito à mecânica, ele também teve a ideia de utilizar o princípio para fenômenos ópticos e eletromagnéticos. Nas palavras de Einstein, em 1908:

Num recinto suficientemente pequeno para que o campo gravitacional dentro dele possa ser tomado como uniforme, em queda livre dentro deste campo, todas as leis físicas são as mesmas que num referencial inercial, na ausência de um campo gravitacional. (NUSSENZSVEIG, 1998 apud EINSTEIN, 1908)



Figura 4. O experimento pensado do foguete de Einstein. (GAMOW, 2002)

Vamos imaginar nosso foguete acelerado com um feixe de luz que se propagará em seu interior, entre suas paredes opostas, conforme indicado na figura 5. Ao longo de sua trajetória, colocaremos vidros transparentes que deixarão um ponto marcado assim que a luz passar. Enquanto o feixe de luz se propaga, o foguete acelera em uma direção perpendicular e os pontos deixados nas placas vão sendo fixados em posições cada vez mais inferiores, gerando um caminho parabólico. Um observador dentro do foguete concluirá que a luz percorreu uma linha reta, atingindo a parede oposta do foguete, mas para um observador externo, o raio luminoso descreve uma parábola, como

se estivesse atravessado um campo gravitacional. Esse fenômeno é praticamente indetectável quando tratamos de distâncias curtas, entretanto para campos gravitacionais maiores como o do Sol e para percursos mais extensos dos raios, a observação passa a ser perceptível, portanto, se o princípio da equivalência estiver correto, o percurso da luz vinda de estrelas distantes deveria se curvar ao passar nas proximidades do Sol conforme indica a figura 6.

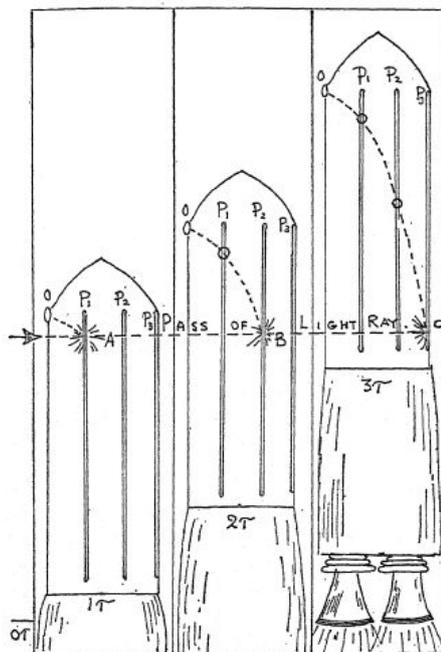


Figura 5. Trajetória da luz dentro de um foguete acelerado. (GAMOW, 2002)

Essa comprovação aconteceu no Eclipse de 1919, durante expedições de astrônomos ingleses em Sobral, no Ceará - Brasil e outra na África, na ilha de Príncipe. Foram observadas as posições aparentes de estrelas distantes, contando com a “presença da massa do Sol” nas proximidades da trajetória luminosa e os resultados foram de acordo com a teoria de Einstein, algo em torno de $1,75''$. Tais resultados foram anunciados na *Royal Society* e na *Royal Astronomical Society* como “a maior descoberta sobre a gravitação desde que Newton enunciou os seus princípios”.

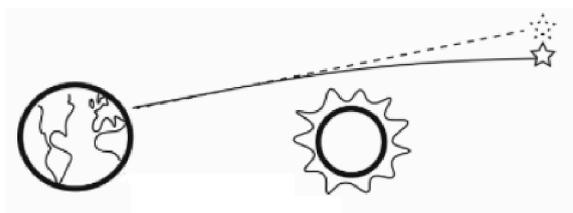


Figura 6. A linha tracejada indica a posição aparente da estrela e a linha cheia indica a posição real da estrela. Adaptado de (KENNEFICK, 2019, figure 5)

4 Forças Inerciais

Nesta seção, fortemente baseada na referência (NUSSENZSVEIG, 2002), faremos um breve resumo sobre referenciais não inerciais e forças inerciais. O princípio da relatividade de Galileu comparando um referencial em repouso com um referencial em movimento uniforme, mostra que as velocidades de um partícula vistas nesses dois referenciais se diferem pelo decréscimo da velocidade relativa entre eles, mas as acelerações são iguais, vide figura 7.

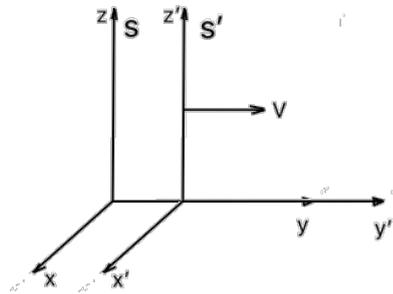


Figura 7. O referencial S' se move com velocidade V em relação ao referencial S . Figura preparada pelo próprio autor.

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}, \quad (4.1)$$

$$\vec{a}' = \vec{a}, \quad (4.2)$$

onde \vec{v} e \vec{a} são a velocidade e a aceleração da partícula medida no referencial S respectivamente; \vec{v}' e \vec{a}' é a velocidade da mesma partícula de acordo com S' respectivamente e \vec{V} é a velocidade de S' com respeito a S . Porém se o referencial S' possui aceleração em relação a S , dada por \vec{A} , teríamos:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}_0 - \vec{A}t, \quad (4.3)$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}, \quad (4.4)$$

onde \vec{V}_0 é a velocidade do referencial S' no instante de tempo $t = 0$. Portanto, a 2ª Lei de Newton que é válida para o caso de S' estar em movimento uniforme, não será válida quando este estiver acelerado, pois.

$$\vec{F}' = m\vec{a}' + m\vec{A}, \quad (4.5)$$

Onde \vec{F}' é a resultante das forças sobre a partícula de acordo com o referencial S e m é a massa inercial da partícula. Reescrevendo equação (4.5), temos:

$$m\vec{a}' = \vec{F}' - m\vec{A} \quad (4.6)$$

Com isso, \vec{F}' será a “força verdadeira” e $-m\vec{A}$ a *força de inércia*.

Um exemplo de interesse segue (conforme a situação ilustrada na figura 7): imaginemos um foguete no espaço livre de qualquer campo gravitacional, portanto $\vec{F}' = \vec{F} = \vec{0}$ (força verdadeira), mas que seus motores são ligados e iniciam uma aceleração \vec{A} . A equação de movimento de uma massa m no referencial do foguete será:

$$m\vec{a}' = -m\vec{A} \quad (4.7)$$

Se supusermos que a aceleração \vec{A} do foguete seja tal que, $|\vec{A}| = g$, onde g é o módulo da aceleração da gravidade nas proximidades da superfície da Terra, um observador interno (dentro do foguete) experimentará uma perfeita simulação do campo gravitacional na superfície da Terra. De fato, ele visualizará um corpo abandonado “caindo” com aceleração g . Já para um observador externo é o foguete que sobe com aceleração g em direção ao objeto, como indicado na figura 8.

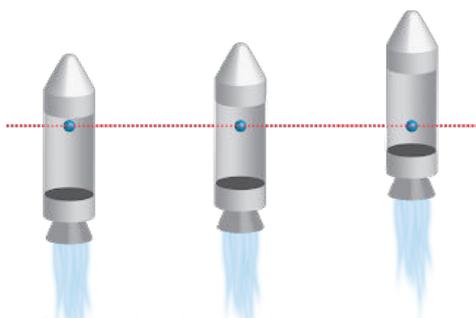


Figura 8. Foguete subindo acelerado em relação a um referencial de fora. Disponível em <http://fisicailustrada.blogspot.com/2017/08/principio-da-equivalencia.html> (Acessado em 05/01/2020)

Para terminar a motivação do princípio de equivalência apresentado na seção anterior, vamos resolver seguinte problema: seja agora o foguete em queda livre, com aceleração \vec{g} , constante, nas proximidades da superfície da Terra. Aplicando a equação (4.6), para uma partícula de massa m , temos que

$$m\vec{a}' = \vec{F}' - m\vec{g} \Leftrightarrow m\vec{a}' = m\vec{g} - m\vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}' = \vec{0}. \quad (4.8)$$

Assim no referencial do foguete, a partícula permanecerá em repouso. O observador então dirá que não existe nenhum campo gravitacional atuando.

Além de trabalharmos com referenciais que sofrem uma translação, podemos imaginar também referenciais em rotação e analisarmos as forças de inércia que aparecem (figura 9). O nosso planeta é um referencial desse tipo, portanto esse estudo é bastante relevante. Suponha um disco girando com velocidade angular de módulo ω e uma partícula de massa inercial m presa por uma corda a uma haste localizada no centro. Para um referencial inercial, a força de tração (\vec{F}_A) é a resultante centrípeta sobre o corpo, com isso a 2ª lei de Newton resulta em:

$$\vec{F}_A = -m\omega^2 r \hat{r}, \quad (4.9)$$

onde \hat{r} é o vetor unitário na direção radial do disco, no sentido da borda. Mas no referencial do corpo, aparecerá uma força de inércia que equilibrará \vec{F}_A :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_{in} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{in} = -\vec{F}_A = m\omega^2 r \hat{r}, \quad (4.10)$$

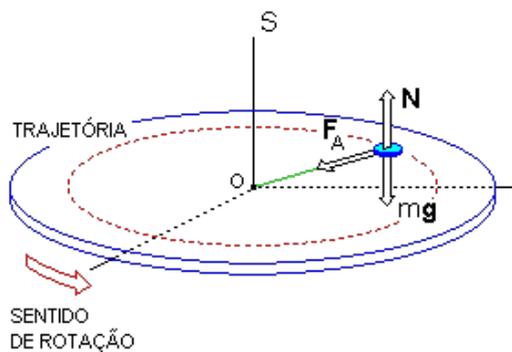


Figura 9. Disco girante. Disponível em <https://www.algosobre.com.br/fisica/forca-centrifuga.html> (Acessado em 05/01/2020)

Essa força de Inércia só existe no referencial em rotação e aponta na direção radial para fora da curva, é conhecida como *força centrífuga*. Esse conceito é utilizado, por exemplo, no processo

de centrifugação utilizado em laboratórios, com o intuito de separar pequenas partículas ou substâncias com densidades diferentes. Além disso, é com a força centrífuga que criamos a “gravidade artificial” em estações espaciais, como no filme: 2001: Uma Odisséia no Espaço (1968).

Vimos então que a força centrífuga é uma força de inércia que atua sobre um corpo parado em relação a um referencial S' girante. Mas o que ocorrerá se o objeto move-se em relação à S' , como na figura 10?

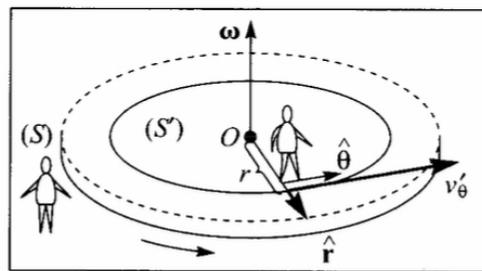


Figura 10. Referencial S' girante e referencial S em repouso. Retirada de (NUSSENZSVEIG, 2002)

Começemos por considerar que o objeto move-se numa plataforma girante descrevendo um círculo de raio r . Assim só possui uma velocidade tangencial (na direção de θ) - usaremos as coordenadas r e θ para facilitarmos a descrição - além da velocidade de rotação do disco. No referencial S' , que gira solidariamente ao disco, temos que a partícula move-se com velocidade v'_θ . Portanto para o referencial S , teremos, pela adição Galileana de velocidades:

$$v_\theta = v'_\theta + \omega r. \quad (4.11)$$

Se a massa inercial do objeto é m , a força resultante para o referencial S será a centrípeta:

$$\vec{F} = -\frac{mv_\theta^2}{r}\hat{r} \quad \implies \quad \vec{F} = -m\left(\frac{v'^2_\theta}{r} + \omega^2 r + 2\omega v'_\theta\right)\hat{r}, \quad (4.12)$$

onde substituímos na última passagem, o resultado a equação (4.12). Para o referencial S' , o objeto só possui a velocidade com que ela se move em relação à plataforma (v'_θ) e a força resultante sobre o objeto será:

$$m\vec{a}' = -\frac{mv'^2_{\theta}}{r}\hat{r}. \quad (4.13)$$

Portanto, substituindo a equação acima na equação (4.12), temos

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in}, \quad (4.14)$$

onde

$$\vec{F}_{in} = m\omega^2 r\hat{r} + 2m\omega v'_{\theta}\hat{\theta}. \quad (4.15)$$

Observe que o primeiro termo é a força centrífuga $m\omega^2 r\hat{r}$, e o segundo termo só aparece quando há movimento entre o corpo e o referencial girante, essa força é chamada de *força de Coriolis*, dada por

$$\vec{F}_{Coriolis} = 2m\omega v'_{\theta}\hat{\theta}. \quad (4.16)$$

Diferente da força centrífuga, ela não depende da posição r da partícula, mas depende de sua velocidade (v'_{θ}) e da velocidade angular da plataforma. A direção da força será sempre perpendicular à velocidade da partícula desviando a trajetória para a direita, em relação ao sentido de ω .

Agora vamos analisar o caso da partícula com movimento radial, com velocidade na direção \hat{r} em relação ao referencial S' , visto na figura 11.

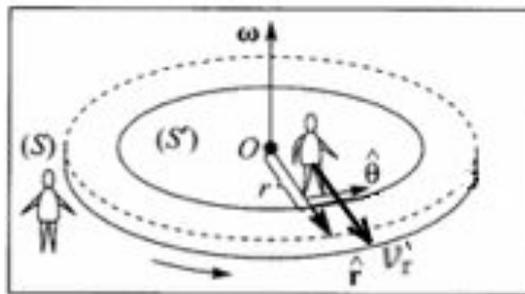


Figura 11. Pessoa se movendo no sentido radial em relação ao referencial girante S' . Retirada de (NUSENZSVEIG, 2002)

Apesar do movimento da pessoa em relação a S' ser unicamente radial, visto do referencial S , ele possuirá uma componente da velocidade na direção tangencial, $\hat{\theta}$, graças ao movimento da

plataforma. Sendo assim, em S existirá uma aceleração centrípeta e uma aceleração tangencial, pois como a pessoa caminha em direção à borda, sua velocidade tangencial aumenta com o raio

$$v_\theta = \omega r. \quad (4.17)$$

Como queremos calcular a aceleração tangencial, precisamos da seguinte quantidade

$$\Delta v_\theta = v_\theta(r + \Delta r) - v_\theta(r) = \omega(r + \Delta r) - \omega r = \omega \Delta r. \quad (4.18)$$

Encontramos a aceleração tangencial média, dividindo por Δt :

$$\frac{\Delta v_\theta}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta r}{\Delta t}. \quad (4.19)$$

Tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$, temos a aceleração tangencial do objeto, de acordo com S :

$$a_\theta^{(1)} = \omega v_r, \quad (4.20)$$

onde $v_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$ é a velocidade radial instantânea do objeto. Mas a aceleração tangencial receberá outra contribuição, após um intervalo de tempo Δt , a plataforma gira um ângulo $\Delta\theta = \omega\Delta t$, isso altera a direção de v_r , ficando (conforme mostra a figura 12):

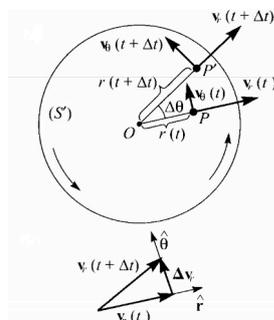


Figura 12. Cálculo do vetor variação da velocidade na direção radial. Retirada de (NUSSENZSVEIG, 2002)

$$\Delta \vec{v}_r = \vec{v}_r(t + \Delta t) - \vec{v}_r(t). \quad (4.21)$$

Este vetor possui direção $\hat{\theta}$ e módulo dado por

$$\Delta v_r = v_r \Delta \theta. \quad (4.22)$$

Dividindo a equação acima por Δt ,

$$a_\theta^{(2)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_r}{\Delta t} = v_r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \omega v_r. \quad (4.23)$$

A aceleração tangencial final é dada por

$$a_\theta = a_\theta^{(1)} + a_\theta^{(2)} = 2\omega v_r = 2\omega v'_r. \quad (4.24)$$

Pois as velocidades radiais são iguais nos dois referenciais. Portanto, visto de S , a aceleração fica:

$$\vec{a} = -\omega^2 r \hat{r} + 2\omega v'_r \hat{\theta}. \quad (4.25)$$

O primeiro termo é a força centrípeta, sendo assim, a força de inércia visto em S' será:

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a} = m\omega^2 r \hat{r} - 2m\omega v'_r \hat{\theta}. \quad (4.26)$$

Novamente o 1º termo é a força centrífuga e o 2º termo, a força de Coriolis

$$\vec{F}_{Coriolis} = -2m\omega v'_r \hat{\theta}. \quad (4.27)$$

Comparando os dois valores encontrados para a força de Coriolis é fácil visualizar que ambos possuem as mesmas características. A direção $-\hat{\theta}$ indica um desvio para direita do movimento.

O próprio planeta Terra é um corpo girante onde podemos perceber a presença da força de Coriolis.

5 O Eclipse

Para ocorrer um eclipse, independentemente se é um eclipse solar, ou lunar, os astros precisam se alinhar. Como as órbitas da Terra em torno do Sol e da Lua em torno da Terra não são coplanares, os eclipses acontecerão apenas nos nós (pontos onde as órbitas se cruzam), conforme mostra a figura 13, e apenas durante as fases de Lua Cheia e Lua Nova. Por exemplo, quando a Terra se localiza entre o Sol e a Lua, fazendo o papel de obstáculo, ela impede que a luz Solar atinja a Lua e com isso não a vemos por reflexão, esse é o eclipse lunar, e só ocorre durante a Lua Cheia. Ele pode ser visto em qualquer parte da Terra, devido a sombra produzida ser muito maior do que a própria Lua, vide a figura 14.

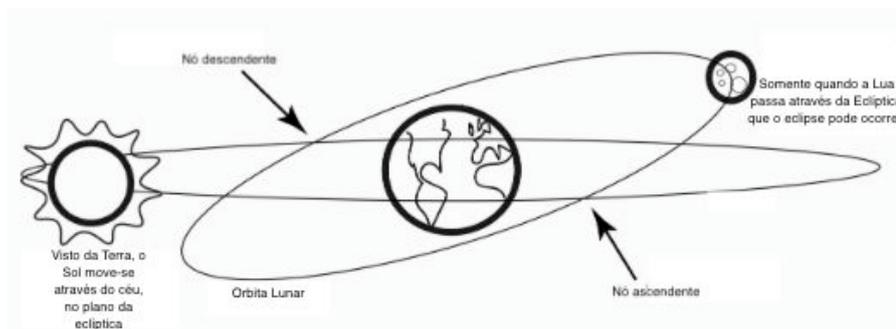


Figura 13. As condições para que haja um eclipse total do sol. Legendas traduzidas da figura da referência (KENNEFICK, 2019)

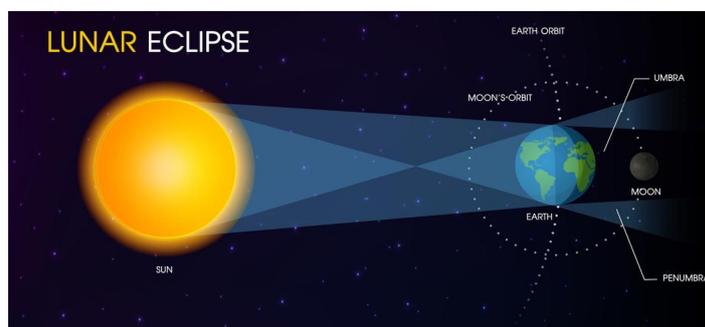


Figura 14. O eclipse lunar. Disponível em <https://pt.vecteezy.com/arte-vetorial/594167-eclipse-lunar-da-lua> (Acessado dia 05/01/2020)

Outra possibilidade de alinhamento é com a Lua fazendo o papel de obstáculo, impedindo que parte dos raios solares atinjam a Terra. Isso acontece durante a fase da Lua nova e só pode ser

visto por uma pequena área do planeta Terra, uma vez que a sombra projetada pela Lua é menor que o planeta, portanto teremos regiões com eclipse total, eclipse parcial e regiões onde o eclipse não será visível. Isto é visto na figura 15.

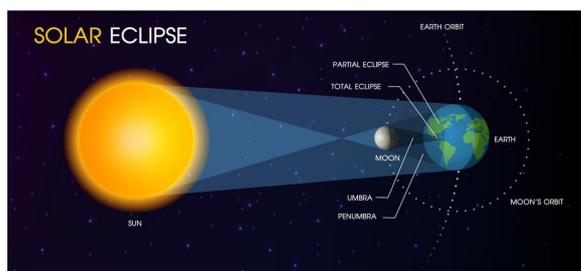


Figura 15. O eclipse solar. Disponível em <https://pt.vecteezy.com/arte-vetorial/594167-eclipse-lunar-da-lua> (Acessado dia 05/01/2020)

Além disso, a Lua pode estar mais próxima ou mais afastada da Terra ao longo de sua órbita. Quando está mais afastada, sua superfície não é suficiente para obstruir todo o Sol e deixa os raios da borda Solar passarem, provocando assim um eclipse anular (figura 16).



Figura 16. O eclipse anelar. Disponível em <https://gizmodo.uol.com.br/eclipse-anular-sol-decada/> (Acessado dia 05/01/2020)

Um eclipse Solar total é, portanto, um evento bastante raro, ele não acontece em nenhum outro planeta do nosso sistema solar e mesmo aqui, apenas em uma superfície bem pequena. Isso é devido à exata distância da Lua ao Sol, que mesmo sendo muito menor consegue ficar “do mesmo tamanho” para alguns pontos do planeta. A figura 17 ilustra a imagem obtida no eclipse solar de Sobral de 1919.

Frank Dyson, astrônomo inglês e presidente do Comitê Conjunto do Eclipse Permanente (JPEC), era responsável pelos planejamentos de expedições para observar eclipses. Logo após o início da primeira Guerra Mundial, o ano de 1914, foram enviadas expedições para a Suécia e Rússia com o objetivo de observar a deflexão da luz, mas o governo Russo, permeado por tensões nacionalistas e rivalidades econômicas entre os países envolvidos na guerra, impediu o experimento

e confiscou os instrumentos, pois encarou a expedição como inimiga do governo. Sendo assim a teoria de Einstein não pôde ser testada. Outro astrônomo inglês, Arthur Eddington, entusiasta da teoria de Einstein, se uniu a Dyson e planejaram a expedição para observar o eclipse de 1919, eles já tinham testemunhado juntos outros dois eclipses, em 1900 e 1912, inclusive experiências obtidas nesses eventos foram importantes posteriormente. A primeira observação de um eclipse com o propósito de testar a teoria de Einstein foi o de 1912, obviamente em 1900 o objetivo não poderia ser a teoria da relatividade, naquele contexto outra missão estava muito mais presente: a observação de um planeta muito próximo do Sol, batizado de Vulcano. Alguns astrônomos acreditavam na existência de tal planeta e seria ele o responsável por anomalias na órbita do planeta Mercúrio, posteriormente a TRG explicou a precessão de Mercúrio. Para um leitor interessado em aprofundar seus conhecimentos sobre a anomalia na órbita de Mercúrio vide a dissertação (CUNHA, 2017).

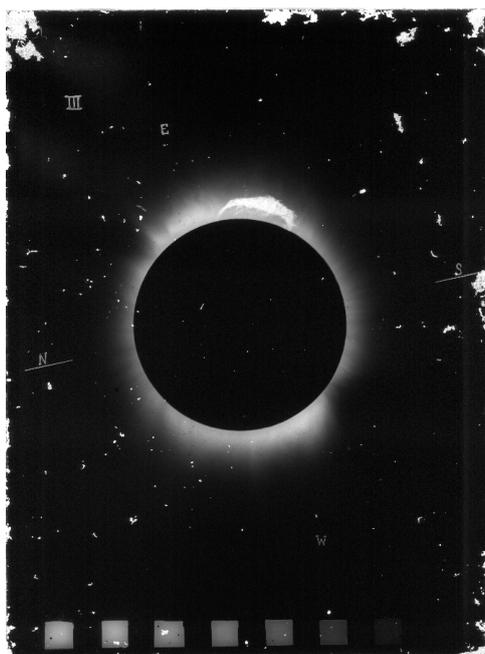


Figura 17. Foto do eclipse total feita durante a expedição para observar o Eclipse de Sobral em 2019. Disponível em <https://daed.on.br/sobral/index.php?lang=en-us> (Acessado dia 07/01/2020)

Em 1919, haviam alguns problemas para medir a posição das estrelas durante o eclipse, o primeiro com relação a alguns instrumentos que ainda estavam confiscados na Rússia desde 1914, equipamentos enormes e pesados que dificultavam o seu transporte, sem contar que o governo Russo utilizava, naquela época, navios civis para o serviço de guerra. Outro problema é prever onde e quando será o eclipse. As datas dos eclipses foram anotadas em almanaques e efemérides com

alguns anos de antecedência e boa precisão, tudo calculado através de tabelas astronômicas publicadas, que fornecem as posições dos planetas e da Lua, como as de Copérnico ou Kepler. Porém, determinar o local que sofrerá um eclipse total é bem mais complexo, já que tal totalidade costuma ter aproximadamente 100 quilômetros de extensão e pequenos erros podem vencer toda a luta para contemplar o fenômeno. Vemos, na figura 18, a faixa do eclipse total do dia 29 de maio de 1919.

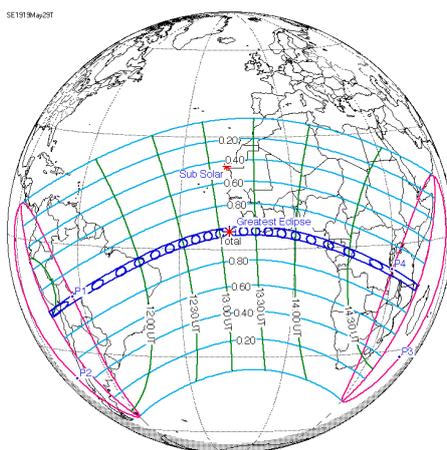


Figura 18. A trajetória do eclipse total (faixa em azul) do dia 29 de maio de 1919. Disponível em https://en.wikipedia.org/wiki/Eddington_experiment (Acessado dia 07/01/2020)

Mas mesmo assim o eclipse de 1919 era bastante promissor para testar a teoria da relatividade geral, pois o Sol estava próximo do aglomerado de estrelas Hyades, o mais próximo da Terra, e com isso, a quantidade de estrelas brilhantes era abundante. Portanto, duas expedições foram enviadas: a Príncipe, na África e a Sobral, no Brasil. Na ilha de Príncipe, Eddington não teve sorte, o céu nublado não permitiu contemplar o fenômeno da maneira esperada e os dados obtidos não foram satisfatórios. Na cidade cearense, no dia 29 de maio de 1919, o dia também amanheceu nublado, o que aumentou a tensão com o risco de perder o tão esperado acontecimento. No entanto, um pouco antes da 9 horas da manhã, uma fenda nas nuvens desvendou o majestoso disco solar encoberto pela Lua. Em meio a alguns sobralenses apavorados com o que parecia o dia do juízo final, os astrônomos aproveitavam os cinco minutos e treze segundos para tirarem inúmeras fotos e estabelecer um dos eclipses mais importantes de toda a história, marcando a supremacia do modelo relativístico de Einstein sobre o mecanicismo Newtoniano. Os dados obtidos correspondiam com o

esperado e a deflexão da estrela estava na margem prevista por Einstein, que era aproximadamente 1,75". Os resultados da expedição foram publicados na referência (DYSON, EDDINGTON E DAVIDSON, 1920).

Referências Bibliográficas

CRISPINO, L. C.; LIMA, M. C. Expedição norte-americana e iconografia inédita de Sobral em 1919. **Rev. Bras. Ensino Fís.** vol. 40 n. 1 São Paulo 2018.

CUNHA, R. F. F. A gravitação e a precessão de Mercúrio: um texto para professores do ensino médio. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Física. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro 2017

DYSON, F. W.; EDDINGTON, A. S.; DAVIDSON, C. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of May, 29, 1919. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London - Series A**, vol. 220 pp. 291-333 1920

EINSTEIN, A. **Teoria da Relatividade Geral e Especial**: 1. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 2007

GAMOW, G. **Gravity**: New York: Dover, 2002

JAMMER, M. **Conceitos de espaço: a história das teorias do espaço na física**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2010

KENNEFICK, D. **No Shadow of a Doubt: The 1919 Eclipse That Confirmed Einstein's Theory of Relativity**: Princeton: Princeton University Press, 2019

LENZI, H. C.; POMPEIA, P. J.; STUDART, N. A deflexão gravitacional da luz: De Newton a Einstein. **Rev. Bras. Ensino Fís.** vol. 41 São Paulo 2019

LORENTZ, H. A.; EINSTEIN A.; MINKOWSKI H. **O Princípio da Relatividade - Textos Fundamentais de Física Moderna**: 5a. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1971

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides: A História da Geometria, das Linhas Paralelas ao Hiperespaço**. 1ª edição São Paulo: Geração Editorial, 2004

NUSSENZSVEIG, M. H. **Curso de Física Básica 1 - Mecânica**: 4ª edição São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2002

NUSSEZSVEIG, M. H. **Curso de Física Básica 4 - Óptica, Relatividade, Física Quântica**: 1ª edição São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1998