



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física
Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física



Impedância e Transferência de Energia em Sistemas Físicos

Leonardo Rodrigues de Jesus

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Carlos Eduardo Aguiar

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2019

Impedância e Transferência de Energia em Sistemas Físicos

Leonardo Rodrigues de Jesus

Orientador: Carlos Eduardo Aguiar

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

Prof. Carlos Eduardo Aguiar (Presidente)

Prof. Antonio Carlos Fontes dos Santos

Prof. Eduardo Chaves Montenegro

Prof. Vitor Luiz Bastos de Jesus

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

J58i Jesus, Leonardo Rodrigues de
Impedância e Transferência de Energia em Sistemas Físicos / Leonardo Rodrigues de Jesus. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2019.
ix, 139 f. : il. ; 30 cm.
Orientador: Carlos Eduardo Aguiar.
Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2019.
Referências Bibliográficas: f. 138-139.
1. Ensino de Física. 2. Impedância. 3. Energia. I. Aguiar, Carlos Eduardo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. Impedância e Transferência de Energia em Sistemas Físicos.

Dedico esta dissertação à minha família.

Agradecimentos

A meus pais e irmã, pelo insubstituível apoio que sempre me deram, sem o qual eu não teria sido capaz de sequer iniciar este trabalho.

Aos amigos e familiares, pela compreensão nas diversas ocasiões em que estive ausente em função do compromisso com o mestrado.

Ao meu ex-professor e orientador, Carlos Eduardo Aguiar, por todas as lições ensinadas, pela sua dedicação e disponibilidade, por acreditar no meu potencial, por direcionar esse trabalho sem poupar esforços e pela inestimável contribuição na sua realização.

Aos docentes do MNPEF, por contribuírem na minha formação: Alexandre Tort, Carlos Aguiar, Deise Vianna, Ildeu Moreira, Marta Barroso, Marcus Cougo-Pinto, Penha Dias, Sidnei da Penha e Vitorvani Soares.

Ao amigo Leonardo Vieira, professor do CEFET-RJ, pela sugestão do experimento de óptica apresentado nesta dissertação.

Ao amigo Francisco, técnico do Instituto de Física da UFRJ, pela ajuda na confecção da alavanca, pelas conversas, pelas caronas e por me incentivar a continuar os estudos acadêmicos.

Aos amigos do mestrado, pelos conselhos, pela ajuda nas listas de exercícios, pelas caronas e por me motivarem a concluir esse trabalho: Daniel Moraes, Deivid Medeiros, Jordette Fandi, José Rocha, Leandro Ribeiro, Marcelo França, Rafael Almeida, Rafael Soares, Raphael Pontes, Ronaldo Ayres Jr, Thiago Silva e Vinicius Rocha.

À Sra. Dilma Santos, secretária do Programa de Ensino de Física da UFRJ, por sua ajuda e orientação nas atividades administrativas.

Ao Laboratório Didático do Instituto de Física da UFRJ (LADIF), em especial a Renata Amaral, por todo o auxílio na realização da filmagem.

Aos organizadores do XVI Encontro de Licenciatura em Física (ENLIF) pelo convite para apresentar uma oficina sobre o tema desta dissertação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Código de Financiamento 001

RESUMO

Impedância e Transferência de Energia em Sistemas Físicos

Leonardo Rodrigues de Jesus

Orientador: Carlos Eduardo Aguiar

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Apresentamos uma introdução ao conceito de impedância baseada na análise de processos de transferência de energia entre sistemas físicos. Inicialmente isso é realizado no contexto da mecânica, no estudo de colisões de partículas, um tema familiar a estudantes de física básica. A otimização da transferência de energia nessas colisões é discutida e casadores de impedâncias, sistemas auxiliares que aumentam a energia transmitida, são propostos e analisados. A abordagem utilizada na mecânica é estendida à óptica e o casamento de impedâncias é empregado para aumentar a transmissão de luz por objetos transparentes. Descrevemos experimentos simples que demonstram o efeito do casamento de impedâncias nos dois contextos estudados. Também relatamos o resultado da aplicação dessa abordagem em uma oficina para licenciandos e professores de física.

Palavras chave: Ensino de Física, Impedância, Energia.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2019

ABSTRACT

Impedance and Energy Transfer in Physical Systems

Leonardo Rodrigues de Jesus

Supervisor: Carlos Eduardo Aguiar

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

We present an introduction to the concept of impedance based on energy transfer processes between physical systems. Initially we do this in the context of mechanics analyzing particle collisions, a subject familiar to students of basic physics. Optimization of energy transfer in such collisions is discussed and impedance matching devices, auxiliary systems that increase the transmitted energy, are proposed and studied. The approach employed in mechanics is extended to optics and impedance matching is used to increase light transmission through transparent objects. We describe simple experiments that demonstrate the effects of impedance matching in both contexts. We also report on the application of this approach at a workshop for future and in service physics teachers.

Keywords: Physics education, Impedance, Energy.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2019

Sumário

1	Introdução	1
2	Casamento de impedâncias no ensino de física básica	4
2.1	Livros de física básica	4
2.2	Artigos didáticos	7
2.2.1	Colisões mecânicas	7
2.2.2	Circuitos elétricos	16
3	Casamento de impedâncias em colisões mecânicas	21
3.1	Impedância e transferência de energia	21
3.2	Impedância em colisões mecânicas	22
3.3	Casamento de impedâncias em colisões mecânicas	24
3.4	Experimentos com o casador de impedâncias	35
3.4.1	Experimento de colisão: análise com vídeo	36
3.4.2	Um método simples para medir o alcance	41
3.4.3	Casamento de impedâncias em bolas quicando	43
3.5	Outro tipo de casador de impedâncias	47
3.6	Experimentos com o casador-alavanca	50
4	Casamento de impedâncias em óptica	53
4.1	Transmissão de luz na interface entre dois meios	53
5	Uma aula sobre casamento de impedâncias	58
6	Impedância e a analogia eletro-mecânica	61
6.1	Analogia eletro-mecânica	61
6.2	Impedância na analogia eletro-mecânica	64
6.3	Impedância no domínio temporal	66
6.4	Impedância de linhas de transmissão	68
6.5	Casamento de impedâncias	72
7	Comentários finais	75

A Impedância e Transferência de Energia	78
B Impedância e a Analogia Eletro-Mecânica	116
C Uma aula sobre casamento de impedâncias	133
Referências bibliográficas	138

Capítulo 1

Introdução

Em cursos superiores de ciências e engenharias a noção de impedância é normalmente introduzida no contexto de circuitos elétricos, como ingrediente na generalização da lei de Ohm a correntes alternadas. Posteriormente, em disciplinas avançadas, o conceito é estendido e aplicado de diferentes maneiras, dependendo da área de conhecimento. De uma forma geral, o conceito de impedância mostra-se útil em situações envolvendo a transferência de energia de um sistema para outro. Essas situações podem ter grande importância prática, principalmente quando desejamos maximizar o fluxo de energia.

Imagine, por exemplo, uma bateria ligada a um aquecedor elétrico que se deseja operar à máxima potência. Ou considere a antena receptora de um telefone celular, que deve repassar aos circuitos do aparelho a energia que capta das ondas de rádio. Ou, ainda, o som que recebemos em nosso ouvido externo e que gostaríamos que fosse transmitido ao ouvido interno da maneira mais eficiente possível. Todas essas situações e uma infinidade de outras podem ser analisadas de forma muito produtiva com auxílio do conceito de impedância. A análise geralmente é baseada em dois princípios: (1) a transferência de energia será máxima se as impedâncias dos dois sistemas forem iguais¹ e, (2) se isso não for possível, um sistema auxiliar – o casador de impedâncias – pode ser usado para aumentar o fluxo de energia.

No ensino médio a noção de impedância sequer é mencionada, uma omis-

¹Em alguns casos, se forem números complexos conjugados.

são difícil de justificar dada a importância prática do conceito. Um dos objetivos do presente trabalho é contribuir para preencher essa lacuna. Para isso, introduzimos a ideia de impedância em um contexto familiar aos estudantes do ensino médio, o de colisões entre partículas. A transferência de energia nesses processos pode ser estudada com elementos já presentes nos currículos escolares, o que permite apresentar a impedância e o casamento de impedâncias como extensões de conhecimentos já adquiridos. Descrevemos também alguns experimentos simples (um deles surpreendente) que podem ser realizados em sala de aula e que ilustram a utilidade dessas ideias.

A generalidade do conceito de impedância é demonstrada aplicando as ideias desenvolvidas na mecânica a uma área completamente distinta: a óptica. Tratamos a transmissão de luz entre dielétricos como um processo de transferência de energia e, por analogia aos resultados obtidos na mecânica, sugerimos que o casamento de impedâncias pode aumentar a transmissão. Um experimento simples confirma essa expectativa.

A dissertação está organizada de seguinte maneira. No capítulo 2 discutimos como alguns livros-texto introdutórios abordam processos de transferência de energia e o papel desempenhado pelo casamento de impedâncias nessas situações. Também descrevemos como artigos em ensino de física discutem essas ideias. No capítulo 3 está a primeira parte do material didático que produzimos. Nele introduzimos o conceito de impedância a partir do estudo da energia transferida em colisões de partículas e analisamos experimentos que demonstram sua importância em situações práticas. A segunda parte do material didático está no capítulo 4, no qual os conceitos desenvolvidos no contexto da mecânica são aplicados à óptica, mais especificamente à transmissão de luz por meios transparentes. A descrição e análise de um experimento simples sobre esse processo encontra-se no mesmo capítulo. A utilização do material didático em uma oficina para licenciandos e professores de física é relatada e avaliada no capítulo 5. No capítulo 6 fazemos a ligação entre a ideia de impedância tal como apresentada no capítulo 3 e a definição tradicional de impedância em circuitos de corrente alternada. Nossas conclusões e comentários finais estão no capítulo 7.

O apêndice A contém o mesmo material dos capítulos 3 e 4, porém apre-

sentado de forma destacável em relação ao corpo principal da dissertação para facilitar seu uso independente (com capa e numeração própria de páginas, equações, figuras, etc.). A analogia eletro-mecânica discutida no capítulo 6 é apresentada da mesma forma no apêndice B. As transparências mostradas durante a oficina estão no apêndice C.

Capítulo 2

Casamento de impedâncias no ensino de física básica

Faremos neste capítulo uma revisão da literatura em ensino de física sobre o conceito de casamento de impedâncias. Como veremos, há muito pouco publicado no assunto. Começaremos por livros texto de física básica e em seguida discutiremos artigos em periódicos de ensino.

2.1 Livros de física básica

Até onde pudemos encontrar, um único livro didático de física aborda de forma elementar o conceito de casamento de impedâncias e suas aplicações. Trata-se de “Physics for the Inquiring Mind”, de Eric Rogers, publicado em 1960 [1]. No livro, em duas páginas, são apresentadas análises qualitativas de situações envolvendo transferência de energia e casamento de impedâncias em vários campos da física. Um dos exemplos explica que na colisão de bolas de massas diferentes nem toda energia é transmitida de uma bola para a outra, e uma alavanca (ver figura 2.1) é proposta como mecanismo de casamento de impedâncias, aumentando a transmissão de energia. Não é realizada uma análise quantitativa do efeito da alavanca. Rogers ressalta que o mecanismo é desnecessário numa colisão de bolas de massas iguais, onde há completa transferência de energia (as impedâncias estão casadas).

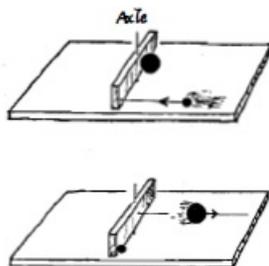


Figura 2.1: Casamento de impedâncias em colisões de bolas de massas distintas, feito por uma alavanca livre para girar em torno de um eixo vertical. Figura obtida de [1].

Outro exemplo discutido no livro de Rogers trata do fornecimento de energia elétrica de uma bateria para uma grelha elétrica. Se a grelha tiver uma resistência elétrica enorme, a corrente elétrica que passa por ela será pequena e o calor produzido também será pequeno. Por outro lado, se a grelha tiver uma resistência elétrica extremamente baixa (muito menor que a resistência interna da bateria), quase toda a energia dada pela bateria será dissipada nela própria e, novamente, pouco calor será produzido na grelha. É fácil mostrar que no caso em que a bateria e a grelha têm a mesma resistência elétrica (impedâncias casadas) consegue-se a maior eficiência possível na transmissão de energia: 50% da energia produzida pela bateria é dissipada na grelha.

O livro de Rogers menciona uma extensa lista de aplicações do conceito de impedância à transferência de energia: o dano causado por um soco, a bateria e o motor de partida de um carro, a moderação da energia dos nêutrons em um reator nuclear, o estetoscópio médico, etc. A lista mostra como a impedância é um conceito útil em uma grande variedade de situações práticas.

Outro livro didático que discute o casamento de impedâncias é “Waves”, de Frank Crawford, publicado em 1968 como parte da coleção Berkeley Physics Course [2]. O livro de Crawford ainda é de nível introdutório, porém bem mais avançado que o de Rogers.¹ Nele, o conceito de impedância é

¹Talvez seja mais apropriado classificá-lo como de nível intermediário.

amplamente utilizado na descrição de fenômenos ondulatórios. Crawford caracteriza o meio que transporta uma onda progressiva por duas quantidades: a velocidade de fase v_φ e a impedância Z (ou impedância característica). Por exemplo, para ondas transversais em uma corda contínua essas quantidades são dadas por

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}, \quad (2.1)$$

$$Z = \sqrt{T_0 \rho_0}, \quad (2.2)$$

onde T_0 é a força tensora na corda (que caracteriza a força restauradora do meio) e ρ_0 é a densidade linear de massa da corda (que caracteriza a inércia do meio). Portanto, a impedância e a velocidade de fase são dois parâmetros naturais que descrevem ondas em um dado meio e que podem ser utilizados em lugar de T_0 e ρ_0 . O fluxo de energia de uma onda progressiva $\psi(z,t)$ ao longo do eixo z é

$$P(z,t) = Z \left(\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} \right)^2, \quad (2.3)$$

indicando que impedância deve desempenhar um papel importante em processos nos quais a onda transfere energia.

Outro exemplo explorado por Crawford são as ondas sonoras. Nesse caso a força restauradora é dada por γp_0 onde γ é o índice adiabático (a razão de calores específicos) e p_0 é a pressão atmosférica. Por analogia com o caso da corda, as expressões para velocidade de fase e impedância são dadas, respectivamente, por

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}, \quad (2.4)$$

$$Z = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0}. \quad (2.5)$$

Em uma onda sonora progressiva na direção z , o fluxo de energia por unidade de área é dado por

$$I(z,t) = Z \left[\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} \right]^2, \quad (2.6)$$

onde $\psi(z,t)$ é o deslocamento do ar causado pela passagem da onda. Novamente vemos que a impedância Z está relacionada ao fluxo de energia.

Crawford utiliza o conceito de casamento de impedâncias para estudar a transferência de energia em processos envolvendo ondas. Alguns dos exemplos tratados no livro são as linhas de transmissão, o alto-falante, a antena de rádio, nossos ouvidos, etc. Em todos os casos o fluxo de energia depende das impedâncias da fonte, do receptor e do meio de propagação da onda.

2.2 Artigos didáticos

2.2.1 Colisões mecânicas

O número de artigos didáticos que tratam do conceito de casamento de impedâncias é, felizmente, maior que o de livros-texto. Um exemplo interessante é “Energy Transfer in One-Dimensional Collisions of Many Objects”, de J. B. Hart e R. B. Herrmann [3]. Nele, os autores estudam a fração da energia transferida em colisões de n corpos. Colisões parcialmente elásticas são descritas a partir do coeficiente de restituição e entre pares de corpos. Inicialmente foi considerada a colisão de uma massa M , em movimento, com uma massa m em repouso. Hart e Herrmann calculam a eficiência $E_{M,m}$ da transferência de energia² de M para m , definida pela razão entre a energia cinética final de m e a energia inicial de M , obtendo o resultado

$$E_{M,m} = \frac{mv^2/2}{MU^2/2} = \frac{(1+e)^2 mM}{(M+m)^2}, \quad (2.7)$$

onde U é a velocidade inicial de M e v a velocidade final de m . O valor máximo da eficiência é obtido para massas iguais ($M = m$), e vale

$$E^{(max)} = \left(\frac{1+e}{2}\right)^2. \quad (2.8)$$

Nesse caso, segundo os autores, as impedâncias (as massas) estão casadas (são iguais). Se as massas forem diferentes, Hart e Herrmann [3] explicam como fazer um casamento de impedâncias que aumente a eficiência da troca

²Mantivemos a notação utilizada por Hart e Herrmann em seu artigo. No material didático que produzimos chamamos a eficiência de η e a energia de E .

de energia. Eles sugerem colocar um objeto estacionário de massa m' entre as massas M e m , de forma que ocorram duas colisões, a primeira entre M e m' e a seguinte entre m' e m . Com isso eles obtêm uma eficiência total dada por

$$E_{M,m',m} = E_{M,m'} \cdot E_{m',m} = \frac{(1+e)^2 M m'}{(M+m')^2} \cdot \frac{(1+e)^2 m' m}{(m'+m)^2}. \quad (2.9)$$

Os autores mostram que a eficiência dada pela equação (2.9) tem um valor máximo se a massa intermediária for escolhida de tal forma que

$$m' = \sqrt{mM}. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.9) encontramos

$$E_{M,m',m}^{(max)} = \frac{(1+e)^4}{\left(2 + \sqrt{m/M} + \sqrt{M/m}\right)^2}. \quad (2.11)$$

Para colisões perfeitamente elásticas, $e = 1$, a eficiência (2.11) sempre será maior que a encontrada na ausência da massa intermediária, dada por (2.7). Ou seja, a massa intermediária atua como um casador de impedâncias.

Embora não seja enfatizado por Hart e Herrmann, para colisões *inelásticas* a eficiência dada pela equação (2.11) nem sempre será maior que a de (2.7). Isso acontecerá somente se

$$e > \frac{2}{\sqrt{m/M} + \sqrt{M/m}}, \quad (2.12)$$

ou seja, se as colisões não forem muito inelásticas.

Se n massas diferentes forem colocadas entre M e m , a eficiência da transmissão de energia de M para m será

$$E_{M,m_1,m_2\dots m_n,m} = E_{M,m_1} \cdot E_{m_1,m_2} \dots E_{m_n,m}. \quad (2.13)$$

Para colisões não muito inelásticas, Hart e Herrmann mostram que a eficiência é máxima se

$$\frac{M}{m_1} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{m_2}{m_3} = \dots = \frac{m_n}{m}. \quad (2.14)$$

A eficiência máxima é então dada por

$$E_{M,m}^{(max)} = \frac{(e + 1)^{2(n+1)} M/m}{((M/m)^{1/(n+1)} + 1)^{2(n+1)}}. \quad (2.15)$$

A figura 2.2 mostra como a eficiência dada pela equação (2.15) depende do número n de massas intermediárias, para $M/m = 100$ e alguns valores do coeficiente de restituição e . O gráfico mostra que para $e = 1$ a eficiência sempre aumenta à medida que n cresce. Ainda no mesmo gráfico nota-se que para $e < 1$, o maior valor da eficiência máxima (2.15) ocorre para um determinado valor n , que diminui à medida que a inelasticidade aumenta (muitas colisões dissipam muita energia).

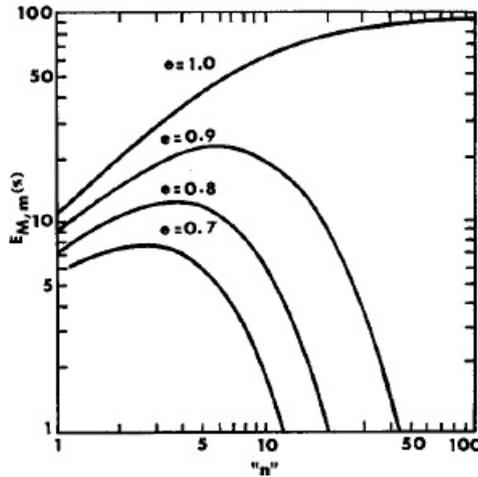


Figura 2.2: A eficiência máxima em função do número n de massas intermediárias, para diferentes valores do coeficiente de restituição e . A razão entre as massas nos extremos é $M/m = 100$. Figura obtida de [3].

No final do artigo, Hart e Herrmann descrevem uma montagem experimental simples (figura 2.3) que pode ser utilizada para verificar o casamento de impedâncias gerado pelas massas intermediárias. Apenas observações qualitativas do aumento da transferência de energia da primeira para a última bola são mencionadas pelos autores.

Artigos na mesma linha de Hart e Herrmann, estendendo e detalhando

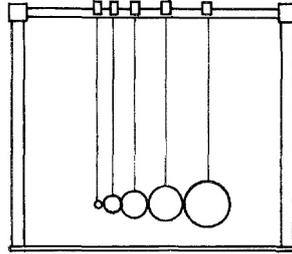


Figura 2.3: Experimento proposto por Hart e Herrmann como demonstração do casamento de impedâncias gerado por massas colocadas entre as bolas nos extremos. Figura obtida de [3].

seus resultados, foram publicados posteriormente. Dois trabalhos particularmente interessantes, relacionados aos experimentos que analisaremos mais adiante, são [4, 5].

Outro artigo que discute o conceito de impedância em colisões mecânicas, é “The Lever as an Impedance Matching Device”, de I. MacInnes [6]. Um casador de impedâncias diferente do descrito por Hart e Herrmann é analisado no artigo. A ideia é a mesma que a de Rogers (figura 2.1): a transferência de energia é otimizada por uma alavanca colocada entre duas massas (A e B) em colisão, como mostrado na figura 2.4. As duas massas têm valores diferentes, M e m , ou seja, suas impedâncias são descasadas. A alavanca tem massa N , comprimento $2L$ e gira em torno de um eixo que passa pelo seu centro. A massa incidente A atinge a alavanca com velocidade U a uma distância x do eixo. Inicialmente, a massa B está em repouso, encostada na extremidade oposta da alavanca como mostra a figura 2.4.

Pela conservação do momento angular do sistema formado pelas duas massas e a alavanca, tem-se que

$$MUx = MVx + I\omega, \quad (2.16)$$

onde ω é a velocidade angular final da alavanca, V é a velocidade final de A e I é o momento de inércia do conjunto alavanca+ B . Podemos escrever I como a soma dos momentos de inércia de B e da alavanca, ambos tomados

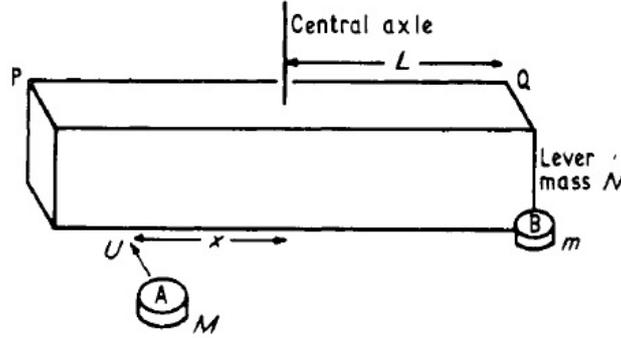


Figura 2.4: Casamento de impedâncias mecânicas via uma alavanca. Figura obtida de [6].

em relação ao centro da barra,

$$I = mL^2 + \frac{NL^2}{3}. \quad (2.17)$$

O coeficiente de restituição na colisão de A com a alavanca é dado por

$$e = -\frac{(\omega x - V)}{(0 - U)} \quad (2.18)$$

de modo que

$$V = \omega x - eU. \quad (2.19)$$

A velocidade angular ω pode ser calculada substituindo o valor de V obtido em (2.19) na equação de conservação do momento angular (2.16). O resultado é

$$\omega = \frac{(1 + e)MUx}{(Mx^2 + I)}. \quad (2.20)$$

A energia cinética final de B é

$$E = \frac{1}{2}mL^2\omega^2, \quad (2.21)$$

já que a velocidade final de B é ωL . Substituindo (2.20) em (2.21), obtém-se que

$$E = \frac{1}{2}mL^2 \frac{[(1 + e)MU]^2}{(Mx - I/x)^2 + 4MI}. \quad (2.22)$$

A transferência máxima de energia cinética para o disco B ocorrerá quando o denominador na equação (2.22) for mínimo, ou seja, quando

$$(Mx - I/x)^2 = 0, \quad (2.23)$$

o que implica em

$$x = \sqrt{\frac{I}{M}}. \quad (2.24)$$

Nesse caso, a energia de B é

$$E_{max} = \frac{(1 + e)^2}{4} \frac{MU^2/2}{1 + N/3m}. \quad (2.25)$$

A velocidade final V do disco A na condição de máxima transferência pode ser obtida combinando as equações (2.19), (2.20) e (2.24). O resultado é

$$V = \frac{U(1 - e)}{2}. \quad (2.26)$$

A equação (2.26) contraria o senso comum de que o disco A precisa ficar em repouso após a colisão para que o disco B receba a máxima quantidade de energia. Considerando que após a colisão com a alavanca o disco A fique em repouso ($V = 0$), teremos das equações (2.16) e (2.19) que

$$\begin{aligned} I\omega &= MUx, \\ \omega x &= eU, \end{aligned} \quad (2.27)$$

ou seja,

$$x = \sqrt{e \frac{I}{M}}. \quad (2.28)$$

Como esse valor de x é diferente do obtido em (2.24), a eficiência da transferência de energia não é máxima quando $V = 0$. Essa discrepância tem origem na inelasticidade da colisão com a barra. Para colisões elásticas, $e = 1$ e a condição de máxima transferência é equivalente a $V = 0$. Nesse caso, a

energia máxima de B , dada por (2.25), reduz-se a

$$E_{max} = \frac{MU^2/2}{1 + N/3m}, \quad (2.29)$$

que ainda é menor que a energia inicial de A , pois a barra retém parte da energia perdida por A . Se a massa da barra for desprezível ($N = 0$), esta não poderá reter energia (ainda estamos considerando $e = 1$) e teremos $E_{max} = MU^2/2$. Nesse caso o ponto de impacto deverá ser

$$\frac{x}{L} = \sqrt{\frac{m}{M}}. \quad (2.30)$$

Em seu artigo, MacInnes descreve uma demonstração (figura 2.5) na qual verifica que a transferência de energia é máxima para $x = L/2$ e comenta que esse resultado contraria o senso comum dos alunos, que acreditam que a transferência de energia seria maior para $x = L$.

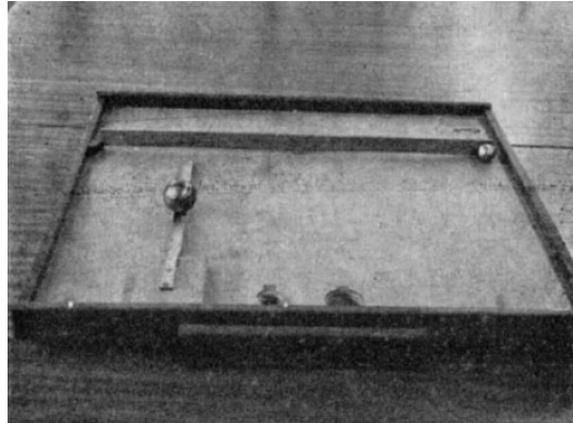


Figura 2.5: Demonstração do casamento mecânico de impedâncias. A razão das massas é $1/4$ e a razão dos comprimentos é $1/2$. Figura obtida de [6].

Outro artigo que discute o uso de alavancas em casamento de impedâncias é “Impedance Matching on the Air Track”, de T. Ansbacher [7]. O autor usa duas alavancas de comprimentos iguais, mostradas na figura 2.6, para casar as impedâncias de dois carrinhos cujas massas obedecem à relação $M_2 = 2M_1$. A ideia é a energia cinética do carrinho que colide com uma primeira alavanca ser completamente transferida para o carrinho que estava

em repouso encostado na segunda alavanca. As duas alavancas estão em contato entre si e supõe-se que elas permanecem em repouso antes, durante e após a colisão elástica.

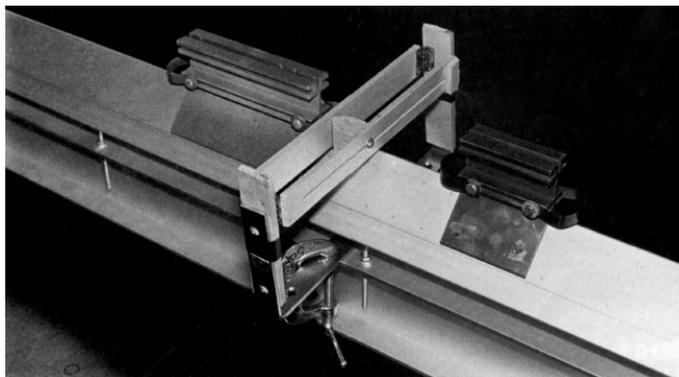


Figura 2.6: Casamento de impedâncias entre dois carrinhos utilizando duas alavancas em cima de um trilho de ar. Figura obtida de [7].

Pela conservação da energia cinética do sistema formado pelas duas massas e as duas alavancas, tem-se que

$$\begin{aligned} M_1 V_{1i}^2 &= M_2 V_{2f}^2 \\ M_2 &= 2M_1 \end{aligned} \implies \frac{V_{1i}}{V_{2f}} = \sqrt{2}, \quad (2.31)$$

onde M_1 é a massa do carrinho 1, de velocidade inicial V_{1i} , e M_2 é a massa do carrinho 2, de velocidade V_{2f} após a colisão. Usando o teorema do impulso e a equação (2.31) pode-se escrever

$$\begin{aligned} F_1 \Delta T &= M_1 V_{1i} \\ F_2 \Delta T &= M_2 V_{2f} \end{aligned} \implies \frac{F_1}{F_2} = \frac{M_1 V_{1i}}{M_2 V_{2f}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707, \quad (2.32)$$

onde F_1 é a intensidade da força feita pelo carrinho 1 na alavanca 1 e F_2 é a intensidade da força feita pelo carrinho 2 na alavanca 2.

Observando a figura 2.7, a alavanca 1 recebe a ação dos torques da força F_1 feita pelo carrinho 1 e da força intermediária F_3 feita pela alavanca 2. Como a alavanca 1 permanece em repouso durante a colisão, pode-se usar a condição de equilíbrio

$$F_1 L = F_3 (L + \ell), \quad (2.33)$$

onde as distâncias L e ℓ estão indicadas na figura 2.7. Na segunda alavanca agem os torques das forças F_3 feita pela alavanca 1 e F_2 feita pelo carrinho 2. Considerando o equilíbrio da alavanca 2, obtém-se

$$F_2 L = F_3 (L - \ell). \quad (2.34)$$

A razão entre as equações (2.33) e (2.34) é dada por

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{L + \ell}{L - \ell}. \quad (2.35)$$

Substituindo a equação (2.32) na equação (2.35) o resultado é a relação entre ℓ e L dada por

$$\ell = -\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \approx -0,17L. \quad (2.36)$$

Essa é a posição na qual o fulcro precisa estar para que o sistema de duas alavancas realize o casamento de impedâncias entre os dois carrinhos, tornando possível a transferência total de energia de um carrinho para o outro.

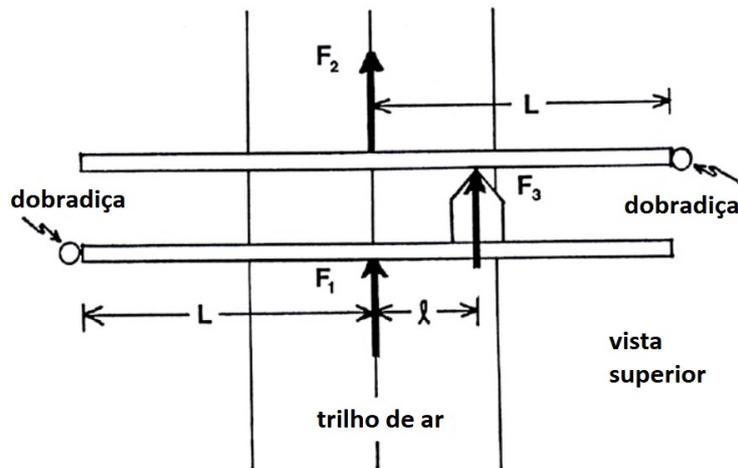


Figura 2.7: Casamento de impedâncias utilizando duas alavancas. Figura adaptada de [7].

Ansbacher não descreve medidas quantitativas realizadas com o aparato, apenas menciona que ele leva a uma maior troca de energia. Uma discussão detalhada desse casador de impedâncias foi feita por Crawford em [8].

2.2.2 Circuitos elétricos

O conceito de impedância surgiu no estudo de circuitos e, nesse contexto, é discutido em diversos livros-texto de física básica como [9, 10]. Entretanto, o casamento de impedâncias raramente é mencionado nesses textos (uma exceção é [10]).

O casamento de impedâncias em um circuito simples (figura 2.8) é tratado no artigo “Physical collisions and the maximum power theorem: an analogy between mechanical and electrical situations”, de Mark Harrison [11]. Uma analogia entre as transferências de energia em circuitos resistivos e em colisões inelásticas é explorada pelo autor. O artigo comenta que no ensino escolar do Reino Unido é obrigatório, na parte de circuitos, abordar a força eletromotriz (ϵ) e a resistência interna (r) de geradores. Se ligado a uma resistência externa (R), uma parcela da potência do gerador é dissipada na resistência interna e outra na ‘carga’ R . Segundo Harrison, a condição de potência ‘útil’ (em R) máxima – que define o casamento de impedâncias – é abordada apenas em uma reduzida quantidade de livros escolares mais antigos, um indício do desuso desse tópico. Harrison propõe no seu artigo uma análise da potência máxima e eficiência no circuito da figura 2.8, realizada de duas maneiras: graficamente e via cálculo diferencial.

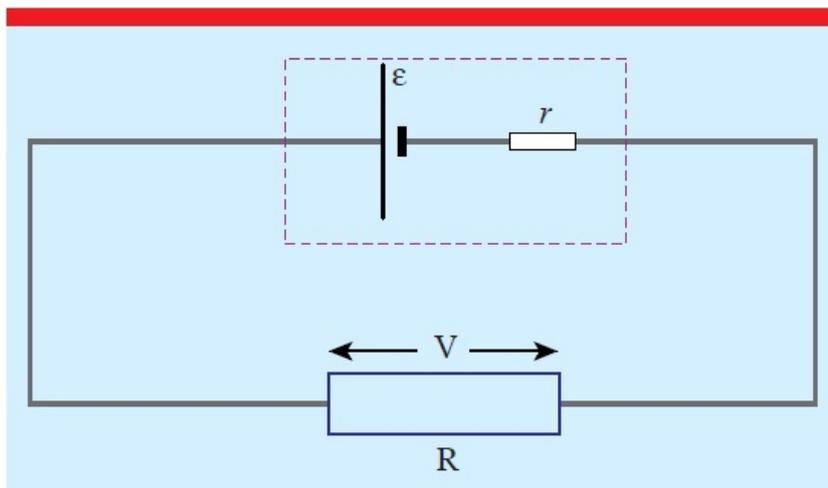


Figura 2.8: Circuito resistivo simples. Figura obtida de [11].

No artigo, a análise é iniciada pela equação da corrente elétrica que atravessa o circuito, dada por

$$I = \frac{\epsilon}{R + r} . \quad (2.37)$$

Conhecida a corrente, a diferença de potencial V nos terminais do gerador é

$$V = \epsilon - Ir . \quad (2.38)$$

A potência dissipada no resistor externo é obtida combinando as equações (2.37) e (2.38),

$$P = VI = \frac{\epsilon^2}{(R + r)^2} R . \quad (2.39)$$

Derivando a potência em relação a variável R obtém-se

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\epsilon^2(r - R)}{(r + R)^3} . \quad (2.40)$$

Conforme apontado no artigo a potência é máxima quando $dP/dR = 0$, o que é obtido para $R = r$, ou seja, quando as impedâncias (no caso, as resistências) estão casadas. O autor obtém o mesmo resultado via um gráfico, para o caso particular $\epsilon = 6\text{V}$ e $r = 2\Omega$, como mostrado na figura 2.9.

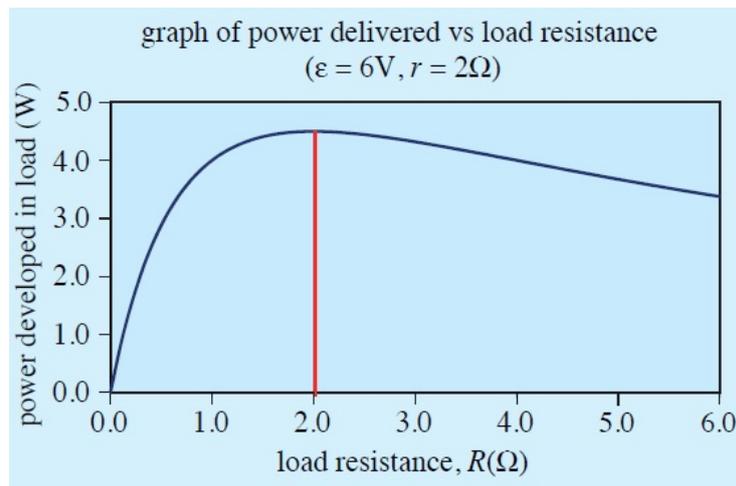


Figura 2.9: Potência transferida como função da resistência externa R . A potência é máxima quando $R = r = 2\Omega$. Figura obtida de [11].

Harrison define a eficiência do circuito como a razão entre a potência útil VI , consumida pelo resistor externo, e a potência total ϵI fornecida pela fonte (dissipada nos dois resistores). Com isso,

$$\text{Eficiência} = \frac{VI}{\epsilon I} = \frac{V}{\epsilon}, \quad (2.41)$$

e pode-se obter que

$$\text{Eficiência} = \frac{R}{R+r}. \quad (2.42)$$

Na potência máxima, $R = r$ e a eficiência é 50%. Deve-se notar que a potência máxima não corresponde à eficiência máxima, como mostra a figura 2.10.

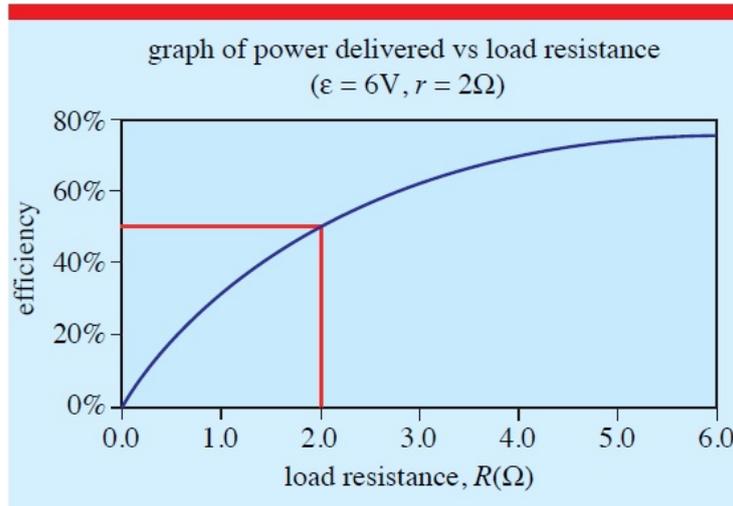


Figura 2.10: Eficiência como função de R , para o mesmo caso da figura anterior. O ponto de potência máxima ($R = 2\Omega$) está indicado. Figura obtida de [11].

O artigo de Harrison discute as semelhanças entre o caso elétrico visto anteriormente e colisões inelásticas. Ele considera uma massa m_1 com velocidade v_1 colidindo com uma massa estacionária m_2 . Após a colisão, as massas m_1 e m_2 se movem juntas com velocidade v_2 , conforme ilustrado na figura 2.11.

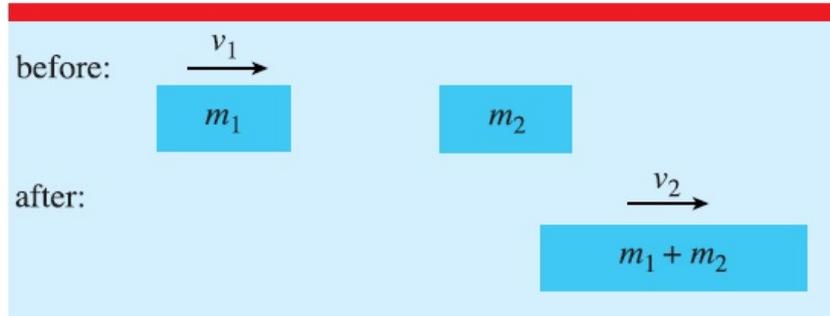


Figura 2.11: Colisão completamente inelástica entre as massas m_1 e m_2 . Figura obtida de [11].

A energia cinética total antes da colisão é

$$K_0 = \frac{1}{2}m_1v_1^2. \quad (2.43)$$

Pela conservação do momento linear tem-se

$$m_1v_1 = m_1v_2 + m_2v_2 \implies v_2 = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2}, \quad (2.44)$$

de modo que a energia cinética transferida para m_2 é dada por

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{m_2}{2} \left(\frac{m_1v_1}{m_1 + m_2} \right)^2. \quad (2.45)$$

A eficiência da transferência de energia cinética para a massa m_2 é, então,

$$\text{Eficiência} = \frac{K_2}{K_0} = \frac{m_2m_1}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (2.46)$$

Harrison aponta a semelhança entre as transferências de energia na colisão inelástica e no circuito resistivo comparando as figuras 2.12 e 2.13 às figuras 2.9 e 2.10. Em particular, a transferência máxima ocorre para $m_2 = m_1$ (impedâncias casadas) e, nesse caso, a eficiência é 50%.

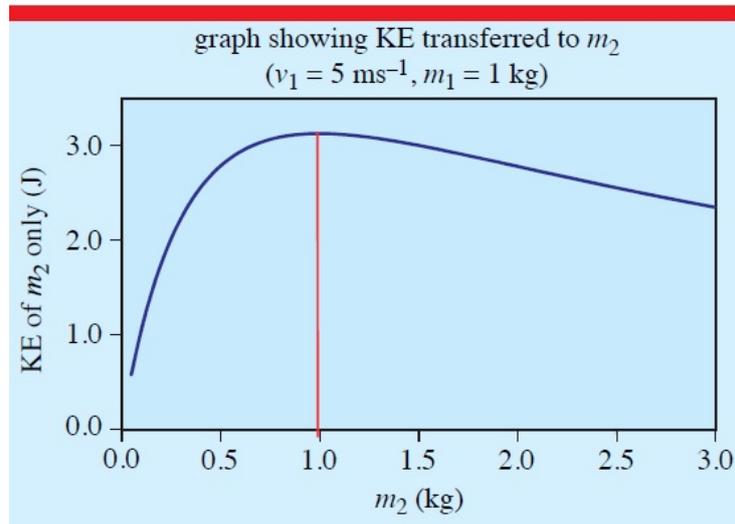


Figura 2.12: Energia cinética transferida para m_2 , no caso em que $m_1 = 1\text{kg}$ e $v_1 = 5\text{m/s}$. O ponto em que K_2 é máximo ($m_2 = m_1 = 1\text{kg}$) está indicado. Figura obtida de [11].

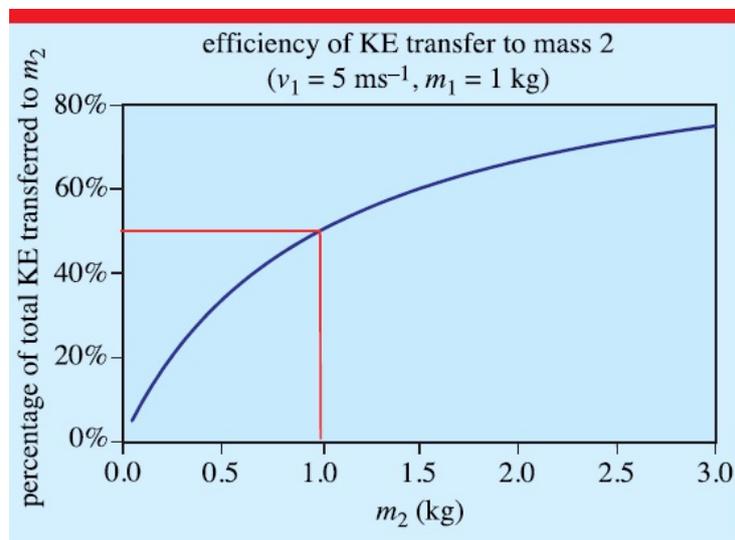


Figura 2.13: Eficiência da transferência de energia em função de m_2 . O ponto em que K_2 é máximo ($m_2 = 1\text{kg}$) está indicado. Figura obtida de [11].

Capítulo 3

Casamento de impedâncias em colisões mecânicas

Este capítulo contém o material didático que desenvolvemos sobre o casamento de impedâncias em colisões mecânicas. O tema é semelhante ao de livros e artigos que descrevemos no capítulo 2, mas a exposição é (esperamos) mais simples e coesa. Também apresentamos experimentos sobre a transferência de energia em colisões e discutimos seus resultados à luz do conceito de impedância.

A matemática utilizada é apenas a álgebra elementar. Mesmo assim, alguns resultados demandam desenvolvimentos relativamente longos, que talvez intimidem parte dos estudantes. De qualquer forma, o material é acessível a professores do ensino médio, que podem adaptá-lo ao perfil de seus alunos.

Este mesmo material está reproduzido no apêndice A. Para facilitar seu uso de maneira independente do corpo principal desta dissertação, o texto no apêndice tem capa e numerações próprias.

3.1 Impedância e transferência de energia

Imagine um sistema físico A que pode transferir energia para outro sistema físico, que chamaremos de B . Mais adiante vamos dar exemplos de A e B , mas por enquanto manteremos a discussão em termos bem gerais, como

ilustrado na figura 3.1.

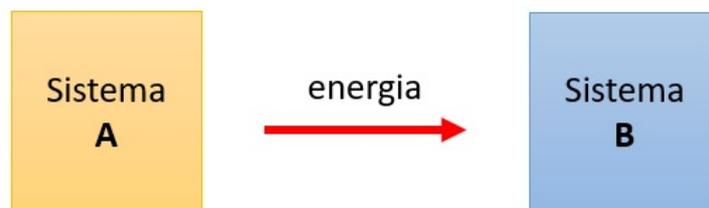


Figura 3.1: Transferência de energia do sistema A para o sistema B .

Um aspecto importante da transferência de energia de A para B é a eficiência desse processo. Idealmente, gostaríamos que toda a energia disponível em A fosse transferida para B , mas na prática isso pode não ser possível. Para compreender em que condições a transferência de energia é máxima, é útil introduzir o conceito de *impedância*. Dizemos que cada um dos sistemas A e B têm uma dada impedância e que, se essas forem iguais, a transferência de energia será a maior possível. Outra maneira de expressar isso é dizendo que as impedâncias de A e B estão *casadas*.

No caso em que as impedâncias são diferentes (estão *descasadas*) a transferência de energia não é a melhor possível. Nesse caso, como veremos, é possível melhorar a transmissão de energia de A para B colocando um terceiro sistema entre eles, o *casador de impedâncias*.

A definição exata do que sejam impedância e casador de impedâncias depende da natureza dos sistemas envolvidos. Nas próximas seções mostraremos como esses conceitos podem ser definidos em uma situação familiar: a colisão elástica de partículas.

3.2 Impedância em colisões mecânicas

Vamos supor que duas partículas, de massas M e m , colidem elasticamente uma com a outra conforme ilustrado na figura 3.2. Inicialmente, a massa M move-se com energia cinética E e m encontra-se em repouso. Durante a colisão uma determinada energia e é transferida de M para m . Como a

colisão é elástica, a energia cinética final de M é $E - e$. Vamos supor que a colisão é ‘frontal’, ou seja, que as massas movem-se ao longo de uma linha reta como ilustrado na figura 3.2.

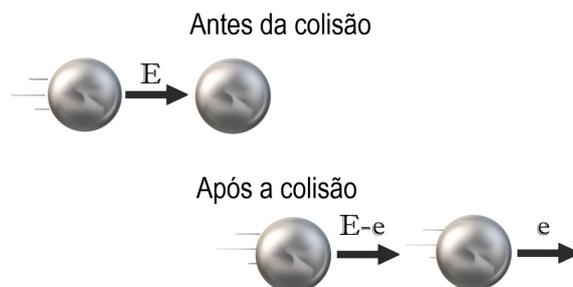


Figura 3.2: Colisão elástica entre uma partícula de massa M e energia E e outra de massa m em repouso. Na colisão, m recebe uma energia cinética e , deixando M com energia $E - e$.

Podemos calcular a energia transferida e utilizando as leis de conservação da energia e do momento linear. A conservação do momento pode ser escrita como

$$MU = Mu + mv, \quad (3.1)$$

onde U e u são as velocidades de M antes e depois da colisão e v é a velocidade final de m . Da mesma forma, a conservação da energia leva a

$$\frac{1}{2}MU^2 = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (3.2)$$

Calculando u a partir da equação (3.1) e substituindo o resultado em (3.2) obtemos uma relação entre as velocidades v e U , que pode ser colocada na forma

$$\frac{v}{U} = \frac{2M}{M + m}. \quad (3.3)$$

A eficiência η_0 da transferência de energia de M para m é definida como

$$\eta_0 = \frac{e}{E}. \quad (3.4)$$

Como $E = MU^2/2$ e $e = mv^2/2$, temos que

$$\eta_0 = \frac{m}{M} \left(\frac{v}{U} \right)^2, \quad (3.5)$$

e finalmente, utilizando (3.3), obtemos

$$\eta_0 = \frac{4Mm}{(M+m)^2}. \quad (3.6)$$

Na situação em que ocorre a máxima transferência de energia, toda a energia cinética de M é transferida a m , ou seja, a eficiência é $\eta_0 = 1$. Nesse caso temos que

$$4Mm = (M+m)^2 \implies (M-m)^2 = 0, \quad (3.7)$$

e portanto

$$\eta_0 = 1 \iff M = m. \quad (3.8)$$

Essa relação nos permite identificar as impedâncias relevantes em uma colisão mecânica: são as massas das partículas. A transferência de energia é máxima quando as impedâncias estão casadas, ou seja, se as massas M e m são iguais. Se as massas forem diferentes a transferência de energia de M para m não será completa. Podemos perguntar se é possível aumentar essa transferência sem alterar as massas e as velocidades iniciais. Na próxima seção veremos que a resposta é sim, utilizando para isso um sistema auxiliar chamado *casador de impedâncias*.

3.3 Casamento de impedâncias em colisões mecânicas

No caso de impedâncias não casadas, apenas uma parcela de energia disponível no sistema A é recebida por B . Frequentemente é possível inserir entre A e B um terceiro sistema, o casador de impedâncias, que aumenta a quantidade de energia transferida (sem produzir energia extra), conforme

ilustrado na figura 3.3.



Figura 3.3: Para sistemas A e B de impedâncias descasadas, um casador de impedâncias colocado entre eles aumenta a transferência de energia.

Na colisão de partículas de massas diferentes M e m , vamos investigar se uma terceira partícula de massa μ colocada entre as duas primeiras pode atuar como casador de impedâncias. A nova configuração está mostrada na figura 3.4. Como antes, se E é a energia inicial da massa M e e a energia final de m , a eficiência da transferência de energia é

$$\eta = \frac{e}{E}, \quad (3.9)$$

que pode ser escrita como

$$\eta = \frac{e}{\epsilon} \frac{\epsilon}{E}, \quad (3.10)$$

onde ϵ é a energia transferida de M para μ na primeira colisão (ver figura 3.4). Os dois fatores na equação acima são, respectivamente, as eficiências das duas colisões intermediárias $M \rightarrow \mu$ e $\mu \rightarrow m$, que podem ser calculadas aplicando a equação (3.6) obtida na seção anterior. O resultado é

$$\eta = \frac{16Mm\mu^2}{(M + \mu)^2(\mu + m)^2}. \quad (3.11)$$

A razão entre η e a eficiência η_0 sem a partícula intermediária, dada pela equação (3.6), é

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \left[\frac{2}{1 + \frac{(\mu^2 + mM)}{\mu(m + M)}} \right]^2. \quad (3.12)$$

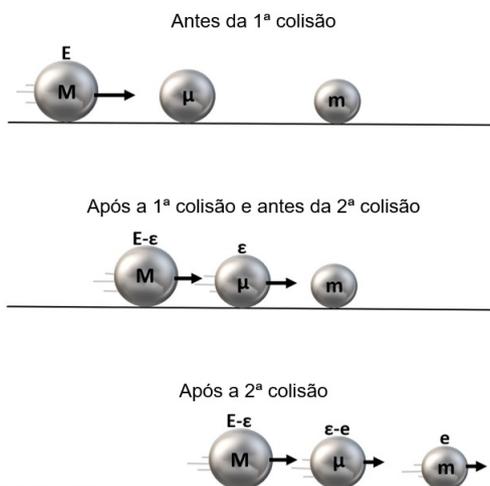


Figura 3.4: Antes da 1ª colisão a esfera M tem energia E , enquanto as outras esferas estão em repouso. Após a 1ª e antes da 2ª colisão, M transfere para μ uma energia ϵ . Após a 2ª colisão, m recebe de μ uma energia e .

A inserção da massa μ causa um aumento da eficiência desde que $\eta > \eta_0$, ou seja, que

$$\frac{(\mu^2 + mM)}{\mu(m + M)} < 1 . \quad (3.13)$$

Isso implica em

$$\mu^2 - \mu(m + M) + mM < 0 , \quad (3.14)$$

que pode ser escrita como

$$(\mu - M)(\mu - m) < 0 . \quad (3.15)$$

A desigualdade (3.15) significa que $\mu - M$ e $\mu - m$ têm sinais opostos. Supondo que $m < M$, isso implica em

$$m < \mu < M . \quad (3.16)$$

De forma mais geral, qualquer valor de μ entre m e M aumenta a eficiência da transferência de energia, não importando qual é a maior massa. Para esses valores de μ a terceira partícula é um casador de impedâncias na colisão.

O mesmo resultado pode ser obtido a partir da figura 3.5, que mostra o gráfico da parábola $(\mu - M)(\mu - m)$ encontrada na desigualdade (3.15). A região de valores negativos, que satisfaz essa inequação do segundo grau, está entre as raízes m e M .

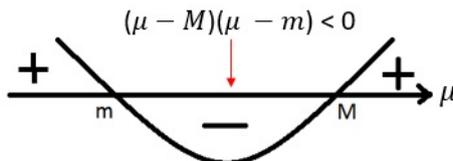


Figura 3.5: A função $(\mu - M)(\mu - m)$ assume resultados positivos para valores de μ inferiores a m ou superiores a M . Para valores de μ compreendidos entre m e M a função é negativa, satisfazendo a inequação (3.15).

Para identificar o valor de μ que promove o maior aumento na eficiência reescrevemos a equação (3.11), colocando-a na forma

$$\eta = \frac{16}{\left[x + \frac{1}{x} + \frac{M + m}{\sqrt{Mm}} \right]^2}, \quad (3.17)$$

onde definimos a quantidade x por

$$x = \frac{\mu}{\sqrt{Mm}}. \quad (3.18)$$

A maior eficiência é obtida quando o termo $x + 1/x$ assume o seu valor mínimo. Vamos definir a função

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad (3.19)$$

cujo gráfico está na figura 3.6. Esse gráfico indica que $f(x)$ tem um mínimo em $x = 1$, no qual a função vale $f(1) = 2$.

Uma demonstração simples desse resultado pode ser feita notando que a equação $f(x) = b$ pode ter duas raízes, uma raiz ou nenhuma raiz, dependendo de b ser maior, igual ou menor que o mínimo de $f(x)$. Por exemplo, a

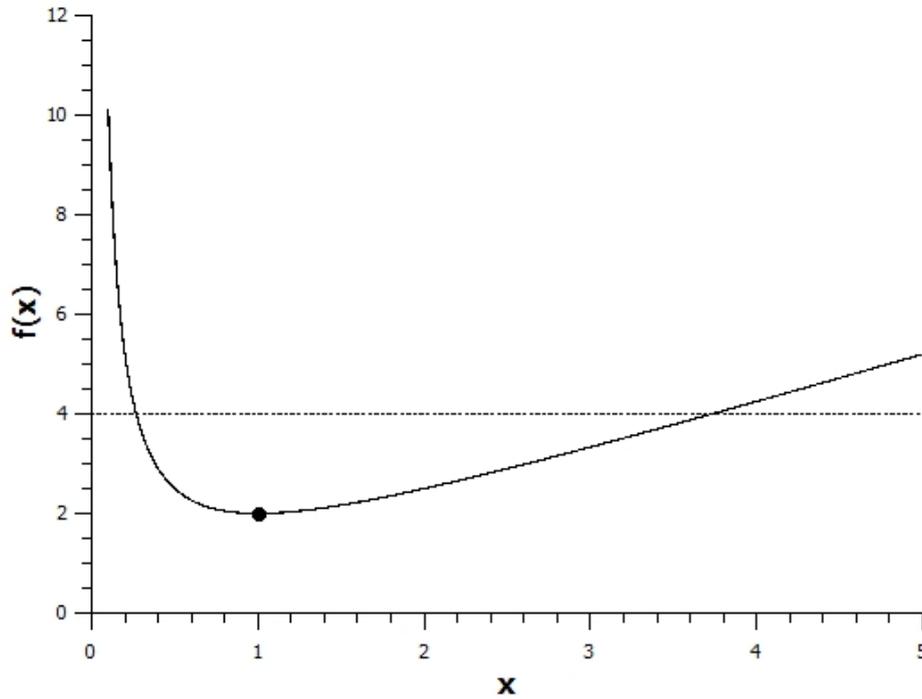


Figura 3.6: Gráfico de $f(x) = x + 1/x$. A função $f(x)$ tem um mínimo em $x = 1$, onde vale $f(1) = 2$. As raízes de $f(x) = b$ são dadas pela interseção da curva com linhas horizontais, como mostrado no caso particular $b = 4$. O mínimo corresponde ao valor de b para o qual há apenas uma raiz.

linha horizontal na figura 3.6 indica a localização das duas raízes para o caso $b = 4$. As raízes são encontradas resolvendo a equação do segundo grau

$$x^2 - bx + 1 = 0, \quad (3.20)$$

ou seja,

$$x = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (3.21)$$

onde $\Delta = b^2 - 4$ é o discriminante da equação. A raiz única corresponde ao mínimo de $f(x)$. Nesse caso o discriminante é nulo, o que implica em

$$b = 2 \quad (3.22)$$

e

$$x = 1 . \quad (3.23)$$

Assim, a eficiência máxima é alcançada para $x = 1$. Pela equação (3.18) isso corresponde à massa intermediária

$$\mu = \sqrt{Mm} . \quad (3.24)$$

Em outras palavras, o melhor casador de impedâncias na colisão de um par de partículas é uma terceira partícula com massa igual à média geométrica das massas do par.¹

Substituindo $\mu = \sqrt{Mm}$ na equação (3.11) encontramos a eficiência da transferência de energia com esse casador de impedâncias,

$$\eta_{max} = \frac{16M^2m^2}{(\sqrt{Mm} + M)^2(\sqrt{Mm} + m)^2} , \quad (3.25)$$

um resultado que pode ser colocado na forma

$$\eta_{max} = \frac{16m/M}{\left(1 + \sqrt{m/M}\right)^4} . \quad (3.26)$$

É importante lembrar que qualquer partícula de massa μ compreendida no intervalo entre m e M é um casador de impedâncias, pois aumenta a eficiência da colisão. A massa $\mu = \sqrt{Mm}$ não é a única a aumentar a eficiência, é apenas aquela para a qual esse aumento é máximo.

O gráfico de η_{max} como função de m/M está mostrado na figura 3.7. Vemos que o casamento das impedâncias não leva a eficiência a 100%, a não ser no caso trivial em que $m/M = 1$ (as massas são iguais) no qual, como já vimos, não há sequer necessidade do casador.

É possível aumentar a eficiência da transmissão de energia empregando um casador mais eficaz. Para isso vamos considerar duas massas μ_1 e μ_2 , ao invés da massa μ , entre os mesmos projétil e alvo. Nessa nova configuração teremos três colisões elásticas sucessivas: $M \rightarrow \mu_1$, $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ e $\mu_2 \rightarrow m$,

¹O mesmo resultado pode ser obtido, é claro, com as técnicas do cálculo diferencial.

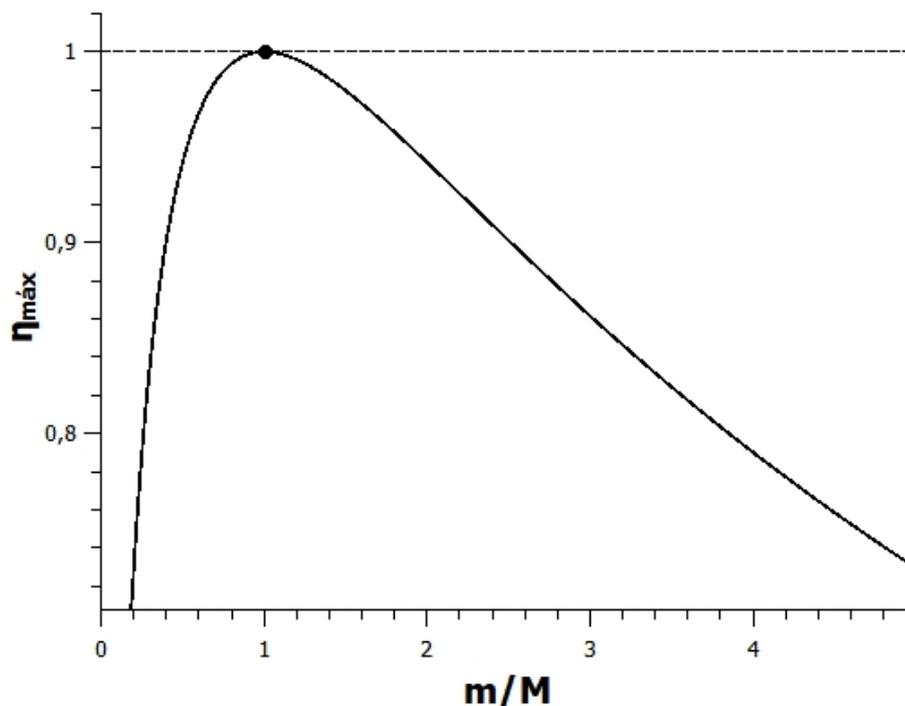


Figura 3.7: A eficiência máxima η_{max} da transferência de energia em função de m/M , no caso em que uma única partícula é o casador de impedâncias. Mesmo com esse casamento a eficiência não atinge 100%, a não ser no caso trivial de massas iguais, $m/M = 1$.

respectivamente.

A eficiência da transferência de energia pode ser calculada estendendo o raciocínio que nos levou à equação (3.11). O resultado é o produto das eficiências de cada uma das colisões intermediárias (dadas pela equação (3.6))

$$\eta = \frac{4M\mu_1}{(M + \mu_1)^2} \cdot \frac{4\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \cdot \frac{4\mu_2m}{(\mu_2 + m)^2} \cdot \quad (3.27)$$

Para calcular a eficiência máxima produzida pelo casador de duas partículas basta notar que, por analogia com o caso anterior (uma partícula intermediária), a escolha $\mu_1 = \sqrt{M\mu_2}$ otimiza a transferência de energia de M para μ_2 e a escolha $\mu_2 = \sqrt{\mu_1 m}$ faz o mesmo para a transferência de μ_1 para m . É fácil ver que, nesse caso, a razão entre as massas sucessivas é

constante

$$\frac{\mu_1}{M} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{m}{\mu_2} = r, \quad (3.28)$$

onde chamamos de r essa constante. Da (3.28) temos que

$$r \cdot r \cdot r = \frac{\mu_1}{M} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{m}{\mu_2} = \frac{m}{M}, \quad (3.29)$$

ou seja,

$$r = (m/M)^{1/3}. \quad (3.30)$$

Conhecendo o valor de r , as massas μ_1 e μ_2 são facilmente determinadas:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= rM, \\ \mu_2 &= r^2M. \end{aligned} \quad (3.31)$$

A eficiência dada pela equação (3.27) pode ser então escrita como

$$\eta = \frac{64m/M}{(1 + \mu_1/M)^2 \cdot (1 + \mu_2/\mu_1)^2 \cdot (1 + m/\mu_2)^2}, \quad (3.32)$$

de modo que, juntando as equações (3.28), (3.30) e (3.32), obtemos que a eficiência máxima é dada por

$$\eta_{max} = \frac{64r^3}{(1 + r)^2 \cdot (1 + r)^2 \cdot (1 + r)^2}, \quad (3.33)$$

ou seja,

$$\eta_{max} = \frac{64m/M}{[1 + (m/M)^{1/3}]^6}. \quad (3.34)$$

A eficiência máxima obtida com o casador de duas partículas, eq. (3.34), é maior que a do casador de uma partícula, eq. (3.26), como mostra o gráfico da figura 3.8. Entretanto, como também podemos ver no gráfico, mesmo no caso de duas partículas a eficiência máxima ainda é inferior a 100% (com exceção do caso trivial $m = M$).

O caso geral, com n partículas como casadoras de impedâncias, pode ser analisado com o mesmo raciocínio utilizado para chegar às equações (3.26) e (3.34). Se as partículas intermediárias têm massas $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$, a eficiência

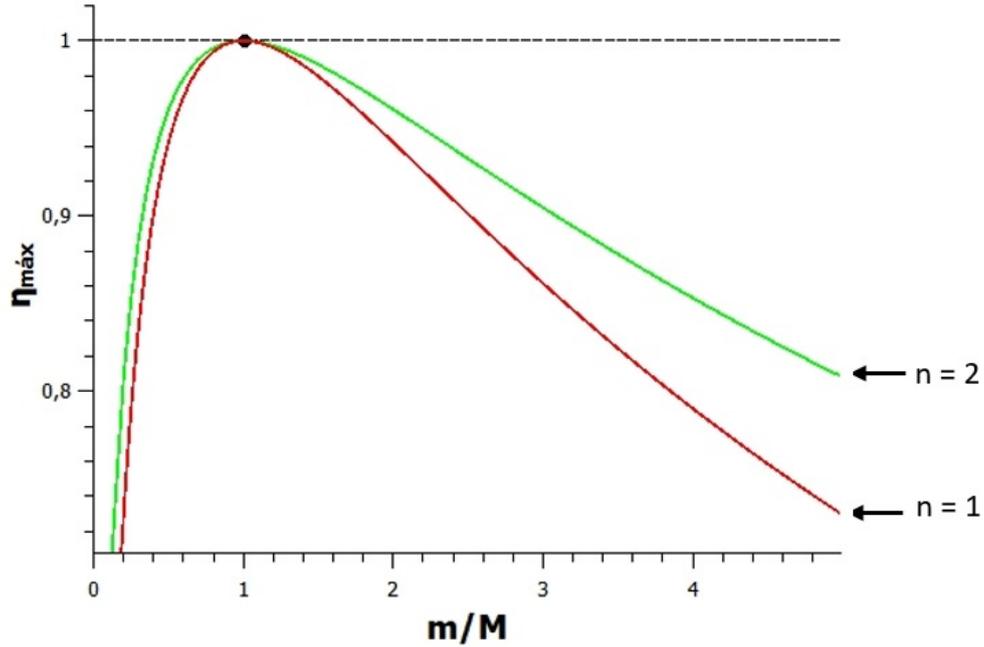


Figura 3.8: A eficiência máxima η_{max} da transferência de energia como função da razão de massas m/M , para casadores com uma e duas partículas. O casador com duas partículas é mais eficiente que o de uma.

máxima será obtida escolhendo essas massas como

$$\begin{aligned} \mu_1 &= rM, \\ \mu_2 &= r^2M, \\ &\vdots \\ \mu_n &= r^nM, \end{aligned} \tag{3.35}$$

onde

$$r = (m/M)^{1/(n+1)}, \tag{3.36}$$

e portanto

$$\eta_{max} = \frac{2^{2(n+1)}m/M}{[1 + (m/M)^{1/(n+1)}]^{2(n+1)}}. \tag{3.37}$$

É fácil ver que para $n = 1$ e $n = 2$ a equação (3.37) recupera os resultados das eqs. (3.26) e (3.34). Mesmo para $n = 0$ a fórmula (3.37) ainda se aplica,

reduzindo-se ao caso sem casador dado pela equação (3.6).

A figura 3.9 mostra a eficiência máxima para diferentes números de partículas intermediárias (inclusive $n = 0$). Podemos ver nos gráficos que a eficiência máxima cresce com n e se aproxima cada vez mais de 100%. Da equação (3.37) vemos que no limite de um casador de infinitas partículas a eficiência máxima seria $\eta_{max} = 100\%$ para qualquer valor de m/M .

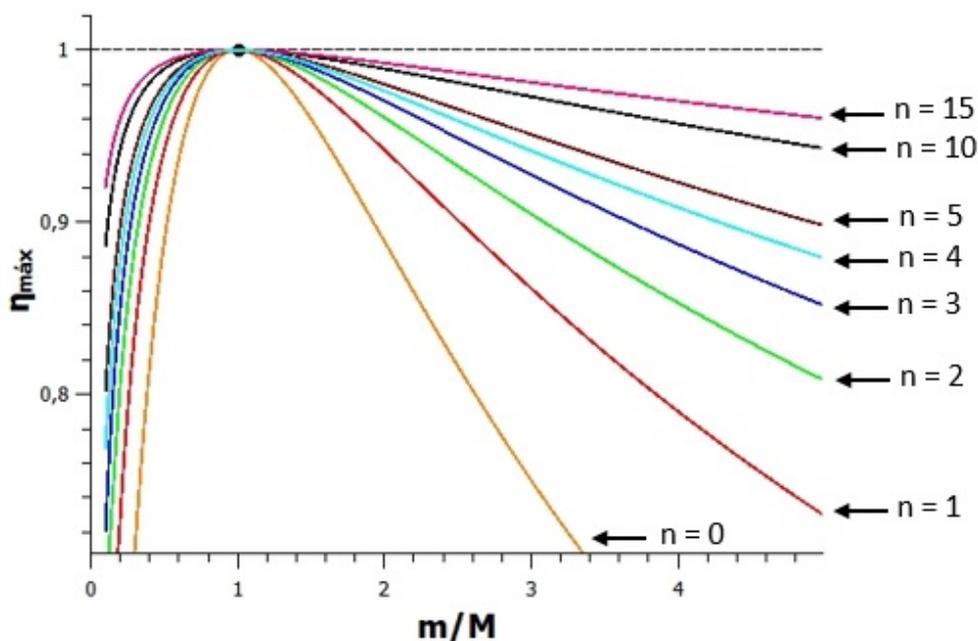


Figura 3.9: A eficiência máxima η_{max} da transferência de energia em função da razão de massas m/M para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15$. A eficiência aumenta com o número de partículas intermediárias, tendendo a 100% quando $n \rightarrow \infty$.

É interessante discutir por que a energia tende a ser totalmente transmitida quando $n \rightarrow \infty$. A massa da primeira esfera no casador é, segundo as equações (3.35) e (3.36),

$$\mu_1 = M(m/M)^{1/(n+1)}. \quad (3.38)$$

De mesma forma, a massa da última (a n -ésima) esfera do casador é

$$\mu_n = M(m/M)^{n/(n+1)} = m(M/m)^{1/(n+1)}. \quad (3.39)$$

Quando $n \rightarrow \infty$, $\mu_1 \rightarrow M$ e $\mu_n \rightarrow m$. Isso significa que a impedância da primeira esfera tende a ficar casada à do projétil e a da última esfera à do alvo. Mais ainda, as impedâncias de esferas vizinhas dentro do casador também tendem a ficar iguais, já que das equações (3.35) e (3.36) obtemos

$$\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} = (M/m)^{1/(n+1)}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.40)$$

e, portanto, $\mu_i/\mu_{i+1} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$. É por isso que a transferência de energia é completa quando o número de esferas intermediárias tende a infinito. O projétil perde toda sua energia ao colidir com a primeira esfera (pois ambas têm a mesma massa), essa energia passa de uma esfera para a seguinte ao longo do casador (pois a diferença de massas entre vizinhas tende a zero) e finalmente a última esfera transfere toda essa energia para o alvo (pois novamente a massa é igual).

Essa análise mostra que é útil atribuir *duas* impedâncias a um casador: a impedância de *entrada* e a impedância de *saída*. No caso que acabamos de discutir, a impedância de entrada é a massa da primeira esfera da sequência, μ_1 , e a impedância de saída é a massa da última esfera, μ_n . Se a impedância de entrada estiver casada à do projétil e a de saída à do alvo, a eficiência do casador é 100%.

Embora a transferência completa de energia seja possível apenas no limite $n \rightarrow \infty$, os conceitos de impedância de entrada e saída nos ajudam a compreender porque a eficiência aumenta quando colocamos mais esferas no casador: de acordo com as equações (3.38) e (3.39), à medida que n aumenta as impedâncias de entrada e saída se aproximam das impedâncias do projétil e do alvo, estabelecendo um casamento cada vez mais efetivo entre elas. Voltaremos a esse assunto mais à frente, na seção 3.5, quando discutirmos outro tipo de casador de impedâncias.

3.4 Experimentos com o casador de impedâncias

Nesta seção apresentaremos dois experimentos de colisão mecânica envolvendo o casador de impedâncias discutido na seção anterior. No primeiro experimento uma esfera desce uma rampa e colide com outra esfera, lançando-a para fora de uma mesa, conforme ilustrado na figura 3.10. O alcance da segunda esfera (o ponto onde ela toca o chão) é usado como medida da energia transferida na colisão. Com isso, o efeito da introdução de esferas intermediárias – o casador de impedâncias – pode ser observado. Dois métodos diferentes para medir o alcance serão discutidos.

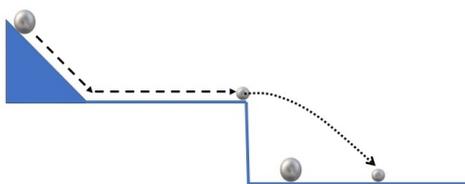


Figura 3.10: Esquema do experimento de colisão. Apenas a trajetória da esfera alvo é mostrada após a colisão.

No segundo experimento tomamos duas bolas de massas diferentes, colocamos a menor sobre a maior e em seguida deixamos o conjunto cair e quicar no chão, como representado na figura 3.11. Após o quique a bola pequena atinge uma altura bem maior que aquela de onde foi largada, indicando que houve uma transferência de energia da bola grande para ela. Como veremos, isso é resultado de um casamento de impedâncias.

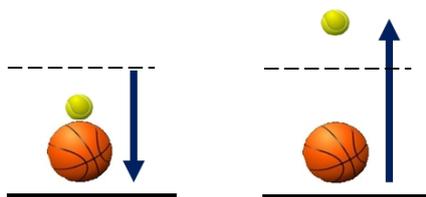


Figura 3.11: Esquema do experimento de queda de bolas empilhadas.

3.4.1 Experimento de colisão: análise com vídeo

Nesta subseção discutiremos o experimento com a rampa. Os dados foram obtidos a partir de gravações em vídeo analisadas com o programa *Tracker* [12, 13]. O programa foi usado para medir o alcance da esfera alvo e, conseqüentemente, a energia transferida. As massas das esferas projétil e alvo são $M = 111,5\text{g}$ e $m = 16,4\text{g}$, respectivamente. Como casadoras de impedâncias utilizamos esferas de massas 28,1g, 44,7g e 66,7g. Todas essas esferas são de aço, retiradas de rolamentos de veículos.

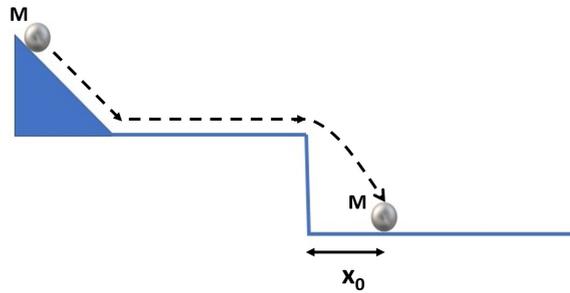


Figura 3.12: Experimento para determinar a energia da esfera projétil.

Na nossa primeira medida utilizamos apenas a esfera projétil (massa M), sem qualquer colisão. Como mostrado na figura 3.12, a esfera é solta no alto de uma rampa cuja base está sobre uma mesa, a uma dada altura do chão. Após descer a rampa a esfera desloca-se na horizontal por um curto período e em seguida cai da mesa, percorrendo uma distância horizontal x_0 até chegar ao chão. O objetivo desse experimento inicial é determinar a energia E do projétil. Medido o alcance x_0 , a velocidade U do projétil ao final da rampa será

$$U = \frac{x_0}{t} \quad (3.41)$$

onde t é o tempo de queda, dado por

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}, \quad (3.42)$$

sendo y a altura de queda e g a aceleração gravitacional. Com isso a veloci-

dade inicial do projétil é

$$U = \sqrt{\frac{g}{2y}} x_0 \quad (3.43)$$

e a energia inicial é

$$E = \frac{1}{2}MU^2 = \frac{Mg}{4y}x_0^2. \quad (3.44)$$

A próxima etapa está esquematizada na figura 3.13. Ela envolve a colisão do projétil M com o alvo m , que está inicialmente em repouso sobre a base da rampa. Dessa vez medimos o alcance x da esfera alvo ao cair no chão. Um raciocínio análogo ao anterior mostra que logo após a colisão a velocidade v e a energia e da esfera alvo são determinadas por x e valem respectivamente

$$v = \sqrt{\frac{g}{2y}} x \quad (3.45)$$

e

$$e = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mg}{4y}x^2. \quad (3.46)$$

Com isso, a razão entre a velocidade final do alvo e a inicial do projétil pode ser escrita como

$$\frac{v}{U} = \frac{x}{x_0} \quad (3.47)$$

e a eficiência da transferência de energia na colisão é dada por

$$\eta = \frac{e}{E} = \frac{m}{M} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2. \quad (3.48)$$

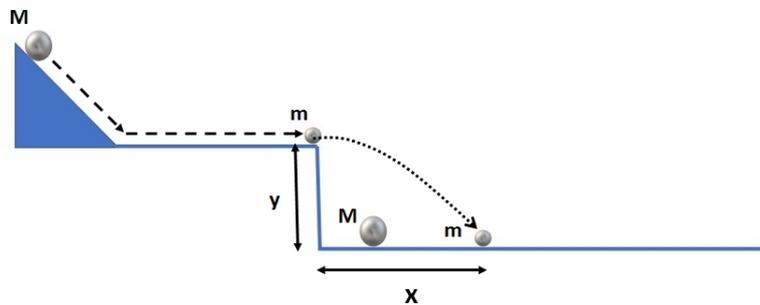


Figura 3.13: Colisão do projétil M com o alvo m .

A última etapa do experimento envolve a colocação de uma ou mais esferas como casador de impedâncias entre o projétil M e o alvo m . A figura 3.14 mostra a montagem com o casador de uma esfera. Chamando de x o alcance de m em colisões com um casador qualquer, a eficiência η da transferência de energia de M para m continua sendo dada pela equação (3.48); da mesma forma a razão v/U é dada pela equação (3.47). Essas equações mostram que um aumento da eficiência η corresponde a um aumento do alcance x .

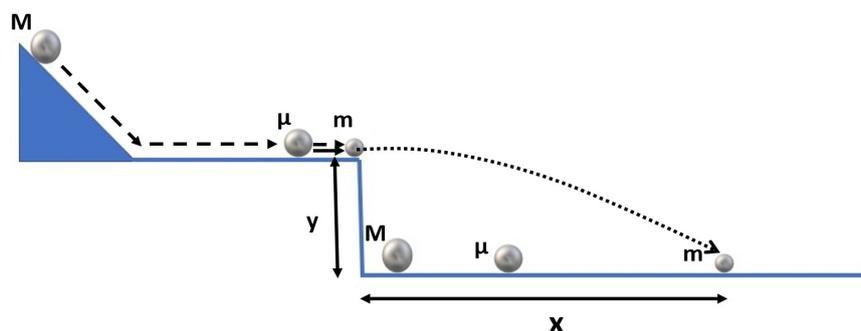


Figura 3.14: Colisão do projétil com o casador μ e do casador com o alvo m .

Os vídeos do experimento foram analisados no programa *Tracker*. No programa marcamos quadro a quadro a posição da esfera de interesse. O alcance x não foi definido pelo ponto em que a esfera atinge o chão, mas pelo ponto onde ela cruza uma régua horizontal colocada a uma distância $y = 40\text{cm}$ abaixo da mesa. Para determinar esse alcance traçamos uma parábola pelos pontos marcados nos quadros e determinamos o local em que a trajetória cruza a régua, como mostrado nas marcações feitas nas imagens da figura 3.15. Estabelecendo um sistema referência com origem no ponto onde a esfera começa a cair e utilizando o tamanho da régua para calibrar a escala de distâncias, determinamos (em centímetros) a distância horizontal entre a origem e o ponto de interseção com a régua. Essa distância é o valor de x .

Para o casador de uma esfera, a eficiência máxima da colisão é obtida com a massa $\mu = 42,8\text{g}$. No casador de duas esferas as massas ideais são $\mu_1 = 58,9\text{g}$ e $\mu_2 = 31,1\text{g}$ (ver as equações (3.35) e (3.36)). Como não encontramos esferas com essas massas ideais, utilizamos as massas mais próximas que

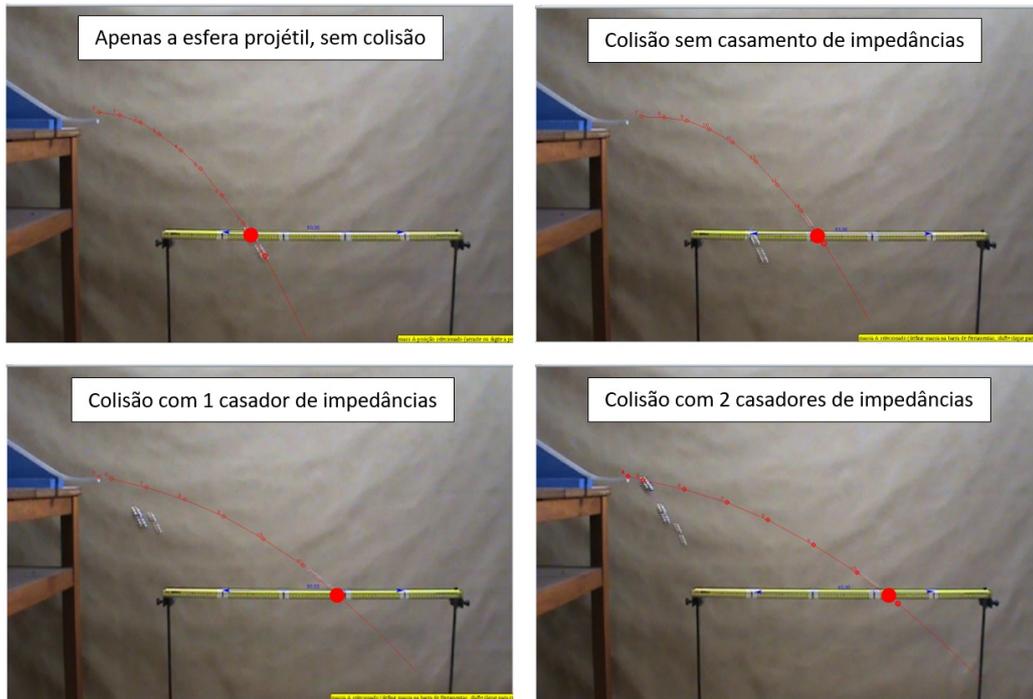


Figura 3.15: Imagens obtidas no *Tracker* nas etapas do experimento. Em cada uma das imagens está indicado o ponto em que a esfera cruza a régua.

tínhamos à disposição: $\mu = 44,7\text{g}$ para o casador de uma esfera e $\mu_1 = 66,7\text{g}$ e $\mu_2 = 28,1\text{g}$ para o de duas.

A tabela 3.1 apresenta os resultados das medidas de alcance nas três etapas do experimento: apenas o projétil, projétil-alvo e projétil-casadores-alvo. Para cada situação analisamos os vídeos que fizemos (dois ou três dependendo do caso) e calculamos a média dos valores encontrados. Vemos que, nos casos em que há colisão, o alcance médio de m aumenta com a inserção do casador de uma esfera e mais ainda com o de duas esferas. O mesmo resultado pode ser observado qualitativamente nas fotos mostradas na figura 3.15.

A tabela 3.2 mostra o número n de esferas no casador de impedâncias ($n = 0$ corresponde a nenhum casador), o alcance x , a razão x/x_0 e os valores de v/U e da eficiência η derivados dessa razão com auxílio das equações (3.47) e (3.48). Como esperado, a eficiência da transferência de energia e a a razão de velocidades aumentam com o número de esferas utilizadas no casador.

Esferas	Medidas (cm)			Alcance Médio (cm)
M	51,7	52,1	51,5	51,8
M→m	66,2	63,9	-	65,0
M→μ→m	79,8	78,5	81,0	79,7
M→μ₁→μ₂→m	84,9	87,4	-	86,1

Tabela 3.1: Resultado das medidas de alcance e suas respectivas médias. A primeira linha é o alcance x_0 do projétil M . As demais referem-se ao alcance x do alvo m , sem e com casadores de impedância.

Resultados				
n	x (cm)	x/x₀	v/U	η
0	65,0	1,3	1,3	0,23
1	79,7	1,5	1,5	0,35
2	86,1	1,7	1,7	0,41

Tabela 3.2: Os resultados do experimento. O número de esferas no casador é n . A razão x/x_0 é calculada com os resultados da tabela 3.1 e utilizada para obter a razão de velocidades v/U e a eficiência da transferência de energia η .

Os resultados da tabela 3.2 estão apresentados nos gráficos da figura 3.16, juntamente com os valores máximos correspondentes ao casamento “ideal” de impedâncias,² aquele que levaria à maior eficiência possível (ver equação 3.37). Os nossos resultados são menores que os máximos por, pelo menos, dois motivos: as colisões entre as esferas não são elásticas e os casadores usados não são os mais eficientes. Mesmo assim vemos que o efeito do casamento de impedâncias é claramente perceptível.

²Como já mencionamos, as massas utilizadas no casador não foram as ideais. Entretanto as eficiências calculadas com as massas disponíveis, via eqs. (3.11) e (3.27), são muito semelhantes aos valores ideais.

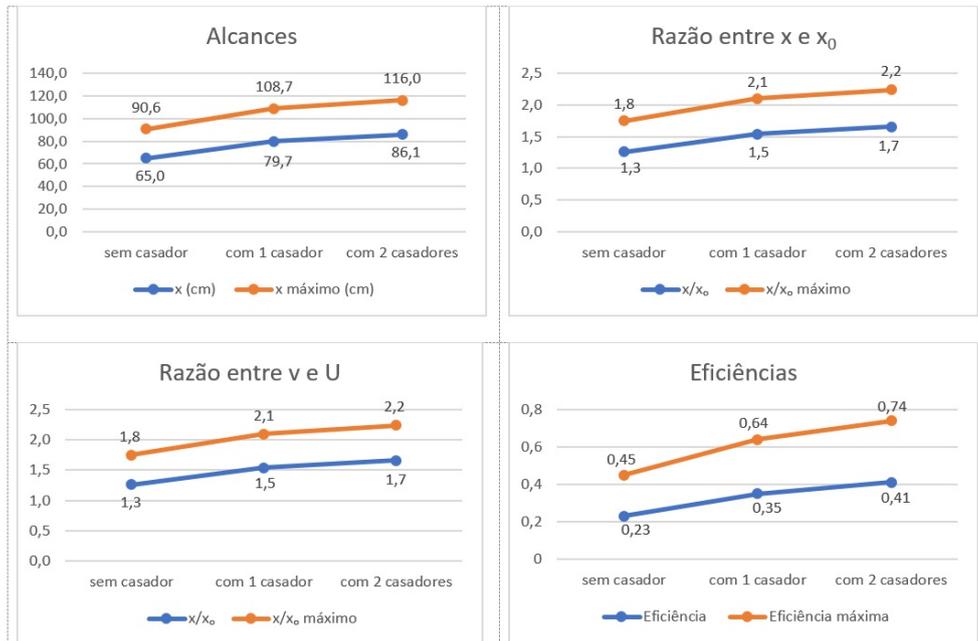


Figura 3.16: Gráficos dos resultados experimentais. Os valores máximos correspondentes a um casamento ideal de impedâncias também são mostrados.

3.4.2 Um método simples para medir o alcance

O experimento anterior envolve a gravação de um vídeo para posterior análise no computador. Existe uma forma mais simples e rápida, porém menos precisa, de medir o alcance da esfera alvo. Para isso colocamos uma sequência de caixas idênticas no chão, uma em contato com a outra e alinhadas com a trajetória das bolas, conforme mostrado na figura (3.17).

As caixas foram colocadas de tal forma que na colisão sem casamento de impedâncias a esfera alvo caísse nas primeiras caixas da fila. A partir daí, à medida que o alcance aumenta devido à inserção de casadores, a esfera alvo passa a cair dentro das caixas seguintes, cada vez mais afastadas da mesa onde ocorreu a colisão. Em nosso experimento utilizamos sete caixas de sapato com cerca de 13 cm de largura (o comprimento na direção do movimento das esferas). A cada colisão registramos a caixa onde caiu a esfera alvo. Essa medida do alcance foi repetida 20 vezes para cada número de casadores. Por exemplo, sem casamento a esfera alvo atingiu a primeira caixa 11 vezes e a



Figura 3.17: As caixas utilizadas no experimento.

segunda 9 vezes. Uma camada de isopor foi colocada no fundo das caixas para minimizar a possibilidade da esfera cair em uma delas e quicar para a seguinte. As caixas foram fixadas ao chão por uma fita adesiva dupla face e presas com cliques às suas vizinhas, para impedir deslocamentos durante a captura das esferas.

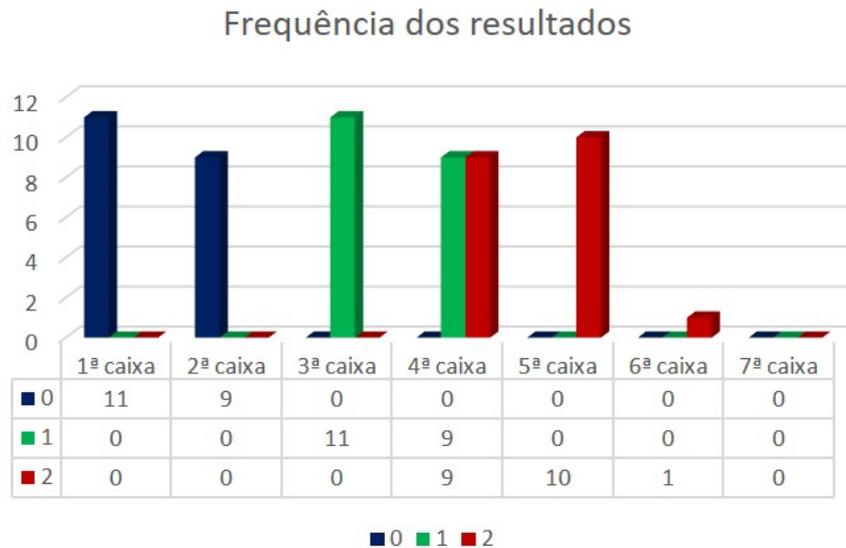


Figura 3.18: Frequência dos alcances da bola alvo, determinados pela caixa onde essa caiu. As cores identificam o número de casadores: 0, 1 e 2.

Os resultados obtidos com esse procedimento estão mostrados na figura 3.18. Vemos novamente que o casamento de impedâncias aumenta o alcance da esfera alvo e que ganhos maiores são alcançadas com mais esferas casado-

ras. Embora a medida do alcance seja pouco precisa, isso não compromete a observação do efeito do casamento de impedância. A simplicidade da montagem e o fato dos resultados serem obtidos imediatamente, sem necessidade de análise posterior, tornam o método particularmente recomendado para uso em sala de aula.

3.4.3 Casamento de impedâncias em bolas quicando

O conceito de casamento de impedâncias pode ser usado para estudar um experimento muito interessante e fácil de realizar em qualquer sala de aula. Para isso basta tomar duas bolas de massas diferentes, colocar a menor sobre a maior e deixar ambas caírem de uma certa altura, como está representado na figura 3.11. Após quicarem no chão as bolas voltam a subir, mas a pequena atinge uma altura muito maior que aquela de onde foi largada. A observação desse efeito costuma surpreender os alunos e, como veremos, o ganho na altura é resultado do casamento de impedâncias entre a bola pequena e a Terra.

Para entender isso, vamos supor inicialmente que apenas a bola pequena, de massa m , foi deixada cair sobre o chão. Considerando a Terra como outra bola cuja massa é M , podemos imaginar que o quique da bola pequena no chão é uma colisão entre as massas m e M , o tipo de problema que temos analisado neste capítulo. Voltando à situação original, uma bola pequena e uma grande caindo sobre a Terra, fica fácil entender porque a bola pequena agora vai mais alto: a bola grande atua como um casador de impedâncias entre a pequena e a Terra.

Podemos analisar quantitativamente esse efeito aplicando os resultados de nossa análise de colisões, mas para isso é necessário fazer uma troca de referencial. Aqueles resultados foram obtidos considerando que o casador e o alvo estavam em repouso antes da colisão, mas isso não ocorre na presente situação: agora ambos têm velocidade $-V$ antes de atingir o chão (velocidades positivas são para cima). Para recuperar o caso já estudado devemos descrever a colisão em um referencial R que se move com velocidade vertical $-V$ em relação à Terra. Nesse referencial as bolas pequena e grande (o ca-

sador) estão em repouso no momento da colisão e a Terra tem velocidade V . Do ponto de vista do referencial R a Terra é um projétil que vai em direção a duas bolas em repouso, exatamente a situação que já analisamos.

Se v é a velocidade, *no referencial da Terra*, da bola pequena logo após o quique, em R essa velocidade é $v + V$. A eficiência da colisão no referencial R , portanto, é dada por

$$\eta = \frac{m(v + V)^2/2}{MV^2/2} = \frac{m}{M} \left(\frac{v}{V} + 1 \right)^2, \quad (3.49)$$

de modo que o ganho de velocidade da bola pequena no referencial da Terra é

$$\frac{v}{V} = \sqrt{\eta \frac{M}{m}} - 1. \quad (3.50)$$

Substituindo na equação acima a eficiência máxima dada pela equação (3.26) obtemos o ganho máximo de velocidade

$$\frac{v}{V} = \frac{4}{[1 + (m/M)^{1/2}]^2} - 1. \quad (3.51)$$

Como a massa da Terra é muito maior que m podemos tomar $m/M = 0$ e obter

$$\frac{v}{V} = 3, \quad (3.52)$$

ou seja, a velocidade da bola pequena após o quique é três vezes maior que a velocidade com que ela atinge o chão.³

O efeito do casamento de impedâncias é mais perceptível pelo aumento altura alcançada pela bola pequena. Se H_0 é a altura de onde as bolas foram soltas e H é a altura atingida por m após o quique, um pouco de cinemática mostra que

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{v}{V} \right)^2 \quad (3.53)$$

³Como o casamento ideal de impedâncias só ocorrerá se a massa μ da bola maior for \sqrt{mM} , esse resultado parece inalcançável. Entretanto, é fácil mostrar que para valores razoáveis de m/μ já podemos chegar bem próximo do valor máximo (3.52). Por exemplo, para $m/\mu = 0,1$ encontramos $v/V = 2,6$.

e portanto, no caso ideal,

$$\frac{H}{H_0} = 9. \quad (3.54)$$

Esse resultado é o motivo da surpresa dos estudantes ao presenciarem uma demonstração desse efeito: a bola pode bater no teto da sala de aula.

Com o que já sabemos sobre casamento de impedâncias, podemos prever que a colocação de mais bolas entre m e o chão aumentará ainda mais o ganho de altura. Se deixarmos N bolas caírem, teremos o equivalente a $n = N - 1$ casadores de impedâncias entre a bola superior e a Terra. Substituindo na equação (3.50) a eficiência máxima para n casadores, dada por (3.37), encontramos

$$\frac{v}{V} = \frac{2^{(n+1)}}{[1 + (m/M)^{1/(n+1)}]^{(n+1)}} - 1. \quad (3.55)$$

Da mesma forma que anteriormente, tomando o limite $m/M \rightarrow 0$ obtemos

$$\frac{v}{V} = 2^{(n+1)} - 1, \quad (3.56)$$

ou ainda, em termos do número $N = n + 1$ de bolas em queda,

$$\frac{v}{V} = 2^N - 1. \quad (3.57)$$

Substituindo esse resultado na equação (3.53) obtemos o ganho na altura alcançada da bola superior:

$$\frac{H}{H_0} = (2^N - 1)^2. \quad (3.58)$$

Esse resultado mostra que a altura H cresce exponencialmente com o número de bolas. Com três bolas a altura máxima já é 49 vezes maior que a inicial.⁴

Nós realizamos experimentos com a queda de duas e três bolas e filmamos sua evolução. Não tentamos analisar esses vídeos quantitativamente; a magnitude do efeito é tão grande que sua simples observação já demonstra os aspectos principais.

⁴Novamente esse é um resultado ideal, do qual podemos nos aproximar diminuindo a razão entre massas sucessivas na pilha de bolas. Por exemplo, se essa razão for 0,1 obtemos $v/V = 5,4$ e $H/H_0 = 29$.

No primeiro experimento utilizamos uma bola de basquete e uma bola de tênis. As bolas foram empilhadas na vertical e soltas da altura do ombro. O resultado está na figura 3.19, que mostra dois quadros extraídos do vídeo. As imagens demonstram que a bola de tênis atingiu uma altura bem maior que a inicial (cerca de três vezes mais).



Figura 3.19: Queda de duas bolas, uma de tênis e outra de basquete. As imagens do vídeo mostram que a altura máxima atingida pela bola de tênis após o quique é cerca de três vezes maior que sua altura inicial.

No segundo experimento empilhamos uma bola de basquete, uma de tênis e uma de golfe, colocando fita dupla face na superfície de contato entre elas para melhor equilibrá-las. Novamente, o conjunto foi solto à altura do ombro. O resultado pode ser avaliado a partir dos dois quadros de vídeo mostrados na figura 3.20. A bola de golfe atingiu uma altura tão grande que não fomos capazes de filmar toda a sua trajetória; o segundo quadro mostra a bola ainda enquanto ela subia, logo antes de sair completamente do vídeo.

Os dois experimentos produzem efeitos surpreendentes, que atraem a atenção da maioria dos estudantes. A explicação a partir do conceito de impedância pode ser uma boa forma de introduzir esse tema em cursos introdutórios de física.

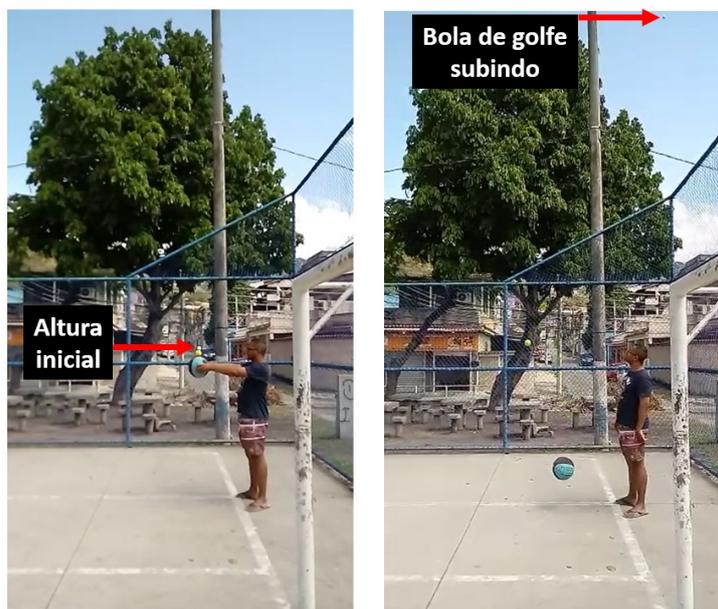


Figura 3.20: Queda de três bolas: de basquete, tênis e golfe. Após o quique a bola de golfe sobe tanto que sai do vídeo; o quadro à direita é o último a conter a bola.

3.5 Outro tipo de casador de impedâncias

Existem diferentes formas de se realizar um casamento de impedâncias. Nesta seção mostraremos como uma simples alavanca colocada entre o projétil de massa M e o alvo de massa m pode casar suas impedâncias.

O funcionamento desse casador-alavanca está descrito na figura 3.21. O projétil com velocidade U atinge a alavanca a uma distância L_1 do eixo de rotação. A alavanca, por sua vez, colide com o alvo que está a uma distância L_2 do mesmo eixo, colocando-o em movimento com velocidade v .

Vamos supor que o casamento de impedâncias seja perfeito, ou seja, a energia cinética do projétil é completamente transferida para o alvo. Nesse caso, na primeira colisão o projétil transmite toda sua energia à alavanca e fica em repouso. Na colisão seguinte a alavanca passa toda sua energia para o alvo e volta a ficar em repouso.

Na primeira colisão temos, pela conservação da energia e momento angu-



Figura 3.21: Casamento de impedâncias com uma alavanca. O diagrama à esquerda mostra o sistema projétil-alavanca-alvo antes da colisão. À direita vemos o sistema após a colisão.

lar, que

$$\frac{1}{2}MU^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (3.59)$$

e

$$MUL_1 = I\omega, \quad (3.60)$$

onde I é o momento de inércia da alavanca e ω é sua velocidade angular. Dividindo a equação (3.59) pela (3.60) encontramos que a velocidade da partícula projétil é

$$U = \omega L_1. \quad (3.61)$$

Substituindo a equação (3.61) em (3.59) ou (3.60) descobrimos que a distância L_1 para a qual toda a energia do projétil passa para a alavanca é

$$L_1 = \sqrt{\frac{I}{M}}. \quad (3.62)$$

Na segunda colisão, as mesmas leis de conservação conduzem a

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.63)$$

e

$$I\omega = mvL_2. \quad (3.64)$$

Como no caso anterior, encontramos que a velocidade final da partícula alvo é

$$v = \omega L_2 \quad (3.65)$$

e que

$$L_2 = \sqrt{\frac{I}{m}}, \quad (3.66)$$

é o ponto onde a alavanca deve colidir com o alvo de forma a transferir toda a sua energia. A razão entre os braços L_1 e L_2 é

$$\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{m}{M}}, \quad (3.67)$$

que depende apenas das massas M e m .

Para entender melhor como a alavanca casa as impedâncias do projétil e do alvo, vamos retomar a discussão feita ao final da seção 3.3 e pensar na alavanca como um sistema com duas impedâncias: uma de entrada e outra de saída. A impedância de entrada é determinada pelo ponto onde o projétil atinge a alavanca e é definida por

$$\mu_1 = \frac{I}{\ell_1^2}, \quad (3.68)$$

onde ℓ_1 é a distância do ponto de impacto do projétil ao eixo de rotação. Da mesma forma, a impedância de saída é dada pelo ponto onde a alavanca atinge o alvo, sendo definida por

$$\mu_2 = \frac{I}{\ell_2^2}, \quad (3.69)$$

onde ℓ_2 é a distância do ponto de contato alavanca-alvo ao eixo de rotação. Se a impedância de entrada estiver casada à impedância do projétil teremos

$$\mu_1 = M \quad (3.70)$$

e portanto

$$\ell_1 = L_1, \quad (3.71)$$

ou seja, como já vimos, o projétil transferirá toda sua energia à alavanca. Da mesma forma, se a impedância de saída estiver casada à impedância do alvo teremos

$$\mu_2 = m \quad (3.72)$$

e

$$\ell_2 = L_2, \quad (3.73)$$

e toda a energia da alavanca passará para o alvo.

Em princípio, esse casador de impedâncias permitiria a transferência de 100% da energia do projétil para o alvo. Na prática, a inelasticidade das colisões alavanca-esfera e a dificuldade de se ajustar as distâncias ℓ_1 e ℓ_2 a seus valores ideais L_1 e L_2 diminuem bastante a eficiência. Apesar dessas complicações o casador-alavanca produz um aumento significativo da energia transferida, como mostram os resultados experimentais que apresentaremos na próxima seção.

3.6 Experimentos com o casador-alavanca

A montagem do experimento com o casador-alavanca é semelhante à do primeiro experimento descrito neste capítulo: após descer uma rampa a esfera projétil colide com a esfera alvo, lançando-a para fora de uma mesa. A diferença é que com a introdução da alavanca o projétil e o alvo não estão mais alinhados, e sim colocados a distâncias L_1 e L_2 do eixo de rotação (ver a figura 3.21).

Para calcular L_1 e L_2 com as equações (3.62) e (3.66) precisamos conhecer o momento de inércia I . A alavanca que usamos foi feita de alumínio e tinha 30,5 cm de comprimento e massa 26,5 g. Uma foto dela está na figura 3.22.

O cálculo do momento de inércia foi realizado a partir das dimensões da alavanca, dadas na figura 3.23. O resultado foi $I = 5740 \text{ g cm}^2$, correspondente a um raio de giração 14,7 cm.

Assim como no primeiro experimento, a energia transferida à esfera alvo foi medida pelo seu alcance ao cair no chão. Optamos por usar o método de caixas para realizar essas medidas, devido à sua rapidez e simplicidade. Os

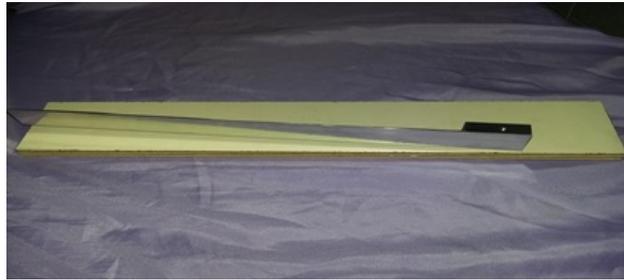


Figura 3.22: O casador de impedâncias construído com uma alavanca. Usamos uma barra de alumínio com um encaixe do mesmo material em uma de suas extremidades, por onde passa o eixo de rotação. O conjunto foi fixado a um pedaço de madeira.

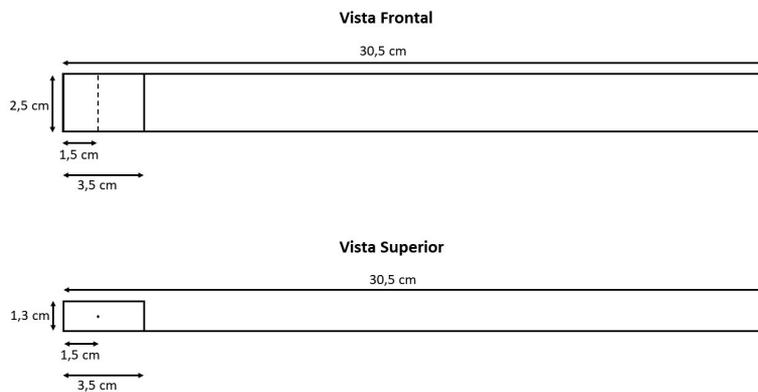


Figura 3.23: Desenho e dimensões da alavanca.

resultados estão mostrados nos histogramas da figura 3.24. Sem o casador de impedâncias, a esfera alvo cai na terceira ou na quarta caixas (colunas escuras na figura 3.24). Com a alavanca a esfera passa a cair na quarta e quinta caixas (colunas claras), ou seja, mais à frente em média.

Mesmo que na prática a eficiência do casador-alavanca não seja 100%, seu estudo é interessante por mostrar que existem diversas maneiras de se casar impedâncias. Em particular, ele mostra que não é necessário realizar o casamento através da introdução de um sistema de impedância intermediária. Outras formas de casamento são possíveis.

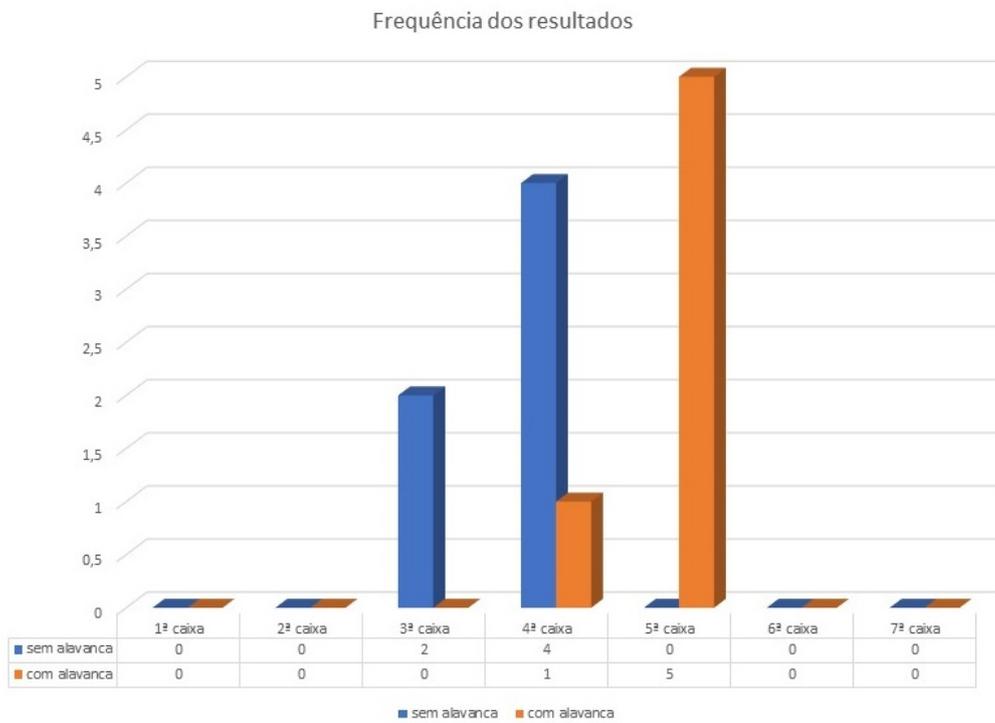


Figura 3.24: Alcance na colisão de duas esferas. Sem o casador de impedâncias a esfera alvo atinge a terceira ou quarta caixas (barras escuras). Com a inserção da alavanca ela chega à quarta e quinta caixas (barras claras).

Capítulo 4

Casamento de impedâncias em óptica

Neste capítulo vamos aplicar os conceitos de impedância e casamento de impedâncias desenvolvidos no contexto de colisões mecânicas a uma área completamente distinta: a óptica. Mais especificamente, estudaremos a transmissão de luz de um meio transparente para outro. Esse é um problema de considerável importância prática que, como veremos, pode ser analisado com auxílio de analogias ao que já fizemos na mecânica.¹

4.1 Transmissão de luz na interface entre dois meios

Vamos considerar dois materiais transparentes, com índices de refração diferentes n_1 e n_2 , em contato direto entre si. Se um feixe luminoso vindo de um dos materiais incidir na superfície que separa os dois meios, nem toda a luz incidente passará para o outro lado – uma parte será refletida de volta, como ilustrado na figura 4.1. Esse é um fato familiar, frequente em nosso dia a dia. Ele se manifesta, por exemplo, quando olhamos para a vitrine de uma loja e vemos nossa imagem refletida superposta aos artigos em exposição.

¹Este material está reproduzido no apêndice A, logo após a discussão de colisões mecânicas.

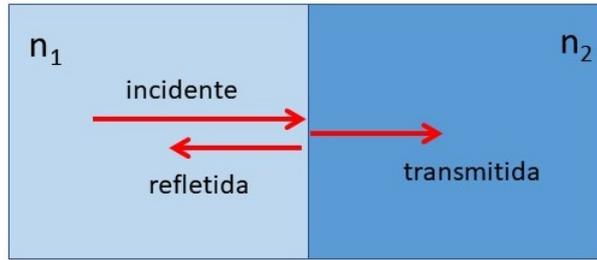


Figura 4.1: Transferência de energia do meio 1 para o meio 2.

A passagem de luz de um meio para outro é um processo de transferência de energia entre dois sistemas. Apesar da luz ser um sistema físico muito diferente dos objetos mecânicos que estudamos até agora, veremos que boa parte do que já aprendemos pode ser aplicado à nova situação.

O problema é o mesmo de antes: é possível fazer com que mais luz passe de um meio para outro? Para encontrar a resposta com os métodos que empregamos no capítulo 3, o primeiro passo é identificar a grandeza física que desempenha o papel de impedância no caso da propagação da luz.

Sabemos que a luz será completamente transmitida de um meio para o outro se os dois índices de refração forem iguais: sem refração não haverá reflexão na interface.² Como a máxima transferência de energia só deve acontecer para sistemas com impedâncias iguais, é natural associar a impedância “óptica” de um meio a seu índice de refração. Se chamarmos essa impedância de Z , somos tentados a escrever que $Z = n$. A definição usual, entretanto, não é essa e sim

$$Z = \frac{Z_0}{n} \quad (4.1)$$

onde, para materiais não-magnéticos, Z_0 é uma constante chamada “impedância do vácuo” (já que é o valor de Z para $n = 1$). Para nossos propósitos essa diferença não é muito importante. O essencial é dispormos de uma relação entre Z e n tal que $Z_1 = Z_2 \iff n_1 = n_2$, ou seja, que nos permita identificar o casamento (e descasamento) de impedâncias. Como isso acon-

²Isso não é totalmente correto. Se a permeabilidade magnética dos dois meios for diferente haverá reflexão, mesmo com índices de refração iguais. Como quase todos os materiais transparentes à luz visível são não-magnéticos, sua permeabilidade é praticamente igual à do vácuo e não precisamos nos preocupar com essa complicação.

tece nos dois casos, usaremos indistintamente os termos índice de refração e impedância.

Indo agora ao problema de como aumentar a intensidade da luz transmitida pela interface, nossa experiência com o casamento de impedâncias em colisões mecânicas sugere que coloquemos entre os dois meios um terceiro material, de índice de refração intermediário entre n_1 e n_2 . Esse arranjo está mostrado na figura 4.2 e é análogo ao que fizemos no capítulo 3 ao colocar um corpo de massa intermediária entre o projétil e o alvo.

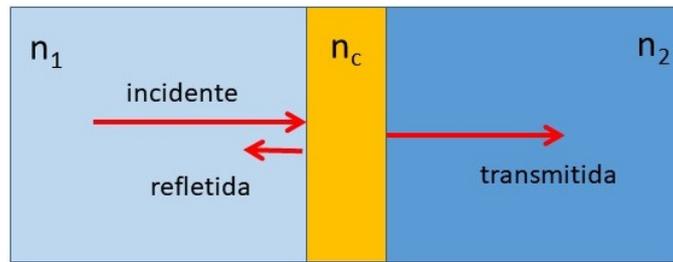


Figura 4.2: Casamento de impedâncias entre os meios 1 e 2. O material intermediário tem índice de refração n_c compreendido entre n_1 e n_2 .

Podemos testar essa ideia com um experimento simples: medir a transmissão de luz por uma placa de vidro comum. Como o índice de refração do vidro é 1,50 e o do ar é 1,00, podemos usar a água como casador de impedâncias, já que seu índice é 1,33. A fonte luminosa utilizada no experimento foi uma luminária de mesa e intensidade da luz transmitida pelo vidro foi medida com o luxímetro de um *smartphone*. Três situações foram estudadas: (1) vidro seco, (2) vidro com uma face molhada e (3) vidro com as duas faces molhadas. Também medimos o fundo luminoso, apagando a lâmpada, e a intensidade da luz incidente, removendo o vidro. Cada conjunto de medidas foi repetido três vezes. Todos os resultados estão mostrados na tabela 4.1.

A eficiência da passagem de luz pelo vidro é descrita pela razão entre a intensidade luminosa transmitida e a incidente, descontada a luminosidade de fundo, dada por

$$T = \frac{\text{transmitida} - \text{fundo}}{\text{incidente} - \text{fundo}} . \quad (4.2)$$

A quantidade T é chamada *transmitância* e seu valor pode ser calculado com

	Medida 1 (lux)	Medida 2 (lux)	Medida 3 (lux)
Fundo	89	75	66
Incidente	12378	10942	10954
Vidro seco	11290	9950	9968
1 face molhada	11435	10131	10132
2 faces molhadas	11701	10248	10260

Tabela 4.1: Medidas da intensidade luminosa. A primeira linha mostra a intensidade da luz de fundo e a segunda a da luz incidente. As linhas seguintes mostram a intensidade da luz transmitida pelo vidro quando esse está seco ou com uma ou ambas faces molhadas.

as medidas da tabela 4.1. Os resultados para cada um dos três conjuntos de medida e suas respectivas médias estão mostrados na tabela 4.2.

	T1	T2	T3	Tmédio
Vidro seco	0.911	0.909	0.909	0.910
1 face molhada	0.923	0.925	0.925	0.924
2 faces molhadas	0.945	0.936	0.936	0.939

Tabela 4.2: Fração da energia luminosa transmitida pelo vidro, nos casos em que esse está seco, com uma face molhada e com as duas faces molhadas. As três medidas da transmitância T e sua média em cada caso são mostradas.

Os valores (médios) de T dados na tabela 4.2 estão mostrados graficamente na figura 4.3. Vemos que colocar água sobre as faces do vidro realmente aumenta a transmissão da luz – a água atua como casador de impedâncias entre o ar e o vidro. O experimento também mostra que molhar as duas faces é melhor que molhar apenas uma. Isso casa as impedâncias ar-vidro nos dois lados da placa, facilitando ainda mais a passagem da luz.

É importante ressaltar que realizamos o experimento acima porque havíamos *previsto* que uma camada de água sobre o vidro aumentaria a transmissão de luz, e que essa previsão foi feita através de uma simples analogia entre o comportamento de um sistema óptico e um mecânico. Sem o conceito de impedância essa analogia não seria possível e a previsão do efeito se tornaria muito mais trabalhosa.

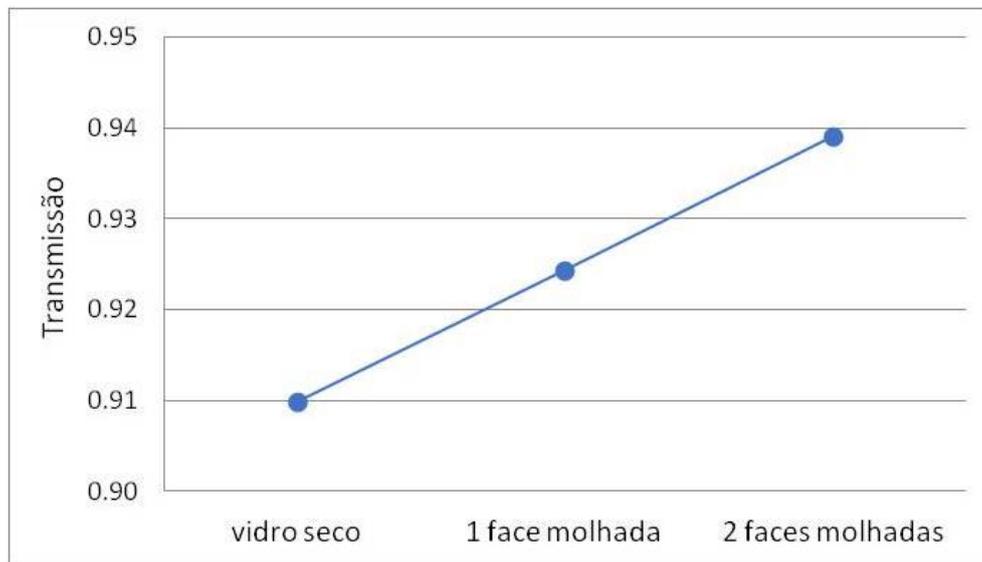


Figura 4.3: A taxa de transmissão da luz por uma placa de vidro para os três casos estudados: vidro seco, uma face molhada e duas faces molhadas.

Capítulo 5

Uma aula sobre casamento de impedâncias

O material didático que desenvolvemos foi aplicado em uma oficina realizada no XVI Encontro de Licenciatura em Física (ENLIF/UFRJ). A oficina teve duração de duas horas e contou com a presença de aproximadamente dez participantes, entre licenciandos em Física e professores de ensino médio e superior. Os principais conceitos foram apresentados sem formalismo matemático. Realizamos algumas das demonstrações experimentais que descrevemos nas seções anteriores, precedidas de perguntas sobre o que os participantes esperavam encontrar e seguidas por discussões sobre o resultado obtido. A figura 5.1 mostra fotos da oficina. O conjunto de slides que auxiliou a apresentação está no apêndice C.

Durante as discussões ficou claro que a maioria dos participantes só tivera contato com o conceito de impedância no contexto de circuitos elétricos, como uma generalização da lei de Ohm. Mesmo nesse contexto limitado, poucos associavam impedância à transferência de energia.

A ideia que a impedância é útil em áreas como mecânica e física ondulatória surpreendeu alguns participantes. Também foi novidade que a impedância apropriada a um determinado contexto pudesse ser identificada estudando a transferência de energia, e que um sistema auxiliar de impedância intermediária poderia aumentar a eficiência dessa transferência. Muitos sequer viam



Figura 5.1: Alguns dos participantes da oficina durante a exposição (esquerda) e na realização de uma demonstração (direita).

como plausível um casamento de impedâncias. Por exemplo, a esses participantes parecia pouco intuitivo que um terceiro corpo colocado entre um projétil e um alvo pudesse aumentar a transferência de energia na colisão (ver as perguntas na figura 5.2). Para eles era mais razoável imaginar que esse corpo roubaria parte da energia que deveria ser transmitida para o alvo.

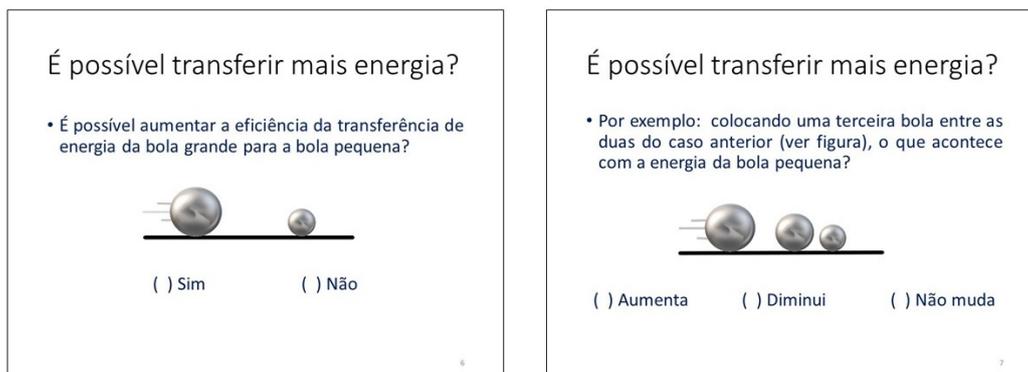


Figura 5.2: Exemplos de slides usados durante oficina para estimular discussões sobre os experimentos.

A surpresa com o resultado dos experimentos ajudou a atrair a atenção dos participantes para a importância do conceito de impedâncias em sistemas bem diferentes do circuito elétrico. Ao final da oficina percebemos que os participantes já mostravam mais familiaridade com a ideia de casamento de impedância e sua aplicação a diferentes processos físicos. Eles pareceram

encantados com a praticidade do conceito de impedância e sua importância em problemas envolvendo transferência de energia. Todos comentaram que gostaram da oficina (mais tarde um licenciando nos procurou dizendo estar arrependido por não ter participado).

Capítulo 6

Impedância e a analogia eletro-mecânica

Neste capítulo faremos a conexão entre o conceito de impedância tal como foi apresentado ao longo da dissertação e a definição de impedância encontrada no estudo de circuitos de corrente alternada (por exemplo, em [9]). Discutiremos a analogia que pode ser estabelecida entre circuitos elétricos e sistemas mecânicos e, com base nela, mostraremos que a massa desempenha papel semelhante ao de uma impedância em colisões de partículas, o resultado central do capítulo 3. O tratamento matemático é consideravelmente mais avançado que o encontrado nos capítulos anteriores, fazendo uso de cálculo infinitesimal, números complexos, transformadas de Fourier e funções generalizadas. Consequentemente o material apresentado destina-se principalmente a leitores que desejam uma exposição mais ampla e profunda do conceito de impedância.

6.1 Analogia eletro-mecânica

Vamos considerar o circuito RLC em série mostrado na figura 6.1. A resistência, indutância e capacitância do circuito são R , L e C , respectivamente. A tensão fornecida pelo gerador depende do tempo e é dada por $V(t)$. Em geral, a corrente no circuito $I(t)$ e a carga no capacitor $Q(t)$ também depen-

derão do tempo.

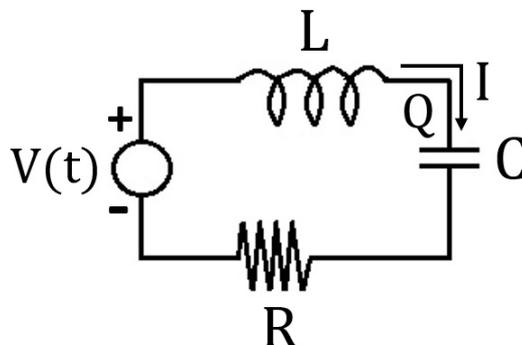


Figura 6.1: Circuito RLC em série.

Pela lei das malhas de Kirchhoff, $V(t)$ é a soma das quedas de tensão em cada elemento do circuito, $V(t) = V_L + V_C + V_R$, onde $V_L = LdI/dt$, $V_C = Q/C$ e $V_R = RI$. Assim temos que

$$V(t) = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI . \quad (6.1)$$

Temos também que a carga elétrica no capacitor e a corrente no circuito estão relacionadas por

$$I = \frac{dQ}{dt} . \quad (6.2)$$

O circuito RLC tem comportamento análogo ao de um oscilador harmônico como o mostrado na figura 6.2. Aplicando a 2ª lei de Newton a esse oscilador obtemos

$$m \frac{dv}{dt} = f(t) - kx - bv \quad (6.3)$$

onde m é a massa do oscilador, k a constante elástica da mola, b o coeficiente de amortecimento e $f(t)$ uma força externa dependente do tempo. A velocidade do oscilador é $v(t)$ e sua posição em relação ao ponto de equilíbrio é $x(t)$.

A equação de movimento (6.3) pode ser escrita na forma

$$f(t) = m \frac{dv}{dt} + kx + bv \quad (6.4)$$

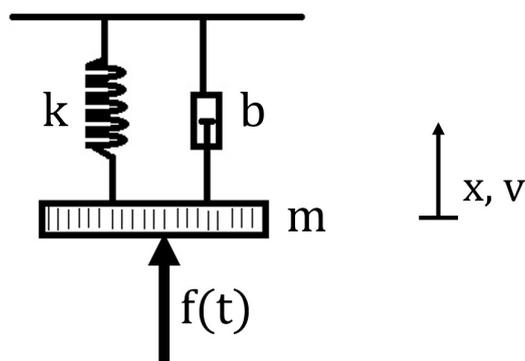


Figura 6.2: Oscilador harmônico sob ação de uma força externa $f(t)$. O oscilador é composto por um corpo de massa m , uma mola de constante elástica k e um amortecedor de coeficiente b .

que é matematicamente análoga à equação (6.1) do circuito RLC se fizermos as correspondências indicadas na tabela 6.1. Note que a correspondência também vale para a relação entre velocidade e posição do oscilador,

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad (6.5)$$

análoga à relação (6.2) entre corrente e carga no circuito.

Circuito RLC	Oscilador mecânico
V	f
I	v
Q	x
L	m
$1/C$	k
R	b

Tabela 6.1: Equivalência eletro-mecânica.

Como veremos a seguir, essa analogia entre sistemas elétricos e mecânicos nos permite aproveitar na mecânica conceitos que são úteis na análise de circuitos elétricos.

6.2 Impedância na analogia eletro-mecânica

O conceito de impedância surgiu no estudo de circuitos como o da figura 6.1, quando a tensão $V(t)$ oscila com uma única frequência ω , ou seja,¹

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t} . \quad (6.6)$$

Ignorando efeitos transientes, tanto a corrente quanto a carga no capacitor oscilarão com a frequência ω , de modo que

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t} , \quad (6.7)$$

$$Q(t) = Q_0 e^{i\omega t} . \quad (6.8)$$

Como a corrente e a carga estão ligadas pela equação (6.2) temos também que

$$I_0 = i\omega Q_0 . \quad (6.9)$$

Substituindo as equações acima em (6.1) encontramos uma relação entre as amplitudes da tensão e corrente,

$$V_0 = \left(i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R \right) I_0 . \quad (6.10)$$

A impedância é definida como a razão entre as amplitudes da tensão e da corrente,

$$Z(\omega) = \frac{V_0}{I_0} , \quad (6.11)$$

que generaliza a lei de Ohm e a noção de resistência para circuitos de corrente alternada. Da equação (6.10) vemos que no circuito da figura 6.1 a impedância é

$$Z(\omega) = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R , \quad (6.12)$$

que pode ser interpretada como a resultante da associação em série das impedâncias do indutor, $Z_L = i\omega L$, do capacitor, $Z_C = 1/(i\omega C)$, e do resistor,

¹Como é usual no estudo desses circuitos (ver [9] por exemplo), consideraremos que grandezas físicas como a tensão, corrente e carga serão descritas pela parte real de números complexos.

$$Z_R = R.$$

A analogia que encontramos entre o circuito RLC e o oscilador harmônico pode ser estendida ao conceito de impedância. Se a força externa sobre o oscilador tiver frequência ω , isto é, se

$$f(t) = f_0 e^{i\omega t}, \quad (6.13)$$

após o desaparecimento de transientes teremos que tanto a velocidade quanto a posição terão a mesma frequência,

$$v(t) = v_0 e^{i\omega t}, \quad (6.14)$$

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t}. \quad (6.15)$$

Da relação (6.5) entre velocidade e posição temos também que

$$v_0 = i\omega x_0. \quad (6.16)$$

Substituindo esses resultados na equação (6.4) obtemos

$$f_0 = \left(i\omega m + \frac{k}{i\omega} + b \right) v_0. \quad (6.17)$$

Seguindo as correspondências eletro-mecânicas da tabela 6.1, vemos que é possível definir um análogo mecânico da impedância como a razão entre as amplitudes da força e da velocidade,

$$Z(\omega) = \frac{f_0}{v_0}, \quad (6.18)$$

Da equação (6.17) temos então que a impedância do oscilador harmônico é

$$Z(\omega) = i\omega m + \frac{k}{i\omega} + b. \quad (6.19)$$

Para uma partícula de massa m sobre a qual agem apenas forças externas

(ou seja, para $k = b = 0$), a impedância mecânica é

$$Z(\omega) = i\omega m . \quad (6.20)$$

Em nossa análise de processos de colisão, feita no capítulo 3, vimos que a massa desempenhava o papel de impedância. Entretanto, a relação que encontramos, $Z = m$, não continha nem a frequência ω nem o número imaginário i encontrados na equação (6.20). A diferença deve-se basicamente à hipótese de que a força externa que atua sobre a massa oscila com frequência ω . Em uma colisão essa hipótese não é válida: a força sobre a massa é semelhante a um pulso rápido, não uma oscilação.

6.3 Impedância no domínio temporal

Para estudar a impedância em colisões mecânicas temos que adaptar os resultados anteriores, passando de uma força oscilatória $f(t) = f_0 \exp(i\omega t)$ para caso geral $f(t)$. Isso pode ser realizado através da transformada de Fourier, que relaciona o “domínio de frequência” ao “domínio temporal” pela transformação

$$f(t) = \int f_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (6.21)$$

cujas inversa é

$$f_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-i\omega t} dt . \quad (6.22)$$

Utilizando a equação (6.18) na transformação (6.21) obtemos

$$f(t) = \int Z(\omega) v_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega . \quad (6.23)$$

A velocidade $v(t)$ está relacionada a $v_0(\omega)$ também por uma transformada de Fourier,

$$v(\tau) = \int v_0(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega , \quad (6.24)$$

cujas inversa é

$$v_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int v(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau . \quad (6.25)$$

Substituindo a equação (6.25) em (6.23) encontramos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \iint Z(\omega)v(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau d\omega \quad (6.26)$$

que pode ser escrita como

$$f(t) = \int z(t-\tau)v(\tau)d\tau \quad (6.27)$$

onde definimos a *impedância no domínio temporal*, $z(t)$, por

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int Z(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (6.28)$$

(ver [14] para uma discussão da utilidade dessa definição).

Para o caso de uma partícula de massa m , já vimos que sua impedância no domínio de frequência é $Z(\omega) = i\omega m$. Portanto, no domínio temporal essa impedância é dada por

$$z(t) = \frac{m}{2\pi} \int i\omega e^{i\omega t}d\omega . \quad (6.29)$$

Como a transformada de Fourier da função delta de Dirac, $\delta(t)$, é

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t}d\omega \quad (6.30)$$

sua derivada pode ser escrita como

$$\delta'(t) = \frac{1}{2\pi} \int i\omega e^{i\omega t}d\omega , \quad (6.31)$$

de modo que, comparando (6.29) a (6.31), vemos que a impedância é dada por

$$z(t) = m\delta'(t) , \quad (6.32)$$

Esse é o resultado que buscávamos: no domínio temporal a impedância da partícula é caracterizada unicamente por um número real, a sua massa (a derivada da função delta define apenas o “instante da colisão”).

É interessante notar que esse resultado é equivalente à 2ª lei de Newton,

pois substituindo (6.32) em (6.27) e utilizando as propriedades da função delta obtemos

$$f(t) = m \frac{dv(t)}{dt} . \quad (6.33)$$

O impulso transferido em uma colisão é $I = \int f(t)dt$. Com a 2ª lei de Newton vemos que $I = m\Delta v$, de modo que a massa (a impedância) da partícula pode ser escrita como

$$m = \frac{I}{\Delta v} , \quad (6.34)$$

ou seja, é a razão entre um “empurrão” e uma “velocidade”, forma muito usada para definir impedância em diferentes contextos.

6.4 Impedância de linhas de transmissão

Um tipo importante de circuito elétrico, a linha de transmissão, ilustra a utilidade do conceito de impedância no estudo de processos de propagação da energia. A figura 6.3 mostra o esquema de uma linha de transmissão composta por uma sequência de indutores e capacitores. A variação da tensão e da corrente em uma ‘célula’ da linha é mostrada na figura 6.4.

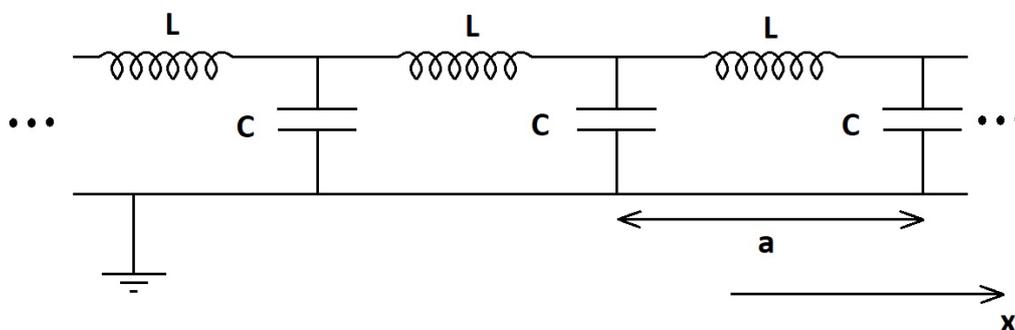


Figura 6.3: Linha de transmissão.

Notando que $V - V'$ é a diferença de potencial no indutor L e que V' é a tensão no capacitor C , temos que, para sinais de frequência ω ,

$$V - V' = i\omega LI , \quad (6.35)$$

$$I - I' = i\omega CV' . \quad (6.36)$$

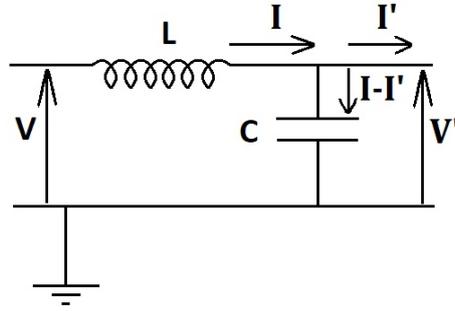


Figura 6.4: Variação da tensão e da corrente em uma célula da linha de transmissão.

Se a tensão e corrente não variam muito de uma célula para a seguinte, podemos aproximar as diferenças de tensão e corrente por derivadas e escrever que

$$\frac{dV(x)}{dx} = -i\omega\mathcal{L}I(x) , \quad (6.37)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = -i\omega\mathcal{C}V(x) , \quad (6.38)$$

onde $\mathcal{L} = L/a$ e $\mathcal{C} = C/a$ são a indutância e capacitância por unidade de comprimento (a é o comprimento de uma célula, como mostra a figura 6.3). Essas equações são conhecidas como *equações do telégrafo*.

Vamos procurar soluções das equações do telégrafo com a forma

$$V(x) = V e^{-iqx} , \quad (6.39)$$

$$I(x) = I e^{-iqx} . \quad (6.40)$$

Essas soluções correspondem a uma onda harmônica de número de onda q , pois, como os sinais tem frequência ω ,

$$V(x,t) = V e^{i(\omega t - qx)} \quad (6.41)$$

$$I(x,t) = I e^{i(\omega t - qx)} \quad (6.42)$$

Substituindo (6.39) e (6.40) nas equações do telégrafo encontramos

$$qV = \omega \mathcal{L}I, \quad (6.43)$$

$$qI = \omega \mathcal{C}V, \quad (6.44)$$

Combinando as equações (6.43) e (6.44) obtemos

$$\omega/q = \pm v_f \quad (6.45)$$

$$V/I = \pm Z_c \quad (6.46)$$

onde

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}} \quad (6.47)$$

e

$$Z_c = \sqrt{\mathcal{L}/\mathcal{C}} \quad (6.48)$$

são, respectivamente, a *velocidade de fase* e a *impedância característica* da linha de transmissão. Também de (6.43) e (6.44) vemos que ω/q e V/I têm o mesmo sinal pois \mathcal{L} e \mathcal{C} são sempre positivos. Portanto:

1) Se a onda move-se no sentido positivo do eixo x :

$$\omega/q = +v_f \quad (6.49)$$

$$V/I = +Z_c \quad (6.50)$$

2) Se a onda move-se no sentido negativo do eixo x :

$$\omega/q = -v_f \quad (6.51)$$

$$V/I = -Z_c \quad (6.52)$$

Para uma superposição de ondas nos dois sentidos temos

$$V(x) = V^+ e^{-iqx} + V^- e^{iqx} \quad (6.53)$$

$$I(x) = I^+ e^{-iqx} + I^- e^{iqx} \quad (6.54)$$

onde os índices $+$ e $-$ referem-se a ondas movendo-se respectivamente nos

sentidos positivo e negativo do eixo x . Com as relações entre V e I obtidas acima temos $I^+ = V^+/Z_c$ e $I^- = -V^-/Z_c$, de modo que podemos escrever $I(x)$ como

$$I(x) = \frac{V^+}{Z_c} e^{-iqx} - \frac{V^-}{Z_c} e^{iqx} \quad (6.55)$$

A impedância no ponto x será então

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_c \frac{V^+ e^{-iqx} + V^- e^{iqx}}{V^+ e^{-iqx} - V^- e^{iqx}}. \quad (6.56)$$

Definido a *amplitude de reflexão* \mathcal{R} como

$$\mathcal{R} = \frac{V^-}{V^+} \quad (6.57)$$

o resultado acima pode ser colocado na forma

$$Z(x) = Z_c \frac{e^{-iqx} + \mathcal{R} e^{iqx}}{e^{-iqx} - \mathcal{R} e^{iqx}} = Z_c \frac{1 + \mathcal{R} e^{2iqx}}{1 - \mathcal{R} e^{2iqx}}. \quad (6.58)$$

Vemos que, no caso de ondas se propagando nos dois sentidos, efeitos de interferência fazem com que a impedância dependa da posição.

A potência elétrica que é transmitida por um ponto da linha é dada por

$$P(x,t) = \Re [V(x)e^{i\omega t}] \Re [I(x)e^{i\omega t}] \quad (6.59)$$

onde $\Re(a)$ é a parte real do número complexo a . A potência P pode ser escrita como

$$P(x,t) = \frac{1}{4} [V(x)e^{i\omega t} + V^*(x)e^{-i\omega t}] [I(x)e^{i\omega t} + I^*(x)e^{-i\omega t}] \quad (6.60)$$

$$= \frac{1}{2} \Re [V(x)I(x)e^{2i\omega t} + V(x)I^*(x)] \quad (6.61)$$

onde a^* é o conjugado complexo de a . A potência média ao longo de uma oscilação é então

$$\langle P(x) \rangle = \frac{1}{2} \Re [V(x)I^*(x)] , \quad (6.62)$$

que, com a definição de impedância, pode ser colocada na forma

$$\langle P(x) \rangle = \frac{1}{2} \Re[Z(x)] |I(x)|^2 . \quad (6.63)$$

Para uma onda harmônica progressiva, $I(x) = Ie^{-iqx}$, $Z(x) = \pm Z_c$ é um número real e, portanto, a potência média é

$$\langle P \rangle = \pm \frac{1}{2} Z_c |I|^2 . \quad (6.64)$$

Como antes, os sinais + e – correspondem à propagação nos sentidos positivo e negativo do eixo x .

Com a analogia eletro-mecânica, os resultados obtidos com a linha de transmissão elétrica podem ser usados para estudar ondas mecânicas. Vamos considerar o caso de uma cadeia massa-mola, uma sequência de partículas e molas como a mostrada na figura (6.5). As partículas têm massa m , a distância de equilíbrio entre elas é a e a constante elástica das molas é k .

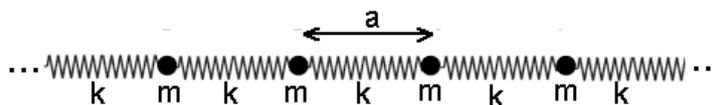


Figura 6.5: Linha de transmissão mecânica formada por massas e molas.

Usando as equivalências da tabela 6.1 temos que $\mathcal{L} = L/a \rightarrow m/a$ e $\mathcal{C} = C/a \rightarrow 1/(ka)$. Com isso, das equações (6.47) e (6.48) obtemos imediatamente que a velocidade de fase e a impedância característica da linha de transmissão mecânica são, respectivamente,

$$v_f = \sqrt{ka^2/m} , \quad (6.65)$$

$$Z_c = \sqrt{km} . \quad (6.66)$$

6.5 Casamento de impedâncias

Como vimos ao longo desta dissertação, o conceito de impedância é muito útil na análise de processos de transferência de energia de sistema para outro. Isso

se deve ao fato de impedâncias iguais (casadas) otimizarem essa transferência. Com as linhas de transmissão estudadas na seção anterior podemos verificar esse efeito. Para isso vamos considerar a junção de duas linhas de transmissão elétrica, 1 e 2, como mostrado na figura 6.6.

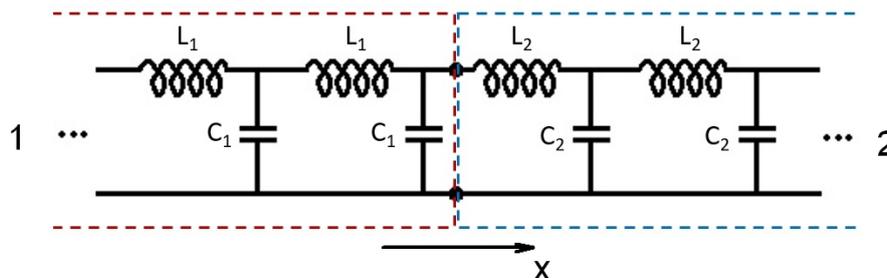


Figura 6.6: Junção de duas linhas de transmissão.

Uma onda movendo-se no sentido positivo do eixo x pela linha 1 incide sobre a junção, onde é parcialmente refletida e transmitida. Sem perda de generalidade podemos supor que a junção está localizada em $x = 0$. Como na linha 1 estão superpostas a onda incidente e a refletida, antes da junção temos, de acordo com a equação (6.58),

$$Z(x < 0) = Z_1 \frac{1 + \mathcal{R} e^{2iqx}}{1 - \mathcal{R} e^{2iqx}} \quad (6.67)$$

onde Z_1 é a impedância característica da linha 1. Já na linha 2 há apenas a onda transmitida através da junção, de modo que

$$Z(x > 0) = Z_2 \quad (6.68)$$

onde Z_2 é a impedância característica da linha 2.

Como $V(x)$ e $I(x)$ devem ser contínuos no ponto de junção, o mesmo deve acontecer com a impedância $Z(x) = V(x)/I(x)$. Isso significa que o valor de $Z(0)$ dado pelas equações (6.67) e (6.68) deve ser o mesmo, ou seja,

$$Z_2 = Z_1 \frac{1 + \mathcal{R}}{1 - \mathcal{R}}. \quad (6.69)$$

Resolvendo a equação acima para a amplitude de restituição encontramos

$$\mathcal{R} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (6.70)$$

A parcela da energia incidente que é refletida na junção entre as linhas é dada pelo *coeficiente de restituição* $\rho = |\mathcal{R}|^2$. Da equação (6.70) temos então que

$$\rho = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2. \quad (6.71)$$

A fração da energia incidente que passa para a linha 2 é dada pelo *coeficiente de transmissão* $\eta = 1 - \rho$. Com a equação (6.71) é fácil mostrar que

$$\eta = \frac{4Z_2Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2}. \quad (6.72)$$

Se $Z_1 = Z_2$ dizemos que as impedâncias estão *casadas*. Nesse caso temos $\rho = 0$ e $\eta = 1$ e toda a energia incidente pela linha 1 passa para a linha 2, sem perda por reflexão.

É fácil ver que os mesmos resultados são válidos para a transmissão de ondas mecânicas como as tratadas ao final da seção anterior. Mais ainda, o coeficiente de transmissão (6.72) é muito semelhante ao obtido no caso de colisões de partículas, dado pela eq. (3.6). Tudo isso demonstra a utilidade do conceito de impedância na análise dos mais variados processos de transferência de energia.

Capítulo 7

Comentários finais

Nesta dissertação propusemos uma abordagem didática, introdutória, ao conceito de impedância e sua aplicação a processos de transferência de energia. A proposta foi baseada em três observações:

- A quantidade física que desempenha o papel de impedância em determinado tipo de sistemas pode, em muitos casos, ser reconhecida analisando-se as condições em que há transferência completa de energia de um sistema para outro. Quando isso ocorre dizemos que as impedâncias dos dois sistemas estão casadas (são iguais).
- Quando as impedâncias estão descasadas (são diferentes) não é possível transferir completamente a energia de um sistema para o outro. Em muitos casos a eficiência dessa transferência pode ser aumentada colocando-se um terceiro sistema, de impedância intermediária, entre os dois sistemas originais. Esse objeto intermediário é chamado casador de impedâncias.
- Transferências completas de energia entre sistemas com impedâncias descasadas podem ser (idealmente) alcançadas pela inserção de um casador com diferentes impedâncias na entrada e na saída, cada uma delas casada à impedância do sistema à qual está conectada.

Desenvolvemos essas noções básicas de impedância no contexto de colisões mecânicas, um tema familiar a estudantes de cursos introdutórios. O

tratamento matemático foi baseado apenas em álgebra elementar e pode ser apresentado sem muita dificuldade mesmo a alunos do ensino médio. Os resultados foram colocadas a teste em um conjunto de experimentos que podem ser realizados na sala de aula. Alguns dos experimentos, como o quique de uma pilha de bolas no chão, têm resultados surpreendentes que podem ser facilmente explicados com o conceito de casamento de impedâncias.

A flexibilidade da abordagem foi demonstrada com sua aplicação a uma área completamente distinta da mecânica: a óptica. Por meio apenas de analogias aos resultados obtidos com colisões de esferas, conseguimos entender a transmissão de luz por uma interface de dielétricos como um problema de casamento de impedâncias. Isso nos permitiu propor uma forma de aumentar a quantidade de luz transmitida por uma placa de vidro – basta molhar sua superfície. Um experimento simples verificou que o aumento realmente ocorre, demonstrando que o casamento de impedâncias é importante também na óptica.

A apresentação da proposta em uma oficina dirigida a licenciandos e professores de física revelou que a motivação da proposta tem fundamento. Percebemos que a maioria dos participantes associava impedância apenas à extensão da lei de Ohm a correntes alternadas. O processo de casamento de impedâncias também era pouco conhecido, mesmo no contexto de circuitos elétricos. O fato da impedância ser útil em outras áreas da física era ainda menos familiar. Os exemplos mecânicos de casamento de impedâncias foram vistos com surpresa por serem contrários ao senso comum, no qual obstáculos sempre “roubam” energia.

A oficina também mostrou que formas alternativas de apresentar o tema podem ser exploradas. Devido ao tempo limitado, a exposição na oficina foi essencialmente fenomenológica, baseada no resultado dos experimentos e sem fórmulas ou demonstrações. O bom resultado obtido sugere que essa opção deve ser considerada em outras situações, por exemplo com estudantes que não se sentem confortáveis com a linguagem matemática.

Apesar de termos discutido dois processos de transferência de energia – colisões mecânicas e transmissão de luz – há outros que podem ser tratados da mesma maneira. Um exemplo interessante é a transmissão de som por dutos,

que pode ser analisada com relativa facilidade e sobre a qual experimentos simples podem ser realizados. Entre nossos projetos para o futuro próximo está o de desenvolver material instrucional sobre esse tema.

Sabemos que impedância é um conceito mais complicado que o apresentado em nossa abordagem. Normalmente a impedância tem duas componentes – ‘resistiva’ e ‘reativa’ – e é descrita por um número complexo (ou um fasor). Ela também pode depender da frequência e ser função de mais de uma característica física do sistema, o que compromete a ideia de determiná-la a partir da condição de máxima transferência de energia. O capítulo 6 desta dissertação dá uma ideia de quão complicada pode ser uma apresentação tradicional do conceito de impedância. Por esses e outros motivos, impedância é geralmente considerada um tema avançado, a ser evitado nos cursos iniciais.

A nosso ver, entretanto, há muito a ser ganho com a apresentação do conceito de impedância em nível introdutório. Em particular, isso torna possível estudar de maneira unificada a transferência eficiente de energia entre dois sistemas, um problema de considerável importância prática encontrado em diversas situações cotidianas. Noções sobre impedância, ainda que elementares, ajudam a entender essas situações e a criar analogias entre contextos aparentemente muito diversos. Não há, em nossa opinião, razões válidas para que o tema seja ignorado no ensino de física básica e esperamos que o presente trabalho contribua para modificar essa situação.

Apêndice A

Impedância e Transferência de Energia



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física
Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física



Impedância e Transferência de Energia em Mecânica e Óptica

Leonardo Rodrigues de Jesus
&
Carlos Eduardo Aguiar

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Leonardo Rodrigues de Jesus, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2018

Impedância e Transferência de Energia em Mecânica e Óptica

Leonardo Rodrigues de Jesus
Carlos Eduardo Aguiar

Sumário

1	Casamento de impedâncias em colisões mecânicas	3
1.1	Impedância em colisões mecânicas	4
1.2	Casamento de impedâncias em colisões mecânicas	6
2	Experimentos com o casador de impedâncias	16
2.1	Experimento de colisão: análise com vídeo	17
2.2	Um método simples para medir o alcance	22
2.3	Casamento de impedâncias em bolas quicando	24
3	Outro tipo de casador de impedâncias	28
3.1	Experimentos com o casador-alavanca	31
4	Casamento de impedâncias em óptica	33
4.1	Transmissão de luz na interface entre dois meios	34

1 Casamento de impedâncias em colisões mecânicas

Imagine um sistema físico A que pode transferir energia para outro sistema físico, que chamaremos de B . Mais adiante vamos dar exemplos de A e B , mas por enquanto manteremos a discussão em termos bem gerais, como ilustrado na figura 1.

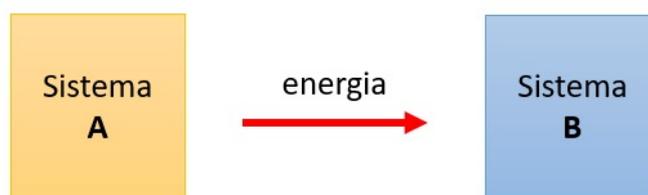


Figura 1: Transferência de energia do sistema A para o sistema B .

Um aspecto importante da transferência de energia de A para B é a eficiência desse processo. Idealmente, gostaríamos que toda a energia disponível em A fosse transferida para B , mas na prática isso pode não ser possível. Para compreender em que condições a transferência de energia é máxima, é útil introduzir o conceito de *impedância*. Dizemos que cada um dos sistemas A e B têm uma dada impedância e que, se essas forem iguais, a transferência de energia será a maior possível. Outra maneira de expressar isso é dizendo que as impedâncias de A e B estão *casadas*.

No caso em que as impedâncias são diferentes (estão *descasadas*) a transferência de energia não é a melhor possível. Nesse caso, como veremos, é possível melhorar a transmissão de energia de A para B colocando um terceiro sistema entre eles, o *casador de impedâncias*.

A definição exata do que sejam impedância e casador de impedâncias depende da natureza dos sistemas envolvidos. Nas próximas seções mostraremos como esses conceitos podem ser definidos em uma situação familiar: a colisão elástica de partículas.

1.1 Impedância em colisões mecânicas

Vamos supor que duas partículas, de massas M e m , colidem elasticamente uma com a outra conforme ilustrado na figura 2. Inicialmente, a massa M move-se com energia cinética E e m encontra-se em repouso. Durante a colisão uma determinada energia e é transferida de M para m . Como a colisão é elástica, a energia cinética final de M é $E - e$. Vamos supor que a colisão é ‘frontal’, ou seja, que as massas movem-se ao longo de uma linha reta como ilustrado na figura 2.

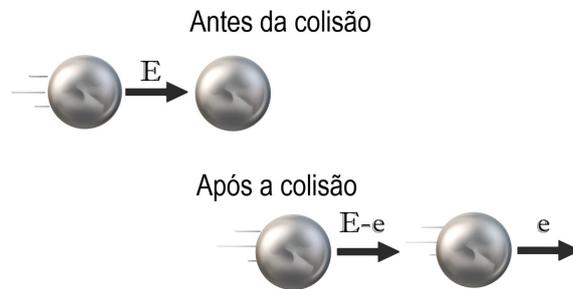


Figura 2: Colisão elástica entre uma partícula de massa M e energia E e outra de massa m em repouso. Na colisão, m recebe uma energia cinética e , deixando M com energia $E - e$.

Podemos calcular a energia transferida e utilizando as leis de conservação da energia e do momento linear. A conservação do momento pode ser escrita como

$$MU = Mu + mv, \quad (1)$$

onde U e u são as velocidades de M antes e depois da colisão e v é a velocidade final de m . Da mesma forma, a conservação da energia leva a

$$\frac{1}{2}MU^2 = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (2)$$

Calculando u a partir da equação (1) e substituindo o resultado em (2) obtemos uma relação entre as velocidades v e U , que pode ser colocada na

forma

$$\frac{v}{U} = \frac{2M}{M+m} . \quad (3)$$

A eficiência η_0 da transferência de energia de M para m é definida como

$$\eta_0 = \frac{e}{E} . \quad (4)$$

Como $E = MU^2/2$ e $e = mv^2/2$, temos que

$$\eta_0 = \frac{m}{M} \left(\frac{v}{U} \right)^2 , \quad (5)$$

e finalmente, utilizando (3), obtemos

$$\eta_0 = \frac{4Mm}{(M+m)^2} . \quad (6)$$

Na situação em que ocorre a máxima transferência de energia, toda a energia cinética de M é transferida a m , ou seja, a eficiência é $\eta_0 = 1$. Nesse caso temos que

$$4Mm = (M+m)^2 \implies (M-m)^2 = 0 , \quad (7)$$

e portanto

$$\eta_0 = 1 \iff M = m . \quad (8)$$

Essa relação nos permite identificar as impedâncias relevantes em uma colisão mecânica: são as massas das partículas. A transferência de energia é máxima quando as impedâncias estão casadas, ou seja, se as massas M e m são iguais. Se as massas forem diferentes a transferência de energia de M para m não será completa. Podemos perguntar se é possível aumentar essa transferência sem alterar as massas e as velocidades iniciais. Na próxima seção veremos que a resposta é sim, utilizando para isso um sistema auxiliar chamado *casador de impedâncias*.

1.2 Casamento de impedâncias em colisões mecânicas

No caso de impedâncias não casadas, apenas uma parcela de energia disponível no sistema A é recebida por B . Frequentemente é possível inserir entre A e B um terceiro sistema, o casador de impedâncias, que aumenta a quantidade de energia transferida (sem produzir energia extra), conforme ilustrado na figura 3.



Figura 3: Para sistemas A e B de impedâncias descasadas, um casador de impedâncias colocado entre eles aumenta a transferência de energia.

Na colisão de partículas de massas diferentes M e m , vamos investigar se uma terceira partícula de massa μ colocada entre as duas primeiras pode atuar como casador de impedâncias. A nova configuração está mostrada na figura 4. Como antes, se E é a energia inicial da massa M e e a energia final de m , a eficiência da transferência de energia é

$$\eta = \frac{e}{E}, \quad (9)$$

que pode ser escrita como

$$\eta = \frac{e}{\epsilon} \frac{\epsilon}{E}, \quad (10)$$

onde ϵ é a energia transferida de M para μ na primeira colisão (ver figura 4). Os dois fatores na equação acima são, respectivamente, as eficiências das duas colisões intermediárias $M \rightarrow \mu$ e $\mu \rightarrow m$, que podem ser calculadas aplicando a equação (6) obtida na seção anterior. O resultado é

$$\eta = \frac{16Mm\mu^2}{(M + \mu)^2(\mu + m)^2}. \quad (11)$$

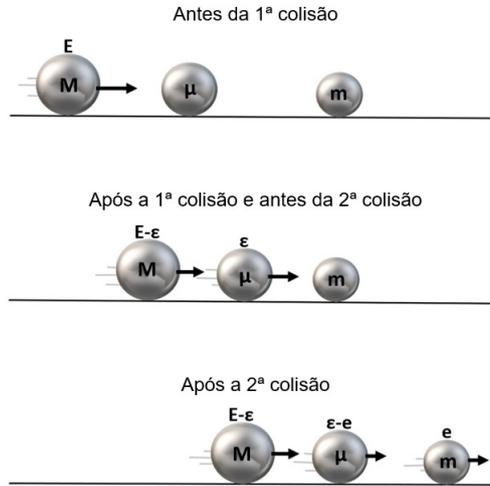


Figura 4: Antes da 1ª colisão a esfera M tem energia E , enquanto as outras esferas estão em repouso. Após a 1ª e antes da 2ª colisão, M transfere para μ uma energia ϵ . Após a 2ª colisão, m recebe de μ uma energia e .

A razão entre η e a eficiência η_0 sem a partícula intermediária, dada pela equação (6), é

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \left[\frac{2}{1 + \frac{(\mu^2 + mM)}{\mu(m + M)}} \right]^2 . \quad (12)$$

A inserção da massa μ causa um aumento da eficiência desde que $\eta > \eta_0$, ou seja, que

$$\frac{(\mu^2 + mM)}{\mu(m + M)} < 1 . \quad (13)$$

Isso implica em

$$\mu^2 - \mu(m + M) + mM < 0 , \quad (14)$$

que pode ser escrita como

$$(\mu - M)(\mu - m) < 0 . \quad (15)$$

A desigualdade (15) significa que $\mu - M$ e $\mu - m$ têm sinais opostos. Supondo

que $m < M$, isso implica em

$$m < \mu < M . \quad (16)$$

De forma mais geral, qualquer valor de μ entre m e M aumenta a eficiência da transferência de energia, não importando qual é a maior massa. Para esses valores de μ a terceira partícula é um casador de impedâncias na colisão.

O mesmo resultado pode ser obtido a partir da figura 5, que mostra o gráfico da parábola $(\mu - M)(\mu - m)$ encontrada na desigualdade (15). A região de valores negativos, que satisfaz essa inequação do segundo grau, está entre as raízes m e M .

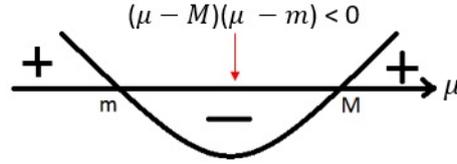


Figura 5: A função $(\mu - M)(\mu - m)$ assume resultados positivos para valores de μ inferiores a m ou superiores a M . Para valores de μ compreendidos entre m e M a função é negativa, satisfazendo a inequação (15).

Para identificar o valor de μ que promove o maior aumento na eficiência reescrevemos a equação (11), colocando-a na forma

$$\eta = \frac{16}{\left[x + \frac{1}{x} + \frac{M + m}{\sqrt{Mm}} \right]^2}, \quad (17)$$

onde definimos a quantidade x por

$$x = \frac{\mu}{\sqrt{Mm}} . \quad (18)$$

A maior eficiência é obtida quando o termo $x + 1/x$ assume o seu valor mínimo. Vamos definir a função

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad (19)$$

cujo gráfico está na figura 6. Esse gráfico indica que $f(x)$ tem um mínimo em $x = 1$, no qual a função vale $f(1) = 2$.

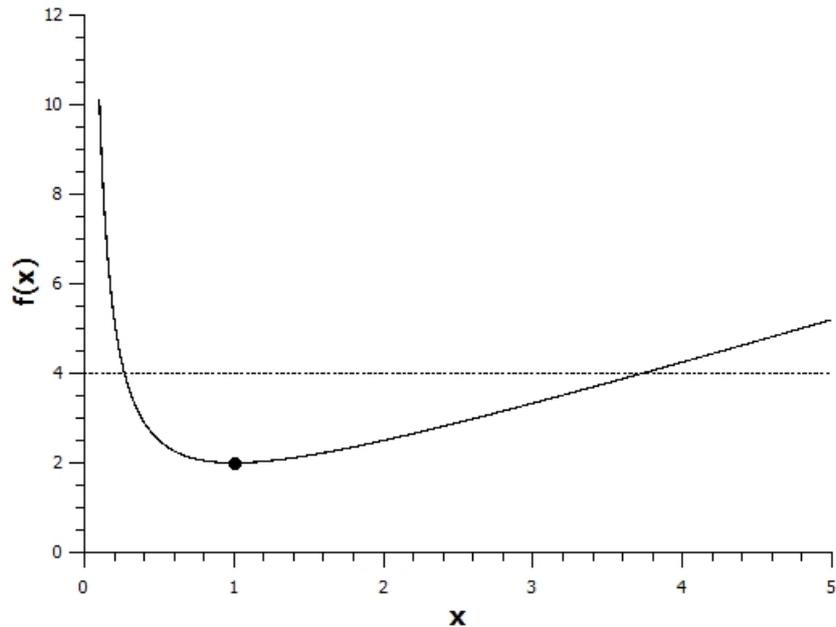


Figura 6: Gráfico de $f(x) = x + 1/x$. A função $f(x)$ tem um mínimo em $x = 1$, onde vale $f(1) = 2$. As raízes de $f(x) = b$ são dadas pela interseção da curva com linhas horizontais, como mostrado no caso particular $b = 4$. O mínimo corresponde ao valor de b para o qual há apenas uma raiz.

Uma demonstração simples desse resultado pode ser feita notando que a equação $f(x) = b$ pode ter duas raízes, uma raiz ou nenhuma raiz, dependendo de b ser maior, igual ou menor que o mínimo de $f(x)$. Por exemplo, a linha horizontal na figura 6 indica a localização das duas raízes para o caso $b = 4$. As raízes são encontradas resolvendo a equação do segundo grau

$$x^2 - bx + 1 = 0, \quad (20)$$

ou seja,

$$x = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (21)$$

onde $\Delta = b^2 - 4$ é o discriminante da equação. A raiz única corresponde ao

mínimo de $f(x)$. Nesse caso o discriminante é nulo, o que implica em

$$b = 2 \quad (22)$$

e

$$x = 1 . \quad (23)$$

Assim, a eficiência máxima é alcançada para $x = 1$. Pela equação (18) isso corresponde à massa intermediária

$$\mu = \sqrt{Mm} . \quad (24)$$

Em outras palavras, o melhor casador de impedâncias na colisão de um par de partículas é uma terceira partícula com massa igual à média geométrica das massas do par.

Substituindo $\mu = \sqrt{Mm}$ na equação (11) encontramos a eficiência da transferência de energia com esse casador de impedâncias,

$$\eta_{max} = \frac{16M^2m^2}{(\sqrt{Mm} + M)^2(\sqrt{Mm} + m)^2} , \quad (25)$$

um resultado que pode ser colocado na forma

$$\eta_{max} = \frac{16 m/M}{\left(1 + \sqrt{m/M}\right)^4} . \quad (26)$$

É importante lembrar que qualquer partícula de massa μ compreendida no intervalo entre m e M é um casador de impedâncias, pois aumenta a eficiência da colisão. A massa $\mu = \sqrt{Mm}$ não é a única a aumentar a eficiência, é apenas aquela para a qual esse aumento é máximo.

O gráfico de η_{max} como função de m/M está mostrado na figura 7. Vemos que o casamento das impedâncias não leva a eficiência a 100%, a não ser no caso trivial em que $m/M = 1$ (as massas são iguais) no qual, como já vimos, não há sequer necessidade do casador.

É possível aumentar a eficiência da transmissão de energia empregando

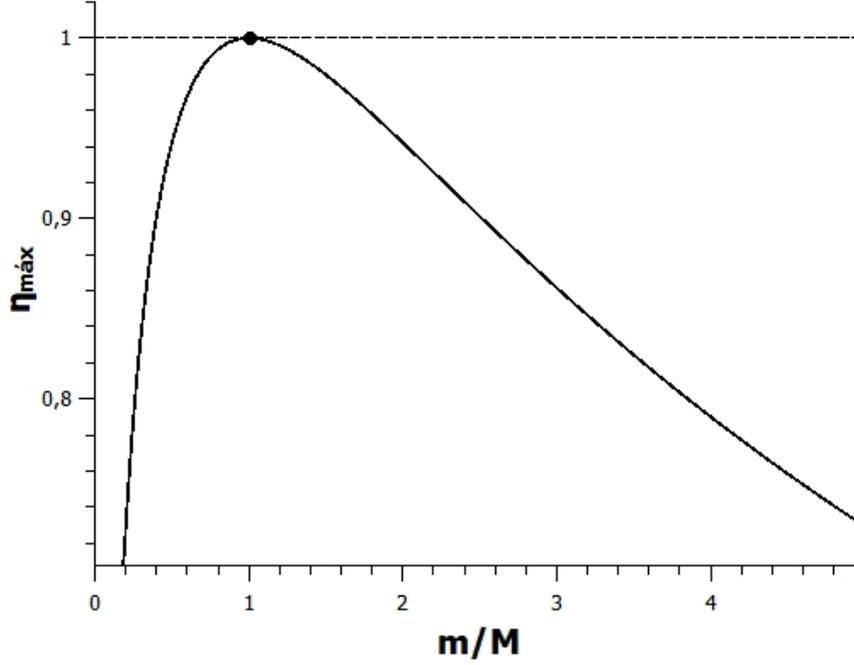


Figura 7: A eficiência máxima η_{max} da transferência de energia em função de m/M , no caso em que uma única partícula é o casador de impedâncias. Mesmo com esse casamento a eficiência não atinge 100%, a não ser no caso trivial de massas iguais, $m/M = 1$.

um casador mais eficaz. Para isso vamos considerar duas massas μ_1 e μ_2 , ao invés da massa μ , entre os mesmos projétil e alvo. Nessa nova configuração teremos três colisões elásticas sucessivas: $M \rightarrow \mu_1$, $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ e $\mu_2 \rightarrow m$, respectivamente.

A eficiência da transferência de energia pode ser calculada estendendo o raciocínio que nos levou à equação (11). O resultado é o produto das eficiências de cada uma das colisões intermediárias (dadas pela equação (6))

$$\eta = \frac{4M\mu_1}{(M + \mu_1)^2} \cdot \frac{4\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} \cdot \frac{4\mu_2m}{(\mu_2 + m)^2} . \quad (27)$$

Para calcular a eficiência máxima produzida pelo casador de duas partículas basta notar que, por analogia com o caso anterior (uma partícula intermediária), a escolha $\mu_1 = \sqrt{M\mu_2}$ otimiza a transferência de energia de

M para μ_2 e a escolha $\mu_2 = \sqrt{\mu_1 m}$ faz o mesmo para a transferência de μ_1 para m . É fácil ver que, nesse caso, a razão entre as massas sucessivas é constante

$$\frac{\mu_1}{M} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{m}{\mu_2} = r, \quad (28)$$

onde chamamos de r essa constante. Da (28) temos que

$$r \cdot r \cdot r = \frac{\mu_1}{M} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{m}{\mu_2} = \frac{m}{M}, \quad (29)$$

ou seja,

$$r = (m/M)^{1/3}. \quad (30)$$

Conhecendo o valor de r , as massas μ_1 e μ_2 são facilmente determinadas:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= rM, \\ \mu_2 &= r^2 M. \end{aligned} \quad (31)$$

A eficiência dada pela equação (27) pode ser então escrita como

$$\eta = \frac{64m/M}{(1 + \mu_1/M)^2 \cdot (1 + \mu_2/\mu_1)^2 \cdot (1 + m/\mu_2)^2}, \quad (32)$$

de modo que, juntando as equações (28), (30) e (32), obtemos que a eficiência máxima é dada por

$$\eta_{max} = \frac{64r^3}{(1 + r)^2 \cdot (1 + r)^2 \cdot (1 + r)^2}, \quad (33)$$

ou seja,

$$\eta_{max} = \frac{64m/M}{[1 + (m/M)^{1/3}]^6}. \quad (34)$$

A eficiência máxima obtida com o casador de duas partículas, eq. (34), é maior que a do casador de uma partícula, eq. (26), como mostra o gráfico da figura 8. Entretanto, como também podemos ver no gráfico, mesmo no caso de duas partículas a eficiência máxima ainda é inferior a 100% (com exceção do caso trivial $m = M$).

O caso geral, com n partículas como casadoras de impedâncias, pode ser

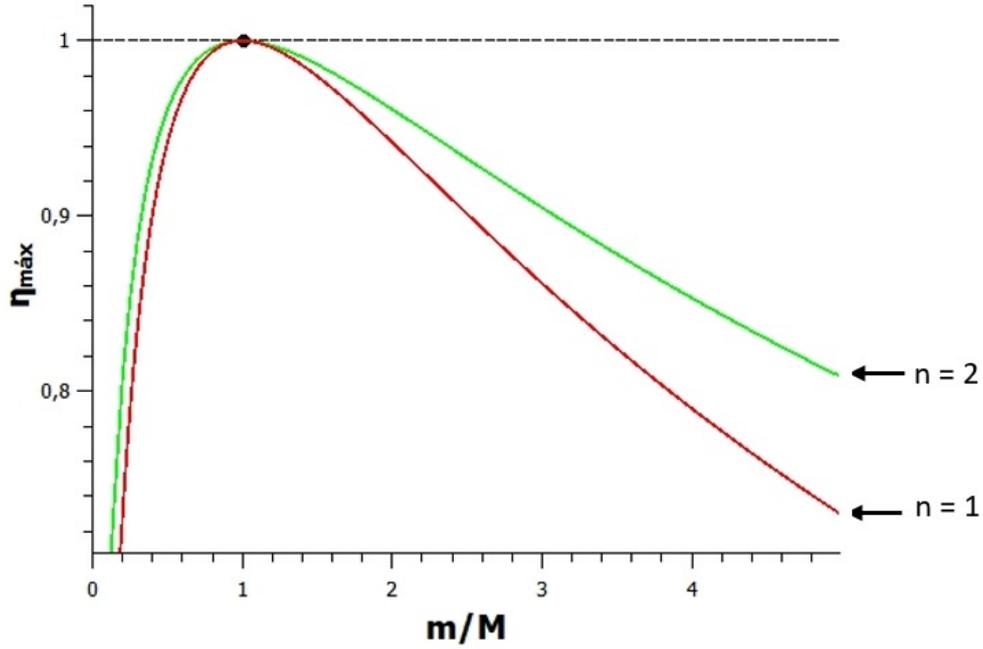


Figura 8: A eficiência máxima η_{max} da transferência de energia como função da razão de massas m/M , para casadores com uma e duas partículas. O casador com duas partículas é mais eficiente que o de uma.

analisado com o mesmo raciocínio utilizado para chegar às equações (26) e (34). Se as partículas intermediárias têm massas $\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n$, a eficiência máxima será obtida escolhendo essas massas como

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= rM, \\
 \mu_2 &= r^2M, \\
 &\vdots \\
 \mu_n &= r^nM,
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

onde

$$r = (m/M)^{1/(n+1)},
 \tag{36}$$

e portanto

$$\eta_{max} = \frac{2^{2(n+1)}m/M}{[1 + (m/M)^{1/(n+1)}]^{2(n+1)}}.
 \tag{37}$$

É fácil ver que para $n = 1$ e $n = 2$ a equação (37) recupera os resultados das eqs. (26) e (34). Mesmo para $n = 0$ a fórmula (37) ainda se aplica, reduzindo-se ao caso sem casador dado pela equação (6).

A figura 9 mostra a eficiência máxima para diferentes números de partículas intermediárias (inclusive $n = 0$). Podemos ver nos gráficos que a eficiência máxima cresce com n e se aproxima cada vez mais de 100%. Da equação (37) vemos que no limite de um casador de infinitas partículas a eficiência máxima seria $\eta_{max} = 100\%$ para qualquer valor de m/M .

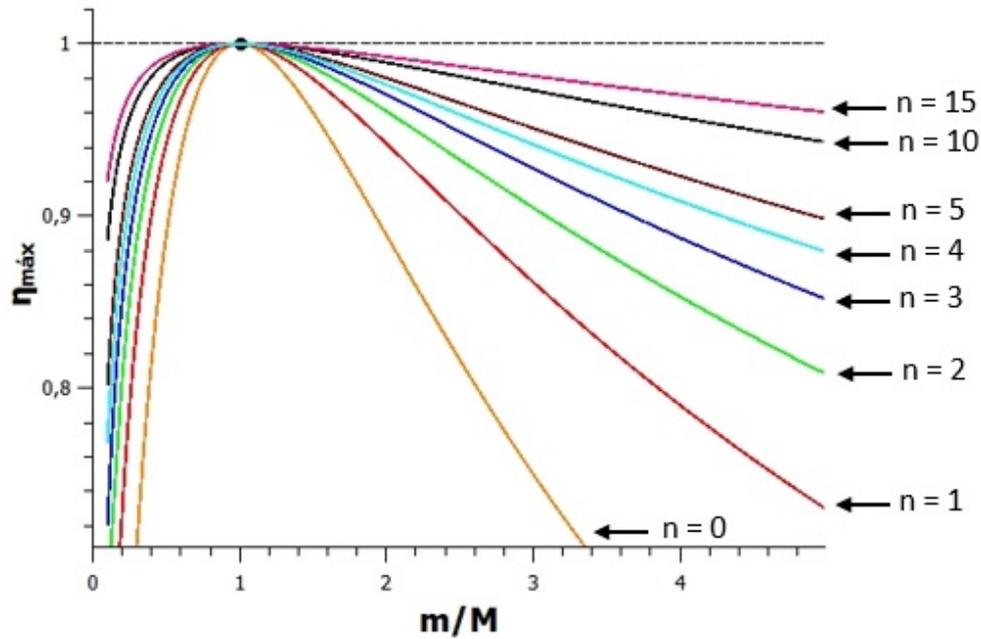


Figura 9: A eficiência máxima η_{max} da transferência de energia em função da razão de massas m/M para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15$. A eficiência aumenta com o número de partículas intermediárias, tendendo a 100% quando $n \rightarrow \infty$.

É interessante discutir por que a energia tende a ser totalmente transmitida quando $n \rightarrow \infty$. A massa da primeira esfera no casador é, segundo as equações (35) e (36),

$$\mu_1 = M(m/M)^{1/(n+1)}. \quad (38)$$

De mesma forma, a massa da última (a n -ésima) esfera do casador é

$$\mu_n = M(m/M)^{n/(n+1)} = m(M/m)^{1/(n+1)}. \quad (39)$$

Quando $n \rightarrow \infty$, $\mu_1 \rightarrow M$ e $\mu_n \rightarrow m$. Isso significa que a impedância da primeira esfera tende a ficar casada à do projétil e a da última esfera à do alvo. Mais ainda, as impedâncias de esferas vizinhas dentro do casador também tendem a ficar iguais, já que das equações (35) e (36) obtemos

$$\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} = (M/m)^{1/(n+1)}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (40)$$

e, portanto, $\mu_i/\mu_{i+1} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$. É por isso que a transferência de energia é completa quando o número de esferas intermediárias tende a infinito. O projétil perde toda sua energia ao colidir com a primeira esfera (pois ambas têm a mesma massa), essa energia passa de uma esfera para a seguinte ao longo do casador (pois a diferença de massas entre vizinhas tende a zero) e finalmente a última esfera transfere toda essa energia para o alvo (pois novamente a massa é igual).

Essa análise mostra que é útil atribuir *duas* impedâncias a um casador: a impedância de *entrada* e a impedância de *saída*. No caso que acabamos de discutir, a impedância de entrada é a massa da primeira esfera da sequência, μ_1 , e a impedância de saída é a massa da última esfera, μ_n . Se a impedância de entrada estiver casada à do projétil e a de saída à do alvo, a eficiência do casador é 100%.

Embora a transferência completa de energia seja possível apenas no limite $n \rightarrow \infty$, os conceitos de impedância de entrada e saída nos ajudam a compreender porque a eficiência aumenta quando colocamos mais esferas no casador: de acordo com as equações (38) e (39), à medida que n aumenta as impedâncias de entrada e saída se aproximam das impedâncias do projétil e do alvo, estabelecendo um casamento cada vez mais efetivo entre elas. Voltaremos a esse assunto mais à frente, na seção 3, quando discutirmos outro tipo de casador de impedâncias.

2 Experimentos com o casador de impedâncias

Nesta seção apresentaremos dois experimentos de colisão mecânica envolvendo o casador de impedâncias discutido na seção anterior. No primeiro experimento uma esfera desce uma rampa e colide com outra esfera, lançando-a para fora de uma mesa, conforme ilustrado na figura 10. O alcance da segunda esfera (o ponto onde ela toca o chão) é usado como medida da energia transferida na colisão. Com isso, o efeito da introdução de esferas intermediárias – o casador de impedâncias – pode ser observado. Dois métodos diferentes para medir o alcance serão discutidos.

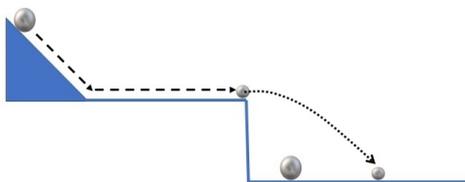


Figura 10: Esquema do experimento de colisão. Apenas a trajetória da esfera alvo é mostrada após a colisão.

No segundo experimento tomamos duas bolas de massas diferentes, colocamos a menor sobre a maior e em seguida deixamos o conjunto cair e quicar no chão, como representado na figura 11. Após o quique a bola pequena atinge uma altura bem maior que aquela de onde foi largada, indicando que houve uma transferência de energia da bola grande para ela. Como veremos, isso é resultado de um casamento de impedâncias.

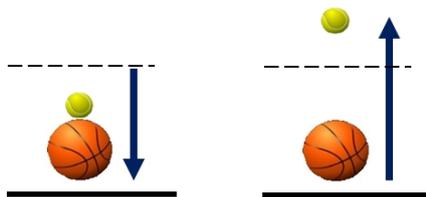


Figura 11: Esquema do experimento de queda de bolas empilhadas.

2.1 Experimento de colisão: análise com vídeo

Nesta subseção discutiremos o experimento com a rampa. Os dados foram obtidos a partir de gravações em vídeo analisadas com o programa *Tracker* [?, ?]. O programa foi usado para medir o alcance da esfera alvo e, conseqüentemente, a energia transferida. As massas das esferas projétil e alvo são $M = 111,5\text{g}$ e $m = 16,4\text{g}$, respectivamente. Como casadoras de impedâncias utilizamos esferas de massas 28,1g, 44,7g e 66,7g. Todas essas esferas são de aço, retiradas de rolamentos de veículos.

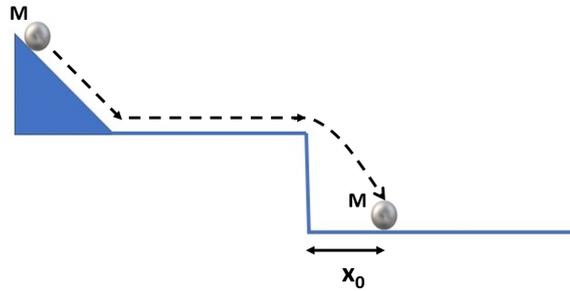


Figura 12: Experimento para determinar a energia da esfera projétil.

Na nossa primeira medida utilizamos apenas a esfera projétil (massa M), sem qualquer colisão. Como mostrado na figura 12, a esfera é solta no alto de uma rampa cuja base está sobre uma mesa, a uma dada altura do chão. Após descer a rampa a esfera desloca-se na horizontal por um curto período e em seguida cai da mesa, percorrendo uma distância horizontal x_0 até chegar ao chão. O objetivo desse experimento inicial é determinar a energia E do projétil. Medido o alcance x_0 , a velocidade U do projétil ao final da rampa será

$$U = \frac{x_0}{t} \quad (41)$$

onde t é o tempo de queda, dado por

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}, \quad (42)$$

sendo y a altura de queda e g a aceleração gravitacional. Com isso a veloci-

dade inicial do projétil é

$$U = \sqrt{\frac{g}{2y}} x_0 \quad (43)$$

e a energia inicial é

$$E = \frac{1}{2} M U^2 = \frac{Mg}{4y} x_0^2. \quad (44)$$

A próxima etapa está esquematizada na figura 13. Ela envolve a colisão do projétil M com o alvo m , que está inicialmente em repouso sobre a base da rampa. Dessa vez medimos o alcance x da esfera alvo ao cair no chão. Um raciocínio análogo ao anterior mostra que logo após a colisão a velocidade v e a energia e da esfera alvo são determinadas por x e valem respectivamente

$$v = \sqrt{\frac{g}{2y}} x \quad (45)$$

e

$$e = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{mg}{4y} x^2. \quad (46)$$

Com isso, a razão entre a velocidade final do alvo e a inicial do projétil pode ser escrita como

$$\frac{v}{U} = \frac{x}{x_0} \quad (47)$$

e a eficiência da transferência de energia na colisão é dada por

$$\eta = \frac{e}{E} = \frac{m}{M} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2. \quad (48)$$

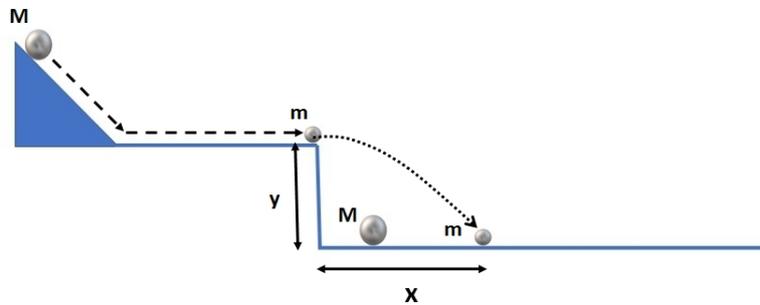


Figura 13: Colisão do projétil M com o alvo m .

A última etapa do experimento envolve a colocação de uma ou mais esferas como casador de impedâncias entre o projétil M e o alvo m . A figura 14 mostra a montagem com o casador de uma esfera. Chamando de x o alcance de m em colisões com um casador qualquer, a eficiência η da transferência de energia de M para m continua sendo dada pela equação (48); da mesma forma a razão v/U é dada pela equação (47). Essas equações mostram que um aumento da eficiência η corresponde a um aumento do alcance x .

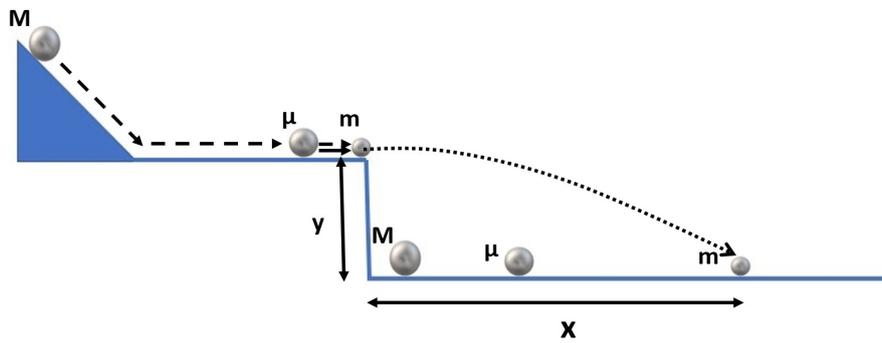


Figura 14: Colisão do projétil com o casador μ e do casador com o alvo m .

Os vídeos do experimento foram analisados no programa *Tracker*. No programa marcamos quadro a quadro a posição da esfera de interesse. O alcance x não foi definido pelo ponto em que a esfera atinge o chão, mas pelo ponto onde ela cruza uma régua horizontal colocada a uma distância $y = 40\text{cm}$ abaixo da mesa. Para determinar esse alcance traçamos uma parábola pelos pontos marcados nos quadros e determinamos o local em que a trajetória cruza a régua, como mostrado nas marcações feitas nas imagens da figura 15. Estabelecendo um sistema referencial com origem no ponto onde a esfera começa a cair e utilizando o tamanho da régua para calibrar a escala de distâncias, determinamos (em centímetros) a distância horizontal entre a origem e o ponto de interseção com a régua. Essa distância é o valor de x .

Para o casador de uma esfera, a eficiência máxima da colisão é obtida com a massa $\mu = 42,8\text{g}$. No casador de duas esferas as massas ideais são $\mu_1 = 58,9\text{g}$ e $\mu_2 = 31,1\text{g}$ (ver as equações (35) e (36)). Como não encontramos esferas com essas massas ideais, utilizamos as massas mais próximas que tínhamos à disposição: $\mu = 44,7\text{g}$ para o casador de uma esfera e $\mu_1 = 66,7\text{g}$

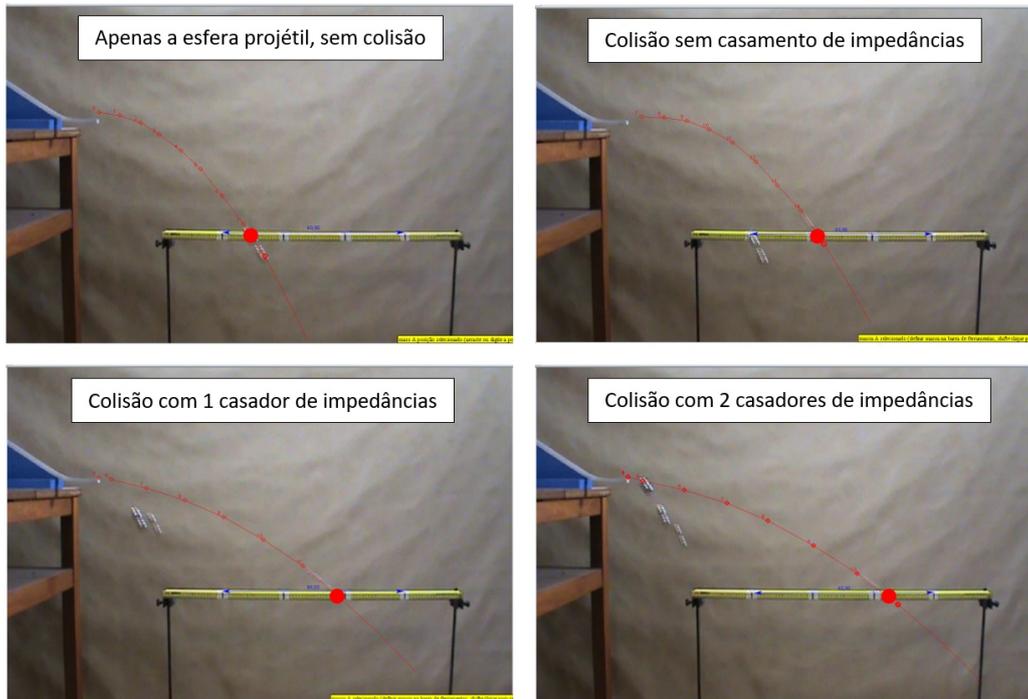


Figura 15: Imagens obtidas no *Tracker* nas etapas do experimento. Em cada uma das imagens está indicado o ponto em que a esfera cruza a régua.

e $\mu_2 = 28,1\text{g}$ para o de duas.

A tabela 1 apresenta os resultados das medidas de alcance nas três etapas do experimento: apenas o projétil, projétil-alvo e projétil-casadores-alvo. Para cada situação analisamos os vídeos que fizemos (dois ou três dependendo do caso) e calculamos a média dos valores encontrados. Vemos que, nos casos em que há colisão, o alcance médio de m aumenta com a inserção do casador de uma esfera e mais ainda com o de duas esferas. O mesmo resultado pode ser observado qualitativamente nas fotos mostradas na figura 15.

A tabela 2 mostra o número n de esferas no casador de impedâncias ($n = 0$ corresponde a nenhum casador), o alcance x , a razão x/x_0 e os valores de v/U e da eficiência η derivados dessa razão com auxílio das equações (47) e (48). Como esperado, a eficiência da transferência de energia e a a razão de velocidades aumentam com o número de esferas utilizadas no casador.

Esferas	Medidas (cm)			Alcance Médio (cm)
M	51,7	52,1	51,5	51,8
M→m	66,2	63,9	-	65,0
M→μ→m	79,8	78,5	81,0	79,7
M→μ₁→μ₂→m	84,9	87,4	-	86,1

Tabela 1: Resultado das medidas de alcance e suas respectivas médias. A primeira linha é o alcance x_0 do projétil M . As demais referem-se ao alcance x do alvo m , sem e com casadores de impedância.

Resultados				
n	x (cm)	x/x₀	v/U	η
0	65,0	1,3	1,3	0,23
1	79,7	1,5	1,5	0,35
2	86,1	1,7	1,7	0,41

Tabela 2: Os resultados do experimento. O número de esferas no casador é n . A razão x/x_0 é calculada com os resultados da tabela 1 e utilizada para obter a razão de velocidades v/U e a eficiência da transferência de energia η .

Os resultados da tabela 2 estão apresentados nos gráficos da figura 16, juntamente com os valores máximos correspondentes ao casamento “ideal” de impedâncias,¹ aquele que levaria à maior eficiência possível (ver equação 37). Os nossos resultados são menores que os máximos por, pelo menos, dois motivos: as colisões entre as esferas não são elásticas e os casadores usados não são os mais eficientes. Mesmo assim vemos que o efeito do casamento de impedâncias é claramente perceptível.

¹Como já mencionamos, as massas utilizadas no casador não foram as ideais. Entretanto as eficiências calculadas com as massas disponíveis, via eqs. (11) e (27), são muito semelhantes aos valores ideais.

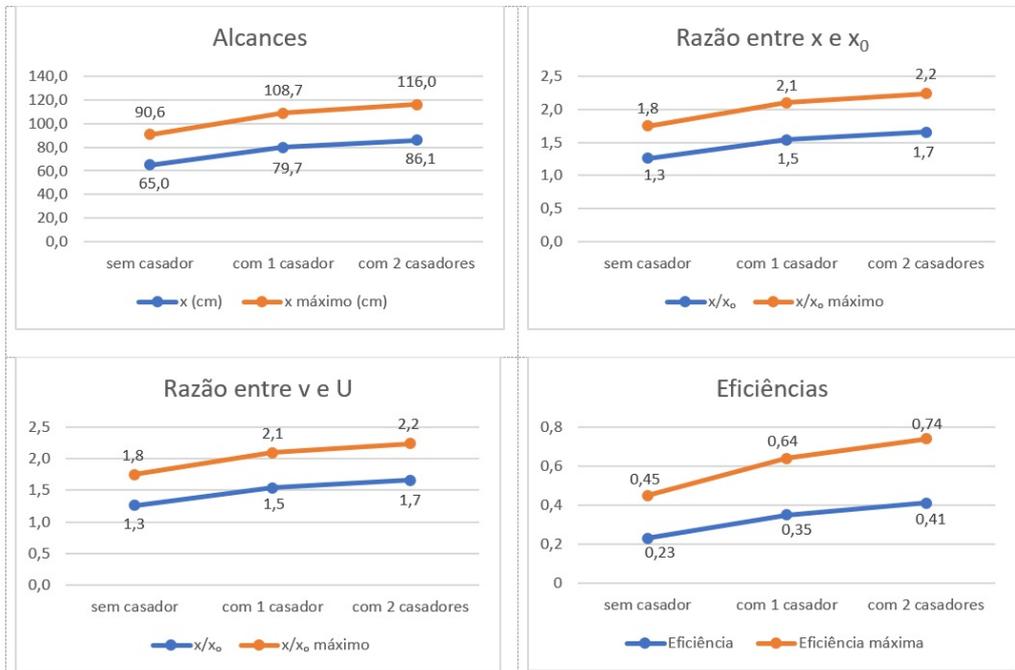


Figura 16: Gráficos dos resultados experimentais. Os valores máximos correspondentes a um casamento ideal de impedâncias também são mostrados.

2.2 Um método simples para medir o alcance

O experimento anterior envolve a gravação de um vídeo para posterior análise no computador. Existe uma forma mais simples e rápida, porém menos precisa, de medir o alcance da esfera alvo. Para isso colocamos uma sequência de caixas idênticas no chão, uma em contato com a outra e alinhadas com a trajetória das bolas, conforme mostrado na figura (17).

As caixas foram colocadas de tal forma que na colisão sem casamento de impedâncias a esfera alvo caísse nas primeiras caixas da fila. A partir daí, à medida que o alcance aumenta devido à inserção de casadores, a esfera alvo passa a cair dentro das caixas seguintes, cada vez mais afastadas da mesa onde ocorreu a colisão. Em nosso experimento utilizamos sete caixas de sapato com cerca de 13 cm de largura (o comprimento na direção do movimento das esferas). A cada colisão registramos a caixa onde caiu a esfera alvo. Essa medida do alcance foi repetida 20 vezes para cada número



Figura 17: As caixas utilizadas no experimento.

de casadores. Por exemplo, sem casamento a esfera alvo atingiu a primeira caixa 11 vezes e a segunda 9 vezes. Uma camada de isopor foi colocada no fundo das caixas para minimizar a possibilidade da esfera cair em uma delas e quicar para a seguinte. As caixas foram fixadas ao chão por uma fita adesiva dupla face e presas com cliques às suas vizinhas, para impedir deslocamentos durante a captura das esferas.



Figura 18: Frequência dos alcances da bola alvo, determinados pela caixa onde essa caiu. As cores identificam o número de casadores: 0, 1 e 2.

Os resultados obtidos com esse procedimento estão mostrados na figura 18. Vemos novamente que o casamento de impedâncias aumenta o alcance

da esfera alvo e que ganhos maiores são alcançadas com mais esferas casadoras. Embora a medida do alcance seja pouco precisa, isso não compromete a observação do efeito do casamento de impedância. A simplicidade da montagem e o fato dos resultados serem obtidos imediatamente, sem necessidade de análise posterior, tornam o método particularmente recomendado para uso em sala de aula.

2.3 Casamento de impedâncias em bolas quicando

O conceito de casamento de impedâncias pode ser usado para estudar um experimento muito interessante e fácil de realizar em qualquer sala de aula. Para isso basta tomar duas bolas de massas diferentes, colocar a menor sobre a maior e deixar ambas caírem de uma certa altura, como está representado na figura 11. Após quicarem no chão as bolas voltam a subir, mas a pequena atinge uma altura muito maior que aquela de onde foi largada. A observação desse efeito costuma surpreender os alunos e, como veremos, o ganho na altura é resultado do casamento de impedâncias entre a bola pequena e a Terra.

Para entender isso, vamos supor inicialmente que apenas a bola pequena, de massa m , foi deixada cair sobre o chão. Considerando a Terra como outra bola cuja massa é M , podemos imaginar que o quique da bola pequena no chão é uma colisão entre as massas m e M , o tipo de problema que temos analisado neste capítulo. Voltando à situação original, uma bola pequena e uma grande caindo sobre a Terra, fica fácil entender porque a bola pequena agora vai mais alto: a bola grande atua como um casador de impedâncias entre a pequena e a Terra.

Podemos analisar quantitativamente esse efeito aplicando os resultados de nossa análise de colisões, mas para isso é necessário fazer uma troca de referencial. Aqueles resultados foram obtidos considerando que o casador e o alvo estavam em repouso antes da colisão, mas isso não ocorre na presente situação: agora ambos têm velocidade $-V$ antes de atingir o chão (velocidades positivas são para cima). Para recuperar o caso já estudado devemos descrever a colisão em um referencial R que se move com velocidade vertical

$-V$ em relação à Terra. Nesse referencial as bolas pequena e grande (o casador) estão em repouso no momento da colisão e a Terra tem velocidade V . Do ponto de vista do referencial R a Terra é um projétil que vai em direção a duas bolas em repouso, exatamente a situação que já analisamos.

Se v é a velocidade, *no referencial da Terra*, da bola pequena logo após o quique, em R essa velocidade é $v + V$. A eficiência da colisão no referencial R , portanto, é dada por

$$\eta = \frac{m(v + V)^2/2}{MV^2/2} = \frac{m}{M} \left(\frac{v}{V} + 1 \right)^2, \quad (49)$$

de modo que o ganho de velocidade da bola pequena no referencial da Terra é

$$\frac{v}{V} = \sqrt{\eta \frac{M}{m}} - 1. \quad (50)$$

Substituindo na equação acima a eficiência máxima dada pela equação (26) obtemos o ganho máximo de velocidade

$$\frac{v}{V} = \frac{4}{[1 + (m/M)^{1/2}]^2} - 1. \quad (51)$$

Como a massa da Terra é muito maior que m podemos tomar $m/M = 0$ e obter

$$\frac{v}{V} = 3, \quad (52)$$

ou seja, a velocidade da bola pequena após o quique é três vezes maior que a velocidade com que ela atinge o chão.²

O efeito do casamento de impedâncias é mais perceptível pelo aumento altura alcançada pela bola pequena. Se H_0 é a altura de onde as bolas foram soltas e H é a altura atingida por m após o quique, um pouco de cinemática mostra que

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{v}{V} \right)^2 \quad (53)$$

²Como o casamento ideal de impedâncias só ocorrerá se a massa μ da bola maior for \sqrt{mM} , esse resultado parece inalcançável. Entretanto, é fácil mostrar que para valores razoáveis de m/μ já podemos chegar bem próximo do valor máximo (52). Por exemplo, para $m/\mu = 0,1$ encontramos $v/V = 2,6$.

e portanto, no caso ideal,

$$\frac{H}{H_0} = 9. \quad (54)$$

Esse resultado é o motivo da surpresa dos estudantes ao presenciarem uma demonstração desse efeito: a bola pode bater no teto da sala de aula.

Com o que já sabemos sobre casamento de impedâncias, podemos prever que a colocação de mais bolas entre m e o chão aumentará ainda mais o ganho de altura. Se deixarmos N bolas caírem, teremos o equivalente a $n = N - 1$ casadores de impedâncias entre a bola superior e a Terra. Substituindo na equação (50) a eficiência máxima para n casadores, dada por (37), encontramos

$$\frac{v}{V} = \frac{2^{(n+1)}}{[1 + (m/M)^{1/(n+1)}]^{(n+1)}} - 1. \quad (55)$$

Da mesma forma que anteriormente, tomando o limite $m/M \rightarrow 0$ obtemos

$$\frac{v}{V} = 2^{(n+1)} - 1, \quad (56)$$

ou ainda, em termos do número $N = n + 1$ de bolas em queda,

$$\frac{v}{V} = 2^N - 1. \quad (57)$$

Substituindo esse resultado na equação (53) obtemos o ganho na altura alcançada da bola superior:

$$\frac{H}{H_0} = (2^N - 1)^2. \quad (58)$$

Esse resultado mostra que a altura H cresce exponencialmente com o número de bolas. Com três bolas a altura máxima já é 49 vezes maior que a inicial.³

Nós realizamos experimentos com a queda de duas e três bolas e filmamos sua evolução. Não tentamos analisar esses vídeos quantitativamente; a magnitude do efeito é tão grande que sua simples observação já demonstra os aspectos principais.

³Novamente esse é um resultado ideal, do qual podemos nos aproximar diminuindo a razão entre massas sucessivas na pilha de bolas. Por exemplo, se essa razão for 0,1 obtemos $v/V = 5,4$ e $H/H_0 = 29$.

No primeiro experimento utilizamos uma bola de basquete e uma bola de tênis. As bolas foram empilhadas na vertical e soltas da altura do ombro. O resultado está na figura 19, que mostra dois quadros extraídos do vídeo. As imagens demonstram que a bola de tênis atingiu uma altura bem maior que a inicial (cerca de três vezes mais).



Figura 19: Queda de duas bolas, uma de tênis e outra de basquete. As imagens do vídeo mostram que a altura máxima atingida pela bola de tênis após o quique é cerca de três vezes maior que sua altura inicial.

No segundo experimento empilhamos uma bola de basquete, uma de tênis e uma de golfe, colocando fita dupla face na superfície de contato entre elas para melhor equilibrá-las. Novamente, o conjunto foi solto à altura do ombro. O resultado pode ser avaliado a partir dos dois quadros de vídeo mostrados na figura 20. A bola de golfe atingiu uma altura tão grande que não fomos capazes de filmar toda a sua trajetória; o segundo quadro mostra a bola ainda enquanto ela subia, logo antes de sair completamente do vídeo.

Os dois experimentos produzem efeitos surpreendentes, que atraem a atenção da maioria dos estudantes. A explicação a partir do conceito de impedância pode ser uma boa forma de introduzir esse tema em cursos introdutórios de física.

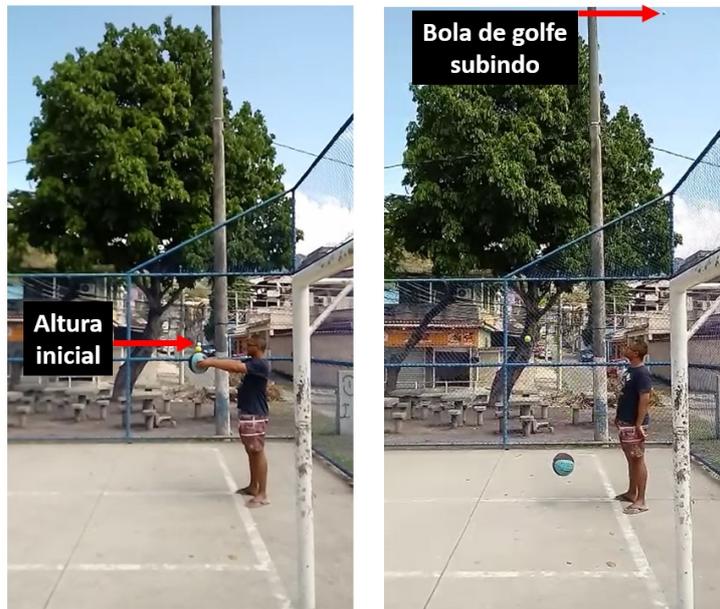


Figura 20: Queda de três bolas: de basquete, tênis e golfe. Após o quique a bola de golfe sobe tanto que sai do vídeo; o quadro à direita é o último a conter a bola.

3 Outro tipo de casador de impedâncias

Existem diferentes formas de se realizar um casamento de impedâncias. Nesta seção mostraremos como uma simples alavanca colocada entre o projétil de massa M e o alvo de massa m pode casar suas impedâncias.

O funcionamento desse casador-alavanca está descrito na figura 21. O projétil com velocidade U atinge a alavanca a uma distância L_1 do eixo de rotação. A alavanca, por sua vez, colide com o alvo que está a uma distância L_2 do mesmo eixo, colocando-o em movimento com velocidade v .

Vamos supor que o casamento de impedâncias seja perfeito, ou seja, a energia cinética do projétil é completamente transferida para o alvo. Nesse caso, na primeira colisão o projétil transmite toda sua energia à alavanca e fica em repouso. Na colisão seguinte a alavanca passa toda sua energia para o alvo e volta a ficar em repouso.

Na primeira colisão temos, pela conservação da energia e momento angu-

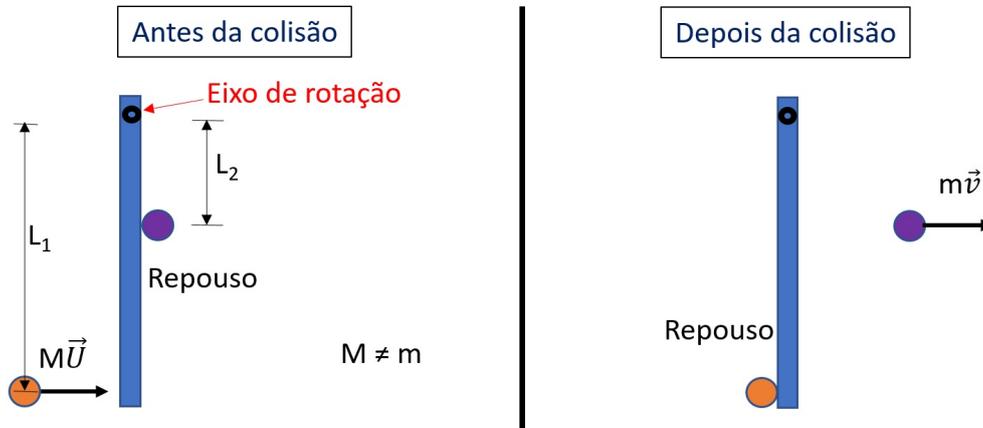


Figura 21: Casamento de impedâncias com uma alavanca. O diagrama à esquerda mostra o sistema projétil-alavanca-alvo antes da colisão. À direita vemos o sistema após a colisão.

lar, que

$$\frac{1}{2}MU^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (59)$$

e

$$MUL_1 = I\omega, \quad (60)$$

onde I é o momento de inércia da alavanca e ω é sua velocidade angular. Dividindo a equação (59) pela (60) encontramos que a velocidade da partícula projétil é

$$U = \omega L_1. \quad (61)$$

Substituindo a equação (61) em (59) ou (60) descobrimos que a distância L_1 para a qual toda a energia do projétil passa para a alavanca é

$$L_1 = \sqrt{\frac{I}{M}}. \quad (62)$$

Na segunda colisão, as mesmas leis de conservação conduzem a

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (63)$$

e

$$I\omega = mvL_2. \quad (64)$$

Como no caso anterior, encontramos que a velocidade final da partícula alvo é

$$v = \omega L_2 \quad (65)$$

e que

$$L_2 = \sqrt{\frac{I}{m}}, \quad (66)$$

é o ponto onde a alavanca deve colidir com o alvo de forma a transferir toda a sua energia. A razão entre os braços L_1 e L_2 é

$$\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{m}{M}}, \quad (67)$$

que depende apenas das massas M e m .

Para entender melhor como a alavanca casa as impedâncias do projétil e do alvo, vamos retomar a discussão feita ao final da seção 1.2 e pensar na alavanca como um sistema com duas impedâncias: uma de entrada e outra de saída. A impedância de entrada é determinada pelo ponto onde o projétil atinge a alavanca e é definida por

$$\mu_1 = \frac{I}{\ell_1^2}, \quad (68)$$

onde ℓ_1 é a distância do ponto de impacto do projétil ao eixo de rotação. Da mesma forma, a impedância de saída é dada pelo ponto onde a alavanca atinge o alvo, sendo definida por

$$\mu_2 = \frac{I}{\ell_2^2}, \quad (69)$$

onde ℓ_2 é a distância do ponto de contato alavanca-alvo ao eixo de rotação. Se a impedância de entrada estiver casada à impedância do projétil teremos

$$\mu_1 = M \quad (70)$$

e portanto

$$\ell_1 = L_1, \quad (71)$$

ou seja, como já vimos, o projétil transferirá toda sua energia à alavanca. Da mesma forma, se a impedância de saída estiver casada à impedância do alvo teremos

$$\mu_2 = m \quad (72)$$

e

$$\ell_2 = L_2, \quad (73)$$

e toda a energia da alavanca passará para o alvo.

Em princípio, esse casador de impedâncias permitiria a transferência de 100% da energia do projétil para o alvo. Na prática, a inelasticidade das colisões alavanca-esfera e a dificuldade de se ajustar as distâncias ℓ_1 e ℓ_2 a seus valores ideais L_1 e L_2 diminuem bastante a eficiência. Apesar dessas complicações o casador-alavanca produz um aumento significativo da energia transferida, como mostram os resultados experimentais que apresentaremos na próxima seção.

3.1 Experimentos com o casador-alavanca

A montagem do experimento com o casador-alavanca é semelhante à do primeiro experimento descrito neste capítulo: após descer uma rampa a esfera projétil colide com a esfera alvo, lançando-a para fora de uma mesa. A diferença é que com a introdução da alavanca o projétil e o alvo não estão mais alinhados, e sim colocados a distâncias L_1 e L_2 do eixo de rotação (ver a figura 21).

Para calcular L_1 e L_2 com as equações (62) e (66) precisamos conhecer o momento de inércia I . A alavanca que usamos foi feita de alumínio e tinha 30,5 cm de comprimento e massa 26,5 g. Uma foto dela está na figura 22.

O cálculo do momento de inércia foi realizado a partir das dimensões da alavanca, dadas na figura 23. O resultado foi $I = 5740 \text{ g cm}^2$, correspondente a um raio de giração 14,7 cm.

Assim como no primeiro experimento, a energia transferida à esfera alvo



Figura 22: O casador de impedâncias construído com uma alavanca. Usamos uma barra de alumínio com um encaixe do mesmo material em uma de suas extremidades, por onde passa o eixo de rotação. O conjunto foi fixado a um pedaço de madeira.

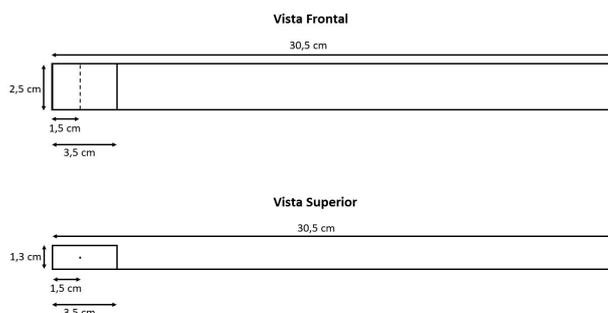


Figura 23: Desenho e dimensões da alavanca.

foi medida pelo seu alcance ao cair no chão. Optamos por usar o método de caixas para realizar essas medidas, devido à sua rapidez e simplicidade. Os resultados estão mostrados nos histogramas da figura 24. Sem o casador de impedâncias, a esfera alvo cai na terceira ou na quarta caixas (colunas escuras na figura 24). Com a alavanca a esfera passa a cair na quarta e quinta caixas (colunas claras), ou seja, mais à frente em média.

Mesmo que na prática a eficiência do casador-alavanca não seja 100%, seu estudo é interessante por mostrar que existem diversas maneiras de se casar impedâncias. Em particular, ele mostra que não é necessário realizar o casamento através da introdução de um sistema de impedância intermediária. Outras formas de casamento são possíveis.

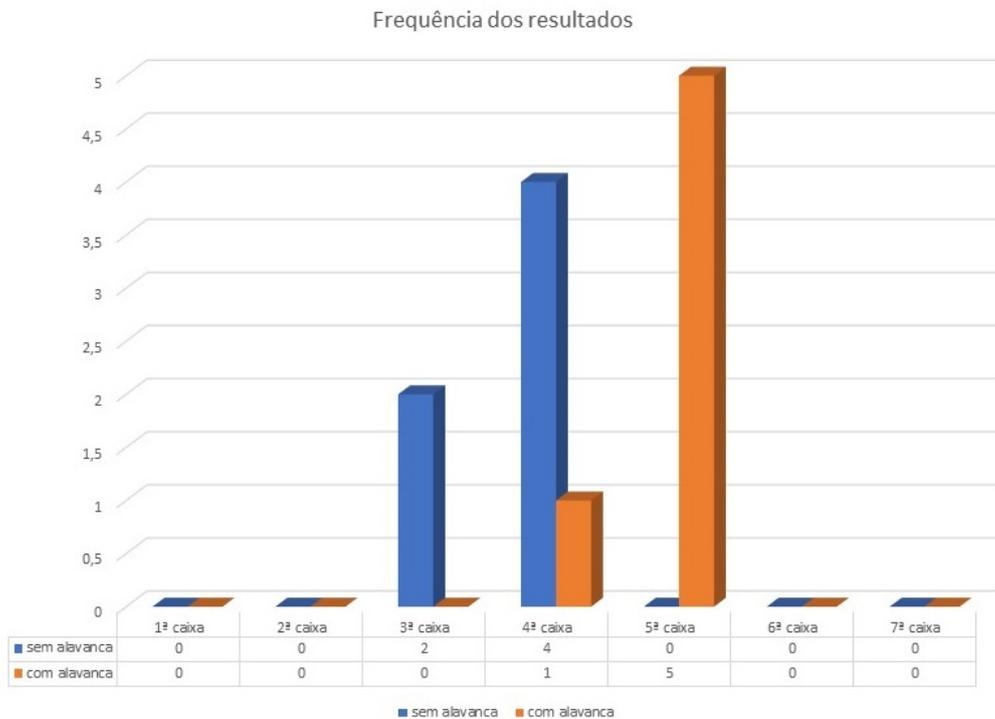


Figura 24: Alcance na colisão de duas esferas. Sem o casador de impedâncias a esfera alvo atinge a terceira ou quarta caixas (barras escuras). Com a inserção da alavanca ela chega à quarta e quinta caixas (barras claras).

4 Casamento de impedâncias em óptica

Neste capítulo vamos aplicar os conceitos de impedância e casamento de impedâncias desenvolvidos no contexto de colisões mecânicas a uma área completamente distinta: a óptica. Mais especificamente, estudaremos a transmissão de luz de um meio transparente para outro. Esse é um problema de considerável importância prática que, como veremos, pode ser analisado com auxílio de analogias ao que já fizemos na mecânica.

4.1 Transmissão de luz na interface entre dois meios

Vamos considerar dois materiais transparentes, com índices de refração diferentes n_1 e n_2 , em contato direto entre si. Se um feixe luminoso vindo de um dos materiais incidir na superfície que separa os dois meios, nem toda a

luz incidente passará para o outro lado – uma parte será refletida de volta, como ilustrado na figura 25. Esse é um fato familiar, frequente em nosso dia a dia. Ele se manifesta, por exemplo, quando olhamos para a vitrine de uma loja e vemos nossa imagem refletida superposta aos artigos em exposição.



Figura 25: Transferência de energia do meio 1 para o meio 2.

A passagem de luz de um meio para outro é um processo de transferência de energia entre dois sistemas. Apesar da luz ser um sistema físico muito diferente dos objetos mecânicos que estudamos até agora, veremos que boa parte do que já aprendemos pode ser aplicado à nova situação.

O problema é o mesmo de antes: é possível fazer com que mais luz passe de um meio para outro? Para encontrar a resposta com os métodos que empregamos no capítulo 1, o primeiro passo é identificar a grandeza física que desempenha o papel de impedância no caso da propagação da luz.

Sabemos que a luz será completamente transmitida de um meio para o outro se os dois índices de refração forem iguais: sem refração não haverá reflexão na interface.⁴ Como a máxima transferência de energia só deve acontecer para sistemas com impedâncias iguais, é natural associar a impedância “óptica” de um meio a seu índice de refração. Se chamarmos essa impedância de Z , somos tentados a escrever que $Z = n$. A definição usual, entretanto, não é essa e sim

$$Z = \frac{Z_0}{n} \quad (74)$$

onde, para materiais não-magnéticos, Z_0 é uma constante chamada “impe-

⁴Isso não é totalmente correto. Se a permeabilidade magnética dos dois meios for diferente haverá reflexão, mesmo com índices de refração iguais. Como quase todos os materiais transparentes à luz visível são não-magnéticos, sua permeabilidade é praticamente igual à do vácuo e não precisamos nos preocupar com essa complicação.

dância do vácuo” (já que é o valor de Z para $n = 1$). Para nossos propósitos essa diferença não é muito importante. O essencial é dispormos de uma relação entre Z e n tal que $Z_1 = Z_2 \iff n_1 = n_2$, ou seja, que nos permita identificar o casamento (e descasamento) de impedâncias. Como isso acontece nos dois casos, usaremos indistintamente os termos índice de refração e impedância.

Indo agora ao problema de como aumentar a intensidade da luz transmitida pela interface, nossa experiência com o casamento de impedâncias em colisões mecânicas sugere que coloquemos entre os dois meios um terceiro material, de índice de refração intermediário entre n_1 e n_2 . Esse arranjo está mostrado na figura 26 e é análogo ao que fizemos no capítulo 1 ao colocar um corpo de massa intermediária entre o projétil e o alvo.

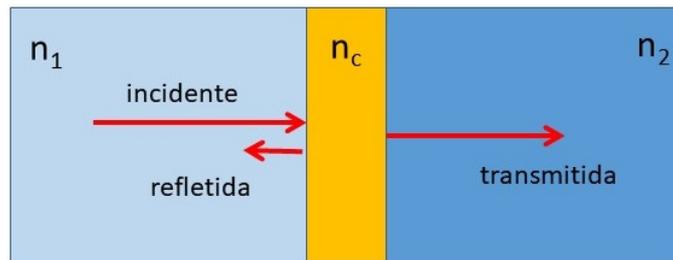


Figura 26: Casamento de impedâncias entre os meios 1 e 2. O material intermediário tem índice de refração n_c compreendido entre n_1 e n_2 .

Podemos testar essa ideia com um experimento simples: medir a transmissão de luz por uma placa de vidro comum. Como o índice de refração do vidro é 1,50 e o do ar é 1,00, podemos usar a água como casador de impedâncias, já que seu índice é 1,33. A fonte luminosa utilizada no experimento foi uma luminária de mesa e intensidade da luz transmitida pelo vidro foi medida com o luxímetro de um *smartphone*. Três situações foram estudadas: (1) vidro seco, (2) vidro com uma face molhada e (3) vidro com as duas faces molhadas. Também medimos o fundo luminoso, apagando a lâmpada, e a intensidade da luz incidente, removendo o vidro. Cada conjunto de medidas foi repetido três vezes. Todos os resultados estão mostrados na tabela 3.

A eficiência da passagem de luz pelo vidro é descrita pela razão entre a intensidade luminosa transmitida e a incidente, descontada a luminosidade

	Medida 1 (lux)	Medida 2 (lux)	Medida 3 (lux)
Fundo	89	75	66
Incidente	12378	10942	10954
Vidro seco	11290	9950	9968
1 face molhada	11435	10131	10132
2 faces molhadas	11701	10248	10260

Tabela 3: Medidas da intensidade luminosa. A primeira linha mostra a intensidade da luz de fundo e a segunda a da luz incidente. As linhas seguintes mostram a intensidade da luz transmitida pelo vidro quando esse está seco ou com uma ou ambas faces molhadas.

de fundo, dada por

$$T = \frac{\text{transmitida} - \text{fundo}}{\text{incidente} - \text{fundo}}. \quad (75)$$

A quantidade T é chamada *transmitância* e seu valor pode ser calculado com as medidas da tabela 3. Os resultados para cada um dos três conjuntos de medida e suas respectivas médias estão mostrados na tabela 4.

	T1	T2	T3	Tmédio
Vidro seco	0.911	0.909	0.909	0.910
1 face molhada	0.923	0.925	0.925	0.924
2 faces molhadas	0.945	0.936	0.936	0.939

Tabela 4: Fração da energia luminosa transmitida pelo vidro, nos casos em que esse está seco, com uma face molhada e com as duas faces molhadas. As três medidas da transmitância T e sua média em cada caso são mostradas.

Os valores (médios) de T dados na tabela 4 estão mostrados graficamente na figura 27. Vemos que colocar água sobre as faces do vidro realmente aumenta a transmissão da luz – a água atua como casador de impedâncias entre o ar e o vidro. O experimento também mostra que molhar as duas faces é melhor que molhar apenas uma. Isso casa as impedâncias ar-vidro nos dois lados da placa, facilitando ainda mais a passagem da luz.

É importante ressaltar que realizamos o experimento acima porque havíamos *previsto* que uma camada de água sobre o vidro aumentaria a transmissão de luz, e que essa previsão foi feita através de uma simples analogia entre

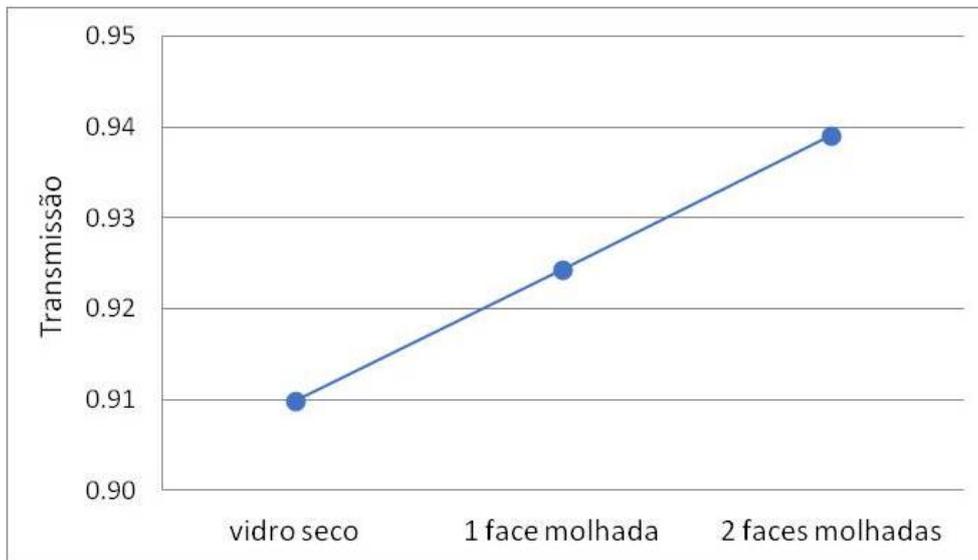


Figura 27: A taxa de transmissão da luz por uma placa de vidro para os três casos estudados: vidro seco, uma face molhada e duas faces molhadas.

o comportamento de um sistema óptico e um mecânico. Sem o conceito de impedância essa analogia não seria possível e a previsão do efeito se tornaria muito mais trabalhosa.

Apêndice B

Impedância e a Analogia Eletro-Mecânica



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física
Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física



Impedância e a Analogia Eletro-Mecânica

Leonardo Rodrigues de Jesus
&
Carlos Eduardo Aguiar

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Leonardo Rodrigues de Jesus, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2018

Impedância e a Analogia Eletro-Mecânica

Leonardo Rodrigues de Jesus
Carlos Eduardo Aguiar

Sumário

1	Introdução	3
2	Analogia eletro-mecânica	3
3	Impedância na analogia eletro-mecânica	5
4	Impedância no domínio temporal	8
5	Impedância de linhas de transmissão	10
6	Casamento de impedâncias	14

1 Introdução

A noção de impedância teve origem no estudo de circuitos elétricos de corrente alternada. Posteriormente o conceito foi estendido e aplicado com sucesso a sistemas mecânicos, em particular à acústica e às vibrações de estruturas. A base dessa extensão é a analogia que pode ser feita entre circuitos elétricos e sistemas mecânicos, que será o principal objeto de discussão no presente texto. Com a analogia eletro-mecânica obteremos alguns dos resultados já encontrados na primeira parte deste trabalho,¹ como a relação entre impedância e massa em colisões de partículas. A discussão utiliza ferramentas matemáticas relativamente avançadas, como cálculo infinitesimal, números complexos, transformadas de Fourier e funções generalizadas. Consequentemente, o material aqui apresentado destina-se principalmente a leitores que desejem uma abordagem do conceito de impedância mais ampla e profunda que a apresentada anteriormente.

2 Analogia eletro-mecânica

Vamos considerar o circuito RLC em série mostrado na figura 1. A resistência, indutância e capacitância do circuito são R , L e C , respectivamente. A tensão fornecida pelo gerador depende do tempo e é dada por $V(t)$. Em geral, a corrente no circuito $I(t)$ e a carga no capacitor $Q(t)$ também dependerão do tempo. Pela lei das malhas de Kirchhoff, $V(t)$ é a soma das quedas de tensão em cada elemento do circuito, $V(t) = V_L + V_C + V_R$, onde $V_L = LdI/dt$, $V_C = Q/C$ e $V_R = RI$. Assim temos que

$$V(t) = L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI . \quad (1)$$

¹*Impedância e Transferência de Energia em Mecânica e Óptica*, material instrucional associado à dissertação de mestrado de Leonardo Rodrigues de Jesus, disponível em https://www.if.ufrj.br/~pef/producao_academica/dissertacoes/2019_Leonardo_Jesus/material_didatico_1.pdf.

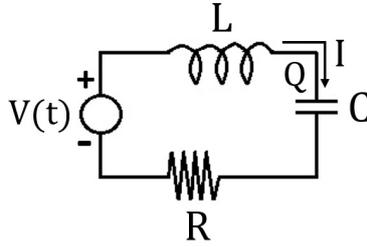


Figura 1: Circuito RLC em série.

Temos também que a carga elétrica no capacitor e a corrente no circuito estão relacionadas por

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (2)$$

O circuito RLC tem comportamento análogo ao de um oscilador harmônico como o mostrado na figura 2. Aplicando a 2ª lei de Newton a esse oscilador obtemos

$$m \frac{dv}{dt} = f(t) - kx - bv \quad (3)$$

onde m é a massa do oscilador, k a constante elástica da mola, b o coeficiente de amortecimento e $f(t)$ uma força externa dependente do tempo. A velocidade do oscilador é $v(t)$ e sua posição em relação ao ponto de equilíbrio é $x(t)$.

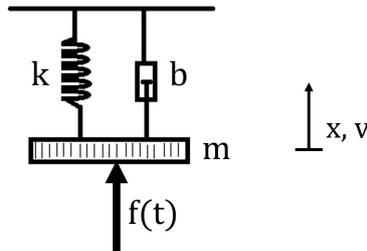


Figura 2: Oscilador harmônico sob ação de uma força externa $f(t)$. O oscilador é composto por um corpo de massa m , uma mola de constante elástica k e um amortecedor de coeficiente b .

A equação de movimento (3) pode ser escrita na forma

$$f(t) = m \frac{dv}{dt} + kx + bv \quad (4)$$

Circuito RLC	Oscilador mecânico
V	f
I	v
Q	x
L	m
$1/C$	k
R	b

Tabela 1: Equivalência eletro-mecânica.

que é matematicamente análoga à equação (1) do circuito RLC se fizermos as correspondências indicadas na tabela 1. Note que a correspondência também vale para a relação entre velocidade e posição do oscilador,

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad (5)$$

análoga à relação (2) entre corrente e carga no circuito.

Como veremos a seguir, essa analogia entre sistemas elétricos e mecânicos nos permite aproveitar na mecânica conceitos que são úteis na análise de circuitos elétricos.

3 Impedância na analogia eletro-mecânica

O conceito de impedância surgiu no estudo de circuitos como o da figura 1, quando a tensão $V(t)$ oscila com uma única frequência ω , ou seja,²

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}. \quad (6)$$

Ignorando efeitos transientes, tanto a corrente quanto a carga no capacitor oscilarão com a frequência ω , de modo que

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}, \quad (7)$$

$$Q(t) = Q_0 e^{i\omega t}. \quad (8)$$

²Como é usual no estudo desses circuitos, consideraremos que grandezas físicas como a tensão, corrente e carga serão descritas pela parte real de números complexos.

Como a corrente e a carga estão ligadas pela equação (2) temos também que

$$I_0 = i\omega Q_0 . \quad (9)$$

Substituindo as equações acima em (1) encontramos uma relação entre as amplitudes da tensão e corrente,

$$V_0 = \left(i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R \right) I_0 . \quad (10)$$

A impedância é definida como a razão entre as amplitudes da tensão e da corrente,

$$Z(\omega) = \frac{V_0}{I_0} , \quad (11)$$

que generaliza a lei de Ohm e a noção de resistência para circuitos de corrente alternada. Da equação (10) vemos que no circuito da figura 1 a impedância é

$$Z(\omega) = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} + R , \quad (12)$$

que pode ser interpretada como a resultante da associação em série das impedâncias do indutor, $Z_L = i\omega L$, do capacitor, $Z_C = 1/(i\omega C)$, e do resistor, $Z_R = R$.

A analogia que encontramos entre o circuito RLC e o oscilador harmônico pode ser estendida ao conceito de impedância. Se a força externa sobre o oscilador tiver frequência ω , isto é, se

$$f(t) = f_0 e^{i\omega t} , \quad (13)$$

após o desaparecimento de transientes teremos que tanto a velocidade quanto a posição terão a mesma frequência,

$$v(t) = v_0 e^{i\omega t} , \quad (14)$$

$$x(t) = x_0 e^{i\omega t} . \quad (15)$$

Da relação (5) entre velocidade e posição temos também que

$$v_0 = i\omega x_0 . \quad (16)$$

Substituindo esses resultados na equação (4) obtemos

$$f_0 = \left(i\omega m + \frac{k}{i\omega} + b \right) v_0 . \quad (17)$$

Seguindo as correspondências eletro-mecânicas da tabela 1, vemos que é possível definir um análogo mecânico da impedância como a razão entre as amplitudes da força e da velocidade,

$$Z(\omega) = \frac{f_0}{v_0} , \quad (18)$$

Da equação (17) temos então que a impedância do oscilador harmônico é

$$Z(\omega) = i\omega m + \frac{k}{i\omega} + b . \quad (19)$$

Para uma partícula de massa m sobre a qual agem apenas forças externas (ou seja, para $k = b = 0$), a impedância mecânica é

$$Z(\omega) = i\omega m . \quad (20)$$

Em nossa análise de processos de colisão, feita na primeira parte deste trabalho (ver a nota de rodapé 1), vimos que a massa desempenhava o papel de impedância. Entretanto, a relação que encontramos, $Z = m$, não continha nem a frequência ω nem o número imaginário i encontrados na equação (20). A diferença deve-se basicamente à hipótese de que a força externa que atua sobre a massa oscila com frequência ω . Em uma colisão essa hipótese não é válida: a força sobre a massa é semelhante a um pulso rápido, não uma oscilação.

4 Impedância no domínio temporal

Para estudar a impedância em colisões mecânicas temos que adaptar os resultados anteriores, passando de uma força oscilatória $f(t) = f_0 \exp(i\omega t)$ para caso geral $f(t)$. Isso pode ser realizado através da transformada de Fourier, que relaciona o “domínio de frequência” ao “domínio temporal” pela transformação

$$f(t) = \int f_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (21)$$

cuja inversa é

$$f_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-i\omega t} dt . \quad (22)$$

Utilizando a equação (18) na transformação (21) obtemos

$$f(t) = \int Z(\omega) v_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega . \quad (23)$$

A velocidade $v(t)$ está relacionada a $v_0(\omega)$ também por uma transformada de Fourier,

$$v(\tau) = \int v_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega , \quad (24)$$

cuja inversa é

$$v_0(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int v(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau . \quad (25)$$

Substituindo a equação (25) em (23) encontramos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \iint Z(\omega) v(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega \quad (26)$$

que pode ser escrita como

$$f(t) = \int z(t - \tau) v(\tau) d\tau \quad (27)$$

onde definimos a *impedância no domínio temporal*, $z(t)$, por³

³Para uma discussão da utilidade dessa definição, ver S. W. Rienstra, *Impedance models in time domain, including the extended Helmholtz resonator model*, Proceedings of the 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (2006), doi:10.2514/6.2006-2686 .

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int Z(\omega) e^{i\omega t} d\omega . \quad (28)$$

Para o caso de uma partícula de massa m , já vimos que sua impedância no domínio de frequência é $Z(\omega) = i\omega m$. Portanto, no domínio temporal essa impedância é dada por

$$z(t) = \frac{m}{2\pi} \int i\omega e^{i\omega t} d\omega . \quad (29)$$

Como a transformada de Fourier da função delta de Dirac, $\delta(t)$, é

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} d\omega \quad (30)$$

sua derivada pode ser escrita como

$$\delta'(t) = \frac{1}{2\pi} \int i\omega e^{i\omega t} d\omega , \quad (31)$$

de modo que, comparando (29) a (31), vemos que a impedância é dada por

$$z(t) = m\delta'(t) , \quad (32)$$

Esse é o resultado que buscávamos: no domínio temporal a impedância da partícula é caracterizada unicamente por um número real, a sua massa (a derivada da função delta define apenas o “instante da colisão”).

É interessante notar que esse resultado é equivalente à 2ª lei de Newton, pois substituindo (32) em (27) e utilizando as propriedades da função delta obtemos

$$f(t) = m \frac{dv(t)}{dt} . \quad (33)$$

O impulso transferido em uma colisão é $I = \int f(t) dt$. Com a 2ª lei de Newton vemos que $I = m\Delta v$, de modo que a massa (a impedância) da partícula pode ser escrita como

$$m = \frac{I}{\Delta v} , \quad (34)$$

ou seja, é a razão entre um “empurrão” e uma “velocidade”, forma muito

usada para definir impedância em diferentes contextos.

5 Impedância de linhas de transmissão

Um tipo importante de circuito elétrico, a linha de transmissão, ilustra a utilidade do conceito de impedância no estudo de processos de propagação da energia. A figura 3 mostra o esquema de uma linha de transmissão composta por uma sequência de indutores e capacitores. A variação da tensão e da corrente em uma ‘célula’ da linha é mostrada na figura 4.

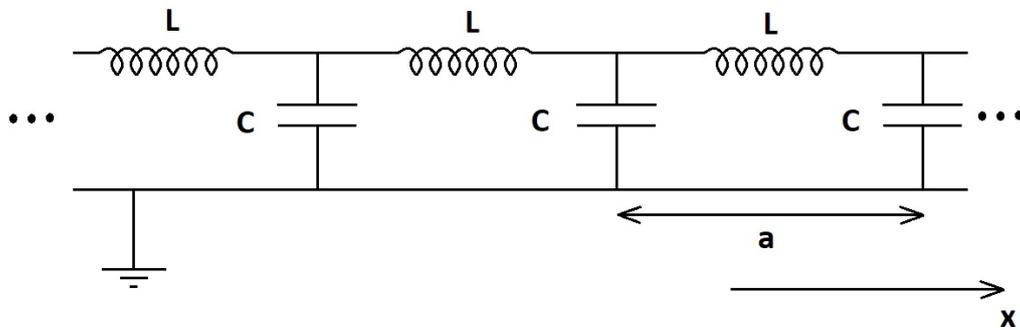


Figura 3: Linha de transmissão.

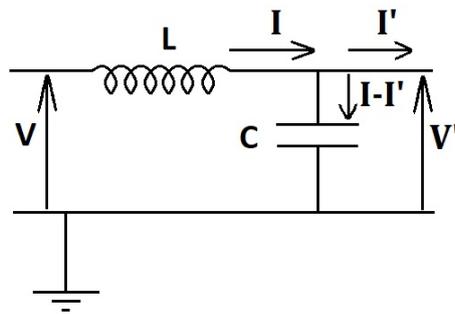


Figura 4: Variação da tensão e da corrente em uma célula da linha de transmissão.

Notando que $V - V'$ é a diferença de potencial no indutor L e que V' é

a tensão no capacitor C , temos que, para sinais de frequência ω ,

$$V - V' = i\omega LI , \quad (35)$$

$$I - I' = i\omega CV' . \quad (36)$$

Se a tensão e corrente não variam muito de uma célula para a seguinte, podemos aproximar as diferenças de tensão e corrente por derivadas e escrever que

$$\frac{dV(x)}{dx} = -i\omega \mathcal{L}I(x) , \quad (37)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = -i\omega \mathcal{C}V(x) , \quad (38)$$

onde $\mathcal{L} = L/a$ e $\mathcal{C} = C/a$ são a indutância e capacitância por unidade de comprimento (a é o comprimento de uma célula, como mostra a figura 3). Essas equações são conhecidas como *equações do telégrafo*.

Vamos procurar soluções das equações do telégrafo com a forma

$$V(x) = Ve^{-iqx} , \quad (39)$$

$$I(x) = Ie^{-iqx} . \quad (40)$$

Essas soluções correspondem a uma onda harmônica de número de onda q , pois, como os sinais tem frequência ω ,

$$V(x,t) = Ve^{i(\omega t - qx)} \quad (41)$$

$$I(x,t) = Ie^{i(\omega t - qx)} \quad (42)$$

Substituindo (39) e (40) nas equações do telégrafo encontramos

$$qV = \omega \mathcal{L}I , \quad (43)$$

$$qI = \omega \mathcal{C}V , \quad (44)$$

Combinando as equações (43) e (44) obtemos

$$\omega/q = \pm v_f \quad (45)$$

$$V/I = \pm Z_c \quad (46)$$

onde

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}} \quad (47)$$

e

$$Z_c = \sqrt{\mathcal{L}/\mathcal{C}} \quad (48)$$

são, respectivamente, a *velocidade de fase* e a *impedância característica* da linha de transmissão. Também de (43) e (44) vemos que ω/q e V/I têm o mesmo sinal pois \mathcal{L} e \mathcal{C} são sempre positivos. Portanto:

1) Se a onda move-se no sentido positivo do eixo x :

$$\omega/q = +v_f \quad (49)$$

$$V/I = +Z_c \quad (50)$$

2) Se a onda move-se no sentido negativo do eixo x :

$$\omega/q = -v_f \quad (51)$$

$$V/I = -Z_c \quad (52)$$

Para uma superposição de ondas nos dois sentidos temos

$$V(x) = V^+ e^{-iqx} + V^- e^{iqx} \quad (53)$$

$$I(x) = I^+ e^{-iqx} + I^- e^{iqx} \quad (54)$$

onde os índices $+$ e $-$ referem-se a ondas movendo-se respectivamente nos sentidos positivo e negativo do eixo x . Com as relações entre V e I obtidas acima temos $I^+ = V^+/Z_c$ e $I^- = -V^-/Z_c$, de modo que podemos escrever $I(x)$ como

$$I(x) = \frac{V^+}{Z_c} e^{-iqx} - \frac{V^-}{Z_c} e^{iqx} \quad (55)$$

A impedância no ponto x será então

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_c \frac{V^+ e^{-iqx} + V^- e^{iqx}}{V^+ e^{-iqx} - V^- e^{iqx}} . \quad (56)$$

Definido a *amplitude de reflexão* \mathcal{R} como

$$\mathcal{R} = \frac{V^-}{V^+} \quad (57)$$

o resultado acima pode ser colocado na forma

$$Z(x) = Z_c \frac{e^{-iqx} + \mathcal{R} e^{iqx}}{e^{-iqx} - \mathcal{R} e^{iqx}} = Z_c \frac{1 + \mathcal{R} e^{2iqx}}{1 - \mathcal{R} e^{2iqx}} . \quad (58)$$

Vemos que, no caso de ondas se propagando nos dois sentidos, efeitos de interferência fazem com que a impedância dependa da posição.

A potência elétrica que é transmitida por um ponto da linha é dada por

$$P(x,t) = \Re [V(x)e^{i\omega t}] \Re [I(x)e^{i\omega t}] \quad (59)$$

onde $\Re(a)$ é a parte real do número complexo a . A potência P pode ser escrita como

$$P(x,t) = \frac{1}{4} [V(x)e^{i\omega t} + V^*(x)e^{-i\omega t}] [I(x)e^{i\omega t} + I^*(x)e^{-i\omega t}] \quad (60)$$

$$= \frac{1}{2} \Re [V(x)I(x)e^{2i\omega t} + V(x)I^*(x)] \quad (61)$$

onde a^* é o conjugado complexo de a . A potência média ao longo de uma oscilação é então

$$\langle P(x) \rangle = \frac{1}{2} \Re [V(x)I^*(x)] , \quad (62)$$

que, com a definição de impedância, pode ser colocada na forma

$$\langle P(x) \rangle = \frac{1}{2} \Re [Z(x)] |I(x)|^2 . \quad (63)$$

Para uma onda harmônica progressiva, $I(x) = I e^{-iqx}$, $Z(x) = \pm Z_c$ é um

número real e, portanto, a potência média é

$$\langle P \rangle = \pm \frac{1}{2} Z_c |I|^2 . \quad (64)$$

Como antes, os sinais $+$ e $-$ correspondem à propagação nos sentidos positivo e negativo do eixo x .

Com a analogia eletro-mecânica, os resultados obtidos com a linha de transmissão elétrica podem ser usados para estudar ondas mecânicas. Vamos considerar o caso de uma cadeia massa-mola, uma sequência de partículas e molas como a mostrada na figura (5). As partículas têm massa m , a distância de equilíbrio entre elas é a e a constante elástica das molas é k .

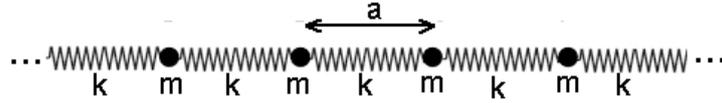


Figura 5: Linha de transmissão mecânica formada por massas e molas.

Usando as equivalências da tabela 1 temos que $\mathcal{L} = L/a \rightarrow m/a$ e $\mathcal{C} = C/a \rightarrow 1/(ka)$. Com isso, das equações (47) e (48) obtemos imediatamente que a velocidade de fase e a impedância característica da linha de transmissão mecânica são, respectivamente,

$$v_f = \sqrt{ka^2/m} , \quad (65)$$

$$Z_c = \sqrt{km} . \quad (66)$$

6 Casamento de impedâncias

Como vimos na primeira parte do trabalho (ver nota de rodapé 1), o conceito de impedância é muito útil na análise de processos de transferência de energia de sistema para outro. Isso se deve ao fato de impedâncias iguais (casadas) otimizarem essa transferência. Com as linhas de transmissão estudadas na seção anterior podemos verificar esse efeito. Para isso vamos considerar a junção de duas linhas de transmissão elétrica, 1 e 2, como mostrado na figura 6.

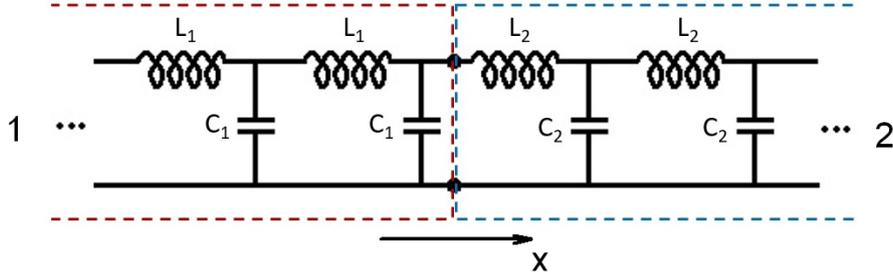


Figura 6: Junção de duas linhas de transmissão.

Uma onda movendo-se no sentido positivo do eixo x pela linha 1 incide sobre a junção, onde é parcialmente refletida e transmitida. Sem perda de generalidade podemos supor que a junção está localizada em $x = 0$. Como na linha 1 estão superpostas a onda incidente e a refletida, antes da junção temos, de acordo com a equação (58),

$$Z(x < 0) = Z_1 \frac{1 + \mathcal{R} e^{2iqx}}{1 - \mathcal{R} e^{2iqx}} \quad (67)$$

onde Z_1 é a impedância característica da linha 1. Já na linha 2 há apenas a onda transmitida através da junção, de modo que

$$Z(x > 0) = Z_2 \quad (68)$$

onde Z_2 é a impedância característica da linha 2.

Como $V(x)$ e $I(x)$ devem ser contínuos no ponto de junção, o mesmo deve acontecer com a impedância $Z(x) = V(x)/I(x)$. Isso significa que o valor de $Z(0)$ dado pelas equações (67) e (68) deve ser o mesmo, ou seja,

$$Z_2 = Z_1 \frac{1 + \mathcal{R}}{1 - \mathcal{R}}. \quad (69)$$

Resolvendo a equação acima para a amplitude de restituição encontramos

$$\mathcal{R} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (70)$$

A parcela da energia incidente que é refletida na junção entre as linhas é

dada pelo *coeficiente de restituição* $\rho = |\mathcal{R}|^2$. Da equação (70) temos então que

$$\rho = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2. \quad (71)$$

A fração da energia incidente que passa para a linha 2 é dada pelo *coeficiente de transmissão* $\eta = 1 - \rho$. Com a equação (71) é fácil mostrar que

$$\eta = \frac{4Z_2Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2}. \quad (72)$$

Se $Z_1 = Z_2$ dizemos que as impedâncias estão *casadas*. Nesse caso temos $\rho = 0$ e $\eta = 1$ e toda a energia incidente pela linha 1 passa para a linha 2, sem perda por reflexão.

É fácil ver que os mesmos resultados são válidos para a transmissão de ondas mecânicas como as tratadas ao final da seção anterior. Mais ainda, o coeficiente de transmissão (72) é semelhante ao obtido nas colisões de partículas analisadas na primeira parte do trabalho (ver nota de rodapé 1), onde as massas fazem o papel das impedâncias. Tudo isso demonstra a utilidade do conceito de impedância na análise dos mais variados processos de transferência de energia.

Apêndice C

Uma aula sobre casamento de impedâncias

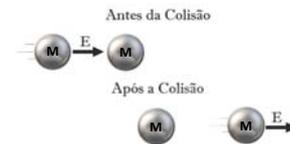
O Conceito de Impedância no Ensino de Física

Leonardo R. Jesus
Carlos E. Aguiar

1

Exemplo de impedância

massas iguais



- A transferência de energia é completa quando as massas são iguais.
- Portanto, nesse caso a massa é a impedância.

4

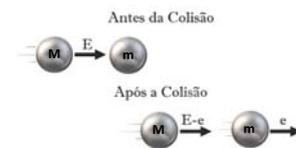
Introdução



- Dois sistemas: A e B
- Desejamos transferir energia de A para B da maneira mais eficiente possível
 - toda energia disponível em A passa para B
- O conceito de **impedância** nos ajuda a entender a transferência de energia e otimizá-la.

2

Massas diferentes



- A transferência de energia não é completa.
- As impedâncias estão descasadas.

5

Impedância

- A transferência de energia é máxima quando as impedâncias de A e B são **iguais**.
- Nesse caso dizemos que as impedâncias estão **casadas**.
- A transferência máxima de energia fornece um critério para identificar a grandeza que corresponde à impedância.

3

É possível transferir mais energia?

- É possível aumentar a eficiência da transferência de energia da bola grande para a bola pequena?



() Sim

() Não

6

É possível transferir mais energia?

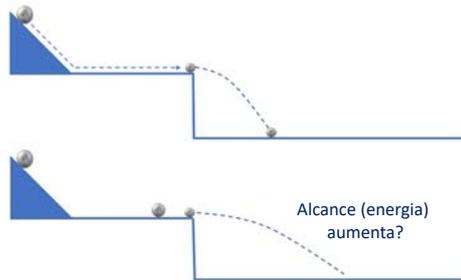
- Por exemplo: colocando uma terceira bola entre as duas do caso anterior (ver figura), o que acontece com a energia da bola pequena?



() Aumenta () Diminui () Não muda

7

Experimento



10

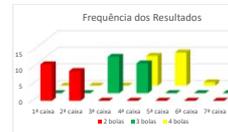
Casador de impedâncias

- Impedâncias descaçadas: transferência ineficiente de energia
- Um **casador de impedâncias** aumenta a eficiência da transferência de energia entre sistemas de impedâncias descaçadas.



8

Resultados



Alcance	2 bolas	3 bolas	4 bolas
1ª caixa	11	0	0
2ª caixa	9	0	0
3ª caixa	0	11	0
4ª caixa	0	9	0
5ª caixa	0	0	10
6ª caixa	0	0	1
7ª caixa	0	0	0

11

Casador de impedâncias

- A bola intermediária pode ser um casador de impedâncias?

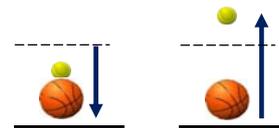


- Veremos que sim!

9

Outro exemplo

- Queda livre de uma bola de golfe sobre uma bola de basquete.
- O experimento mostra que após o quique a bola de golfe vai a uma grande altura.



- É possível aumentar ainda mais essa altura?

() Sim () Não

12

É possível ir mais alto?

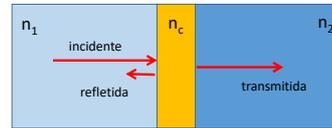
- Por exemplo: Colocando uma bola de tênis entre as bolas de golfe e de basquete (ver figura), o que acontece com a altura máxima atingida pela bola de golfe?



() Aumenta () Diminui () Não muda

13

Casador de impedâncias



16

Outro tipo de casador



14

Resultados



	mínimo	máximo	média
Vidro	11137	11443	11290
Vidro com 1 face molhada	11260	11609	11434,5
Vidro com 2 faces molhadas	11543	11858	11700,5

17

Transmissão da luz

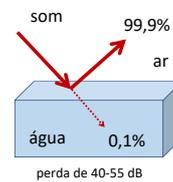


transmissão máxima \rightarrow reflexão = 0 \rightarrow $n_1 = n_2$

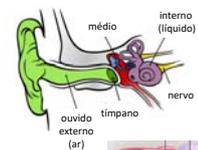
⇒ impedância é o índice de refração

15

Ouvido médio



perda de 40-55 dB



Os três ossinhos do ouvido médio formam uma alavanca que casa as impedâncias do ar e do líquido no ouvido interno.

Peixes não têm ouvido médio!



18

Conclusão

- Impedância é um conceito de enorme importância prática que:
 - possibilita uma descrição unificada de fenômenos e aplicações em diferentes áreas da ciência e tecnologia;
 - pode ser apresentado mesmo em cursos introdutórios de física (ensino médio, por exemplo).

Referências Bibliográficas

- [1] E. M. Rogers, *Physics for the Inquiring Mind*, (Oxford University Press, 1960).
- [2] F. S. Crawford, Jr., *Waves*, Berkeley Physics Course, vol. 3 (McGraw-Hill, 1968).
- [3] J. B. Hart, R. B. Herrmann, *Energy Transfer in One-Dimensional Collisions of Many Objects*, American Journal of Physics, v. 36, p. 46 (1968).
- [4] J. D. Kerwin, *Velocity, Momentum, and Energy Transmissions in Chain Collisions*, American Journal of Physics, v. 40, p. 1152 (1972).
- [5] J. Santos, B. P. W. Oliveira, O. R. Nelson, *Impedance of Rigid Bodies in One-Dimensional Elastic Collisions*, Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 34, n. 1, art. 1305 (2012).
- [6] I. MacInnes, *The Lever as an Impedance Matching Device*, Physics Education, p. 509 (1972).
- [7] T. Ansbacher, *Impedance Matching on the Air Track*, The Physics Teacher, v. 25, p. 386 (1987).
- [8] F. Crawford, *Dynamic impedance matching with a lever*, American Journal of Physics, v. 57 (1) p. 52 (1989).
- [9] R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, v. 1, cap. 25 e v. 2, cap. 22 (Addison-Wesley, 1964).
- [10] R. Serway, J. Jewett, *Physics for Scientists and Engineers*, 6 ed., cap. 33 (Thomson, 2004).
- [11] M. Harrison, *Physical collisions and the maximum power theorem: an analogy between mechanical and electrical situations*, Physics Education, p. 207 (2013).

- [12] Tracker: Video Analysis and Modelling Tool, <https://physlets.org/tracker/>
- [13] Vitor L. B. Jesus, *Experimentos e Videoanálise – Dinâmica* (Ed. Livraria da Física, 2014).
- [14] S. W. Rienstra, *Impedance models in time domain, including the extended Helmholtz resonator model*, Proceedings of the 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (2006), doi:10.2514/6.2006-2686