



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física
Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física



O efeito Faraday: exposição teórica didática e experimento de baixo custo

Vinícius de Araújo Coelho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientadores:
Marcus Venicius Cougo Pinto
Carlos Farina de Souza

Rio de Janeiro
Dezembro de 2017

O efeito Faraday: exposição teórica didática e experimento de baixo custo

Vinícius de Araújo Coelho

Orientadores:

Marcus Venicius Cougo Pinto

Carlos Farina de Souza

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

Prof. Marcus Venicius Cougo Pinto (Presidente)

Prof. Felipe Arruda de Araujo Pinheiro

Prof. Bruno de Moura Escher

Prof. Marco Moriconi

Rio de Janeiro
Dezembro de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

C672e Coelho, Vinícius de Araújo

O efeito Faraday: exposição teórica didática e experimento de baixo custo / Vinícius de Araújo Coelho. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2017.

x, 130 f. : il. ; 30 cm.

Orientadores: Marcus Venicius Cougo Pinto; Carlos Farina de Souza.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2017.

Referências Bibliográficas: f. 128-130.

1. Ensino de Física. 2. Atividade Óptica. 3. Efeito Faraday. I. Cougo-Pinto, Marcus Venicius. II. Farina, Carlos. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. IV. O efeito Faraday: exposição teórica didática e experimento de baixo custo.

Dedico esta dissertação a minha família e aos meus amigos.

Agradecimentos

Agradeço à CAPES, ao MNPEF e à Sociedade Brasileira de Física pela concessão da bolsa de mestrado.

Agradeço aos membros e funcionários da coordenação do programa de Mestrado Profissional em Ensino de Física da UFRJ que, com muita dedicação, realizam um trabalho elogiável, o que se reflete no sucesso do programa.

Agradeço aos Professores do programa que, dotados de vastos conhecimentos, sempre os tive como fontes de inspiração.

Agradeço à direção do Campus Itaperuna do IFFluminense, que me ofereceu a possibilidade de estruturar a carga horária de trabalho de modo a tornar viável a realização do curso de mestrado na cidade do Rio de Janeiro.

Agradeço aos meus amigos e familiares, pela compreensão nas diversas ocasiões em que estive ausente em função do compromisso com o andamento da dissertação, e pelo insubstituível apoio que sempre me deram, sem o qual eu não teria sido capaz de concluir o trabalho.

Agradeço ao amigo Raphael Guimarães Pontes, colega de curso que de forma muito solidária contribuiu na edição do vídeo criado como material de apoio ao produto da dissertação.

Agradeço ao amigo Paulo Roberto Linhares Carvalho, Técnico de laboratório do LADIF, que diversas vezes se colocou a disposição para ajudar nos testes feitos com o experimento do efeito Faraday e quem fez a filmagem do vídeo sobre o efeito, criado como material de apoio ao produto da dissertação.

Agradeço especialmente ao amigo Hercílio Pereira Cordova, que com a sua admirável habilidade artesã, contribuiu enormemente no projeto e na confecção do aparato experimental para a realização do efeito Faraday. A ele inclusive considero justo dedicar o capítulo 4 desta dissertação.

Finalmente, agradeço aos meus orientadores, Marcus Venicius Cougo Pinto e Carlos Farina de Souza, pela inestimável contribuição na realização deste trabalho. Eles, sempre muito solícitos e pacientes, foram fundamentais para a minha evolução durante o processo de escrita. Deles recebi lições que serão úteis por toda vida.

RESUMO

O efeito Faraday: exposição teórica didática e experimento de baixo custo

Vinícius de Araújo Coelho

Orientadores:

Marcus Venicius Cougo Pinto

Carlos Farina de Souza

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

O efeito Faraday em óptica consiste na rotação da direção de polarização de uma onda de luz plana monocromática linearmente polarizada pela ação de um campo magnético constante na direção e sentido de propagação da onda. É um efeito de fundamental importância do ponto de vista conceitual, pois mostra uma relação entre magnetismo e ótica; é de importância também do ponto de vista histórico, por ser o primeiro exemplo dessa relação, encontrada pelo físico inglês Michael Faraday em 1845. O efeito deixou fascinado seu descobridor e acreditamos que também possa fascinar o estudante de hoje. Essas características motivaram a escolha do efeito como tema desta dissertação. Ela é dirigida diretamente ao professor do ensino médio que pretende ensinar o efeito aos seus estudantes. Por isso, a dissertação começa com uma exposição detalhada dos pressupostos teóricos do efeito, partindo das equações de Maxwell. Em seguida, o efeito propriamente dito é abordado fenomenologicamente, teoricamente e, por uma proposta de aparatos de baixo custo, também experimentalmente. Apresentamos três abordagens

teóricas do efeito Faraday com diferentes níveis de dificuldade, para que essa dissertação possa ser aproveitada por um conjunto de alunos o mais abrangente possível. Por fim, elaboramos um produto que consiste em um conjunto de três planos de aula de introdução ao efeito Faraday a serem ministradas no ensino médio.

Palavras chave: Ensino de Física, Atividade Óptica, Efeito Faraday.

Rio de Janeiro
Dezembro de 2017

ABSTRACT

The Faraday effect: didactical theoretical exposition and low cost experiment National Physics Education Program (MNPEF-UFRJ)

Vinícius de Araújo Coelho

Supervisors:

Marcus Venicius Cougo Pinto

Carlos Farina de Souza

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

The Faraday effect in optics consists in the rotation of the polarization direction of a linearly polarized monochromatic plane light wave, in a medium without natural optical activity, by the action of a constant magnetic field in the direction of the wave propagation. It is an effect of fundamental importance from the conceptual point of view, because it shows a relation between magnetism and optics; it is also important from the historical point of view, since it is the first example of this relation, found by the english physicist Michael Faraday in 1845. The effect has fascinated its discoverer and we believe that it can also fascinate the student of today. These characteristics motivated the choice of the effect as theme of this dissertation. It is directed directly to the high school teacher who intends to teach the effect to his students. For this reason the dissertation begins by a detailed exposition of the theoretical assumptions of the effect starting from Maxwell's equations. Then the effect itself is approached phenomenologically, theoretically and,

by a proposal of apparatuses of low cost, also experimentally. We present three theoretical approaches to Faraday effect with different levels of difficulty, so that this dissertation can be useful to a larger number of readers. Finally, we offer a didactic product consisting in a set of three lecture plans on introduction to Faraday effect addressed to high school students.

Keywords: Physics Education, Optical Activity, Faraday Effect.

Rio de Janeiro
Dezembro de 2017

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Ondas eletromagnéticas	6
2.1	Equações de Maxwell	7
2.2	Ondas planas no vácuo	10
2.3	Polarização de ondas eletromagnéticas	16
2.4	Métodos de polarização	27
2.5	Equações de Maxwell na matéria	36
2.6	Onda plana monocromática em meio simples	45
2.7	Onda plana monocromática em meio dispersivo	51
3	O efeito Faraday	62
3.1	Atividade óptica natural	62
3.2	Efeito Faraday	72
3.3	Formalismo geral	73
3.4	Formalismo resumido	84
3.5	Um formalismo elementar	86
4	Efeito Faraday: experimento	93
4.1	Construção do experimento	93
4.2	Medida do desvio angular da polarização	108
4.3	Estimativa do desvio angular	110
5	Considerações finais	112
A	Equações de Maxwell e ondas planas	116
B	Ângulo de inclinação da elipse de polarização	120
C	Solução do oscilador harmônico amortecido	123
	Referências bibliográficas	128

Capítulo 1

Introdução

No sábado de 13 de setembro de 1845, Faraday fez 30 anotações em seu diário de laboratório [1, 2], indicando uma intensa atividade experimental. Na primeira anotação, diz que dedicou o dia fazendo passar campos magnéticos através de diferentes corpos transparentes, ao mesmo tempo passando por eles raios de luz polarizada. Ele estava à procura da interação da luz com o campo magnético. Após várias tentativas infrutíferas, observou a mudança da polarização da luz causada pelo campo magnético ao alinhar este campo com a direção do raio de luz que atravessava uma peça de vidro, e registrou na sétima anotação do dia (parágrafo 7504 do diário [2]):

“ MAS, quando polos magnéticos contrários estavam do mesmo lado, houve um efeito produzido no raio polarizado e, portanto, ficou provado que força magnética e luz têm relação uma com a outra. Muito provavelmente, este fato provar-se-á extremamente fértil e de grande valor na investigação de ambas condições da força natural. ”

Note-se que as maiúsculas no início da citação estão no manuscrito original de Faraday, como mostra a figura 1.1, e parecem cheias de significado. Também digna de nota é a antevisão que Faraday revela ao final da citação, prevendo a importância da descoberta da interação do campo magnético com a luz. No parágrafo 7718 do diário, ele descreve com entusiasmo no vocabulário peculiar da época que “...finalmente consegui...magnetizar um raio de luz” [2].

Na verdade essa ação do campo magnético sobre a luz é intermediada pelo corpo transparente no qual ambos se fazem presentes de modo apropriado. De qualquer forma, os experimentos de Faraday foram de grande importância no desenvolvimento da teoria eletromagnética da luz por serem os primeiros nos quais fenômenos ópticos e magnéticos foram estudados conjuntamente [3].

Além de rico em implicações teóricas e experimentais, o efeito Faraday é também interessante de ser levado ao ensino de graduação ou mesmo ao ensino médio. Isso por suas características fenomenológicas e como motivação para o estudo de seus pressupostos teóricos por parte do professor e para as explicações simplificadas mescladas com pressupostos fenomenológicos destinadas aos estudantes.

Embora o efeito Faraday tenha sido o primeiro efeito magneto-óptico a ser estudado e observado em detalhe por M. Faraday em 1845, trata-se de um efeito que possui aplicações modernas importantes, como mencionaremos mais adiante nessa dissertação.

Quanto às suas características fenomenológicas, o efeito se processa por um lado com fenômenos familiares como a luz comum e as forças magnéticas causadas por ímãs, embora sua observação seja feita normalmente com laser e campos magnéticos gerados por bobinas, que também não são estranhos aos estudantes; além disso, eletroímã gerando campos eletromagnéticos como os ímãs de geladeira é uma excelente oportunidade para explicar a idéia fundamental das correntes amperianas. Por outro lado o mesmo efeito mostra que tais fenômenos familiares têm uma relação inesperada que pode ser usada didaticamente para aguçá-la a curiosidade científica do estudante.

O estudo dos pressupostos teóricos que conduzem à explicação do efeito Faraday é avançado e abrangente, iniciando-se nas equações de Maxwell. De-las podemos derivar e compreender em detalhes tanto a teoria dos campos magnéticos que tornam o meio transparente capaz de realizar atividade óptica, como a própria óptica da luz polarizada que atravessa o meio. Com esse arcabouço teórico em mãos explica-se então o formalismo do efeito Faraday. Esse formalismo pode envolver vários conceitos usados em óptica moderna ou ter uma versão resumida com menos ferramentas teóricas. É de grande

interesse também um formalismo elementar do efeito, que seja minimamente acessível a estudantes do ensino médio.

Nesta dissertação a discussão dos pressupostos teóricos é feita no capítulo 2, onde iniciamos por uma apresentação do formalismo das ondas eletromagnéticas (que naturalmente se aplica à luz usada no efeito Faraday) como soluções das equações de Maxwell. Tratamos ainda da polarização da luz e do seu comportamento em meios materiais transparentes. Com isso, mostramos ao leitor as ferramentas conceituais que são fundamentais ao assunto tratado no capítulo subsequente. Procuramos detalhar as idéias e cálculos o máximo possível para facilitar o estudo do professor de ensino médio que pretende conhecer o efeito Faraday.

O capítulo 3 destina-se ao tratamento teórico do efeito Faraday, onde discutimos o fenômeno em níveis diferentes de complexidade, sendo a abordagem mais elementar concebida para um possível uso no ensino médio. No capítulo 4 apresentamos um projeto de artefato experimental que mostra o efeito e é também reproduzível nesse nível de formação.

Passando à questão pedagógica, é cada vez mais evidente a necessidade de mudança no modelo de formação oferecido na educação básica; sobretudo no ensino médio. O avanço das tecnologias de informação aliado à democratização de acesso vem, ao longo dos anos, suprimindo barreiras geográficas e sociais, aproximando as pessoas de todas as partes do mundo e produzindo uma rede global de comunicação cada vez mais complexa e poderosa. Diante desse cenário não há dúvidas de que a educação precisa estar adaptada a essa nova realidade. Mas, para além da mera inclusão da tecnologia como recurso didático, é fundamental que a escola repense as suas práticas de formação nesse contexto global. No modelo tradicional, ainda hoje predominante, o professor é o elemento ativo no processo de ensino-aprendizagem, enquanto o aluno é o elemento passivo. Isto é, o professor transmite informações sobre os temas de cultura geral definidos pelos currículos e o aluno as recebe sem ter a possibilidade de refletir sobre tais informações durante o andamento da aula. Com o advento das recentes tecnologias, esse modelo tradicional tem se mostrado cada vez mais ineficaz. Primeiro porque o acesso à informação por parte dos alunos deixou de estar concentrado na figura do professor e segundo

porque dessa forma a escola não cumpre o papel de preparar o aluno para o exercício da cidadania, uma vez que não desenvolve nele um domínio crítico sobre questões sociais, de linguagem, do mundo natural e das tecnologias. Portanto, é cada vez mais desejável que as práticas educacionais estejam fundamentadas no conceito de que o aluno precisa ser um elemento ativo no processo de ensino-aprendizagem. Desse modo, essas práticas estarão exercendo boas influências na vida de cada indivíduo em formação e cumprindo suas metas no âmbito social. Dito isto, o material instrucional desta dissertação é formado por um roteiro de três aulas onde são propostas atividades práticas simples para os alunos realizarem. Os temas das aulas são discutidos sob orientação do professor a partir das observações feitas pelos alunos nessas atividades. Portanto, as aulas são elaboradas de modo a evitar ao máximo o modelo expositivo tradicional, tornado o aluno um elemento ativo na construção do conhecimento. Essa estratégia tem por finalidade despertar o interesse e desenvolver um caráter crítico nos alunos sobre os assuntos discutidos. Naturalmente, o objetivo do roteiro das três aulas é levar aos estudantes o conhecimento sobre o efeito Faraday. Dessa forma, na primeira aula é discutido o conceito geral de onda e de polarização de ondas mecânicas transversais, na segunda aula discute-se o conceito de ondas eletromagnéticas e métodos de polarização e na terceira aula são discutidos os fenômenos de atividade óptica natural e de atividade óptica induzido magneticamente, isto é, o efeito Faraday.

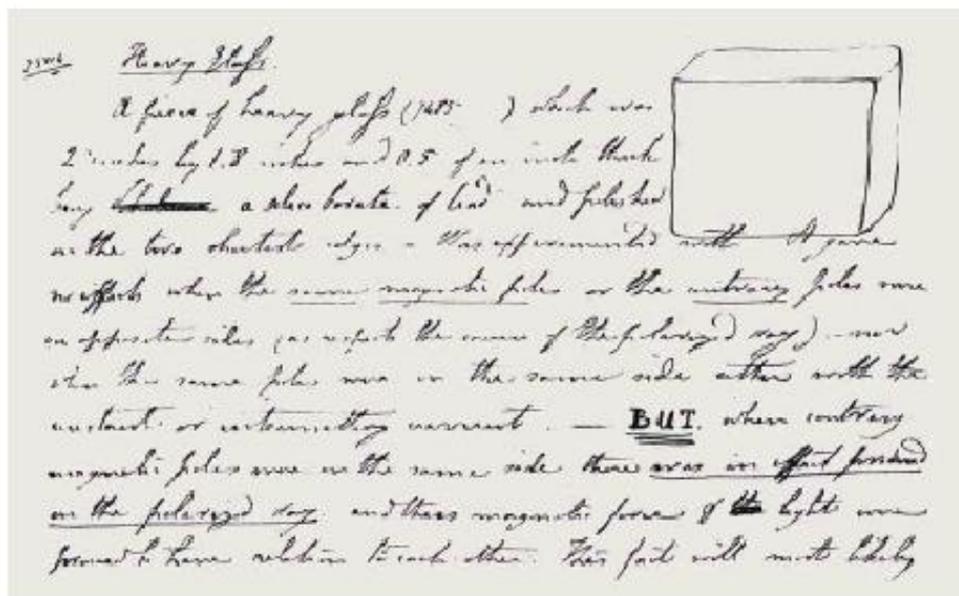


Figura 1.1: Texto manuscrito de Faraday em seu diário referindo-se à descoberta do efeito de rotação do plano de polarização da luz em meio diétrico magnetizado. Nota-se o BUT (mas) em maiúsculas.

Capítulo 2

Ondas eletromagnéticas

Neste capítulo faremos uma revisão de assuntos que serão fundamentais no estudo da atividade óptica natural e no assunto central desta dissertação, o efeito Faraday. Dessa forma, iniciamos o texto por uma apresentação das equações de Maxwell, de onde derivamos as equações de onda para os campos eletromagnéticos no vácuo. Em seguida faremos uma discussão sobre as ondas planas no vácuo e posteriormente trataremos o importante conceito de polarização das ondas eletromagnéticas, que por, sua vez, motivará o assunto seguinte: métodos de polarização. Esses métodos mencionam propriedades macroscópicas de meios materiais que são consideradas fenomenologicamente, já que meios materiais são discutidos posteriormente. Naturalmente o eletromagnetismo que usamos é macroscópico, com suas grandezas promediadas em regiões com dimensões muito superiores à escala atômica, mas que podem ser tomadas macroscopicamente como aproximadamente puntiformes. Como é usual nessa abordagem, as propriedades macroscópicas quando não são postuladas fenomenologicamente são baseadas em modelos microscópicos clássicos. Por fim, faremos uma indispensável discussão sobre o comportamento das ondas planas monocromáticas no interior de meios dielétricos com base no que é previamente tratado sobre as equações de Maxwell em meios desse tipo.

2.1 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell na forma local (microscópica) são as equações diferenciais parciais de primeira ordem

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1d)$$

onde $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ são os respectivos campos elétrico e magnético na posição \mathbf{r} e no instante t ; ρ e \mathbf{J} são as respectivas densidades de carga e corrente elétrica em \mathbf{r} e t , e todas essas grandezas são relativas a um referencial inercial. Além disso, $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ são, respectivamente, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo no sistema internacional de unidades (SI). A constante ϵ_0 tem origem na lei de Coulomb, que fornece o módulo da força eletrostática entre duas cargas puntiformes separadas por uma distância conhecida. A constante μ_0 tem origem na lei de Biot-Savart, que fornece o módulo da força magnetostática por unidade de comprimento entre dois fios paralelos conduzindo correntes estacionárias e separados por uma distância bem definida. Essas quatro equações, juntamente com a expressão para a força de Lorentz, que na forma local é dada pela densidade de força [4]

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

formam a base teórica de todo o eletromagnetismo.

A equação (2.1a), chamada lei de Gauss, mostra que em cada ponto \mathbf{r} de uma região do espaço, no instante t , a divergência do campo elétrico é proporcional à densidade de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$. Da mesma forma, a equação (2.1b), conhecida como lei de Gauss do magnetismo, afirma que não existem car-

gas (ou monopolos) magnéticos, porque a divergência do campo magnético é sempre nula. A equação (2.1c), a lei de Faraday, informa que em cada ponto \mathbf{r} e instante t o rotacional do campo elétrico é o negativo da derivada do campo magnético em relação ao tempo. Decorre então que a taxa de variação temporal do fluxo de campo magnético através de uma superfície limitada por um fio condutor produz diferença de potencial elétrico entre quaisquer dois pontos do fio, levando ao surgimento de corrente por ele. A última equação mostra que em cada ponto e instante o rotacional do campo magnético é proporcional à soma da densidade de corrente elétrica, $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, com a chamada densidade de corrente de deslocamento, $\epsilon_0 \partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) / \partial t$. Essa equação é resultado da correção da lei de Ampère, $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, cuja validade se restringe ao regime estacionário. A introdução da corrente de deslocamento nessa lei permite torná-la compatível com a lei de conservação da carga elétrica,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.3)$$

no caso em que a derivada temporal da densidade de carga é não nula. A introdução da corrente de deslocamento foi a contribuição de Maxwell que representou uma evolução significativa no conhecimento sobre o eletromagnetismo, levando a equação (2.1d) a ser chamada de lei de Ampère-Maxwell e o conjunto das quatro equações a também receberem o seu nome. Quanto à equação (2.2), ela descreve o movimento de cargas elétricas em um campo eletromagnético dado. São bem conhecidos os casos simples dos movimentos de uma carga puntiforme na presença de um campo elétrico constante ou de um campo magnético constante. No primeiro caso, o movimento é similar ao de um projétil em campo gravitacional invariável. No segundo caso, é circularmente uniforme.

Uma avaliação simples das equações de Maxwell mostra que cargas elétricas não podem existir em uma região sem a ocorrência de campos eletromagnéticos, basta para isso tomar $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ nas equações e observar que como consequência se tem $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, isto é, se os campos são nulos, então as distribuições de cargas e correntes também são. Por outro lado, ainda que não existam distribuições de cargas e correntes na região, as equações de

Maxwell no vácuo admitem soluções não triviais, ou seja, os campos elétrico e magnético não são identicamente nulos na região. É possível mostrar ainda que esses campos apresentam comportamento ondulatório, o que é feito a seguir.

As equações de Maxwell no vácuo, obtidas fazendo $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$, são

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.4a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.4b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.4c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.4d)$$

Para mostrar o caráter ondulatório das soluções dessas equações, toma-se o rotacional em ambos os membros de (2.4c) e (2.4d). Realizando esse procedimento inicialmente para a equação (2.4c), obtemos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right). \quad (2.5)$$

Lembrando que para coordenadas cartesianas vale a identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \{(\nabla^2 E_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 E_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 E_z)\hat{\mathbf{z}}\}, \quad (2.6)$$

que, por simplicidade de notação, se escreve na forma

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (2.7)$$

a equação (2.5) pode ser reescrita na forma

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (2.8)$$

Usando as equações (2.4a) e (2.4d), segue que

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right), \quad (2.9)$$

o que resulta em

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

De forma análoga, a partir da equação (2.4d) se obtém para o campo magnético o resultado

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

Portanto, os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} obedecem a uma mesma equação de onda, o que se pode representar por

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

A velocidade de propagação,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 2,99 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad (2.13)$$

é, com boa aproximação, a mesma obtida experimentalmente para a luz. A observação desse fato levou Maxwell a propor que a natureza da luz estivesse intrinsecamente relacionada ao eletromagnetismo. Essa proposta se confirmou com o experimento realizado por Hertz, que validou o trabalho teórico cujo principal resultado foi a previsão da existência de ondas eletromagnéticas. Com a comprovação da existência de ondas eletromagnéticas foi possível verificar que a luz é, de fato, uma onda desse tipo, como Maxwell havia sugerido. Com isso, a óptica unificou-se ao eletromagnetismo, o que possibilitou importantes avanços na compreensão do mundo físico. A percepção de que as equações de Maxwell no vácuo apresentam soluções ondulatórias foi possível pela introdução da corrente de deslocamento na lei de Ampère.

2.2 Ondas planas no vácuo

A seção anterior mostra através da equação (2.12) que os campos eletromagnéticos no vácuo obedecem à equação de onda com velocidade $c =$

$1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, o que significa que cada componente dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} , denotado por Ψ [4], satisfaz à equação

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.14)$$

Considerando as soluções que dependem apenas de uma única coordenada espacial, denotada por ζ e tomada na direção de um vetor unitário $\hat{\mathbf{k}}$, isto é, $\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \zeta$, se tem $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\zeta\hat{\mathbf{k}}, t) \equiv \Psi(\zeta, t)$ [4]. Nesse caso, fixando t , a função Ψ tem valor constante nos pontos \mathbf{r} para os quais ζ é constante. Esses pontos formam um plano ortogonal a $\hat{\mathbf{k}}$ e, por isso, as soluções que dependem apenas de uma única coordenada espacial são chamadas **ondas planas**.

No espaço unidimensional de coordenada ζ ,

$$\nabla\Psi(\zeta, t) = \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi(\zeta, t). \quad (2.15)$$

Então

$$\nabla^2\Psi(\zeta, t) = \nabla \cdot \nabla\Psi(\zeta, t) = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \Psi(\zeta, t). \quad (2.16)$$

Portanto, para soluções do tipo onda plana, a equação (2.14) se reduz a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(\zeta, t) = 0. \quad (2.17)$$

Ainda de acordo com a referência [4], essa equação pode ser reescrita na forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi(\zeta, t) = 0, \quad (2.18)$$

o que sugere a definição das variáveis

$$\zeta_+ = \zeta + ct \quad \text{e} \quad \zeta_- = \zeta - ct. \quad (2.19)$$

Com isso, definindo a função F de forma que $F(\zeta_+, \zeta_-) = \Psi(\zeta, t)$, e observando que

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} F = \left(\frac{\partial \zeta_+}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta_+} + \frac{\partial \zeta_-}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta_-}\right) F = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_+} + \frac{\partial}{\partial \zeta_-}\right) F \quad (2.20)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} F = \left(\frac{\partial \zeta_+}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \zeta_+} + \frac{\partial \zeta_-}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \zeta_-} \right) F = c \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_+} - \frac{\partial}{\partial \zeta_-} \right) F, \quad (2.21)$$

vemos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) F = 2 \frac{\partial}{\partial \zeta_{\pm}} F. \quad (2.22)$$

Conseqüentemente, a equação (2.17) se mostra equivalente a

$$4 \frac{\partial}{\partial \zeta_+} \frac{\partial}{\partial \zeta_-} F(\zeta_+, \zeta_-) = 0. \quad (2.23)$$

A solução geral dessa equação é dada por

$$F(\zeta_+, \zeta_-) = F_+(\zeta_-) + F_-(\zeta_+), \quad (2.24)$$

onde F_+ e F_- são funções arbitrárias. Portanto, a solução geral da equação (2.17) é

$$\Psi(\zeta, t) = \Psi_+(\zeta - ct) + \Psi_-(\zeta + ct) \quad (2.25)$$

com Ψ_+ e Ψ_- funções arbitrárias. Desse modo, para a equação (2.14) a solução geral do tipo onda plana tem a forma

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_+(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - ct) + \Psi_-(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} + ct), \quad (2.26)$$

onde Ψ_+ descreve uma onda se deslocando no sentido de $\hat{\mathbf{k}}$ e Ψ_- , uma onda se deslocando no sentido contrário. Evidentemente, a troca de $\hat{\mathbf{k}}$ por $-\hat{\mathbf{k}}$ em Ψ_+ corresponde a mudar o sentido de propagação desta solução, passando a se comportar, desta forma, como uma solução do tipo Ψ_- . Por isso o estudo é realizado limitando-se às ondas dependentes apenas da variável

$$\xi = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - ct, \quad (2.27)$$

que corresponde à propagação na direção e sentido de $\hat{\mathbf{k}}$.

Para as ondas eletromagnéticas planas no vácuo, propagantes na direção e sentido do vetor $\hat{\mathbf{k}}$, os componentes dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} atendem à condição

de dependência da variável ξ , de modo que os próprios campos são dados por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - ct) \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - ct). \quad (2.28)$$

Esses campos estão ainda submetidos às condições impostas pelas equações de Maxwell no vácuo, que, de acordo com o que é desenvolvido no apêndice A, são

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}(\xi) = 0, \quad (2.29a)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B}(\xi) = 0, \quad (2.29b)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(\xi) = c\mathbf{B}(\xi), \quad (2.29c)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}(\xi) = -\frac{1}{c}\mathbf{E}(\xi). \quad (2.29d)$$

As equações (2.29a) e (2.29b) mostram que os campos elétrico e magnético que formam uma onda eletromagnética plana são perpendiculares à direção de propagação, o que caracteriza o comportamento de onda transversal. As equações equivalentes (2.29c) e (2.29d) mostram que os campos elétrico e magnético de uma onda são perpendiculares entre si e que cada um deles pode ser obtido, a menos de uma constante multiplicativa dada em função de c , girando o outro por um ângulo de $\pi/2$ em torno de $\hat{\mathbf{k}}$; logo os dois campos apresentam a mesma dependência da variável ξ . Observadas essas propriedades, todas as condições apresentadas podem ser sintetizadas em

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t); \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - ct). \quad (2.30)$$

Portanto, qualquer onda eletromagnética plana no vácuo, propagando-se na direção e sentido do vetor $\hat{\mathbf{k}}$, satisfaz às condições gerais (2.30).

Um caso de onda plana particularmente interessante é a chamada **onda harmônica**, que recebe esse nome em razão da dependência da variável ξ ocorrer de modo harmônico simples, ou seja, através de uma função senoidal. Sendo assim, para uma frequência ω de oscilação, a variável espaço-temporal

pode ser reescrita de forma mais conveniente por

$$\xi = \frac{c}{\omega}(k\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (2.31)$$

com

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (2.32)$$

Voltando à equação (2.14), onde se representa genericamente os componentes dos campos elétrico e magnético no vácuo por Ψ , a solução do tipo onda harmônica é

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 \cos(k\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta), \quad (2.33)$$

com Ψ_0 , ω , k e δ constantes. A constante positiva Ψ_0 é a **amplitude** de oscilação; ω é a **frequência** angular, definida em função do período T de oscilação por $\omega = 2\pi/T$; k é o **número de onda** angular, dado em função do comprimento de onda λ por $k = 2\pi/\lambda$ (que está de acordo com a equação (2.32), uma vez que a velocidade da luz é $c = \lambda/T$); δ é a **constante de fase**, ângulo que permite à função Ψ ter valor diferente Ψ_0 na origem $\mathbf{r} = 0$ e no instante $t = 0$. O argumento $k\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta$ da função trigonométrica é denominado **fase da onda**.

Definindo o **vetor de onda** ou **vetor de propagação** pelo produto entre o número de onda e o vetor unitário na direção e sentido da propagação,

$$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}, \quad (2.34)$$

a função (2.33) pode ser reescrita por

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta). \quad (2.35)$$

A relação entre a frequência e o número de onda,

$$\omega = c|\mathbf{k}|, \quad (2.36)$$

é a chamada **relação de dispersão** da onda no vácuo. Por meio dela, o vetor de propagação determina a frequência ω . Como esse vetor informa

ainda a direção e o sentido da propagação, ele determina a onda exceto pela amplitude e constante de fase.

A função (2.35) expressa de modo geral o comportamento de uma onda harmônica propagando-se na direção do vetor \mathbf{k} . Tomando uma base cartesiana ($\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$) em que $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$, tem-se $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kz$. Portanto, os componentes dos campos eletromagnéticos da onda harmônica só dependem da coordenada espacial z , de modo que $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(z\hat{\mathbf{z}}, t) \equiv \Psi(z, t)$ e

$$\Psi(z, t) = \Psi_0 \cos(kz - \omega t + \delta). \quad (2.37)$$

Nesse caso, segue de (2.30) que os campos que formam a onda devem atender às condições

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E}(z, t) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(z, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(z, t). \quad (2.38)$$

Então, em geral,

$$\mathbf{E}(z, t) = E_x(z, t)\hat{\mathbf{x}} + E_y(z, t)\hat{\mathbf{y}} \quad (2.39)$$

e

$$\mathbf{B}(z, t) = -\frac{1}{c}E_y(z, t)\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{c}E_x(z, t)\hat{\mathbf{y}}, \quad (2.40)$$

onde, de acordo com a função genérica (2.37),

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \delta_x) \quad \text{e} \quad E_y(z, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta_y), \quad (2.41)$$

lembrando que E_{0x} , E_{0y} , δ_x e δ_y são as amplitudes e constantes de fase de E_x e E_y .

A escolha de um sistema de coordenadas cartesianas em que $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$ é sempre possível para o estudo de qualquer onda plana. Isto é, não há perda de generalidade nessa escolha que, por motivo de simplicidade de notação, se faz com frequência.

A onda harmônica aqui apresentada é usualmente chamada de **onda plana monocromática**, isso porque a frequência bem definida ω corresponde à identificação de uma cor específica para a luz. Portanto, sempre que houver referência a uma onda plana monocromática, fica subentendido

que se trata de um feixe de luz com cor específica. Obviamente, para que haja percepção de cor é necessário que a frequência pertença ao intervalo visível do espectro eletromagnético. Caso ela esteja fora da região visível, não há percepção de cor alguma, mas, ainda assim, é comum referir-se às ondas nessas condições como luz. A exemplo disso pode-se mencionar a radiação ultra-violeta, que é uma classe de ondas eletromagnéticas com frequências mais altas que as do intervalo visível, mas que recorrentemente é chamada de luz ultra-violeta. Neste trabalho, dada a importância que a percepção visual tem no fenômeno estudado, somente há interesse na região visível, que, como pode ser visto na figura 2.1, corresponde a um intervalo muito estreito do espectro conhecido. Vale ressaltar que tanto o efeito Faraday como outros efeitos magneto-ópticos também ocorrem fora da faixa do visível.

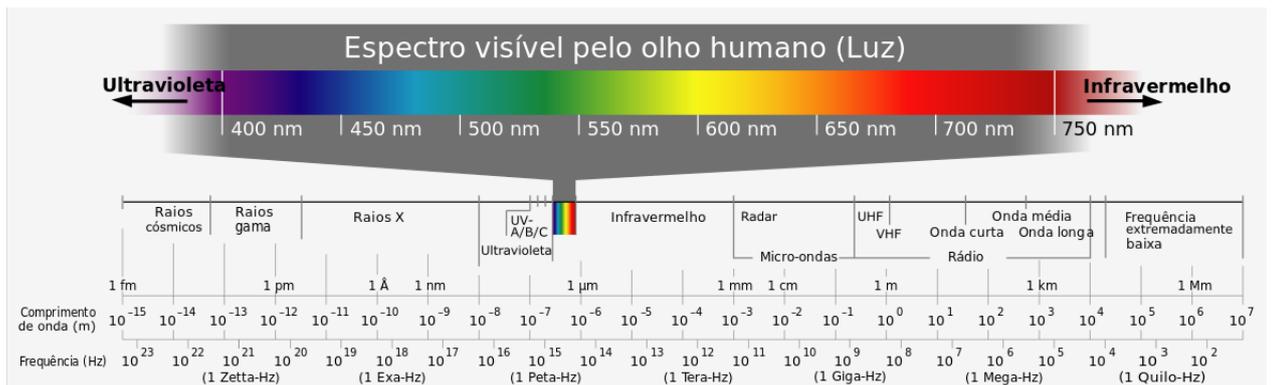


Figura 2.1: Espectro da radiação eletromagnética com destaque para o intervalo visível.

2.3 Polarização de ondas eletromagnéticas

Em uma onda plana monocromática, que se propaga no sentido do vetor unitário \hat{z} da base de um sistema de coordenadas convenientemente adotado, os campos elétrico $\mathbf{E}(z, t)$ e magnético $\mathbf{B}(z, t)$ oscilam perpendicularmente entre si e em relação a \hat{z} . Como $\mathbf{B} = (1/v)\hat{z} \times \mathbf{E}$ (em um meio qualquer), o campo magnético da onda fica bem definido se o campo elétrico for conhe-

cido. Portanto, qualquer informação sobre a onda pode ser obtida a partir de $\mathbf{E}(z, t)$. Por isso, polarização de uma onda eletromagnética é, por convenção, a direção de oscilação do campo elétrico. No caso mais geral de uma onda plana monocromática se propagando em z , esse campo é dado em coordenadas cartesianas por

$$\mathbf{E}(z, t) = E_x(z, t)\hat{\mathbf{x}} + E_y(z, t)\hat{\mathbf{y}}, \quad (2.42)$$

onde

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \delta_x) \quad \text{e} \quad E_y(z, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta_y). \quad (2.43)$$

Os componentes do campo elétrico apresentam as constantes de fase δ_x e δ_y . O valor da diferença de fase $\delta = \delta_y - \delta_x$ caracteriza o comportamento do campo, de modo que a polarização da onda é dada em função de δ (além das amplitudes E_{0x} e E_{0y}). Notemos que uma escolha adequada das origens da posição z e do tempo t permite tornar uma dessas constantes nula. Então, sem perda de generalidade, é possível tomar $\delta_x = 0$ e, dessa forma, os componentes cartesianos do campo elétrico podem ser dados como função da variável $\Phi(z, t) = kz - \omega t$ [5] por

$$E_x(\Phi) = E_{0x} \cos \Phi \quad \text{e} \quad E_y(\Phi) = E_{0y} \cos(\Phi + \delta). \quad (2.44)$$

Fixando o valor de z correspondente a um plano transversal à propagação da onda, a variável Φ torna-se função exclusivamente do tempo e as equações em (2.44) tornam-se equações paramétricas de uma curva traçada pela extremidade do vetor \mathbf{E} no plano de valor fixo z . A equação cartesiana dessa curva mostra de forma mais explícita o modo como o movimento da extremidade do vetor campo elétrico depende da diferença de fase δ , E_{0x} e E_{0y} e, portanto, fornece uma importante informação sobre a polarização da onda eletromagnética. Para obter a equação cartesiana, basta relacionar as variáveis E_x e E_y de modo a eliminar a dependência em Φ , como é feito a seguir com base no livro de Moysés Nussenzveig [5].

De (2.44), vem

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos \Phi \quad \text{e} \quad \frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\Phi + \delta), \quad (2.45)$$

mas

$$\cos(\Phi + \delta) = \cos \Phi \cos \delta - \sin \Phi \sin \delta \quad (2.46)$$

e

$$\sin \Phi = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \Phi}, \quad (2.47)$$

então

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \delta \mp \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2} \sin \delta. \quad (2.48)$$

Segue que

$$\left[\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \delta \right]^2 = \left[\mp \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2} \sin \delta \right]^2, \quad (2.49)$$

isto é,

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_y}{E_{0y}}\frac{E_x}{E_{0x}}\cos\delta + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\cos^2\delta = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right]\sin^2\delta. \quad (2.50)$$

A equação cartesiana para a curva descrita pela extremidade do vetor \mathbf{E} no plano de valor fixo z é, então,

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_y}{E_{0y}}\frac{E_x}{E_{0x}}\cos\delta + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = \sin^2\delta. \quad (2.51)$$

Essa equação apresenta genericamente a forma de uma cônica e, no caso mais geral, representa uma elipse, já que a curva é circunscrita por um retângulo de lados $2E_{0x}$ e $2E_{0y}$, uma vez que $|E_x| \leq E_{0x}$ e $|E_y| \leq E_{0y}$.

Um olhar atento à equação (2.51) mostra que a elipse degenera em segmentos de reta se $\delta \neq n\pi$, onde n é qualquer número inteiro. Se $\delta = n\pi + \pi/2$, o termo negativo da equação se anula e nesse caso o eixo principal da elipse coincide com o eixo x do sistema de coordenadas adotado se $E_{0x} > E_{0y}$; ou

com o eixo y , se $E_{0y} > E_{0x}$.

Denotando por ψ o ângulo formado entre o eixo principal de uma trajetória elíptica qualquer e o eixo x do sistema de coordenadas, como ilustra a figura 2.2, é possível mostrar, conforme se verifica no apêndice B, que

$$\tan 2\psi = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \cos \delta, \quad (2.52)$$

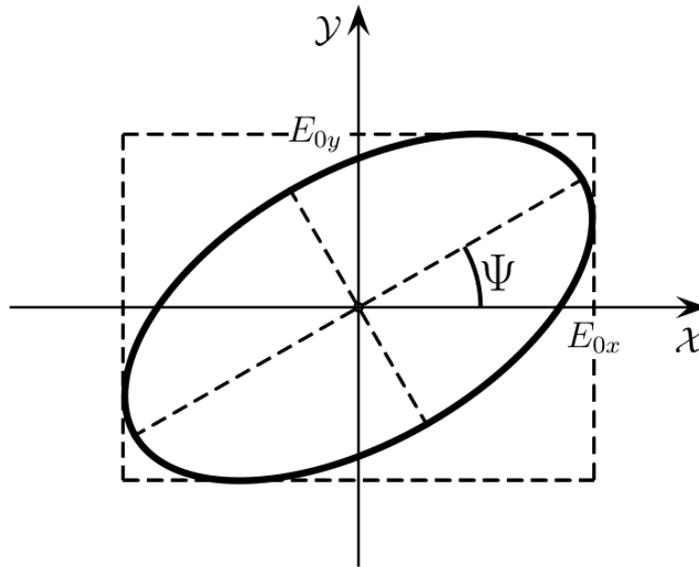


Figura 2.2: Elipse de polarização inscrita em retângulo de lados $2E_{0x}$ e $2E_{0y}$.

desde que $E_{0y} \neq E_{0x}$. Então, para $\delta \neq n\pi + \pi/2$, na medida em que essas duas amplitudes vão tomando valores cada vez mais próximos, o valor absoluto de $\tan 2\psi$ cresce indefinidamente e, portanto, diverge no limite em que se estabelece a igualdade. Desse modo, sendo $E_{0y} = E_{0x}$ (e $\delta \neq n\pi + \pi/2$), se tem $|2\psi| = 90^\circ$, isto é, para o ângulo de inclinação do eixo principal da trajetória elíptica vale $|\psi| = 45^\circ$.

O ângulo ψ será negativo sempre que o eixo principal atravessar o segundo e o quarto quadrantes do plano formado pelos eixos x e y . O sinal desse ângulo depende dos valores da diferença de fase δ e da diferença no

denominador da expressão (2.52).

A elipse propriamente dita não é a única trajetória possível de ser traçada pela extremidade do vetor \mathbf{E} : para valores específicos da diferença de fase δ , a equação (2.51) pode representar uma reta, como já dito, ou uma circunferência. No caso da circunferência é necessário ainda que se verifique a igualdade entre E_{0y} e E_{0x} . A seguir, ainda com base na referência [5], serão discutidos esses dois casos; a de polarização linear, que ocorre quando a trajetória traçada pela extremidade do campo elétrico é um segmento de reta, e a de polarização circular, em que a trajetória traçada pelo campo é uma circunferência.

Polarização linear

A equação (2.51) se reduz à equação de uma reta quando $\delta = n\pi$, onde n é qualquer número inteiro. Para n par, (2.51) implica

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_y}{E_{0y}}\frac{E_x}{E_{0x}} + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = 0, \quad (2.53)$$

isto é,

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = 0, \quad (2.54)$$

ou

$$E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x. \quad (2.55)$$

Esta equação corresponde a um segmento de reta com inclinação positiva dada na forma paramétrica (2.43) por

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \quad \text{e} \quad E_y(z, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t). \quad (2.56)$$

Acrescentar $\delta = n\pi$ à fase de $E_y(z, t)$, com n par, não altera a dependência do campo em relação às variáveis z e t , de modo que a segunda equação em (2.56) está bem definida para qualquer valor par de n . Para n ímpar, a

equação (2.51) implica

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + 2\frac{E_y}{E_{0y}}\frac{E_x}{E_{0x}} + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = 0, \quad (2.57)$$

isto é,

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}} + \frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = 0, \quad (2.58)$$

ou

$$E_y = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x. \quad (2.59)$$

Esta equação corresponde a um segmento de reta com inclinação negativa onde

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \quad \text{e} \quad E_y(z, t) = -E_{0y} \cos(kz - \omega t). \quad (2.60)$$

O sinal negativo na segunda equação em (2.60) vem da constante de fase δ . Como $E_y(z, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta)$ onde $\delta = n\pi$, então, para qualquer n ímpar, $E_y(z, t) = -E_{0y} \cos(kz - \omega t)$.

Os campos elétricos em ondas linearmente polarizadas propagando-se em z são, então, dados por

$$\mathbf{E}(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{x}} \pm E_{0y} \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{y}}. \quad (2.61)$$

O sinal positivo (negativo) caracteriza a polarização em que a oscilação do campo ocorre ao longo de uma linha reta com inclinação positiva (negativa). Segue de (2.61) que

$$\mathbf{E}(z, t) = (E_{0x} \hat{\mathbf{x}} \pm E_{0y} \hat{\mathbf{y}}) \cos(kz - \omega t), \quad (2.62)$$

ou, de forma mais compacta,

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{E}}_{\pm}, \quad (2.63)$$

onde

$$\hat{\mathbf{E}}_{\pm} = \frac{E_{0x}}{E_0} \hat{\mathbf{x}} \pm \frac{E_{0y}}{E_0} \hat{\mathbf{y}} \quad (2.64)$$

são vetores unitários que definem as direções possíveis para a oscilação do campo elétrico cuja amplitude é E_0 ($E_0^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2$). Se $E_{0y} = 0$, os unitários $\hat{\mathbf{E}}_{\pm}$ se reduzem a $\hat{\mathbf{x}}$ e o campo da onda linearmente polarizada fica $\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{x}}$.

Polarização circular

Quando a diferença de fase entre os componentes cartesianos do campo elétrico da onda plana é $\delta = n\pi + \pi/2$, com n inteiro, e suas amplitudes são iguais ($E_{0y} = E_{0x} = E_0$), a equação (2.51) se reduz à equação de uma circunferência, isto é, a

$$\left(\frac{E_y}{E_0}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_0}\right)^2 = 1. \quad (2.65)$$

Essa equação informa a trajetória no plano dado por um valor fixo de z , mas não informa em qual sentido a extremidade do vetor campo elétrico \mathbf{E} está se movendo periodicamente. Há duas possibilidades: o vetor pode estar girando no sentido horário ou no sentido anti-horário para um observador que recebe a onda de frente para a sua propagação. Esses dois sentidos caracterizam, respectivamente, a **polarização circular direita** e a **polarização circular esquerda**; elas também são chamadas, respectivamente, **polarização circular dextrógira** e **polarização circular levógira**. Para se ter um entendimento do comportamento do campo elétrico a fim de se conhecer a polarização da onda é necessário avaliar a forma como os componentes E_x e E_y variam com o tempo t , levando em conta que z é mantido constante. Os componentes cartesianos do vetor \mathbf{E} são

$$E_x(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \quad \text{e} \quad E_y(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t + (n\pi + \pi/2)). \quad (2.66)$$

Como n pode assumir apenas valores inteiros, esses componentes podem ser

reescritos por

$$E_x(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \quad \text{e} \quad E_y(z, t) = \pm E_0 \sin(kz - \omega t). \quad (2.67)$$

Os sinais positivo e negativo na segunda equação ocorrem quando n assume, nesta mesma ordem, valores ímpares e pares. Esses sinais indicam o sentido da rotação do vetor e as equações em (2.67) são as equações paramétricas da trajetória traçada pela extremidade dele. Uma simples análise das expressões para $E_x(z, t)$ e $E_y(z, t)$ mostra que o sinal positivo corresponde à polarização direita e o sinal negativo corresponde à polarização esquerda, basta para isso tomar $z = 0$, por exemplo, e observar a consequência do aumento do parâmetro t a partir do instante zero.

Os campos elétricos em ondas circularmente polarizadas propagando-se em z são dados, então, por

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{x}} \pm E_0 \sin(kz - \omega t) \hat{\mathbf{y}}. \quad (2.68)$$

O sinal positivo (negativo) gera a polarização direita (esquerda), aquela em que a extremidade do campo realiza um movimento circular uniforme no sentido horário (anti-horário) para o observador que vê a onda aproximar-se, conforme mostra a figura 2.3.

Por motivos de conveniência, usa-se com frequência a notação complexa como forma de representação do vetor campo elétrico. Nessa representação, os componentes do campo são substituídos por quantidades complexas cujas partes reais são os componentes originais. Dessa forma, na notação complexa, as equações em (2.68) equivalem a

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} \mp i E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \quad (2.69)$$

ou ainda,

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} (\hat{\mathbf{x}} \mp i \hat{\mathbf{y}}). \quad (2.70)$$

Portanto, as equações em (2.70) representam campos com amplitudes iguais a

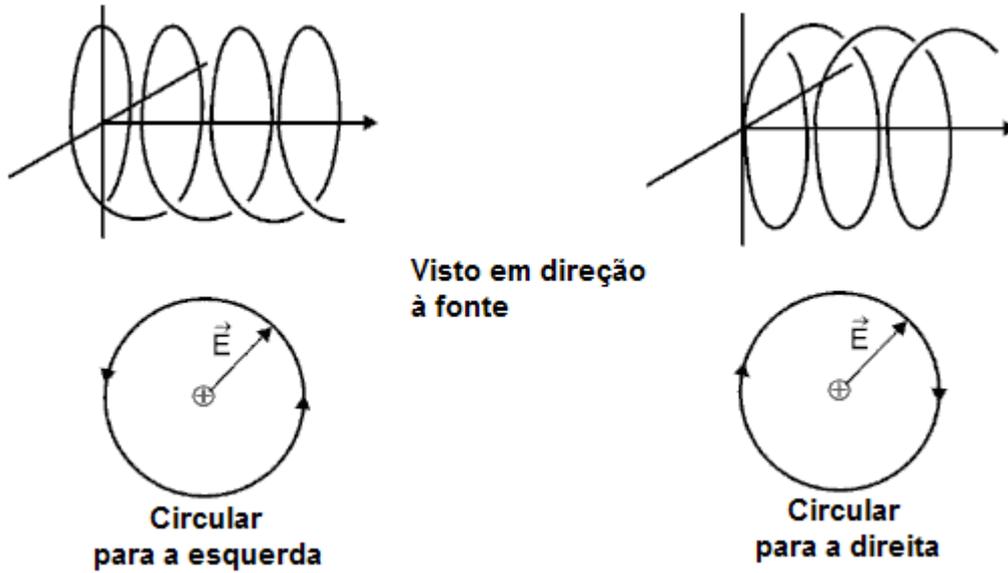


Figura 2.3: Polarização circular esquerda e polarização circular direita.

E_0 de ondas circularmente polarizadas onde, agora, o sinal negativo (positivo) corresponde à polarização direita (esquerda). Sendo assim, os vetores

$$\hat{\mathbf{e}}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{x}} + i \hat{\mathbf{y}}) \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{e}}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{x}} - i \hat{\mathbf{y}}) \quad (2.71)$$

formam uma base ortonormal de polarizações circulares de modo que

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_+ \quad \text{e} \quad \mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_- \quad (2.72)$$

representam campos com amplitudes iguais a $E_0/\sqrt{2}$ nas polarizações esquerda e direita, respectivamente.

O vetor campo elétrico de uma onda com polarização arbitrária pode ser dado como a superposição dos campos elétricos de ondas linearmente polarizadas nas direções dos eixos coordenados da base cartesiana. Da mesma forma, esse vetor pode ser apresentado na base de polarização circular como superposição dos campos elétricos de ondas polarizadas à esquerda e à direita. Para verificar essa propriedade é instrutivo usar as expressões gerais (2.43).

A expressão geral do campo elétrico é

$$\mathbf{E} = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \delta_x) \hat{\mathbf{x}} + E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta_y) \hat{\mathbf{y}} \quad (2.73)$$

ou, em notação complexa,

$$\mathbf{E} = (E_{0x} e^{i\delta_x} \hat{\mathbf{x}} + E_{0y} e^{i\delta_y} \hat{\mathbf{y}}) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (2.74)$$

Para ondas circularmente polarizadas escrevemos $\delta_1 =: \delta$, $\delta_2 = \delta + (\pi/2) + n\pi$ e $E_{0x} = E_{0y} =: E_0$. Nesse caso, (2.74) para n par (polarização esquerda) e n ímpar (polarização direita), reduz-se às respectivas expressões

$$\mathbf{E}_{\pm} = \sqrt{2} E_0^{\pm} e^{i\delta_{\pm}} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_{\pm} \quad (2.75)$$

onde E_0^{\pm} e δ_{\pm} são números reais arbitrários, e foram usados os vetores da base circular (2.71). Expressando os unitários cartesianos nessa base,

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{e}}_+ + \hat{\mathbf{e}}_-) \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{y}} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{e}}_+ - \hat{\mathbf{e}}_-), \quad (2.76)$$

e substituindo essas expressões no campo (2.74) de polarização arbitrária, obtemos

$$\mathbf{E} = \left[\left(\frac{E_{0x} e^{i\delta_x}}{\sqrt{2}} - i \frac{E_{0y} e^{i\delta_y}}{\sqrt{2}} \right) \hat{\mathbf{e}}_+ + \left(\frac{E_{0x} e^{i\delta_x}}{\sqrt{2}} + i \frac{E_{0y} e^{i\delta_y}}{\sqrt{2}} \right) \hat{\mathbf{e}}_- \right] e^{i(kz - \omega t)}. \quad (2.77)$$

Nessa expressão identificamos a superposição de uma polarização circular esquerda com uma polarização circular direita, conforme as fórmulas (2.75). Ajustando E_0^{\pm} e δ_{\pm} nessas fórmulas, obtemos

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-, \quad (2.78)$$

que é o resultado procurado.

A expressão (2.77) pode ser escrita de forma mais compacta por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x - iE_y) \hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x + iE_y) \hat{\mathbf{e}}_-, \quad (2.79)$$

onde

$$E_x = E_{0x} e^{i(kz - \omega t + \delta_x)} \quad \text{e} \quad E_y = E_{0y} e^{i(kz - \omega t + \delta_y)} \quad (2.80)$$

são os componentes do vetor campo elétrico em notação complexa. Como exemplo de aplicação da fórmula (2.79), dois casos são apresentados a seguir:

1. Para uma onda linearmente polarizada na direção do vetor unitário $\hat{\mathbf{x}}$ e com $\delta_x = 0$, o campo elétrico é $\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{x}}$. Em notação complexa, $\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}$. Substituindo $E_x = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$ e $E_y = 0$ em (2.79), obtemos

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_- . \quad (2.81)$$

Ou seja, o campo dessa onda pode ser escrito como uma combinação linear a coeficientes $1/\sqrt{2}$ dos campos com amplitudes $E_0/\sqrt{2}$ de ondas circularmente polarizadas à esquerda e à direita.

2. Para ondas com polarização linear em geral (com $\delta_x = \delta_y = 0$), os campos elétricos são dados pelas equações em (2.61). Em notação complexa esses campos são dados por

$$\mathbf{E}(z, t) = E_{0x} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} \pm E_{0y} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}} , \quad (2.82)$$

onde os sinais correspondem às inclinações positiva e negativa em relação ao sistema de coordenadas. Passando esse campo para a base de polarização circular conforme a expressão (2.79), resulta

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(kz - \omega t)} (E_{0x} \mp i E_{0y}) \hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(kz - \omega t)} (E_{0x} \pm i E_{0y}) \hat{\mathbf{e}}_- . \quad (2.83)$$

Se θ_0 é o menor ângulo formado entre o campo \mathbf{E} e a direção do vetor unitário $\hat{\mathbf{x}}$ e E_0 é a amplitude do campo, então $E_{0x}/E_0 = \cos \theta_0$ e $E_{0y}/E_0 = \sin \theta_0$. Segue que

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{\cos \theta_0 \mp i \sin \theta_0}{\sqrt{2}} E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{\cos \theta_0 \pm i \sin \theta_0}{\sqrt{2}} E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_- .$$

Essa expressão generaliza o resultado anteriormente obtido para a onda com polarização linear na direção de $\hat{\mathbf{x}}$, caso em que $\theta_0 = 0$. No entanto, é possível ainda simplificar essa expressão geral. Como $(\cos \theta_0 \mp i \sin \theta_0) = e^{\mp i \theta_0}$ e $(\cos \theta_0 \pm i \sin \theta_0) = e^{\pm i \theta_0}$, então

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{e^{\mp i \theta_0}}{\sqrt{2}} E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{e^{\pm i \theta_0}}{\sqrt{2}} E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_-, \quad (2.84)$$

isto é,

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{i(kz - \omega t \mp \theta_0)} \hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{i(kz - \omega t \pm \theta_0)} \hat{\mathbf{e}}_-. \quad (2.85)$$

Portanto, o campo elétrico com amplitude E_0 de qualquer onda linearmente polarizada pode ser dado como combinação linear a coeficientes $1/\sqrt{2}$ dos campos com amplitudes $E_0/\sqrt{2}$ de ondas polarizadas à esquerda e à direita. A especificação de cada polarização linear está na constante de fase dos componentes da base circular, cujo módulo é o ângulo θ_0 ($0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$) formado entre o vetor campo elétrico linear e a direção do unitário $\hat{\mathbf{x}}$.

Esses dois casos são usados no estudo do efeito Faraday.

2.4 Métodos de polarização

Já que a polarização das ondas eletromagnéticas são importantes em nosso estudo do efeito Faraday, vamos discutir fenomenologicamente alguns métodos de polarização, isto é, de obter ondas polarizadas.

As ondas eletromagnéticas produzidas por um grande número de fontes são do tipo não polarizadas. Fontes típicas desta natureza são as constituídas por um número grande de átomos cujos movimentos não apresentam correlação. Por se moverem aleatoriamente, esses átomos emitem ondas com planos de polarização distribuídos também aleatoriamente em torno da direção de propagação. O conjunto dessas emissões não apresenta, portanto, polarização definida. O Sol ou uma lâmpada incandescente são exemplos de fontes que produzem ondas eletromagnéticas com essa característica. Existem métodos

que permitem transformar essas ondas não polarizadas em ondas polarizadas e quatro deles são discutidos a seguir, tomando por base a leitura dos livros do Halliday [6] e do Tipler [7].

Polarização por absorção

Uma película comercialmente conhecida como polaroide é o instrumento frequentemente usado para polarizar ondas eletromagnéticas por absorção. O material que dá origem ao polaroide, também conhecido como filtro polarizador, é constituído por moléculas de hidrocarbonetos que se dispõem em cadeia e que são alinhadas quando o material é esticado no processo de fabricação de uma película. As estruturas paralelas formadas pelas moléculas alinhadas se tornam condutoras quando o filtro é mergulhado em solução contendo iodo. Desse modo, ao incidir sobre a película, uma onda eletromagnética não polarizada tem parte de sua intensidade absorvida pelo material. Isso ocorre porque a projeção do campo elétrico da onda paralelo ao alinhamento das moléculas produz corrente elétrica nessa estrutura, de modo que a porção de intensidade correspondente a essa projeção é perdida, restando na onda apenas a projeção do campo elétrico perpendicular à estrutura. Por essa razão, a direção perpendicular ao alinhamento das moléculas é chamado eixo de transmissão do filtro polarizador.

Considerando a onda que se torna linearmente polarizada ao atravessar um filtro polarizador, quando ela encontra um segundo filtro cujo eixo de transmissão está desviado de um ângulo θ em relação ao eixo de transmissão do primeiro, apenas a projeção do campo elétrico paralelo ao eixo do segundo filtro o atravessará. Portanto, se a amplitude da onda que deixa o primeiro polarizador é E_0 , ao deixar o segundo a amplitude da onda passa a ser $E_0 \cos \theta$, como mostra a Figura 2.4. Como a intensidade de uma onda eletromagnética é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico, então a intensidade transmitida pelo segundo polarizador é

$$I = I_0 \cos^2 \theta, \quad (2.86)$$

onde I_0 é a intensidade transmitida pelo primeiro. Essa equação é a conhecida Lei de Malus, descoberta por Etienne Louis Malus (1775 - 1812) em 1809. Naturalmente, em seus trabalhos experimentais, Malus usou técnicas de polarização diferentes das descritas aqui, uma vez que o polaroide foi inventado por E. H. Land em 1938.

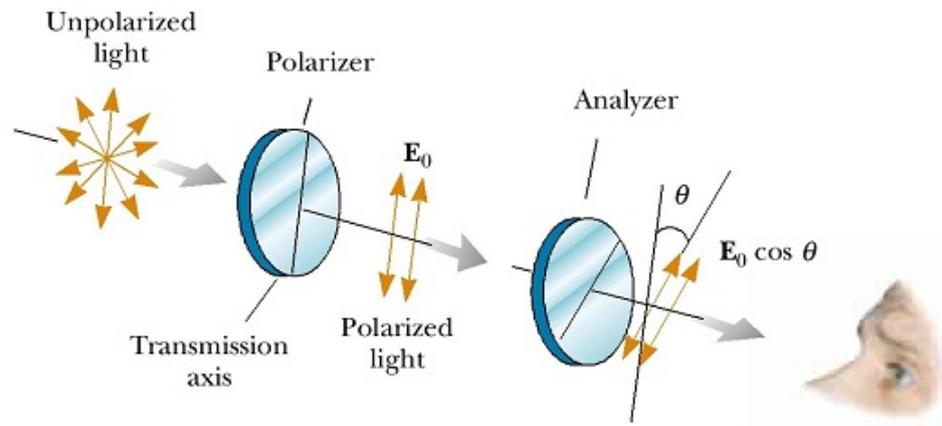


Figura 2.4: Luz inicialmente não polarizada sofrendo duas polarizações por absorção sucessivas.

Em uma onda não polarizada, como a luz emitida por uma lâmpada incandescente, há campos elétricos oscilantes homogeneamente distribuídos em todas as direções ortogonais à direção de propagação. Cada um desses campos apresenta um valor particular para o ângulo θ de inclinação em relação ao eixo de transmissão de um polarizador. Como o valor médio de $\cos^2 \theta$ no intervalo de 0 a 2π radianos é $1/2$, então, considerando um filtro polarizador ideal, apenas 50% da intensidade da onda incidente será transmitida. Na prática, todo polarizador absorve ainda uma pequena parte da energia correspondente à projeção transmitida do campo elétrico, de modo que a taxa de transmissão de um polarizador real é cerca de 40% no caso da onda incidente não polarizada.

Polarização por reflexão

Quando um feixe de luz incide sobre a superfície de separação entre dois meios (ar e vidro, por exemplo), parte da intensidade dessa luz sofre refração ao ser transmitida entre os meios e parte da intensidade é refletida, tornando a se propagar no meio de incidência. Sabe-se que os vetores de onda (aqueles que definem as direções das propagações) dos feixes incidente, refratado e refletido estão contidos em um mesmo plano, chamado plano de incidência. Sabe-se ainda que o feixe incidente e o refletido formam um mesmo ângulo com a reta normal à superfície. Se a luz incidente for uma onda do tipo não polarizada, existe um valor particular para o ângulo de incidência em que o feixe de luz refletido terá polarização linear ortogonal ao plano de incidência. Esse ângulo é chamado **ângulo de Brewster** ou de polarização. Portanto, o fenômeno ocorre quando a luz incidente toca a superfície de separação dos meios formando este ângulo com a reta normal, de modo que as projeções dos campos elétricos paralelas ao plano de incidência apenas refratam no segundo meio e as projeções perpendiculares além de refratarem no segundo meio também são refletidas no primeiro; como ilustra a figura 2.5. A descoberta da polarização por reflexão foi realizada por Malus em 1809.

Sendo θ_B o ângulo de Brewster e θ_r o ângulo de refração formado pelo feixe refratado no segundo meio e a reta normal à superfície de separação dos meios, descobriu-se por experimentação que

$$\theta_B + \theta_r = 90^\circ, \quad (2.87)$$

isto é, os feixes refletido e refratado são perpendiculares entre si. Da lei de Snell,

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_r, \quad (2.88)$$

onde n_1 e n_2 são os índices de refração dos meios 1 e 2, vem

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin(90^\circ - \theta_B), \quad (2.89)$$

isto é,

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \cos \theta_B \quad (2.90)$$

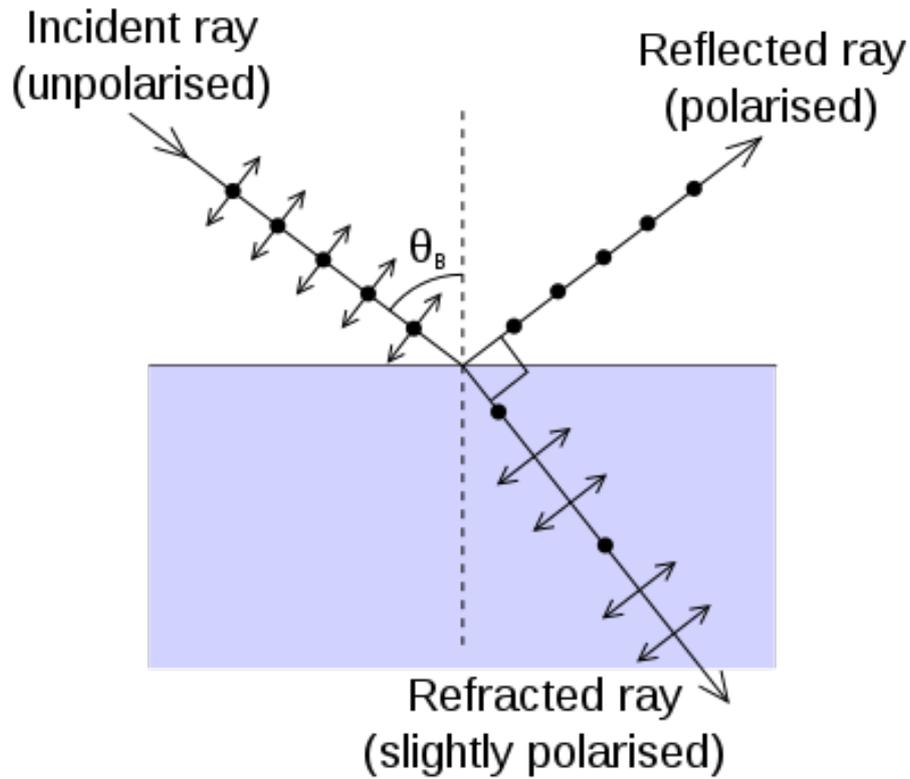


Figura 2.5: Polarização por reflexão do raio de luz que incide na superfície de separação entre dois meios formando o ângulo de Brewster com a reta normal. O raio refletido tem polarização ortogonal ao plano de incidência e o raio refratado é parcialmente polarizado.

ou

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (2.91)$$

Essa equação foi deduzida empiricamente em 1812 por Sir David Brewster (1781 - 1868) e por isso é conhecida como lei de Brewster. A partir das equações de Maxwell é possível provar de forma rigorosa essa lei. Se na equação (2.91) a luz incidente toca a superfície de separação do ar ($n_1 = 1$) com um meio cujo índice de refração é n , ela toma a forma mais simples

$$\tan \theta_B = n. \quad (2.92)$$

A tangente do ângulo de Brewster é o índice de refração do segundo meio nesse caso.

Polarização por espalhamento

O fenômeno de reemissão da radiação absorvida por moléculas diluídas em um meio fluido é conhecido como espalhamento. A polarização por espalhamento ocorre em virtude do comportamento de cada molécula no processo de absorção e reemissão ser tipicamente o mesmo apresentado por um dipolo elétrico oscilante, que emite ondas com maior intensidade perpendicularmente à direção de oscilação e com intensidade nula nessa mesma direção de oscilação. Com isso, quando uma onda não polarizada propagando-se numa direção z interage com as moléculas do meio, estas se movem em planos perpendiculares a z de modo que esses movimentos podem ser tratadas como superposições de oscilações lineares ao longo de eixos em coordenadas cartesianas x e y . Como as moléculas não emitem ondas na mesma direção em que oscilam, então as ondas espalhadas que se propagam em x são originárias das oscilações em y apenas, sendo, portanto, polarizadas nesta direção. De forma recíproca, as ondas espalhadas que se propagam em y são originárias das oscilações em x , e são portanto polarizadas nesta direção. De modo geral, se observa que as ondas espalhadas em direções perpendiculares à original de propagação são linearmente polarizadas (e com a direção de polarização contida no plano ortogonal à direção original). Logicamente, as ondas espalhadas pelas moléculas na direção z , a original da propagação, permanecem não polarizadas por serem originárias de oscilações nas duas direções perpendiculares x e y . Aquelas ondas espalhadas em direções arbitrárias, diferentes de z ou de uma combinação em x e y , são parcialmente polarizadas e apresentam caráter de polarização tão mais intenso quanto menor for o ângulo dessa direção de espalhamento em relação ao plano ortogonal à direção original de propagação. A Figura 2.6 representa esquematicamente o comportamento da luz espalhada por uma molécula.

Uma forma de observar o efeito de polarização por espalhamento é fazendo um feixe de luz não polarizado, como o emitido por uma lanterna,

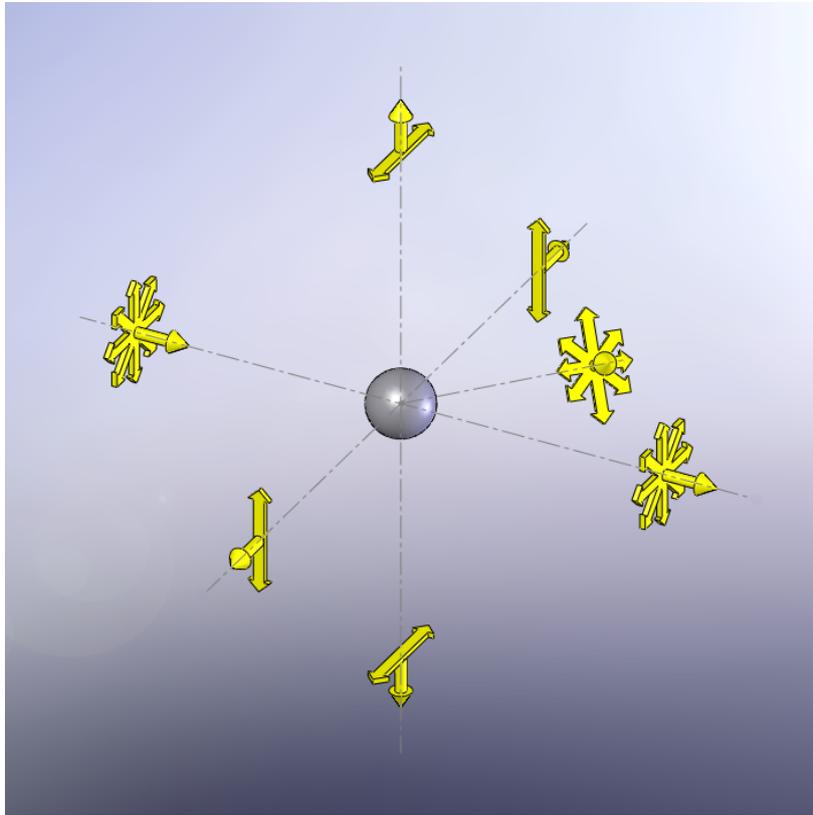


Figura 2.6: A luz inicialmente não polarizada sofre espalhamento ao interagir com a molécula representada pela esfera. Os raios espalhados perpendicularmente à direção do raio incidente são linearmente polarizados.

atravessar um recipiente com água e um pouco de leite em pó. As partículas de leite espalham a luz em todas as direções da forma discutida anteriormente e, com isso, é possível verificar que os feixes espalhados em algumas direções são linearmente polarizados. Esse efeito de polarização por espalhamento pode também ser observado na atmosfera: a luz proveniente do sol que atinge a superfície terra é parcialmente polarizada, o que se pode verificar com o auxílio de um filtro polarizador. As moléculas do ar presentes na atmosfera espalham a luz de tal modo que ocorre o fenômeno.

Polarização por birrefringência

Em muitos materiais, a velocidade de propagação da luz e, portanto, o índice de refração, não dependem da direção de propagação e nem do estado de polarização. Esses materiais são chamados opticamente isotrópicos. No entanto, há outros materiais mais complexos que são opticamente anisotrópicos, de tal modo que o comportamento da luz no interior de um desses materiais é muito sensível ao estado de polarização e à direção de propagação. Cristais com estruturas moleculares não cúbicas, como o cristal de calcita ($CaCO_3$), e alguns plásticos tensionados, como o celofane, são exemplos de materiais opticamente anisotrópicos.

O fenômeno da birrefringência, ou dupla refração, é observado quando um pedaço de calcita é colocado sobre uma imagem e, então, vê-se através do cristal a imagem duplicada, como mostra a figura 2.7.



Figura 2.7: Formação de imagens duplicadas através de cristais de calcita.

O que ocorre é que quando uma luz não polarizada incide sobre a superfície do material opticamente anisotrópico, parte dela realiza o fenômeno de refração usual de acordo com a lei de Snell, mas a outra parte se comporta de forma anômala, tomando uma outra direção de propagação que nem sequer precisa estar contida no plano de incidência, não obedecendo, portanto, à lei de Snell. Esses dois feixes de luz são chamados respectivamente de raio ordinário e raio extraordinário. Para o raio ordinário, o meio se comporta como se fosse constituído por um material isotrópico, isto é, a velocidade deste feixe não depende da direção de propagação, já para o raio extraordinário, a velocidade varia com a direção de propagação, podendo ter o mesmo valor

da velocidade do raio ordinário no caso em que a sua propagação ocorre ao longo do chamado **eixo óptico** do meio. Os raios ordinário e extraordinário são formados por projeções perpendiculares dos campos elétricos que compõem a luz não polarizada incidente sobre o material, ou seja, esses raios são linearmente polarizados em direções perpendiculares entre si, como ilustra a Figura 2.8. Isso se verifica facilmente com o uso de um filtro polarizador posto em cima da calcita sobre uma figura. Dependendo da posição relativa entre o filtro e a calcita, só uma ou outra imagem será vista através dos dois objetos. Esse fenômeno de formação dupla de imagens ocorre quase sempre, mas vale advertir que quando a direção de propagação do raio extraordinário é o próprio eixo óptico do cristal, ele não se separa do raio ordinário e, nesse caso muito particular, nada de incomum acontece com a luz que se propaga no interior do material.

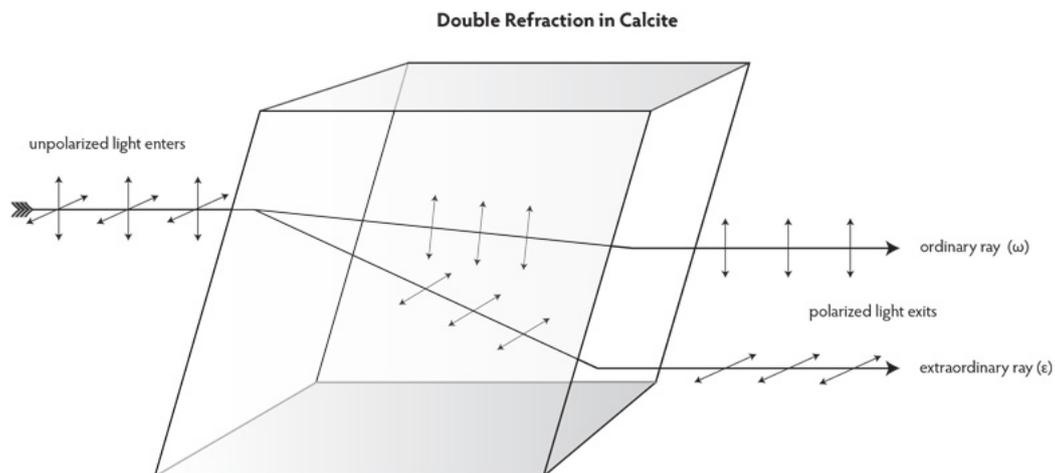


Figura 2.8: Dupla refração de luz não polarizada em cristal de calcita. os raios que emergem do material são linearmente polarizados em direções perpendiculares.

Portanto, quando um feixe de luz não polarizado incide sobre a superfície de um cristal de calcita, em geral dois feixes deixam o material com polarizações lineares perpendiculares entre si. Dessa forma, com auxílio de um corpo opaco, pode-se bloquear o feixe com polarização indesejada e com isso se obtém o feixe com a polarização linear que se deseja.

Um **polarizador** é um artefato que filtra ondas eletromagnéticas, deixando passar as que têm uma polarização específica e bloqueando as que têm as demais polarizações. Neste trabalho, estamos interessados em polarizadores que deixam passar uma polarização linear específica, chamados **polarizadores lineares**. A direção no artefato em que é emitida a luz polarizada é chamada **eixo de transmissão** do polarizador. A luz polarizada transmitida por um polarizador pode incidir sobre outro polarizador, que deixa passar uma parte da luz polarizada incidente de acordo com a lei de Malus. Esse segundo polarizador pode ser chamado **analisador**.

2.5 Equações de Maxwell na matéria

As equações de Maxwell em (2.1) são completas, de modo que possuem validade geral. No entanto, quando avaliadas no interior de meios materiais susceptíveis às polarizações elétrica e magnética, se torna conveniente reescrevê-las de outra forma. Nos materiais polarizados, formam-se acúmulos de cargas e correntes ligadas à estrutura, estas se juntam às eventuais cargas e correntes livres ali presentes e formam as densidades totais ρ e \mathbf{J} das equações em (2.1). Mostra-se útil escrever essas equações apenas em termos das densidades de cargas e correntes livres, que são diretamente controláveis, e deixar implícita a dependência das densidades de cargas e correntes ligadas. Para isso, uma avaliação do comportamento da matéria sob ação de campos eletromagnéticos se faz necessária.

Nos materiais dielétricos, que naturalmente não possuem portadores de cargas elétricas livres como os condutores, a aplicação de um campo elétrico produz um deslocamento microscópico nas partículas carregadas que formam os átomos ou moléculas. Nesse processo, os portadores de cargas negativas e positivas se afastam de suas posições originais movendo-se em sentidos opostos de acordo com a orientação do campo aplicado. Com isso, são gerados os dipolos elétricos e o meio é dito polarizado.

Suponhamos que em uma pequena região do espaço no entorno de um ponto do meio dielétrico polarizado há N dipolos elétricos (moléculas) por

unidade de volume. Seja \mathbf{p} o valor médio do vetor momento de dipolo por molécula nessa região; então

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p}, \quad (2.93)$$

onde \mathbf{P} é chamado vetor polarização elétrica e fornece o momento de dipolo por unidade de volume do material na região que contém o ponto mencionado. A partir desse vetor se obtém as densidades de carga e corrente ligadas, como é mostrado no decorrer do texto com base na leitura da referência [8].

Ao aplicar um campo elétrico sobre um material dielétrico, tornando-o polarizado, a carga positiva $+q$ de uma molécula do material passa a ocupar a extremidade de um vetor \mathbf{s} enquanto a carga negativa da molécula passa a ocupar a origem do mesmo vetor, formando assim um dipolo. No momento em que o campo é aplicado, há o deslocamento das cargas nas moléculas para produzir o efeito de polarização. Com isso, no interior do dielétrico, n_+ cargas positivas atravessam um elemento de área $d\mathbf{A}$ no sentido positivo de \mathbf{s} e n_- cargas negativas atravessam no sentido contrário, como ilustra a Figura 2.9. A carga líquida que atravessa o elemento de área no sentido do vetor \mathbf{s} é, então,

$$dq_p = (n_+ + n_-)q. \quad (2.94)$$

Mas $(n_+ + n_-)$ é o número de dipolos na região da Figura 2.9, cujo volume é $\mathbf{s} \cdot d\mathbf{A}$. Portanto, como N é o número de dipolos por unidade de volume,

$$dq_p = N\mathbf{s} \cdot d\mathbf{A} q, \quad (2.95)$$

onde qs é por definição o momento de dipolo \mathbf{p} . Com isso, segue que

$$dq_p = N\mathbf{p} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.96)$$

ou

$$dq_p = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.97)$$

onde \mathbf{P} é o vetor **polarização** elétrica.

Tomando $d\mathbf{A}$ na superfície $\partial\mathcal{R}$ de uma região \mathcal{R} no material dielétrico, a

Do teorema de Gauss, segue que

$$\int_{\mathcal{R}} \rho_p dv = - \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{P} dv. \quad (2.101)$$

Como a região \mathcal{R} é arbitrária, então a densidade volumar de cargas de polarização é finalmente dada por

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (2.102)$$

Quando o campo elétrico aplicado sobre o dielétrico é dependente do tempo, o efeito de polarização também apresenta dependência temporal, de modo que além da densidade ρ_p , o movimento intermitente das cargas ligadas dentro do material dá origem a uma corrente de polarização. Então, através de uma superfície fixa \mathcal{A} no interior do material, a corrente que se estabelece é

$$i_p = \frac{dq_p}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.103)$$

isto é,

$$i_p = \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}. \quad (2.104)$$

Portanto, a corrente de polarização que atravessa a superfície \mathcal{A} é dada por

$$i_p = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_p \cdot d\mathbf{A}, \quad (2.105)$$

onde

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (2.106)$$

é a densidade de corrente de polarização.

Verifica-se então que, em um ponto qualquer do dielétrico, e sendo \mathbf{P} função do tempo, o movimento intermitente das cargas ligadas resulta no surgimento da chamada densidade de corrente de polarização, que por sua vez também é, em geral, uma função da posição e do tempo. Vale observar ainda que os resultados obtidos para ρ_p e \mathbf{J}_p estão inteiramente de acordo com a lei de

conservação da carga elétrica, cuja expressão matemática é

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_p + \nabla \cdot \mathbf{J}_p = 0. \quad (2.107)$$

Supondo o material susceptível também à polarização magnética, ao aplicar um campo magnético sobre ele, formam-se nas moléculas os momentos de dipolos magnéticos. Se em uma pequena região do espaço nesse material há N moléculas por unidade de volume e o vetor momento de dipolo magnético médio é \mathbf{m} , então

$$\mathbf{M} = N\mathbf{m}, \quad (2.108)$$

chamado vetor polarização magnética ou vetor **magnetização**, fornece o momento de dipolo por unidade de volume na região. Esse vetor magnetização dá origem a uma densidade de corrente de magnetização dada por

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (2.109)$$

Usando os resultados obtidos para as densidades de carga e corrente de polarização na lei de Gauss,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

onde ρ é a densidade total de carga, isto é, $\rho = \rho_l + \rho_p$, sendo ρ_l a densidade de cargas livres e ρ_p a densidade de cargas de polarização, vem

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_l - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (2.110)$$

ou

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_l. \quad (2.111)$$

Definindo o campo $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_l. \quad (2.112)$$

Esta é, portanto, a expressão da lei de Gauss no interior de um material

susceptível à polarização elétrica.

Na lei de Ampère-Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E},$$

\mathbf{J} é a densidade de corrente total, isto é, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_m + \mathbf{J}_p$, onde \mathbf{J}_l é a densidade de corrente livre, \mathbf{J}_m , a densidade de corrente de magnetização e \mathbf{J}_p , a densidade de corrente de polarização. Desse modo,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_l + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad (2.113)$$

ou

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_l + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}). \quad (2.114)$$

Definindo o campo $\mathbf{H} = (1/\mu_0)\mathbf{B} - \mathbf{M}$, vem

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_l + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}. \quad (2.115)$$

Esta é, portanto, a lei de Ampère-Maxwell em um material susceptível às polarizações elétrica e magnética.

A lei de Gauss para o magnetismo,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

e a lei de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B},$$

não são modificadas quando tratadas no interior de materiais sujeitos às polarizações elétrica e magnética. Com isso, o conjunto das quatro equações

de Maxwell em um material desse tipo toma a forma

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_l(\mathbf{r}, t), \quad (2.116a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.116b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.116c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_l(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t). \quad (2.116d)$$

As equações de Maxwell em um meio material somente podem ser resolvidas se forem conhecidas as relações constitutivas do meio, isto é, as relações entre o par de campos \mathbf{D} e \mathbf{B} e o par \mathbf{E} e \mathbf{H} . Essas relações descrevem o modo como o meio se modifica pela presença dos campos eletromagnéticos. É fácil perceber que a modificação do meio em um certo instante depende dos valores do campo não apenas nesse instante, mas também em instante anteriores. Isso porque o meio não responde instantaneamente à ação de um campo variável com o tempo. Essa dependência em instantes anteriores introduz uma complexidade muito importante na reação do meio ao campo, que chamamos **dispersão temporal** ou, simplesmente, **dispersão** do meio.

Para facilitar o estudo da dispersão do meio, consideramos as hipóteses simplificadoras de que o meio é homogêneo, isotrópico e linear, com polarização dependente apenas do campo elétrico e magnetização, do magnético.

Com essas hipóteses o vetor polarização é dado por [9]

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \epsilon_0 \chi_e(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t'). \quad (2.117)$$

Nessa equação, χ_e é uma função numérica da diferença entre o instante da polarização e o instante retardado em que o campo influencia a polarização (retardamento que define a dispersão do meio). É função numérica porque o meio é isotrópico e não depende da posição em que polarização e campo são considerados porque o meio é homogêneo. (A constante ϵ_0 aparece apenas por conveniência quando se usa o sistema de unidades SI.)

Embora essas hipóteses simplificadoras facilitem o estudo da dispersão, e nelas se enquadrem muitos fenômenos de interesse, o fenômeno que se consti-

tui como tema desta dissertação, o efeito Faraday, se deve a uma anisotropia induzida no meio. Além disso comparamos o efeito Faraday com a chamada atividade óptica natural, que também se caracteriza como uma forma muito particular de anisotropia. Abordaremos essas questões mais adiante. Por ora voltemos à situação simples expressa pela equação anterior. Naturalmente, χ_e se anula para $t' > t$, para levar em conta que a polarização em um certo instante não pode ser influenciada por valores futuros dos campos eletromagnéticos. Há ainda a hipótese de que χ_e tenda a zero se $t' \rightarrow -\infty$, pois o campo no passado remoto tem influência desprezível na polarização no tempo presente. Portanto, χ_e satisfaz às condições causais

$$\chi_e(t-t') = 0 \quad \text{se } t' > t \quad \text{e} \quad \chi_e(t-t') \rightarrow 0 \quad \text{se } t' \rightarrow -\infty. \quad (2.118)$$

Considerações análogas para a magnetização levam à expressão

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_m(t-t') \mathbf{H}(\mathbf{r}, t'). \quad (2.119)$$

onde a função χ_m também satisfaz às condições causais

$$\chi_m(t-t') = 0 \quad \text{se } t' > t \quad \text{e} \quad \chi_m(t-t') \rightarrow 0 \quad \text{se } t' \rightarrow -\infty. \quad (2.120)$$

Em consequência dessas relações se obtém

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \epsilon(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mu(t-t') \mathbf{H}(\mathbf{r}, t') \quad (2.121)$$

onde

$$\epsilon(t-t') = \epsilon_0 [\delta(t-t') + \chi_e(t-t')] \quad \text{e} \quad \mu(t-t') = \mu_0 [\delta(t-t') + \chi_m(t-t')], \quad (2.122)$$

com ϵ e μ satisfazendo às condições causais.

As equações (2.121), juntamente com as equações de Maxwell no meio material caracterizado pela funções ϵ e μ , permitem em princípio tratar qualquer fenômeno eletromagnético nesse meio. A fim de obter no meio material as equações análogas às equações da onda para os campos eletromagnéticos

no vácuo, se supõe que não haja fontes livres no meio, isto é, $\rho_l = 0$ e $\mathbf{J}_l = \mathbf{0}$, de modo que as equações de Maxwell (2.116) se reduzem a

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.123a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.123b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.123c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t). \quad (2.123d)$$

Agora, eliminando \mathbf{D} e \mathbf{B} dessas equações usando as relações constitutivas (2.121), em seguida aplicando um método de cálculo análogo ao usado na obtenção das equações da onda no vácuo e usando as condições causais para fazer integrações por partes, se obtém para o campo elétrico

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt'' \mu(t-t'') \epsilon(t''-t') \right] \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t')}{\partial t'^2} = 0, \quad (2.124)$$

e para o magnético

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt'' \mu(t-t'') \epsilon(t''-t') \right] \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t')}{\partial t'^2} = 0. \quad (2.125)$$

Essas equações integro-diferenciais mostram a complexidade da propagação dos campos eletromagnéticos em meios materiais. Se o meio se reduz ao vácuo, $\epsilon(t-t') = \epsilon_0 \delta(t-t')$ e $\mu(t-t') = \mu_0 \delta(t-t')$. Nesse caso, as equações de Maxwell no meio reduzem-se às equações de Maxwell no vácuo, e as equações (2.124) e (2.125) reduzem-se às equações usuais da onda no vácuo, como era de se esperar. Como as soluções das equações (2.124) e (2.125) podem ser escritas como superposições de ondas monocromáticas, cada uma delas pode se chamada de **equação integro-diferencial da onda em meio material**.

Tendo em vista a complexidade das equações da onda em meios materiais, dois procedimentos simplificadores são adotados. O primeiro consiste em supor um meio material idealizado no qual as relações constitutivas (2.121) reduzem-se a meras proporcionalidades entre $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e entre $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, de modo que o meio se distingue do vácuo apenas no fato de que

as constantes de proporcionalidades não são iguais a ϵ_0 e μ_0 , tendo outros valores ϵ e μ , isto é,

$$\epsilon(t - t') = \epsilon \delta(t - t') \quad \text{e} \quad \mu(t - t') = \mu \delta(t - t'), \quad (2.126)$$

onde ϵ e μ são constantes reais que caracterizam o meio. Este é chamado **meio material simples** [9]. É útil considerar meios simples porque muitos meios considerados na prática são aproximadamente simples para campos eletromagnéticos em certas bandas de frequência. Um outro motivo é que o estudo preliminar de meios simples ajuda no estudo de situações mais complicadas. Esses meios são tratados na próxima seção. O segundo procedimento consiste em considerar o campo no espaço recíproco do tempo, onde os campos são monocromáticos e obedecem equações da onda com velocidades de propagação que dependem de suas frequências. Essa relação entre velocidade de propagação de onda monocromática e sua frequência é a relação de dispersão, assunto estudado na seção depois da próxima.

2.6 Onda plana monocromática em meio simples

Em um meio simples a polarização é proporcional ao campo elétrico e a magnetização, ao campo magnético,

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad \text{e} \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (2.127)$$

onde χ_e e χ_m são constantes de proporcionalidade dependentes apenas do meio material, chamadas **susceptibilidades elétrica** e **magnética** do material, respectivamente. Então,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0(1 + \chi_m)}\mathbf{B} \quad (2.128)$$

ou

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad (2.129)$$

onde

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad \text{e} \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e$$

são respectivamente a **permissividade elétrica** do material e a **permissividade relativa** e

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad \text{e} \quad \mu_r = 1 + \chi_m$$

são respectivamente a **permeabilidade magnética** do material e a **permeabilidade relativa**. Com isso, as equações (2.123a) e (2.123d) podem ser reescritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_l \quad (2.130)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}_l + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}. \quad (2.131)$$

Portanto, neste caso as equações de Maxwell são as mesmas apresentadas em (2.1), exceto pela adequação dos valores da permissividade elétrica e permeabilidade magnética e pela substituição das densidades de carga e corrente totais pelas densidades de carga e corrente livres. Tal semelhança conduz a resultados análogos aos já obtidos para as equações em (2.1), como é discutido em sequência.

Vemos que em um meio simples as equações de Maxwell tomam a forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.132a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.132b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.132c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.132d)$$

Conforme o que já foi visto no caso das equações de Maxwell no vácuo, decorre das equações (2.132) que os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} obedecem à equação de onda, e com velocidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}. \quad (2.133)$$

Portanto, cada um dos componentes desses campos, denotados indistintamente por Ψ , satisfazem à equação

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.134)$$

A solução geral do tipo onda plana para essa equação tem a forma

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_+(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt) + \Psi_-(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} + vt), \quad (2.135)$$

onde Ψ_+ descreve uma onda se deslocando no sentido do vetor unitário $\hat{\mathbf{k}}$ e Ψ_- uma onda se deslocando no sentido contrário, Ambas com velocidade v .

Valendo-se do mesmo argumento apresentado no caso de ondas planas no vácuo, o estudo pode se limitar às ondas dependentes apenas da variável

$$\xi = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt, \quad (2.136)$$

correspondente a propagação na direção e sentido de $\hat{\mathbf{k}}$. Desse modo, a dependência em \mathbf{r} e t dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} da onda que se propaga na direção e sentido de $\hat{\mathbf{k}}$ tem a forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt) \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt). \quad (2.137)$$

Como as equações de Maxwell impõem

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}(\xi) = 0, \quad (2.138a)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B}(\xi) = 0, \quad (2.138b)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(\xi) = v\mathbf{B}(\xi), \quad (2.138c)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}(\xi) = -\frac{1}{v}\mathbf{E}(\xi), \quad (2.138d)$$

essas condições mostram que os campos são perpendiculares a $\hat{\mathbf{k}}$ e entre si. Portanto, resumidamente, para qualquer onda plana se tem

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t); \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt). \quad (2.139)$$

Voltando à equação (2.134), a solução do tipo onda harmônica, ou onda plana monocromática, onde se toma

$$\xi = \frac{v}{\omega}(k\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (2.140)$$

com

$$k = \frac{\omega}{v}; \quad (2.141)$$

é dada por

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 \cos(k\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta). \quad (2.142)$$

Reescrevendo essa função como

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta), \quad (2.143)$$

o vetor

$$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}} \quad (2.144)$$

é o vetor de onda ou vetor de propagação. Desse modo, a relação de dispersão da onda no meio material fica

$$\omega = v|\mathbf{k}|. \quad (2.145)$$

A solução obtida para a propagação da onda plana monocromática no material é, portanto, idêntica à obtida para a propagação no vácuo. No entanto, a relação de dispersão é diferente; $\omega = c|\mathbf{k}|$ no vácuo e $\omega = v|\mathbf{k}|$ no meio simples.

Quando a onda passa do vácuo para um meio material é conveniente identificar cada meio e, para isso, usa-se k_0 para representar o módulo do vetor de onda no vácuo. Vale lembrar que ao passar de um meio para o outro a frequência ω da onda não sofre alteração, mas a velocidade da onda sim, o que se reflete na diferença entre os comprimentos de onda em cada meio, já que o comprimento de onda é dado pelo produto entre a velocidade da onda e o período (inverso da frequência). A mudança na velocidade de propagação da onda ao passar de um meio para outro é uma característica do fenômeno

da refração e leva à definição de uma propriedade do material que recebe o nome de índice de refração. Uma discussão sobre essa propriedade é muito relevante e por isso ela é realizada em sequência.

Ao passar do vácuo (ou do ar) para outro meio, uma onda monocromática sofre o fenômeno da refração, que consiste na mudança da velocidade e, em geral, da direção de propagação ao atravessar a superfície de separação dos dois meios. Com isso, se define o índice de refração n de um material como a razão entre a velocidade propagação da onda antes e depois de nele adentrar, isto é,

$$n = \frac{c}{v}. \quad (2.146)$$

O índice de refração de qualquer material é, portanto, um número maior que 1, uma vez que c é maior que v . Reescrevendo essa definição em termos das permissividades elétricas e permeabilidades magnéticas se tem

$$n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}. \quad (2.147)$$

Para um material susceptível apenas à polarização elétrica, a permeabilidade magnética não sofre alteração quando a onda passa a se propagar nele, ou seja, $\mu = \mu_0$. Neste caso, o índice de refração fica

$$n = \sqrt{\epsilon_r}, \quad (2.148)$$

onde $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ é a permissividade relativa.

Em função da susceptibilidade elétrica, esse índice de refração é então dado por

$$n = \sqrt{1 + \chi_e}, \quad (2.149)$$

onde aqui foi usada a definição de permissividade relativa já apresentada anteriormente.

Escrevendo as velocidades de propagação da onda fora e dentro do material em função dos seus respectivos números de onda por

$$c = \frac{\omega}{k_0} \quad \text{e} \quad v = \frac{\omega}{k}, \quad (2.150)$$

a definição (2.146) toma a forma

$$n = \frac{k}{k_0}. \quad (2.151)$$

Essa expressão para o índice de refração dado em termos dos números de onda antes e depois da onda entrar no meio material será útil para os assuntos tratados no próximo capítulo, onde se estudará a atividade óptica realizada em luz monocromática ao fazê-la atravessar um meio dielétrico transparente dotado da capacidade de alterar a polarização do feixe de luz propagante.

É possível obter das equações de Maxwell a bem conhecida lei de Snell de refração para a passagem de luz de um meio simples para outro.

É importante observar que a definição de índice de refração do meio material foi feita supondo que ele fosse simples, de modo que tal índice é uma constante que depende apenas do meio, e o mesmo se pode dizer da velocidade de propagação de qualquer onda eletromagnética nesse meio. Já comentamos que tais meios simples são idealizações de meios reais, nos quais a velocidade de propagação da onda é definida univocamente apenas para onda monocromática e depende da frequência dessa onda. Desse modo, cada componente monocromática que penetra em um meio real obedece à lei de Snell com um índice de refração específico para essa componente. Para ondas monocromáticas de frequências diferentes, os índices de refração são geralmente diferentes e, para um mesmo ângulo de incidência, os ângulos de refração são diferentes. Com isso as cores da luz refratada se dispersam angularmente de acordo com suas frequências. Se a onda incidente no material não for monocromática, e sim formada por uma banda de frequências, acontece esse fenômeno de dispersão das ondas da banda em um espectro. Tal fenômeno ocorre com a luz branca proveniente do sol ao atravessar a massa de ar com alto percentual de umidade em um dia chuvoso. Nesse caso, as gotículas em suspensão promovem a dispersão da luz do sol decompondo-a em um espectro conhecido como arco-íris. O estudo da dispersão consiste sobretudo na busca pelo entendimento de como o índice de refração de um material depende da frequência da onda propagante, e este é o assunto tratado a seguir.

2.7 Onda plana monocromática em meio dispersivo

Primeiramente, verificamos como o tratamento de ondas em um meio pode ser simplificado quando consideramos os campos e as propriedades do meio no espaço recíproco do tempo, caracterizado por grandezas oscilatórias com frequências bem determinadas. Consideremos o caso do vetor polarização elétrica, governada pela relação constitutiva

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \epsilon_0 \chi_e(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t'). \quad (2.152)$$

Por simplicidade, supusemos um meio isotrópico, linear e sem dispersão espacial. Tomando a transformada de Fourier das grandezas envolvidas, obtemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} \quad (2.153)$$

e

$$\chi_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \chi_e(t) e^{i\omega t}, \quad (2.154)$$

de modo que

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (2.155)$$

e

$$\chi_e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \chi_e(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (2.156)$$

Usando esses resultados se verifica que a relação constitutiva (2.152) é equivalente, no espaço recíproco, a

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.157)$$

Portanto, no espaço recíproco, para cada frequência a relação constitutiva é a de um meio simples; essa é a simplificação mencionada no início da seção.

De modo semelhante, se obtém para as transformadas de Fourier de

$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$, $\epsilon(t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, $\mu(t)$ e $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, as relações

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) . \quad (2.158)$$

Nota-se que, pelo fato de as grandezas $\chi_e(t)$, $\epsilon(t)$ e $\mu_e(t)$ serem reais, valem as igualdades

$$\chi_e(\omega)^* = \chi_e(-\omega) , \quad \epsilon(\omega)^* = \epsilon(-\omega) \quad \text{e} \quad \mu(\omega)^* = \mu(-\omega) . \quad (2.159)$$

Uma vez que os vetores do campo eletromagnético, de polarização e magnetização são também reais, valem relações análogas para suas transformadas de Fourier. Entretanto, como de costume, por conveniência, os vetores são representados em notação complexa e suas partes reais (ou imaginárias) são tomadas em momentos oportunos. Considerando ondas monocromáticas, para as quais $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega') = 2\pi \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \delta(\omega' - \omega)$ com a frequência ω fixa, a segunda igualdade em (2.155) é reduz-se a

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} . \quad (2.160)$$

Nesse caso, a relação constitutiva (2.157) toma a forma

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \chi_e(\omega) \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} . \quad (2.161)$$

Com isso, vamos agora à teoria da dispersão, na qual se discute a função χ_e da equação anterior a partir do estudo do comportamento da estrutura do meio sob a ação de ondas eletromagnéticas.

Quando uma onda passa a se propagar em um material dielétrico, seus campos eletromagnéticos agem sobre os elétrons ligados da estrutura. Naturalmente, a resposta do material à ação dos campos depende de cada frequência propagante. Sendo assim, para determinar a relação funcional entre o índice de refração (ou χ_e) e a frequência, avalia-se o comportamento dos elétrons sujeitos à ação de uma onda monocromática e linearmente polarizada, cujo campo elétrico, representado em uma base cartesiana conveniente, é

dado, sem perda de generalidade, por

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{x}}, \quad (2.162)$$

de modo que, em (2.160), o eixo z é escolhido ao longo de \mathbf{k} , o eixo x ao longo da direção de polarização da onda e, por enquanto, é considerada apenas a parte real da expressão.

Valendo-se de um modelo clássico simplificado para o comportamento dos elétrons no material, a segunda lei de Newton fornece para cada um deles uma equação de movimento. Sendo assim, é preciso conhecer as forças que agem sobre cada uma dessas partículas. O tratamento desse modelo é aqui realizado com base na leitura do livro do Griffiths [10].

Em materiais dielétricos, a energia de ligação dos elétrons às moléculas pode ser aproximada pela energia potencial elástica, considerando que são pequenas as vibrações de cada partícula em torno do seu ponto de equilíbrio. Portanto, a força restauradora responsável por manter cada elétron preso à molécula tem a forma $\mathbf{F}_1 = -k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, com k constante e onde \mathbf{r}_0 e \mathbf{r} são, respectivamente, as posições do ponto de equilíbrio e instantânea do elétron em relação à origem do sistema de coordenadas cartesianas adotado. A fim de simplificar a notação, convém reescrever a força de ligação na forma $\mathbf{F}_1 = -k\mathbf{s}$, onde \mathbf{s} é o vetor posição do elétron em relação a seu ponto de equilíbrio: $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$.

A ação dos campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} da onda é dada pela força de Lorentz

$$\mathbf{F}_2 = -e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}), \quad (2.163)$$

onde $-e$ é a carga elétrica e $\dot{\mathbf{s}}$ é a velocidade do elétron vibrante em relação ao seu ponto de equilíbrio. Como o campo magnético está relacionado ao campo elétrico pela expressão $\mathbf{B} = (n/c)\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}$, onde n é o índice de refração na região de propagação e c a velocidade de propagação no vácuo, então, de acordo com a expressão (2.162), $\mathbf{B}(z, t) = (n/c)E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{\mathbf{y}}$. Com isso,

a força de Lorentz toma a forma

$$\mathbf{F}_2 = -eE_0 \cos(kz - \omega t) \left(\hat{\mathbf{x}} + \frac{n|\dot{\mathbf{s}}|}{c} \frac{\dot{\mathbf{s}}}{|\dot{\mathbf{s}}|} \times \hat{\mathbf{y}} \right). \quad (2.164)$$

Nessa expressão, $n|\dot{\mathbf{s}}|/c \ll 1$ (a velocidade de oscilação do elétron é muito menor que a velocidade de propagação da onda no material). Portanto, a força aplicada pelo campo magnético sobre o elétron vibrante é desprezível relativamente à força aplicada pelo campo elétrico sobre a mesma partícula. Sendo assim, a expressão para força aplicada pelos campos da onda sobre cada elétron se reduz a

$$\mathbf{F}_2 = -e\mathbf{E}. \quad (2.165)$$

Sobre cada elétron do material há ainda uma força de amortecimento que se deve à dissipação de energia que ocorre em função da radiação emitida pela carga elétrica acelerada. De acordo com resultados conhecidos do eletromagnetismo, para um elétron do meio dielétrico, essa força é proporcional à velocidade de oscilação em torno do ponto de equilíbrio e é, por isso, dada por

$$\mathbf{F}_3 = -b\dot{\mathbf{s}}, \quad (2.166)$$

onde b é uma constante positiva. O sinal negativo confere o caráter dissipativo à força.

Portanto, a segunda lei de Newton aplicada a um elétron de massa m do dielétrico fornece a equação de movimento

$$m\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{F}, \quad (2.167)$$

onde $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ é a força resultante, isto é,

$$m\ddot{\mathbf{s}} = -k\mathbf{s} - e\mathbf{E} - b\dot{\mathbf{s}} \quad (2.168)$$

ou

$$m\ddot{\mathbf{s}} + b\dot{\mathbf{s}} + k\mathbf{s} = -e\mathbf{E}. \quad (2.169)$$

Essa equação vetorial decomposta em componentes cartesianos mostra que na

direção de $\hat{\mathbf{x}}$ há um oscilador harmônico amortecido e forçado, enquanto em $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$ há, para cada componente, apenas um oscilador harmônico amortecido, uma vez que não existem projeções do campo \mathbf{E} nas direções desses dois vetores unitários. Com isso, as soluções das equações para os componentes em $\hat{\mathbf{y}}$ e em $\hat{\mathbf{z}}$ são atenuadas no decorrer do tempo. Sendo assim, há interesse apenas em investigar o comportamento do componente s_x do vetor \mathbf{s} que, de acordo com a equação (2.169), obedece à equação

$$\ddot{s}_x + \gamma \dot{s}_x + \omega_0^2 s_x = \frac{-e}{m} E_0 \cos(kz - \omega t), \quad (2.170)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é a frequência natural de oscilação do elétron no entorno do seu ponto de equilíbrio e $\gamma = b/m$ é a constante de amortecimento.

A equação (2.170) pode ser mais facilmente manipulada se entendida como a parte real da equação complexa

$$\ddot{\tilde{s}}_x + \gamma \dot{\tilde{s}}_x + \omega_0^2 \tilde{s}_x = \frac{-e}{m} E_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.171)$$

na qual o til sobre a letra indica que ela representa uma grandeza complexa.

A solução geral¹ de (2.171) no regime estacionário² é

$$\tilde{s}_x(z, t) = \tilde{s}_{0x} e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.172)$$

onde

$$\tilde{s}_{0x} = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0. \quad (2.173)$$

Portanto, no regime estacionário, a solução da equação (2.162) é a parte real de (2.172) e o momento de dipolo complexo é

$$\tilde{p}(z, t) = -e\tilde{s}_x(z, t), \quad (2.174)$$

¹A solução geral de uma equação diferencial ordinária é a soma da solução geral da equação homogênea associada com uma solução particular. Nota-se, no caso da equação (2.171), que a solução geral da homogênea associada se torna desprezível com o tempo, restando apenas a solução particular.

²O regime estacionário é atingido a partir de quando se pode desprezar a contribuição da solução da equação homogênea associada na solução geral de (2.171). Enquanto essa contribuição não puder ser desprezada dizemos que o sistema está no regime transiente.

isto é,

$$\tilde{p}(z, t) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 e^{i(kz - \omega t)}. \quad (2.175)$$

Sendo assim, a polarização complexa do meio dielétrico é

$$\tilde{P}(z, t) = N\tilde{p}(z, t) = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.176)$$

onde N é o número de dipolos por unidade de volume no material.

A expressão (2.176), reescrita na forma

$$\tilde{P}(z, t) = \epsilon_0 \tilde{\chi}_e \tilde{E}(z, t), \quad (2.177)$$

com

$$\tilde{E}(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (2.178)$$

introduz a susceptibilidade elétrica complexa

$$\tilde{\chi}_e = \frac{Ne^2/m\epsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad (2.179)$$

a partir da qual se obtém a permissividade elétrica

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0(1 + \tilde{\chi}_e) \quad (2.180)$$

e a permissividade relativa

$$\tilde{\epsilon}_r = \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0} = 1 + \tilde{\chi}_e, \quad (2.181)$$

ambas complexas e dependentes da frequência da onda propagante.

Desse modo, a equação de onda

$$\left(\nabla^2 - \tilde{\epsilon}\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (2.182)$$

admite, para a frequência propagante ω , a solução de onda plana

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}, \quad (2.183)$$

onde \tilde{k} é o número de onda complexo, isto é,

$$\tilde{k} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\epsilon}\mu_0}} = \omega. \quad (2.184)$$

Escrevendo o número de onda complexo por

$$\tilde{k} = k + i\kappa, \quad (2.185)$$

a solução (2.183) toma a forma

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (2.186)$$

Essa expressão mostra que, em geral, no interior do meio dielétrico, a amplitude da onda cai exponencialmente enquanto se propaga. Isso ocorre devido à absorção de energia pelo meio que leva à atenuação da intensidade da onda. Como a intensidade da onda é proporcional ao quadrado do módulo da sua amplitude, isto é, a $|\mathbf{E}_0|^2 e^{-2\kappa z}$, a grandeza

$$\alpha = 2\kappa \quad (2.187)$$

é conhecida como coeficiente de absorção.

O índice de refração n para a frequência ω é obtido levando em conta que a velocidade de propagação da onda no meio é dada por $v = \omega/k$, onde k é a parte real do número de onda complexo. Sendo assim,

$$n = \frac{ck}{\omega}. \quad (2.188)$$

Como

$$\tilde{k} = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}\mu_0} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}_r}, \quad (2.189)$$

então, usando (2.181) e (2.179),

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}}. \quad (2.190)$$

Tomando a expansão em série de potência da forma

$$\sqrt{1 + \delta} = 1 + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta^2}{8} + \frac{\delta^3}{16} - \frac{5\delta^4}{128} + O(\delta^5), \quad (2.191)$$

a aproximação pelo termo de primeira ordem³ em (2.190) leva a

$$\tilde{k} \cong \frac{\omega}{c} \left(1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right). \quad (2.192)$$

Desse modo, usando a parte real de (2.192) em (2.188), finalmente se obtém para o índice de refração a expressão

$$n(\omega) \cong 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (2.193)$$

Essa expressão mostra claramente que n é dado em função da frequência ω da onda propagante, isto é, em um meio dito dispersivo o valor do índice de refração muda de acordo com a frequência da onda monocromática que por ele se propague. Sendo assim, se uma onda formada por uma banda de frequências penetrar em um meio dispersivo, cada componente monocromático refratará em uma direção particular, levando ao surgimento de um espectro luminoso. No entanto, se a propagação da onda não monocromática se der no vácuo ou em meio simples, não haverá formação de espectro, ou seja, não haverá dispersão. Portanto, no vácuo ou em meio simples o índice de refração não depende da frequência propagante e este meio é dito não dispersivo.

Voltando à expressão (2.192), sua parte imaginária fornece o coeficiente de absorção

$$\alpha(\omega) \cong \frac{Ne^2\omega^2}{m\epsilon_0 c} \frac{\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (2.194)$$

Naturalmente, para uma onda monocromática atravessar um meio dielétrico sem sofrer uma perda significativa de intensidade é necessário que α tenha valor desprezível. A expressão (2.194) mostra que esta condição é atendida se o valor da constante de amortecimento γ do movimento oscilatório do elétron

³Essa aproximação é tão melhor quanto menor o módulo do termo somado a 1 na raiz.

ligado for pequeno o suficiente em relação a $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2$. Portanto, o coeficiente de absorção vai se tornando cada vez mais irrelevante na medida em que $(\omega_0^2 - \omega^2)^2$ vai tomando valores cada vez maiores. Dessa forma, quanto mais distante a frequência da onda estiver da frequência natural de oscilação do elétron (ω_0), menos energia será absorvida pelo meio. Em contrapartida, se as duas frequências apresentarem valores próximos, a absorção de energia passa a ser significativa e será máxima quando as frequências forem iguais. Neste último caso as oscilações em fase do elétron ligado e do campo da onda são responsáveis pela máxima absorção de energia. Quando um feixe de luz monocromático atravessa uma pequena região onde há um meio dielétrico transparente, como água ou vidro, notoriamente não há perda de intensidade. Portanto, neste caso a frequência ω da onda está longe o bastante de ω_0 , de modo que o valor de γ é irrelevante e então o coeficiente de absorção é desprezível.

Tendo estudado o fenômeno da dispersão de um meio com a hipótese simplificadora de que ele é isotrópico, passamos agora à descrição da anisotropia de um meio dispersivo. A anisotropia pode ser estudada supondo o meio não dispersivo [9] e é apresentada em diversos níveis em livros de ótica (Cf., *e.g.*, [25]). Julgamos útil o esboço teórico apresentado a seguir e baseado em uma seleção de idéias fundamentais que iniciam o tratamento avançado do tratado de Landau e Lifshitz [11] (capítulo XI). Continuamos a considerar o meio como homogêneo e linear com a polarização determinada pelo campo elétrico e a magnetização, pelo magnético. No caso da polarização, se o meio é anisotrópico há direções definidas por ele no espaço, além da direção definida pelo próprio campo elétrico. Conseqüentemente, a polarização não tem, necessariamente, a direção do campo elétrico que a causa. Portanto, a equação (2.117) que relaciona campo elétrico com polarização no caso isotrópico deve ser substituída pela equação

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \epsilon_0 \chi_e(t - t') (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t')), \quad (2.195)$$

na qual agora $\chi_e(t - t')$ não é mais um número, mas um operador que age sobre o vetor campo elétrico e produz um vetor com direção que depende da

anisotropia do meio. No caso da magnetização, a equação (2.119) deve ser substituída pela equação

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_m(t - t')(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t')), \quad (2.196)$$

na qual agora $\chi_m(t - t')$ não é mais um número, mas um operador que age sobre o vetor campo magnético e produz um vetor com direção que depende da anisotropia do meio. Como consequência, as equações em (2.121) devem ser substituídas por

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \epsilon(t - t')(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t')) \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mu(t - t')(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t')), \quad (2.197)$$

nas quais agora $\epsilon(t - t')$ e $\mu(t - t')$ são operadores. É útil considerar as transformadas de Fourier temporais dessas equações para obter as equações no espaço recíproco

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\omega) (\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) \quad \text{e} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu(\omega) (\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)), \quad (2.198)$$

onde $\epsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ são operadores. É comum escolher alguma base (ortonormal) e substituir as equações vetoriais (2.197) e (2.198) por equações dos componentes, isto é, por

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \epsilon_{ij}(t - t') E_j(\mathbf{r}, t'), \quad B_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mu_{ij}(t - t') H_j(\mathbf{r}, t'), \quad (2.199)$$

$$D_i(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_{ij}(\omega) E_j(\mathbf{r}, \omega) \quad \text{e} \quad B_i(\mathbf{r}, \omega) = \mu_{ij}(\omega) H_j(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.200)$$

onde $\epsilon_{ij}(t - t')$, $\mu_{ij}(t - t')$, $\epsilon_{ij}(\omega)$ e $\mu_{ij}(\omega)$ são as respectivas matrizes dos operadores $\epsilon(t - t')$, $\mu(t - t')$, $\epsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$. As equações constitutivas na forma (2.200) são as mais apropriadas para os cálculos da teoria dos meios anisotrópicos. Podemos chamar $\epsilon_{ij}(\omega)$ e $\mu_{ij}(\omega)$, **matriz de permissividade** e **matriz de permeabilidade**, respectivamente.

Consideremos o caso que nos interessa de ondas em meio transparente, em que não ocorre magnetização, isto é, $\mu_{ij}(\omega) = \mu_0 \delta_{ij}$, e não há absorção

de energia. Nesse caso $\epsilon_{ij}(\omega)$ é uma matriz simétrica e real [11]. Diagonalizando a matriz obtemos os chamados **eixos principais dielétricos**, que denotamos por OX , OY e OZ e os correspondentes autovalores, ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z , que definem três índices de refração para ondas polarizadas ao longo dos respectivos eixos principais. Os eixos principais e os índices de refração caracterizam a anisotropia óptica do meio. Se os três índices forem iguais o meio é isotrópico. Quando os índices não são iguais eles dão origem a fenômenos gerados pela anisotropia, sendo o mais notável a **birrefringência** da luz que penetra o meio [12], que consiste no raio incidente no meio dar origem a dois raios refratados. A birrefringência e demais fenômenos decorrentes da anisotropia, constituem-se em um assunto extenso, a ótica de cristais, mas as noções apresentadas até aqui são suficientes para nosso propósito de contextualizar a atividade óptica natural e o efeito Faraday. Veremos que em ambos os casos a anisotropia é expressa por uma matriz de permissividade que não é múltipla da identidade.

Capítulo 3

O efeito Faraday

Neste capítulo apresentamos a formulação teórica do efeito Faraday trazendo inicialmente uma discussão sobre a atividade óptica natural. Seguindo esta sequência, o conceito físico aqui tratado é construído de forma gradual e, portanto, eficaz do ponto de vista da sua compreensão. A saber, o conceito referido trata-se da rotação do plano de polarização de um feixe de luz monocromática ao atravessar determinados materiais dielétricos; fenômeno conhecido como atividade óptica. Há meios que permitem a realização da atividade óptica de forma natural, daí o nome anteriormente mencionado. Em outros meios, no entanto, o fenômeno só pode ser observado se induzido magneticamente e, neste caso, ele é chamado efeito Faraday.

3.1 Atividade óptica natural

A atividade óptica [13] foi observada pela primeira vez em 1811 pelo físico francês François Jean Dominique Arago [14]; ele fez passar luz linearmente polarizada através de cristal de quartzo paralelamente ao seu eixo óptico ¹. Posteriormente Jean Baptiste Biot relatou a observação de atividade óptica em certos líquidos e vapores de substâncias orgânicas, tais como terebintina, e também em cristais de quartzo [15, 16, 17, 18]. Em 1849 Pasteur, que

¹Eixo óptico de um cristal é um eixo ao longo do qual um raio de luz não sofre birrefringência.

havia sido aluno de Biot, resolveu o problema da natureza do ácido tartárico [19, 20]. Ele descobriu que esse composto, quando de origem biológica (especificamente, de borras de vinho) apresentava atividade ótica, ao passo que o mesmo ácido sintetizado artificialmente, não apresentava. Pasteur notou que os cristais do ácido se apresentavam em duas formas, uma como imagem especular da outra. Uma rodava o plano de polarização em um sentido e a outra, no sentido oposto. Além disso, uma mistura de partes iguais das duas formas não rodava o plano de polarização. Finalmente, verificou que o ácido tartárico natural tinha cristais de uma única forma enquanto o artificial, uma mistura em partes iguais das duas formas. Essas duas formas, ditas quirais, serão mencionadas novamente mais adiante, após um tratamento meramente descritivo da atividade ótica.

Para uma compreensão efetiva do formalismo quantitativo do fenômeno, convém, antes de qualquer coisa, descrever o que nele é diretamente observado [21]. Para isso, usa-se o arranjo experimental ilustrado na figura 3.1, no qual um raio de luz monocromática se propaga ao longo de uma direção bem definida, atravessando consecutivamente um polarizador P , um tubo fechado em suas extremidades por vidros planos paralelos e um segundo polarizador A , o analisador de polarização.

Considerando que inicialmente apenas os polarizadores P e A estejam presentes ao longo da trajetória do raio de luz, ao fixar o eixo de transmissão de P em uma orientação, por exemplo, vertical, uma rotação no analisador mostra que a intensidade da luz varia de um valor máximo até a sua extinção, que ocorre quando o eixo de transmissão de A encontra-se perpendicularmente orientado em relação ao de P . Com isso, se verifica que a luz sai do polarizador P linearmente polarizada. Fixando a orientação do analisador de modo a não permitir a transmissão de nenhuma intensidade luminosa, se estabelece a situação inicial de referência para a observação do fenômeno.

A seguir, introduzindo um volume de água pura na trajetória do raio de luz (entre o polarizador P e o analisador A), não se verifica alteração alguma em relação à situação inicial de referência, ou seja, o analisador continua não transmitindo a luz que sobre ele incide. Portanto, introdução da água pura na trajetória da luz não muda sua polarização, isto é, a água pura não

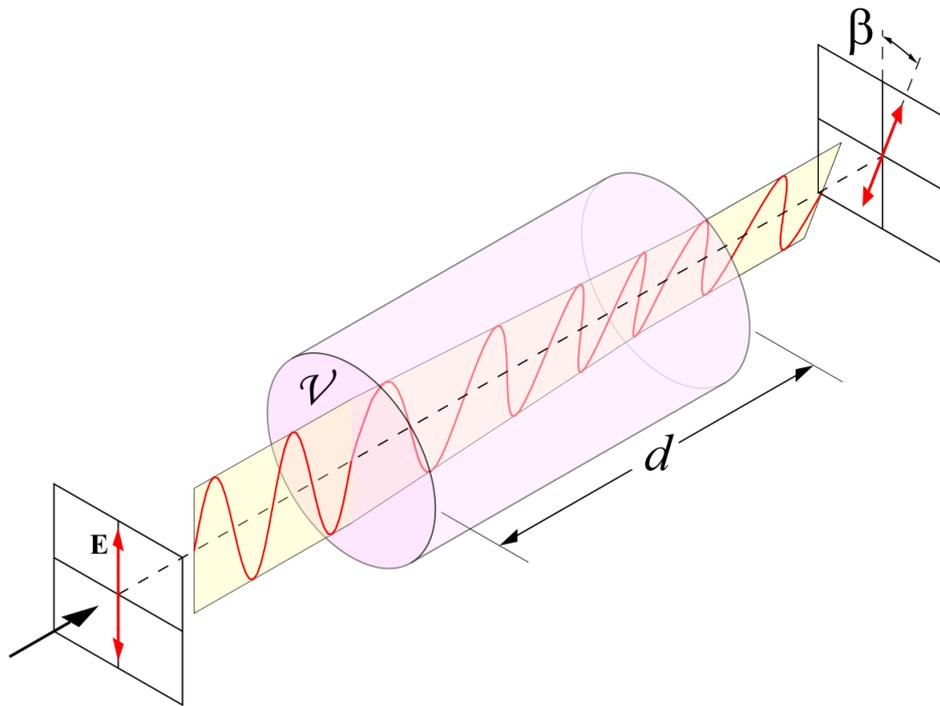


Figura 3.1: Aparato para observação de atividade óptica em meio material contido na região \mathcal{V} . A luz torna-se linearmente polarizada ao passar pelo polarizador à esquerda (P), sofre atividade óptica ao atravessar a região e tem seu desvio angular β da polarização medido no polarizador à direita, o analisador (A).

exerce atividade sobre a polarização da luz. Em contrapartida, trocando a água pura por solução de açúcar em água, uma intensidade luminosa passa a ser transmitida pelo analisador. Portanto, a introdução da solução na trajetória da luz muda sua polarização, mostrando que a solução de açúcar exerce atividade sobre a polarização da luz. Girando novamente o analisador, a intensidade luminosa que o atravessa volta a se anular para uma dada orientação do eixo de transmissão, indicando que a luz incidente sobre A encontra-se linearmente polarizada em uma direção perpendicular à nova orientação do eixo de transmissão. Portanto, o efeito que a solução de açúcar realizou sobre o raio de luz foi alterar a sua polarização linear. Em resumo, a atividade da solução consiste em girar o plano de polarização linear do raio

de luz que a atravessa. O ângulo de giro depende, como será discutido mais adiante, da concentração de açúcar, do comprimento atravessado pela luz na solução e do comprimento de onda da luz incidente.

As substâncias como água pura, que não provocam rotação no plano de polarização linear da luz, são chamadas **óticamente inativas**. As substâncias como solução de açúcar em água, que provocam rotação no plano de polarização linear da luz, são chamadas **óticamente ativas**. O giro da polarização linear da luz ao atravessar substâncias óticamente ativas pode ocorrer no sentido horário ou anti-horário para quem observa o raio chegando. Essas substâncias são chamadas de **dextrógiras** ou **levógiras**², respectivamente.

Passando da mera descrição de propriedades observadas nas substâncias óticamente ativas para um modelo simples da atividade óptica, proposto por Fresnel em 1825 [22], torna-se possível compreender a origem da rotação do plano de polarização da luz a partir de uma avaliação quantitativa do fenômeno. Esse modelo se baseia no fato de que toda onda linearmente polarizada pode ser pensada como a superposição de duas ondas circularmente polarizadas (uma esquerda e outra direita) e na hipótese de que, no meio óticamente ativo, essas duas ondas têm índices de refração diferentes. Com isso, ao deixarem o meio óticamente ativo, as projeções circulares se combinam em uma onda com polarização linear diferente daquela que havia antes de penetrar no meio.

Sendo $\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(k_0 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}$ a representação do campo elétrico da onda antes de entrar no meio óticamente ativo (*i.e.*, em $z < 0$), ao passar para a base de polarização circular, escrevemos

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(k_0 z - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(k_0 z - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_- . \quad (3.1)$$

Pela hipótese de Fresnel, quando a onda penetra no meio óticamente ativo, em $z = 0$, seus componentes circulares apresentam índices de refração diferentes: n_+ para a polarização esquerda e n_- para a polarização direita. Decorre disso que os números de onda dos componentes circulares do campo elétrico serão $k_+ = n_+ k_0$ e $k_- = n_- k_0$. Desse modo, para $z \geq 0$, o campo é

²Também chamadas **dextrorrotatórias** ou **levorrotatórias**.

dado por

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(k_+ z - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(k_- z - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_-. \quad (3.2)$$

Sendo

$$n_+ = \bar{n} + \frac{1}{2} \delta n \quad \text{e} \quad n_- = \bar{n} - \frac{1}{2} \delta n, \quad (3.3)$$

onde usamos as definições de **índice de refração médio** e de **diferença entre índices de refração**, respectivamente,

$$\bar{n} = (n_+ + n_-)/2 \quad \text{e} \quad \delta n = (n_+ - n_-). \quad (3.4)$$

Então, para $z \geq 0$,

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i((\bar{n} + \frac{1}{2} \delta n) k_0 z - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i((\bar{n} - \frac{1}{2} \delta n) k_0 z - \omega t)} \hat{\mathbf{e}}_- \quad (3.5)$$

ou

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(\bar{n} k_0 z - \omega t)} (e^{i\frac{1}{2} \delta n k_0 z} \hat{\mathbf{e}}_+ + e^{-i\frac{1}{2} \delta n k_0 z} \hat{\mathbf{e}}_-). \quad (3.6)$$

Retornando para a base cartesiana usando as definições

$$\hat{\mathbf{e}}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{e}}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}),$$

o campo elétrico toma a forma

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(\bar{n} k_0 z - \omega t)} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{1}{2} \delta n k_0 z} (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{1}{2} \delta n k_0 z} (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) \right]. \quad (3.7)$$

Segue que

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{E_0}{2} e^{i(\bar{n} k_0 z - \omega t)} [(e^{i\frac{1}{2} \delta n k_0 z} + e^{-i\frac{1}{2} \delta n k_0 z}) \hat{\mathbf{x}} + i(e^{i\frac{1}{2} \delta n k_0 z} - e^{-i\frac{1}{2} \delta n k_0 z}) \hat{\mathbf{y}}] \quad (3.8)$$

e, por fim,

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(\bar{n} k_0 z - \omega t)} \left[\cos\left(\frac{1}{2} \delta n k_0 z\right) \hat{\mathbf{x}} - \sin\left(\frac{1}{2} \delta n k_0 z\right) \hat{\mathbf{y}} \right]. \quad (3.9)$$

Esta equação mostra que a polarização da onda que se propaga pelo meio

oticamente ativo sofre uma deflexão angular que varia em função de z . Isto é, para $z \leq 0$, por construção, o campo elétrico oscila na direção do vetor unitário $\hat{\mathbf{x}}$, para $z > 0$ (já no interior do meio opticamente ativo) este mesmo campo também apresenta componente na direção do vetor unitário $\hat{\mathbf{y}}$. De (3.9) vemos que para o ângulo θ de deflexão angular da polarização vale a relação

$$\tan \theta = -\tan \left(\frac{1}{2} \delta n k_0 z \right). \quad (3.10)$$

Então, evidentemente o ângulo de deflexão é dado por³

$$\theta(\delta n, \lambda, z) = -\frac{\delta n}{2} k_0 z. \quad (3.11)$$

Portanto, é necessário que n_+ e n_- sejam diferentes (*i.e.*, $\delta n \neq 0$) para que o fenômeno ocorra; e ele será tão mais intenso quanto maior for a diferença. O sinal negativo na expressão para o ângulo de deflexão mostra ainda que se $n_+ > n_-$ (*i.e.*, $\delta n > 0$), a rotação do campo elétrico acontece no sentido horário para o observador que se coloca de frente para a propagação e, neste caso, o meio é dextrógiro. Se $n_+ < n_-$, a rotação acontece no sentido contrário e, então, o meio é levógiro. Finalmente, a fórmula (3.11) mostra que a deflexão θ é proporcional a z , isto é, a deflexão aumenta paulatinamente com a distância que a onda percorre no meio.

Se a região onde há o material óticamente ativo tiver um comprimento L , a onda deixará este meio em $z = L$ com a sua polarização girada de

$$\theta(L) = -(\delta n/2)k_0L, \quad (3.12)$$

e tornará a se propagar com uma polarização linear fixa.

As ondas com polarizações esquerda e direita se propagam, de fato, com velocidades diferentes em um material óticamente ativo e, por isso, apresentam valores distintos para o índice de refração. A essa propriedade dá-se o nome de **birefringência circular**, e ela tem origem na estrutura quiral

³Usando $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, onde λ_0 é o comprimento de onda no vácuo da luz que sofre o efeito de rotação do plano de polarização linear, a fórmula mostra que o ângulo de rotação é inversamente proporcional ao comprimento de onda.

das moléculas que formam o material. A quiralidade é uma característica de simetria em que um objeto ou figura geométrica não é idêntico por sobreposição a sua imagem especular; aquela produzida por um espelho plano. Por exemplo, as moléculas de DNA são quirais. Dessa mesma maneira, as formas helicoidais apresentadas por estruturas moleculares de materiais opticamente ativos são também quirais (para mais detalhes, cf., *e.g.*, [23] e [24]).

O formalismo que mostra a origem da atividade ótica na assimetria quiral das moléculas, ou nas assimetrias cristalinas, é muito avançado para ser apresentado nesta dissertação e é desenvolvido detalhadamente no tratado de Landau e Lifshitz [11] (capítulo XII). No entanto, é útil um esboço teórico baseado em uma seleção de idéias fundamentais que iniciam o tratamento avançado de Landau e Lifshitz. Esse esboço tem por objetivo mostrar que a origem da atividade ótica é o fenômeno de **dispersão espacial** que ocorre no meio.

Já sabemos que a dispersão temporal de um meio é a propriedade pela qual sua polarização em um dado instante depende dos valores do campo eletromagnético nesse instante e em instantes anteriores. De um modo geral, em princípio, a polarização em um ponto depende não somente dos valores do campo nesse ponto como também de seus valores em pontos vizinhos. Essa dependência em pontos vizinhos é chamada **dispersão espacial** do meio. Para levar em conta essa dispersão espacial, escrevemos a seguinte relação constitutiva, que generaliza a primeira relação em (2.199),

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \epsilon_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') E_j(\mathbf{r}', t'), \quad (3.13)$$

onde a dependência de ϵ_{ij} em $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ descreve a dispersão espacial do meio, do mesmo modo que sua dependência em $t - t'$ descreve a dispersão temporal. A segunda relação em (2.199) pode ser ignorada supondo, por simplicidade, que o meio não seja magnético. Usando o teorema da convolução escrevemos (3.13) na forma equivalente

$$D_i(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega), \quad (3.14)$$

onde a dependência de ϵ_{ij} em \mathbf{k} descreve a dispersão espacial do meio, do mesmo modo que sua dependência em ω descreve a dispersão temporal. Pelo princípio termodinâmico de Onsager e pela hipótese de ausência de absorção no meio [11], valem as respectivas condições sobre a permissividade

$$\epsilon_{ij}(-\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{ji}(\mathbf{k}, \omega) \quad \text{e} \quad \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{ji}(\mathbf{k}, \omega)^* . \quad (3.15)$$

Normalmente a dispersão espacial é muito menos importante que a temporal, pois a permissividade $\epsilon_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ em (3.13) cai rapidamente com distâncias grandes em comparação com a escala atômica a . Como consideramos campos macroscópicos, que são promediados sobre essas distâncias, eles assumem um valor constante na região do integrando em que $\epsilon_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ não é desprezível, de modo que $E_j(\mathbf{r}', t') = E_j(\mathbf{r}, t')$. substituindo essa condição em (3.13) ela se reduz a uma relação da forma (2.199), em que não há dispersão espacial (levando em conta que os meios que consideramos são macroscopicamente homogêneos). Para observar a dispersão espacial devemos considerar correções à situação que acabamos de descrever.

No caso de um campo ondulatório de comprimento de onda λ , sua caracterização como campo macroscópico é dada pela condição $\lambda \gg a$, *i.e.*,

$$ka \ll 1 . \quad (3.16)$$

Como uma primeira correção à ausência completa de dispersão espacial, consideramos a expansão da permissividade apenas até a primeira ordem em ka , e obtemos

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{ij}(\mathbf{0}, \omega) + k_n a \left. \frac{\partial \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k_n a} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} . \quad (3.17)$$

Definimos as quantidades

$$\epsilon_{ij}^{(0)}(\omega) = \epsilon_{ij}(\mathbf{0}, \omega) \quad \text{e} \quad \gamma_{ijn}(\omega) = -i \left. \frac{\partial \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial k_n} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} . \quad (3.18)$$

A primeira descreve a aproximação de ordem zero, é a permissividade sem dispersão espacial. A segunda mede a contribuição de primeira ordem da dispersão espacial (nela, o fator $-i$ foi introduzido apenas por conveniência).

Usando essas definições em (3.17), obtemos para a matriz de permissividade,

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{ij}^{(0)}(\omega) + i\gamma_{ijn}(\omega)k_n . \quad (3.19)$$

As condições (3.15) sobre essa matriz são de que $\epsilon_{ij}^{(0)}(\omega)$ é real e simétrica e $\gamma_{ijn}(\omega)$ é real e antissimétrica nos dois primeiros índices,

$$\epsilon_{ij}^{(0)}(\omega)^* = \epsilon_{ij}^{(0)}(\omega) = \epsilon_{ji}^{(0)}(\omega) \quad \text{e} \quad \gamma_{ijn}(\omega)^* = \gamma_{ijn}(\omega) = -\gamma_{jin}(\omega) . \quad (3.20)$$

Essa antissimetria permite escrever $\gamma_{ijn}(\omega) = \varepsilon_{ijp}(\varepsilon_{pqm}\gamma_{qmn}(\omega)/2)$. Usando essa identidade e a definição do vetor $\mathbf{g}(\mathbf{k}, \omega)$, de componentes

$$g_p(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2}\varepsilon_{pqm}\gamma_{qmn}(\omega)k_n , \quad (3.21)$$

obtemos a identidade $\gamma_{ijn}(\omega)k_n = \varepsilon_{ijp}g_p(\mathbf{k}, \omega)$. Levando essa identidade em (3.19), obtemos

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{ij}^{(0)}(\omega) + i\varepsilon_{ijp}g_p(\mathbf{k}, \omega) . \quad (3.22)$$

Substituindo esse resultado em (3.14), chegamos em

$$\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon^{(0)}(\omega)(\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)) + i\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \times \mathbf{g}(\mathbf{k}, \omega) , \quad (3.23)$$

Nessa equação $\epsilon^{(0)}(\omega)$ é o operador de permissividade cuja matriz é $\epsilon_{ij}^{(0)}(\omega)$; ele é responsável pela anisotropia macroscópica cristalina do meio. Já o termo envolvendo o produto vetorial do campo elétrico pelo vetor $\mathbf{g}(\mathbf{k}, \omega)$, chamado **vetor de giração**, é responsável pela anisotropia em escala atômica e se anula se há simetria quiral nessa escala [11]. Vemos pelo formalismo que essa anisotropia quiral se apresenta como uma dispersão espacial do meio e caracteriza sua atividade ótica natural.

No caso de um meio macroscopicamente isotrópico o operador $\epsilon^{(0)}(\omega)$ se reduz à simples multiplicação por um número que podemos neste parágrafo representar pelo mesmo símbolo $\epsilon^{(0)}(\omega)$ ou, simplesmente, por $\epsilon^{(0)}$. O vetor $\mathbf{g}(\mathbf{k}, \omega)$ tem a direção de \mathbf{k} e um módulo que diferencia os índices de refração n_{\pm} , usados na descrição elementar que apresentamos da atividade ótica natural. Os índices são dados por $n_{\pm}^2 = n_0^2 \pm g/\epsilon_0$, onde $n_0^2 = \epsilon^{(0)}/\epsilon_0$ [11].

A atividade óptica apresenta algumas aplicações interessantes. Uma dessas aplicações é o sacarímetro, instrumento usado para medir a concentração de sacarose da cana de açúcar em solução. Essa medição tem por objetivo conhecer a qualidade produtiva da cana, ou seja, o quanto de açúcar ela é capaz de produzir. Os açúcares, assim como outras moléculas orgânicas, são quirais, e quando dissolvidas em água, as soluções obtidas tornam-se meios opticamente ativos. Experimentalmente, se verifica que o ângulo de rotação da polarização linear da onda que atravessa uma solução dessas é proporcional à concentração da substância. Outros fatores que influenciam o resultado observado para o ângulo de rotação da polarização são a temperatura em que se encontra a solução e o comprimento de onda da luz que por ela se propaga. Com isso, se obtém a expressão

$$\theta = \alpha(\lambda, T) \frac{m}{V} L, \quad (3.24)$$

onde θ é ângulo de rotação da polarização linear, L é o comprimento percorrido pela onda na solução, a razão m/V é uma medida da concentração da substância na solução, m é a massa da substância e V é o volume da solução, e $\alpha(\lambda, T)$ é uma quantidade dependente da temperatura T da solução e do comprimento de onda λ da luz que sofre o efeito de rotação da polarização; como o ângulo θ depende dessas quantidades, essa dependência é expressa pela quantidade $\alpha(\lambda, T)$, cujos valores encontram-se tabelados. Desse modo, conhecida a substância, a temperatura da solução e o comprimento de onda, o valor de α é dado. Então, se o ângulo θ e o comprimento L forem medidos, se determina de imediato a concentração da substância. Portanto, o sacarímetro se vale desse princípio para medir a concentração de sacarose em solução de cana de açúcar. Evidentemente, no caso do sacarímetro, os valores usados para α são aqueles conhecidos para a sacarose, levando-se em conta os valores das variáveis λ e T . Para medir a atividade ótica de meios materiais também são usados outros parâmetros como, por exemplo, o chamado poder rotatório de um cristal ou de uma solução [25].

A atividade óptica pode ocorrer também em materiais opticamente ina-

tivos, como a água pura. Neste caso é necessário que se aplique um campo magnético no material para que nele seja induzida a rotação da polarização linear da luz. Essa atividade óptica induzida é o efeito Faraday, que é o tema da próxima seção. Em materiais opticamente ativos, como cristais de quartzo ou soluções de açúcares, a atividade óptica observada não depende de nenhuma influência externa e, por isso, é chamada atividade óptica natural do material.

3.2 Efeito Faraday

O fenômeno de natureza óptico-magnético descoberto por Faraday em 1845 consiste na rotação do plano de polarização de um feixe de luz monocromática e linearmente polarizada que atravessa um meio dielétrico sobre o qual aplica-se um campo magnético constante.

A influência da magnetização do meio na interação entre os campos eletromagnéticos da onda luminosa com os elétrons da rede formada pela estrutura molecular resulta em valores diferentes para os índices de refração dos componentes dextrógiro e levógiro da onda. Essa condição dá origem ao fenômeno de atividade óptica induzida magneticamente, que em homenagem ao cientista que o descobriu, é conhecido como efeito Faraday.

O objetivo fundamental da discussão teórica do efeito Faraday é obter, a partir do modelo clássico da estrutura molecular do dielétrico, os índices de refração dextrógiro e levógiro em função da frequência da onda propagante e, em seguida, obter a chamada constante de Verdet, quantidade fundamental para determinação do desvio angular da polarização da onda.

A discussão teórica é apresentada de três formas. A primeira, mais detalhada, nos moldes do livro de ótica de Sommerfeld [26], é útil para quem deseja prosseguir no estudo do efeito (cf. também [27]). Nela, são usadas livremente variáveis complexas e análise; acrescentamos a consideração inicial da força de amortecimento do elétron óptico no estado estacionário, em geral descartada de início nos formalismos usuais. A segunda é uma versão resumida ao máximo [3] (cf. também [25]) da anterior, útil para entender ra-

pidamente as idéias básicas que descrevem o efeito apelando para um mínimo de ferramentas teóricas. Finalmente, há uma discussão elementar nos moldes de Rossi [21] e Matveev [28], que tenta responder ao desafio de explicar teoricamente o efeito Faraday no ensino médio; evita-se o uso de derivadas e números complexos e substituem-se deduções por dados fenomenológicos para a realização certas passagens.

3.3 Formalismo geral

Experimentalmente é possível observar que o desvio angular sofrido pela polarização linear da onda luminosa é causado pela aplicação do campo magnético ao meio dielétrico na direção de propagação. Sendo a propagação da onda orientada na mesma direção e sentido do vetor unitário $\hat{\mathbf{z}}$ de um sistema de coordenadas inercial, em relação ao qual o meio dielétrico está em repouso, e adequadamente adotado para o estudo desse efeito, obtemos que o campo constante aplicado ao meio é da forma $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$.

A força de ligação do elétron na estrutura do material dielétrico, tal como discutido no estudo da dispersão, é da forma $\mathbf{F}_1 = -k\mathbf{s}$ (com k constante), sendo \mathbf{s} o vetor posição do elétron em relação a seu ponto de equilíbrio, isto é, $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, onde \mathbf{r}_0 e \mathbf{r} são respectivamente as posições do ponto de equilíbrio e instantânea do elétron em relação à origem do sistema de coordenadas adotado para o estudo do fenômeno.

A ação do campo eletromagnético da onda propagante sobre cada elétron do meio, também já discutida anteriormente, se reduz à aplicação da força

$$\mathbf{F}_2 = -e\mathbf{E}, \quad (3.25)$$

onde $-e$ é a carga do elétron. A contribuição do campo magnético da onda para a força \mathbf{F}_2 se mostra desprezível por ser proporcional à razão entre o módulo $|\dot{\mathbf{s}}|$ da velocidade de oscilação do elétron em torno do seu ponto de equilíbrio e a velocidade v de propagação da onda no meio, sendo $|\dot{\mathbf{s}}| \ll v$.

O campo magnético externo, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, que penetra no meio dielétrico,

aplica sobre cada elétron vibrante uma força

$$\mathbf{F}_3 = -e(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}). \quad (3.26)$$

Há ainda sobre cada um dos elétrons a força de amortecimento proporcional à velocidade de oscilação,

$$\mathbf{F}_4 = -b\dot{\mathbf{s}}, \quad (3.27)$$

onde b é uma constante positiva. Essa força de amortecimento tem origem no fato de que partículas aceleradas perdem energia na forma de radiação.

Sendo assim, a segunda lei de Newton fornece para um elétron de massa m da rede a equação de movimento

$$m\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{F}, \quad (3.28)$$

onde

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 \quad (3.29)$$

é a força resultante que nele atua. Substituindo as expressões dessas forças que acabamos de obter, essa equação toma a forma

$$m\ddot{\mathbf{s}} = -k\mathbf{s} - e\mathbf{E} - e(\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}) - b\dot{\mathbf{s}} \quad (3.30)$$

ou

$$m\ddot{\mathbf{s}} + b\dot{\mathbf{s}} + k\mathbf{s} = -e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B}). \quad (3.31)$$

A equação de movimento para um elétron do meio dielétrico é, portanto, a equação de um oscilador harmônico amortecido e forçado, e a sua solução é discutida na sequência do texto.

Quando a onda incide ortogonalmente à superfície do meio dielétrico, em $z = 0$, o campo elétrico oscilante está, por construção, na direção do vetor unitário $\hat{\mathbf{x}}$ do sistema de coordenadas adotado, e tem a forma $\mathbf{E}(0, t) = E(0, t)\hat{\mathbf{x}}$, onde $E(0, t) = E_0 \cos(\omega t)$ e $E_0 > 0$. Na região interna ao meio, dada a rotação observada, o campo elétrico apresenta componentes em $\hat{\mathbf{x}}$ e

$\hat{\mathbf{y}}$, isto é, tem a forma $\mathbf{E}(z, t) = E_x(z, t)\hat{\mathbf{x}} + E_y(z, t)\hat{\mathbf{y}}$.

Na equação (3.31), as forças aplicadas pelos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} sobre o elétron só apresentam componentes no plano gerado pelos vetores unitários $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$. Então, o componente em $\hat{\mathbf{z}}$ do vetor posição \mathbf{s} realiza um movimento harmônico amortecido cuja solução não apresenta interesse no estudo aqui realizado. Basta determinar o comportamento dos demais componentes sob a ação dos campos. Por esse motivo, o vetor posição é escrito na forma $\mathbf{s}(z, t) = s_x(z, t)\hat{\mathbf{x}} + s_y(z, t)\hat{\mathbf{y}}$, onde a dependência em z e t vem do fato de que o vetor \mathbf{s} é obtido como resposta do meio à ação do campo elétrico da onda, que por sua vez é função de z e t .

Substituindo $\mathbf{s} = s_x\hat{\mathbf{x}} + s_y\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ em (3.31), a equação toma a forma

$$\begin{aligned} m(\ddot{s}_x\hat{\mathbf{x}} + \ddot{s}_y\hat{\mathbf{y}}) + b(\dot{s}_x\hat{\mathbf{x}} + \dot{s}_y\hat{\mathbf{y}}) + k(s_x\hat{\mathbf{x}} + s_y\hat{\mathbf{y}}) = \\ -e(E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}}) - e[(\dot{s}_x\hat{\mathbf{x}} + \dot{s}_y\hat{\mathbf{y}}) \times B\hat{\mathbf{z}}], \end{aligned} \quad (3.32)$$

isto é,

$$\begin{aligned} m(\ddot{s}_x\hat{\mathbf{x}} + \ddot{s}_y\hat{\mathbf{y}}) + b(\dot{s}_x\hat{\mathbf{x}} + \dot{s}_y\hat{\mathbf{y}}) + k(s_x\hat{\mathbf{x}} + s_y\hat{\mathbf{y}}) = \\ -e(E_x\hat{\mathbf{x}} + E_y\hat{\mathbf{y}}) + e[(\dot{s}_xB)\hat{\mathbf{y}} - (\dot{s}_yB)\hat{\mathbf{x}}]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Essa equação vetorial, separada em seus componentes cartesianos, dá lugar ao sistema de equações escalares

$$\begin{cases} m\ddot{s}_x + b\dot{s}_x + ks_x = -e(E_x + \dot{s}_yB), \\ m\ddot{s}_y + b\dot{s}_y + ks_y = -e(E_y - \dot{s}_xB). \end{cases} \quad (3.34)$$

Nesse sistema, as equações estão acopladas nas variáveis s_x e s_y . Uma forma de obter equações desacopladas a partir de (3.33) consiste em substituir a base cartesiana formada pelos unitários $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ pela base da polarização circular formada pelos unitários $\hat{\mathbf{e}}_+$ e $\hat{\mathbf{e}}_-$, que correspondem, respectivamente, às polarizações esquerda e direita. As expressões que fornecem os vetores da base cartesiana como funções dos vetores da base circular são

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{e}}_+ + \hat{\mathbf{e}}_-) \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{y}} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{e}}_+ - \hat{\mathbf{e}}_-). \quad (3.35)$$

Substituindo essas expressões na equação (3.33), vem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(m\ddot{s}_x + b\dot{s}_x + ks_x)(\hat{\mathbf{e}}_+ + \hat{\mathbf{e}}_-) - \frac{i}{\sqrt{2}}(m\ddot{s}_y + b\dot{s}_y + ks_y)(\hat{\mathbf{e}}_+ - \hat{\mathbf{e}}_-) = \\ & -e\frac{1}{\sqrt{2}}(E_x + \dot{s}_y B)(\hat{\mathbf{e}}_+ + \hat{\mathbf{e}}_-) + e\frac{i}{\sqrt{2}}(E_y - \dot{s}_x B)(\hat{\mathbf{e}}_+ - \hat{\mathbf{e}}_-), \end{aligned} \quad (3.36)$$

isto é,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}[m(\ddot{s}_x + i\ddot{s}_y) + (b - ieB)(\dot{s}_x + i\dot{s}_y) + k(s_x + is_y)]\hat{\mathbf{e}}_- + \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}[m(\ddot{s}_x - i\ddot{s}_y) + (b + ieB)(\dot{s}_x - i\dot{s}_y) + k(s_x - is_y)]\hat{\mathbf{e}}_+ = \\ & -e\frac{1}{\sqrt{2}}(E_x + iE_y)\hat{\mathbf{e}}_- - e\frac{1}{\sqrt{2}}(E_x - iE_y)\hat{\mathbf{e}}_+. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Separando nessa equação os componentes $\hat{\mathbf{e}}_-$ e $\hat{\mathbf{e}}_+$, se obtêm as equações escalares

$$(\ddot{s}_x + i\ddot{s}_y) + (\gamma - i\Omega)(\dot{s}_x + i\dot{s}_y) + \omega_0^2(s_x + is_y) = -\frac{e}{m}(E_x + iE_y), \quad (3.38)$$

$$(\ddot{s}_x - i\ddot{s}_y) + (\gamma + i\Omega)(\dot{s}_x - i\dot{s}_y) + \omega_0^2(s_x - is_y) = -\frac{e}{m}(E_x - iE_y),$$

onde usamos que $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\gamma = b/m$ e $\Omega = eB/m$ são a frequência natural de oscilação do elétron no entorno do seu ponto de equilíbrio, a constante de amortecimento e a chamada frequência cíclotron, respectivamente.

No ponto em que se encontra o desenvolvimento deste estudo, convém ressaltar que ao passar os componentes da equação vetorial (3.33) para a base de polarização circular, os componentes E_x e E_y do campo elétrico da onda, bem como as variáveis s_x e s_y , devem ser tratados como representações complexas. Isso se deve, como já foi discutido anteriormente, à forma como os vetores da base circular são construídos.

Usando as quatidades convenientemente definidas por

$$s_{\pm}(z, t) = s_x \mp is_y \quad \text{e} \quad E_{\pm}(z, t) = E_x \mp iE_y, \quad (3.39)$$

as equações em (3.38) podem ser reescritas de forma mais simplificada por

$$\begin{aligned}\ddot{s}_- + (\gamma - i\Omega)\dot{s}_- + \omega_0^2 s_- &= -\frac{e}{m}E_-, \\ \ddot{s}_+ + (\gamma + i\Omega)\dot{s}_+ + \omega_0^2 s_+ &= -\frac{e}{m}E_+.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Essas novas equações não são acopladas e a obtenção de suas variáveis s_- e s_+ leva à obtenção das variáveis s_x e s_y a partir das definições em (3.39). Determinar as soluções para as equações em (3.40) requer, no entanto, que as funções $E_{\pm}(z, t)$ sejam conhecidas. Essas funções correspondem, na base de polarização circular, aos componentes do campo elétrico $\mathbf{E}(z, t)$ da onda que atravessa o meio dielétrico. A equação (2.79) mostra que

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}E_+(z, t)\hat{\mathbf{e}}_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}E_-(z, t)\hat{\mathbf{e}}_-. \tag{3.41}$$

Como E_0 é a amplitude do campo elétrico da onda e ω é a sua frequência, então, no interior do meio dielétrico,

$$E_+(z, t) = E_0 e^{i(k_+ z - \omega t)} \quad \text{e} \quad E_-(z, t) = E_0 e^{i(k_- z - \omega t)}. \tag{3.42}$$

As amplitudes iguais para as duas funções assegura que em $z = 0$ a polarização da onda permaneça na direção de $\hat{\mathbf{x}}$. Além disso, o desvio angular observado para a polarização justifica diferir os símbolos k_{\pm} dos números de onda para os componentes dextrógiros e levógiros. Se fossem iguais, as funções seriam idênticas e, como resultado disso, a onda atravessaria o meio dielétrico sem que sua polarização linear original sofresse qualquer alteração.

Substituindo em (3.40) as funções $E_{\pm}(z, t)$, o par de equações toma a forma

$$\begin{aligned}\ddot{s}_- + (\gamma - i\Omega)\dot{s}_- + \omega_0^2 s_- &= -\frac{e}{m}E_0 e^{i(k_- z - \omega t)}, \\ \ddot{s}_+ + (\gamma + i\Omega)\dot{s}_+ + \omega_0^2 s_+ &= -\frac{e}{m}E_0 e^{i(k_+ z - \omega t)}.\end{aligned}\tag{3.43}$$

A solução geral de cada uma delas é dada pela soma da solução geral da

equação homogênea associada com uma solução particular. No entanto, no regime estacionário, onde se concentra o interesse deste trabalho, o termo que corresponde à equação homogênea na solução geral torna-se desprezível, de modo que essa solução geral é reduzida à solução particular. As equações homogêneas associadas às equações em (3.43) são tratadas no apêndice C. Uma solução particular para a primeira equação é

$$s_-(z, t) = s_{0-} e^{i(k_- z - \omega t)}. \quad (3.44)$$

Substituindo (3.44) na primeira equação de (3.43), obtemos

$$s_{0-}(-\omega^2 - i\omega(\gamma - i\Omega) + \omega_0^2)e^{i(k_- z - \omega t)} = -\frac{e}{m}E_0e^{i(k_- z - \omega t)}, \quad (3.45)$$

isto é,

$$s_{0-}(-\omega^2 - \omega(\Omega + i\gamma) + \omega_0^2) = -\frac{e}{m}E_0 \quad (3.46)$$

ou

$$s_{0-} = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\Omega - i\omega\gamma}E_0. \quad (3.47)$$

Como γ é muito pequeno em relação às demais grandezas de mesma dimensão na expressão da constante⁴ s_{0-} , o que se justifica pelo fato de o meio ser transparente e não haver perdas significativas na intensidade da onda que o atravessa, então o termo imaginário $i\omega\gamma$ pode ser desprezado, resultando em

$$s_{0-} = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\Omega}E_0. \quad (3.48)$$

Com isso, a solução particular e, portanto, a solução geral no regime estacionário, toma a forma

$$s_-(z, t) = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\Omega}E_0e^{i(k_- z - \omega t)} \quad (3.49)$$

ou

$$s_-(z, t) = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - \omega\Omega}E_-(z, t). \quad (3.50)$$

⁴ s_{0-} é constante no tempo. No entanto, seu valor depende da frequência ω da onda que atravessa o meio e da intensidade B do campo magnético aplicado, porque $\Omega = eB/m$.

Para a segunda equação em (3.43) se obtém da mesma forma a solução

$$s_{\pm}(z, t) = \frac{-e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm \omega\Omega} E_{\pm}(z, t), \quad (3.51)$$

no regime estacionário.

De posse da solução para a equação de movimento de um elétron ligado, dada pelas representações dos componentes do vetor \mathbf{s} na base de polarização circular, se definem, nessa mesma base, as representações para os componentes do momento de dipolo elétrico por

$$p_{\pm}(z, t) = -es_{\pm}(z, t), \quad (3.52)$$

isto é,

$$p_{\pm}(z, t) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm \omega\Omega} E_{\pm}(z, t). \quad (3.53)$$

Sendo N o número de dipolos por unidade de volume no meio, as representações para os componentes do vetor polarização do meio dielétrico na base circular são

$$P_{\pm}(z, t) = Np_{\pm}(z, t), \quad (3.54)$$

isto é,

$$P_{\pm}(z, t) = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm \omega\Omega} E_{\pm}(z, t). \quad (3.55)$$

Escrevendo os componentes do vetor polarização por

$$P_{\pm}(z, t) = \epsilon_0 \chi_{e\pm} E_{\pm}(z, t), \quad (3.56)$$

onde $\chi_{e\pm}$ são as susceptibilidades elétricas do meio para os componentes circulares da onda monocromática propagante, se obtém

$$\chi_{e\pm} = \frac{Ne^2/\epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm \omega\Omega}. \quad (3.57)$$

Essas expressões das susceptibilidades na base circular são fundamentais para compreender a deflexão angular sofrida pela polarização da onda que atravessa o meio dielétrico. A diferença entre os valores de χ_{e+} e χ_{e-} é decorrente

da aplicação do campo magnético ao meio e dá origem à diferença entre os índices de refração n_+ e n_- para os componentes levógiro e dextrógiro da onda. Nesse caso, onde há diferença entre os índices de refração na base circular, o campo elétrico da onda no interior do meio apresenta comportamento semelhante ao que ocorre na atividade óptica natural e a sua representação complexa na base cartesiana é dada também pela equação (3.9), isto é,

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(\bar{n}k_0 z - \omega t)} \left[\cos\left(\frac{1}{2}\delta n k_0 z\right) \hat{\mathbf{x}} - \sin\left(\frac{1}{2}\delta n k_0 z\right) \hat{\mathbf{y}} \right], \quad (3.58)$$

onde $\bar{n} = (n_+ + n_-)/2$ e $\delta n = n_+ - n_-$, lembrando que $n_{\pm} = k_{\pm}/k_0$.

Avaliando a representação para o campo elétrico na base cartesiana, se verifica que a deflexão angular da polarização da onda no meio dielétrico é dada por

$$\theta(z) = -\frac{1}{2}\delta n k_0 z. \quad (3.59)$$

Essa expressão mostra de que forma o ângulo θ depende da variável z de acordo com um observador de frente para a propagação da onda. Resta determinar a diferença δn entre os índices de refração. Para isso, observamos que as susceptibilidades elétricas χ_{e+} , para a projeção esquerda da onda, e χ_{e-} , para a projeção direita, dadas em (3.57), estão relacionadas aos índices de refração n_+ e n_- por $n_{\pm}^2 = 1 + \chi_{e\pm}$. Consequentemente,

$$n_{\pm}^2 = 1 + \frac{Ne^2/\epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm \omega\Omega}, \quad (3.60)$$

donde

$$n_+^2 - n_-^2 = \frac{-2(Ne^2/\epsilon_0 m)\omega\Omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2\Omega^2}. \quad (3.61)$$

Na situação que nos interessa, estamos suficientemente longe da ressonância e o campo magnético é suficientemente fraco para que $|\omega\Omega|/|\omega_0^2 - \omega^2| < 1$. Por isso passamos a reter termos apenas até a primeira ordem em Ω . Portanto, podemos escrever

$$n_+^2 - n_-^2 = \frac{-2(Ne^2/\epsilon_0 m)\omega\Omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}, \quad (3.62)$$

isto é,

$$(n_+ - n_-)(n_+ + n_-) = \frac{-2(Ne^2/\epsilon_0 m)\omega\Omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \quad (3.63)$$

Como $\delta n = n_+ - n_-$ e $\bar{n} = (n_+ + n_-)/2$, se obtém, finalmente,

$$\delta n = \frac{-(Ne^2/\epsilon_0 m)\omega\Omega}{\bar{n}(\omega_0^2 - \omega^2)^2}, \quad (3.64)$$

onde, desprezando termos de segunda ordem em Ω ,

$$\bar{n} = \sqrt{1 + \frac{Ne^2/\epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2}}. \quad (3.65)$$

Substituindo em (3.59) o valor obtido em (3.64) para δn , vem

$$\theta(z) = \frac{(Ne^2/\epsilon_0 m)\omega\Omega}{2\bar{n}(\omega_0^2 - \omega^2)^2} k_0 z. \quad (3.66)$$

Usando $\Omega = eB/m$ e $k_0 = \omega/c$, resulta que o ângulo de deflexão da polarização da onda ao atravessar o meio dielétrico é dado em função de z por

$$\theta(z) = VBz, \quad (3.67)$$

onde

$$V = \frac{(Ne^3/\epsilon_0 m^2)\omega^2}{2\bar{n}c(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (3.68)$$

é uma característica do meio e da frequência da onda incidente conhecida como **constante de Verdet**.

O resultado (3.67) mostra que se o meio dielétrico tiver um comprimento L , a onda deixará o meio em $z = L$ com uma nova polarização linear girada de um ângulo

$$\theta(L) = VBL, \quad (3.69)$$

em relação à polarização em $z = 0$.

Para um dado meio a constante de Verdet depende da frequência da onda que nele se propaga. Portanto, as luzes vermelha e verde, por exemplo, estarão submetidas a valores diferentes para a constante de Verdet ao se

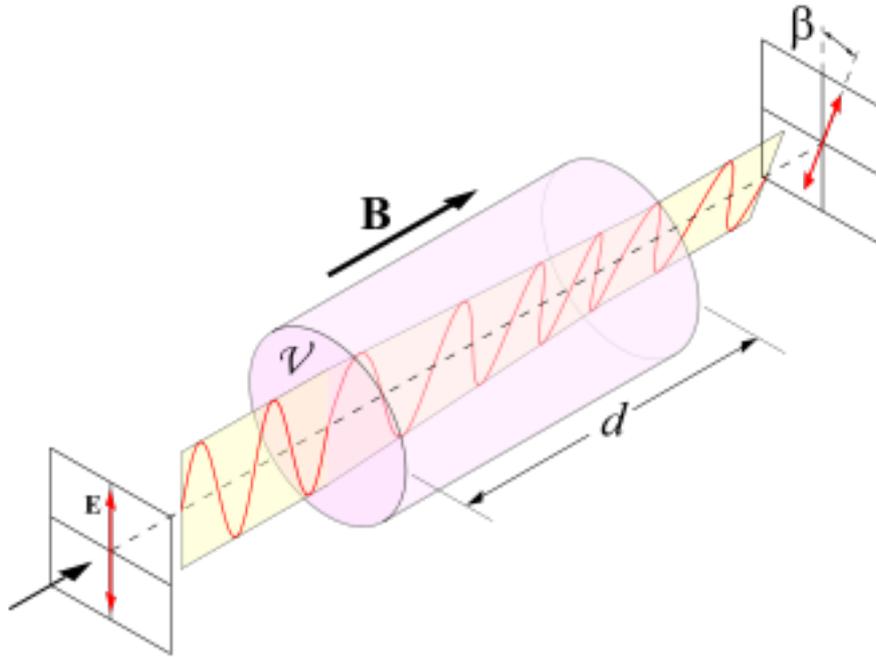


Figura 3.2: Atividade óptica em meio magnetizado: efeito Faraday.

propagarem em um mesmo material. A Tabela 3.3 a seguir mostra alguns valores dessa constante para luz com $589,3 \text{ nm}$ de comprimento de onda.

Substância	$T(^{\circ}C)$	$V(\text{min}/G\text{cm})$	$V(\text{rad}/T\text{m})$
Água	20	0,0131	3,8108
Vidro Flint LF	18	0,0317	9,2215
Vidro Flint EDF	18	0,0442	12,8578

Tabela 3.1: Constantes de Verdet de algumas substâncias para $\lambda = 5893$

O resultado obtido em (3.67) mostra ainda que, para um observador colocado de frente para a propagação da onda, o desvio angular sofrido pela polarização linear acontece no sentido anti-horário na medida em que a variável z aumenta, já que a constante de Verdet é positiva. Se houver uma reflexão e a onda retornar no sentido contrário, o campo magnético aplicado ao meio estará, nesse caso, contrário à propagação da onda, o que corresponde a alterar a expressão em (3.67) acrescentando nela um sinal negativo.

Como consequência dessa alteração, o desvio angular na polarização linear da onda refletida ocorre no sentido horário de acordo com um observador de frente para a propagação dessa onda refletida. Portanto, o desvio angular da polarização depois da reflexão adiciona-se ao desvio angular ocorrido antes da reflexão; a reflexão intensifica o desvio angular. Já na atividade óptica natural, havendo reflexão da onda no meio opticamente ativo, o desvio angular depois da reflexão ocorre de tal forma a eliminar o ocorrido antes e, com isso, enquanto a onda refletida se propaga, a sua polarização linear tende a retornar para a configuração que apresentava ao penetrar no meio, o que caracteriza uma invariância sob reversão temporal. Essa diferença entre o fenômeno de atividade óptica induzido magneticamente, conhecido como efeito Faraday, e o fenômeno da atividade óptica natural mostra que se deve ter cuidado ao chamar de meio opticamente ativo aquele sobre o qual se faz necessário a aplicação do campo magnético para que a rotação da polarização linear da onda propagante aconteça. Para alguns autores, o meio opticamente ativo é aquele que realiza a atividade óptica natural, porém, não há nenhum problema em usar o mesmo termo para denominar o meio magnetizado no qual se realiza o efeito Faraday, desde de que as peculiaridades de cada fenômeno sejam conhecidas.

Vale ressaltar que o efeito Faraday não é o único efeito magneto-óptico. Há vários outros, como por exemplo o Cotton-Mouton e o Voigt. O efeito Cotton-Mouton consiste na birrefringência de um líquido induzida por um campo magnético perpendicular à propagação da onda luminosa polarizada. Esse efeito leva esse nome porque Aimé Cotton e Henri Mouton foram os primeiros a investigá-lo com bastante detalhe entre 1905 e 1907 [29], muito embora Kerr [30], em 1901, tivesse observado uma fraca birrefringência em uma suspensão de Fe_3O_4 em água sob a ação de um campo magnético e Majorana [31] tivesse observado o mesmo comportamento em 1902 em soluções coloidais de ferro. No entanto, em contraste com o efeito Faraday, o efeito Cotton-Mouton é de segunda ordem no campo magnético (Δn é proporcional a B^2). Esse efeito, quando observado em gases, é conhecido pelo nome de efeito Voigt.

Para relacionar o efeito Faraday com o formalismo de meios anisotrópicos

apresentado na seção 2.7 e, principalmente, com o formalismo de meios opticamente ativos apresentado na seção 3.1, demonstra-se que o efeito Faraday é descrito por uma relação constitutiva da forma

$$\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon(0)\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + i\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \times \mathbf{g}(\mathbf{B}) , \quad (3.70)$$

a ser comparada com (3.23), na qual, porém, o vetor de giracão $\mathbf{g}(\mathbf{B})$ não é mais determinado pela assimetria quiral microscópica do meio com atividade ótica natural, mas pelo campo magnético externo \mathbf{B} aplicado ao meio sem atividade ótica natural, e $\epsilon(0)$ é a parte da permissividade que independe do campo magnético externo. A demonstração pode ser feita usando-se as suscetibilidades $\chi_{e\pm}$ obtidas em (3.57) no formalismo geral e transformando as expressões dos campos em base circular de volta para as expressões em base cartesiana. Obtemos assim que na relação constitutiva (3.70)

$$\epsilon(0) = \epsilon_0 + \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{g}(\mathbf{B}) = \frac{(Ne^2/m)\omega e\mathbf{B}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 m} . \quad (3.71)$$

3.4 Formalismo resumido

Após apresentar o formalismo geral do efeito Faraday, e antes de passar ao seu formalismo elementar, de objetivos didáticos, apresentamos agora um formalismo resumido [3], no qual é usado um mínimo necessário para se chegar ao efeito a partir do modelo molecular clássico.

Novamente, o ponto de partida é a segunda lei de Newton para o elétron ligado,

$$m\ddot{\mathbf{s}} + k\mathbf{s} = -e\mathbf{E} - e\dot{\mathbf{s}} \times \mathbf{B} , \quad (3.72)$$

na qual o campo magnético é constante e aplicado ao longo do eixo z de propagação da luz, e os vetores campo elétrico \mathbf{E} e deslocamento \mathbf{s} estão no plano ortogonal à propagação. Decompondo essa equação nos eixos x e y , se obtém

$$\ddot{s}_x + \frac{e}{m}\dot{s}_y B + \omega_0^2 s_x = -\frac{e}{m}E_x \quad \text{e} \quad \ddot{s}_y - \frac{e}{m}\dot{s}_x B + \omega_0^2 s_y = -\frac{e}{m}E_y . \quad (3.73)$$

Essas equações são acopladas, mas é possível eliminar o acoplamento com a substituição das variáveis reais s_x e s_y pela complexa $s_x + is_y$. Efetuando essa substituição, o par de equações em (3.73) é equivalente à equação complexa

$$\frac{d^2}{dt^2}(s_x + is_y) - i\frac{eB}{m}\frac{d}{dt}(s_x + is_y) + \omega_0^2(s_x + is_y) = -\frac{e}{m}(E_x + iE_y). \quad (3.74)$$

Por hipótese, a luz é linearmente polarizada ao longo do eixo x antes de penetrar no meio dielétrico, isto é, em $z < 0$. Então ela pode ser escrita como a superposição das ondas circularmente polarizadas em que

$$E_x = E_0 \cos(k_0z - \omega t) \quad \text{e} \quad E_y = \pm E_0 \sin(k_0z - \omega t), \quad (3.75)$$

onde k_0 é o número de onda no vácuo e os sinais mais ou menos se referem à polarização circular direita ou esquerda, respectivamente. Seguindo a idéia de Fresnel, ao penetrar no meio a onda continua uma superposição de ondas circularmente polarizadas, agora porém com índices de refração diferentes; n_+ e n_- para as polarizações direita e esquerda, respectivamente. Assim, a onda no meio dielétrico, isto é, em $z \geq 0$, pode ser escrita como a superposição das ondas circularmente polarizadas em que

$$E_x = E_0 \cos(n_{\pm}k_0z - \omega t) \quad \text{e} \quad E_y = \pm E_0 \sin(n_{\pm}k_0z - \omega t). \quad (3.76)$$

Neste caso, o membro direito da equação (3.74) é da forma

$$E_x + iE_y = E_0 e^{\pm i(k_0z - \omega t)} \quad \text{ou} \quad E_x + iE_y = E_0 e^{\pm i(n_{\pm}k_0z - \omega t)}, \quad (3.77)$$

se $z < 0$ ou se $z \geq 0$, respectivamente. Portanto, supondo que a solução de (3.74) apresenta a forma

$$s_x + is_y = s_0 e^{\pm i(n_{\pm}k_0z - \omega t)} \quad (3.78)$$

no interior do meio dielétrico ($z \geq 0$), por substituição em (3.74), resulta

$$s_0 = -\frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \mp eB\omega/m} E_0. \quad (3.79)$$

Portanto,

$$\mathbf{s} = -\frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \mp eB\omega/m} \mathbf{E}. \quad (3.80)$$

Como a onda propagante é monocromática, então valem as igualdades

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + N(-e\mathbf{s})$$

e

$$n^2 = \varepsilon/\varepsilon_0.$$

Dessa forma, os índices de refração para as projeções circulares da onda de frequência ω que atravessa o meio dielétrico são dados por

$$n_{\pm}^2 = 1 + \frac{Ne^2/\varepsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2 \mp eB\omega/m}. \quad (3.81)$$

Esse resultado é o mesmo obtido anteriormente no caso do formalismo geral, porém chegou-se a ele por procedimento muito mais econômico. A partir dos valores para n_+ e n_- chega-se à constante de Verdet substituindo-os na expressão (3.59), como foi feito anteriormente.

3.5 Um formalismo elementar

Agora passamos ao que chamamos formalismo elementar do efeito Faraday. Por elementar entendemos que nele não se usam números complexos e, para tratar a Segunda Lei de Newton, não são usadas derivadas, mas apenas conhecimentos básicos sobre a cinemática e dinâmica dos movimentos circulares uniformes. Não esperamos que o formalismo, tal qual proposto nessa seção, possa ser diretamente apresentado ao estudante típico do ensino médio, mas que possa ser útil ao professor do ensino médio que pretenda enfrentar o desafio de apresentar algum fundamento teórico do efeito Faraday a seus estudantes.

Considere inicialmente duas ondas circularmente polarizadas de mesma frequência e se propagando no vácuo em sentidos opostos. Os campos elétri-

cos das ondas dextrógira e levógira são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{E}_D = E_0 \cos(kz - \omega t + \delta_D) \hat{\mathbf{x}} + E_0 \sin(kz - \omega t + \delta_D) \hat{\mathbf{y}}, \quad (3.82)$$

$$\mathbf{E}_L = E_0 \cos(kz - \omega t + \delta_L) \hat{\mathbf{x}} - E_0 \sin(kz - \omega t + \delta_L) \hat{\mathbf{y}},$$

onde k é um número de onda e δ_D e δ_L são constantes de fase. Embora esses campos possam ser representados em notação complexa, as expressões em (3.82) são suficientes e convenientes para o propósito de apresentar um formalismo elementar do efeito Faraday. Definindo as quantidades

$$\theta_D = kz + \delta_D, \quad \theta_L = kz + \delta_L, \quad \Phi_D = \theta_D - \omega t \quad \text{e} \quad \Phi_L = -(\theta_L - \omega t), \quad (3.83)$$

ao substituí-las em (3.82), as expressões para os campos elétricos das ondas com polarizações dextrógira e levógira são reescritas na forma

$$\mathbf{E}_D = E_0 \cos(\Phi_D) \hat{\mathbf{x}} + E_0 \sin(\Phi_D) \hat{\mathbf{y}}, \quad (3.84)$$

$$\mathbf{E}_L = E_0 \cos(\Phi_L) \hat{\mathbf{x}} + E_0 \sin(\Phi_L) \hat{\mathbf{y}},$$

que deixa explícito que Φ_D é o ângulo que \mathbf{E}_D faz com o eixo x e Φ_L o ângulo que \mathbf{E}_L faz com o mesmo eixo, como mostra a figura 3.3.

Como esses campos têm o mesmo módulo, $|\mathbf{E}_D| = |\mathbf{E}_L| = E_0$, eles formam ângulos simétricos em relação ao campo resultante. Denotando por θ o ângulo que a superposição faz com o eixo x , então

$$\Phi_L - \theta = \theta - \Phi_D, \quad (3.85)$$

isto é,

$$\theta = \frac{\Phi_D + \Phi_L}{2}. \quad (3.86)$$

Usando as definições de Φ_D e Φ_L escritas em (3.83), resulta

$$\theta = \frac{1}{2}(\theta_D - \theta_L). \quad (3.87)$$

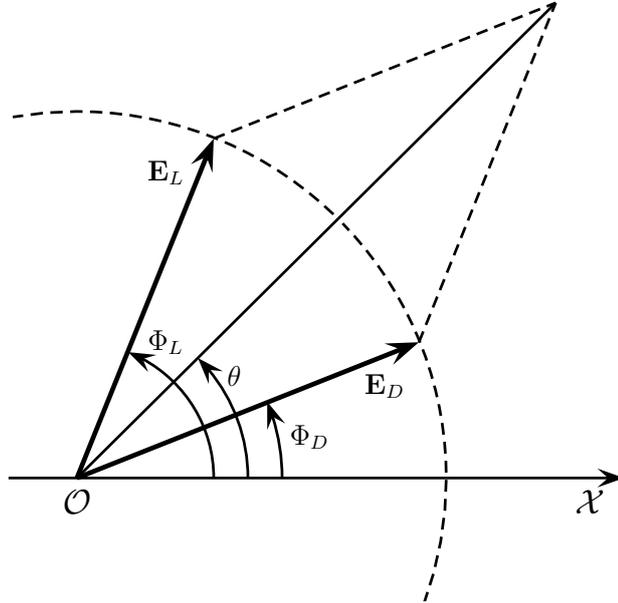


Figura 3.3: A resultante de vetores de mesmo módulo está na bissetriz do ângulo entre os vetores: $\Phi_L - \theta = \theta - \Phi_D$

Uma vez que esse ângulo não depende do tempo, a superposição das duas ondas polarizações circulares opostas, e com defasagem constante, é uma onda linearmente polarizada cujo campo elétrico tem a direção na bissetriz do ângulo formado pelos campos elétricos de cada onda. Naturalmente, a amplitude da onda resultante é o dobro da amplitude das ondas circulares superpostas. Na obtenção desse resultado, também fica claro que é sempre possível escrever uma onda linearmente polarizada como a superposição de duas ondas de mesma frequência, com polarizações circulares opostas e defasagem constante.

Em um meio opticamente ativo, como os índices de refração são diferentes para ondas dextrógiras e levógiras, eles são expressos respectivamente por n_D e n_L . Nesse caso,

$$\theta_D = n_D k_0 z + \delta_D \quad \text{e} \quad \theta_L = n_L k_0 z + \delta_L, \quad (3.88)$$

onde k_0 é o número de onda no vácuo. Tomando $\delta_D = 0$ e $\delta_L = 0$, o que

equivale a supor que em $z = 0$ a superposição das duas ondas encontra-se na direção do eixo x , resulta de (3.87) que

$$\theta = \frac{1}{2}(n_D - n_L)k_0z \quad (3.89)$$

ou, usando $\delta n = n_L - n_D$ (definição análoga ao do formalismo geral),

$$\theta = -\frac{\delta n}{2}k_0z. \quad (3.90)$$

Este resultado é o mesmo já obtido anteriormente. Nele, se vê que o ângulo θ varia em função da coordenada z . Portanto, em um meio opticamente ativo, ocorre desvio angular no plano de polarização linear da onda que o atravessa.

Agora, resta obter n_D e n_L no caso do meio com atividade ótica induzida por campo magnético, isto é, no caso do efeito Faraday. Usando o modelo clássico para a estrutura molecular do meio, sabe-se que o elétron da molécula obedece à segunda lei de Newton na forma

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3. \quad (3.91)$$

onde \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 e \mathbf{F}_3 são a força elástica restauradora da molécula sobre o elétron, a força exercida pelo campo elétrico da onda incidente e a força magnética exercida pelo campo magnético externo na direção e sentido de propagação da onda. Como já foi discutido, o efeito do campo magnético da onda incidente é desprezível para as velocidades do elétron envolvidas; também é pequena a força de amortecimento do movimento do elétron, porque a frequência da onda incidente está muito afastada das bandas de absorção. Além disso, se supõe que o regime estacionário já tenha sido atingido. As forças em (3.91) são dadas por

$$\mathbf{F}_1 = -k\mathbf{s}, \quad \mathbf{F}_2 = -e\mathbf{E} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_3 = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.92)$$

Como há interesse em obter os índices de refração para as ondas circularmente polarizadas, em cada uma delas o campo elétrico é um vetor de módulo constante que gira com velocidade angular igual à frequência angular

ω . Se conjecturarmos que o elétron realiza um movimento circular uniforme, com velocidade \mathbf{v} de módulo $v = \omega s$ e aceleração $\mathbf{a} = -\omega^2 s \hat{\mathbf{s}}$, as três forças presentes serão radiais. As forças elástica e elétrica teriam as formas respectivas $\mathbf{F}_1 = -k\mathbf{s} = -ks \hat{\mathbf{s}}$ e $\mathbf{F}_2 = -e\mathbf{E} = -eE \hat{\mathbf{s}}$, e a força magnética seria da forma $\mathbf{F}_3 = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mp evB \hat{\mathbf{s}}$, onde o duplo sinal leva em conta o sentido levógiro ou dextrógiro da onda circularmente polarizada, respectivamente. Resta saber se essa conjectura é verdadeira, *i.e.*, se esse movimento circular conjecturado satisfaz à segunda lei de Newton (3.91), ou seja, se

$$-m\omega^2 s \hat{\mathbf{s}} = -ks \hat{\mathbf{s}} - eE \hat{\mathbf{s}} + \mp e\omega s B \hat{\mathbf{s}}. \quad (3.93)$$

É fácil ver que a segunda lei de Newton é satisfeita para o movimento circular uniforme de raio

$$s = -\frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm eB\omega/m} E, \quad (3.94)$$

onde ω_0 é a frequência angular natural de oscilação do elétron na molécula, *i.e.*, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, e o duplo sinal leva em conta o sentido levógiro ou dextrógiro da onda circularmente polarizada. Portanto,

$$\mathbf{s} = -\frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm eB\omega/m} \mathbf{E}. \quad (3.95)$$

Dessa forma, a expressão $\mathbf{P} = N(-es)$ para a polarização do meio fica

$$\mathbf{P} = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm eB\omega/m} \mathbf{E}, \quad (3.96)$$

de modo que

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \left(\varepsilon_0 + \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm eB\omega/m} \right) \mathbf{E}. \quad (3.97)$$

Usando o fato de que $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, obtemos

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm eB\omega/m}. \quad (3.98)$$

Finalmente, pela relação geral $n^2 = \varepsilon/\varepsilon_0$ entre índice de refração n e permis-

sividade ε do meio, se obtém

$$n_L^2 = 1 + \frac{Ne^2/\varepsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2 + eB\omega/m} \quad \text{e} \quad n_D^2 = 1 + \frac{Ne^2/\varepsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2 - eB\omega/m} \quad (3.99)$$

para os índices de refração levógiro e dextrógiro. Como esse resultado mostra que é o campo magnético \mathbf{B} aplicado ao meio dielétrico o responsável pela diferença entre n_L e n_D , diferença esta que dá origem à rotação do plano de polarização da luz ao atravessar o meio conforme se vê na equação (3.90), então, com isso, o fenômeno do efeito Faraday fica compreendido por completo.

As três explicações e demonstrações apresentadas anteriormente para se entender o efeito Faraday foram feitas no contexto da física clássica, com o auxílio das leis de Newton e das equações de Maxwell. Embora os resultados obtidos por métodos clássicos sejam muito satisfatórios e em muito bom acordo com os experimentos, como por exemplo a expressão para a constante de Verdet, um estudo mais rigoroso do efeito Faraday requer a utilização da mecânica quântica. No entanto, explicar esse efeito a partir da mecânica quântica foge ao escopo dessa dissertação, de modo que sugerimos ao leitor interessado em aprender um tratamento quântico desse efeito o trabalho de P.R. Berman [32]. Em seu artigo, além de uma demonstração clássica, Berman apresenta duas demonstrações quânticas, uma delas baseada nas equações de Heisenberg e a outra, na equação de Schrödinger.

A rotação do plano de polarização da luz através do efeito Faraday é uma das mais diretas e importantes manifestações do uso do magnetismo na quebra da simetria de inversão temporal. A observação do efeito é comumente realizada quando uma onda luminosa atravessa um meio transparente de dimensões macroscópicas no qual se aplica um campo magnético de forma apropriada. No entanto, esse mesmo efeito de rotação do plano de polarização pode ser observado também fazendo uma onda luminosa atravessar uma única camada atômica de carbono, o grafeno. A realização do efeito Faraday através do grafeno, além de surpreendente, em razão da dimensão nanoscópica da estrutura atravessada pela luz, é também passível de aplicações em comunicação óptica, armazenamento de dados e computação. Essas aplica-

ções estão relacionadas ao uso do grafeno em dispositivos magneto-ópticos modernos [33].

Capítulo 4

Efeito Faraday: experimento

Neste capítulo apresentaremos um experimento de baixo custo projetado para a verificação do efeito Faraday. Como a sua construção é realizada de forma artesanal, iniciamos o capítulo discutindo os precedimentos de montagem do aparato experimental e, ao mesmo tempo, informando a função das partes que o compõem. Em seguida, daremos a instrução de como realizar o experimento e medir o ângulo de desvio da polarização do feixe de luz que atravessa o meio dielétrico. Essa instrução é realizada em quatro passos, sendo os três primeiros suficientes para a verificação do efeito e o quarto necessário para a obtenção da medida do ângulo de desvio da polarização. Há ainda, ao final do capítulo, uma discussão sobre a estimativa do ângulo de desvio da polarização levando em conta os dados conhecidos sobre o experimento.

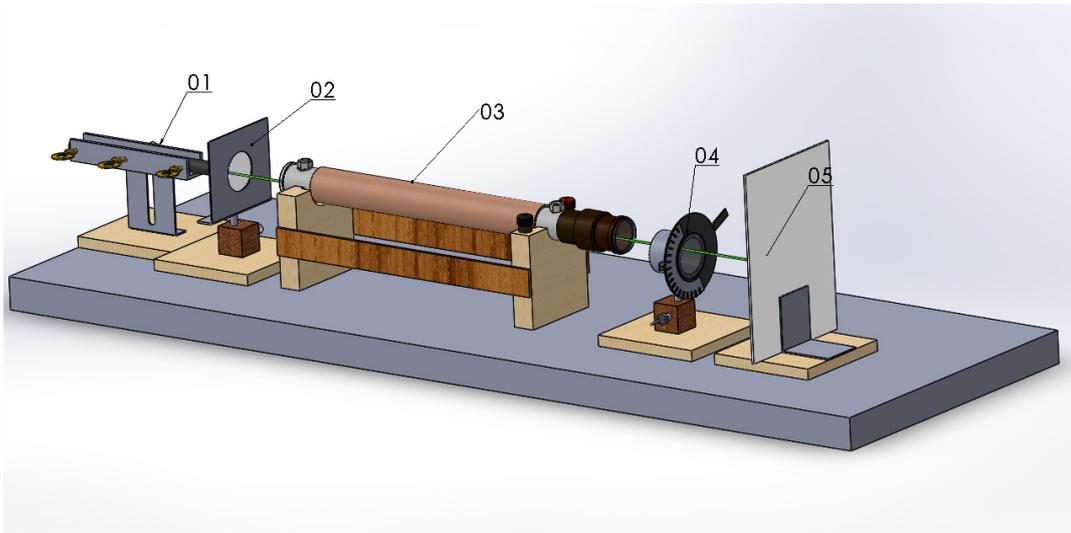
4.1 Construção do experimento

A montagem do aparato experimental para a realização do efeito Faraday é constituído pelos cinco elementos a seguir.

01. Fonte de luz (laser) e seu suporte.
02. Polarizador com eixo de transmissão fixo e seu suporte.
03. Bobina e seu suporte.
04. Polarizador com eixo de transmissão variável (analisador) e seu suporte.

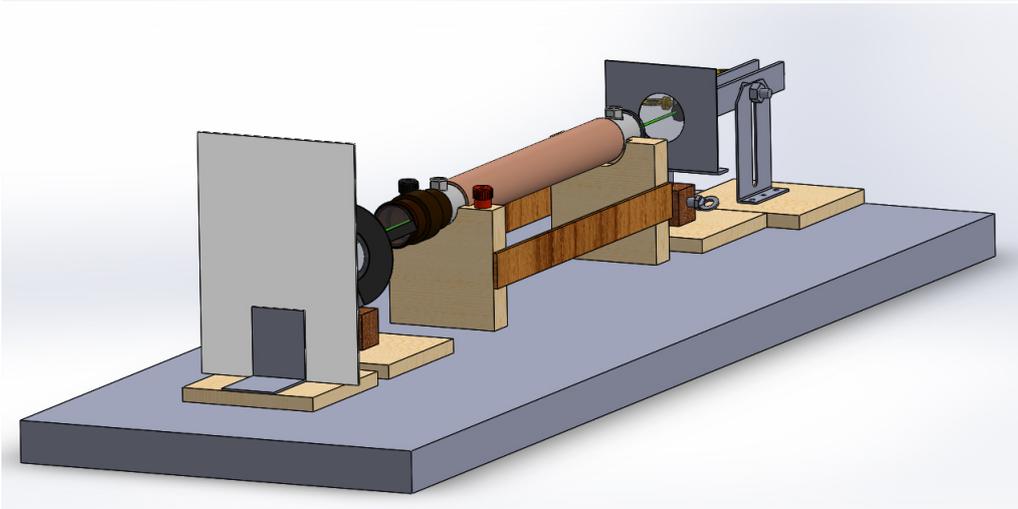
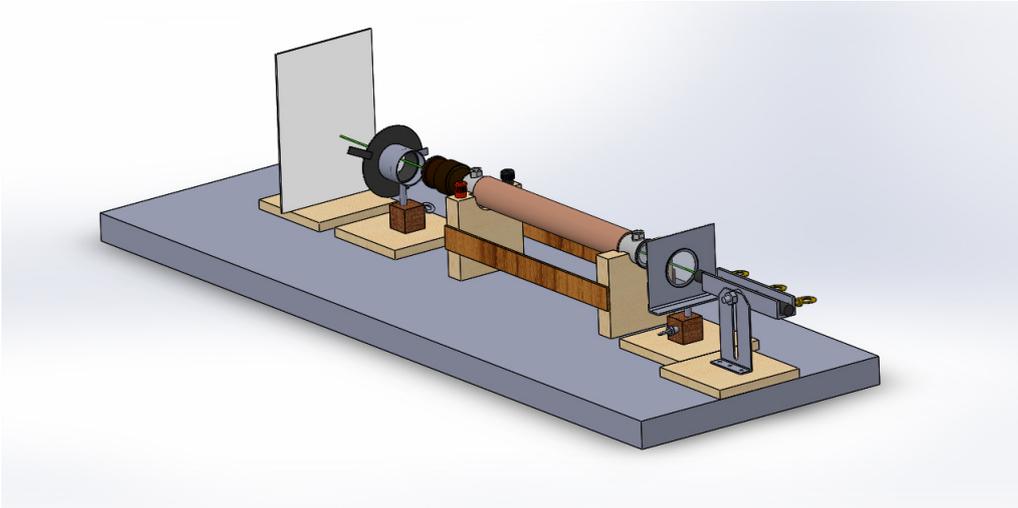
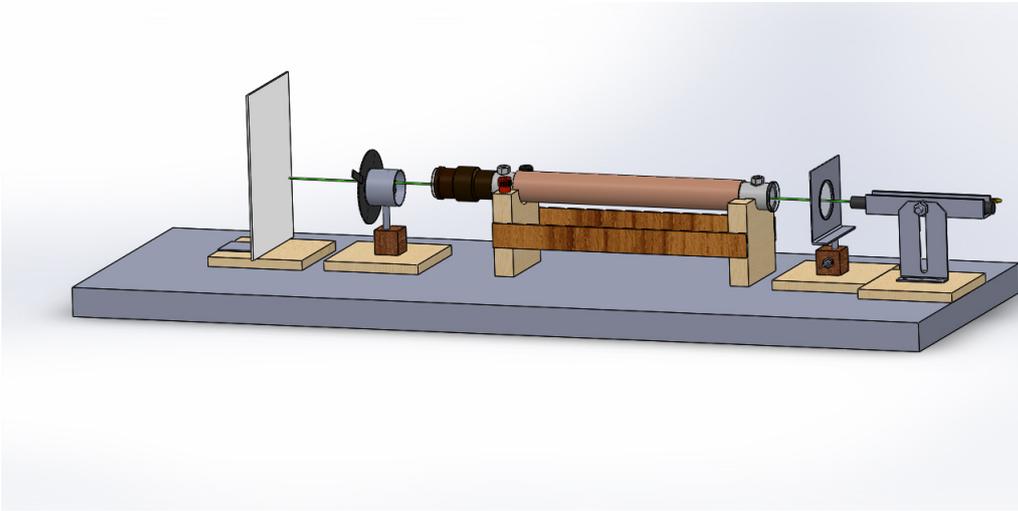
05. Anteparo.

Esses elementos em conjunto e dispostos de maneira que se verifique o fenômeno pretendido estão ilustrados na figura abaixo.



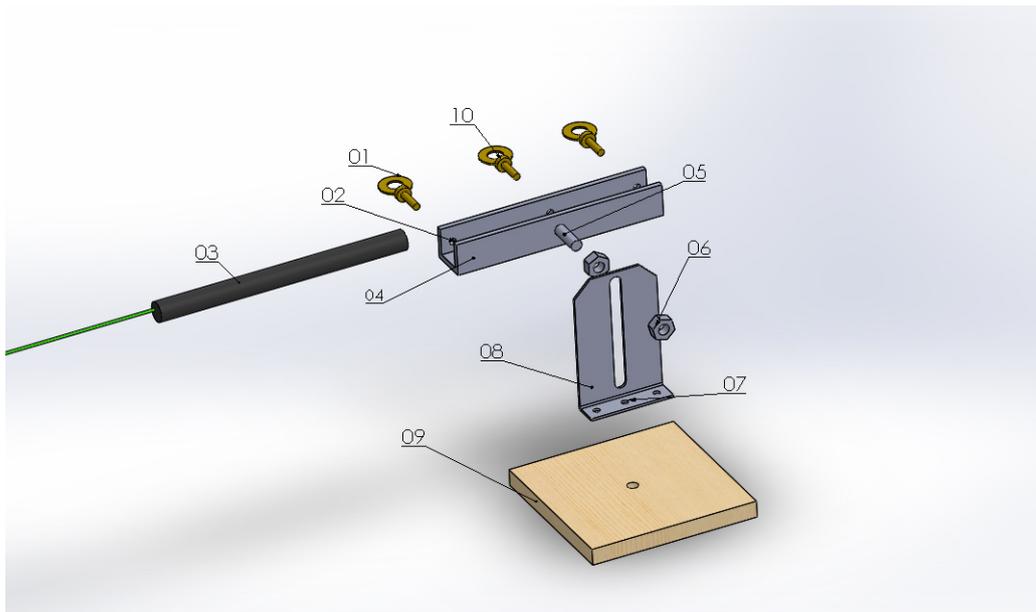
Os elementos que compõem o aparato e que foram identificados na figura anterior desempenham funções específicas na realização do experimento. Além disso, a construção de cada um deles apresenta um detalhamento técnico considerável. Por essa razão, cada elemento será descrito separadamente a seguir, levando em conta aspectos tanto do ponto de vista da sua função no fenômeno quanto do ponto de vista da sua construção.

As três imagens a seguir mostram o aparato completo por ângulos diferentes.



1. Fonte de luz (laser) e seu suporte.

Usa-se uma caneta (ou apontador) laser como fonte da luz que estará presente na realização do experimento. A luz proveniente da caneta é do tipo natural, isto é, não apresenta polarização definida. Os detalhes para a montagem deste elemento estão apresentados na figura abaixo.

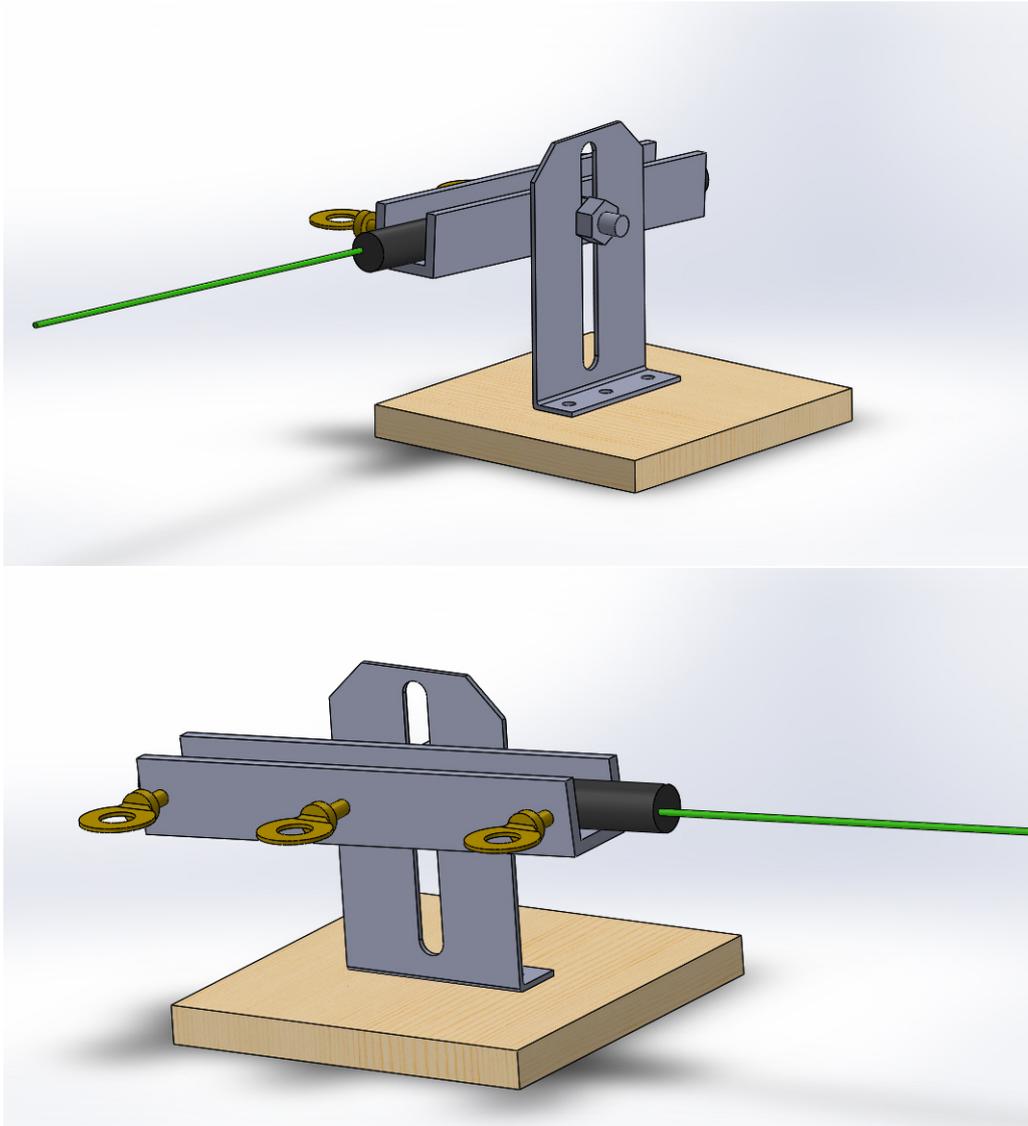


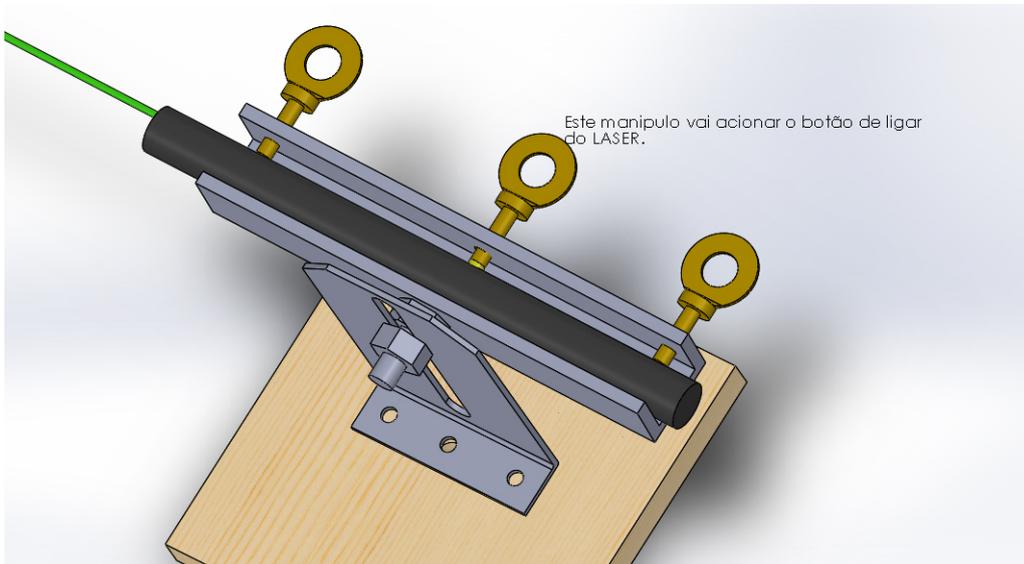
Legenda da figura:

1. Parafuso (manípulo) M4.
2. Rosca M4 (nos três furos).
3. Caneta LASER.
4. Canaleta de alumínio em forma de "U" com 16 *mm* interno.
5. Parafuso de 1/4" fixado na canaleta (cortar a cabeça do parafuso).
6. Porca de 1/4" e porca borboleta de 1/4" (a chapa de metal fica entre elas).
7. mecanismo de fixação na base com três parafusos para madeira de 15 *mm* (cabeça panela).
8. Chapa de metal de 85 *mm* por 50 *mm*. Fazer dobra a 15 *mm* da lateral, paralelamente ao lado menor. Fazer rasgo oblongo com 7 *mm* de espessura ao longo da extensão da peça. Serve para regular a altura do laser.

9. Base de madeira de 100 *mm* por 100 *mm* por 20 *mm*.
10. Parafuso que aciona o botão de ligar a caneta.

As três imagens a seguir mostram a caneta laser em seu suporte por ângulos diferentes.

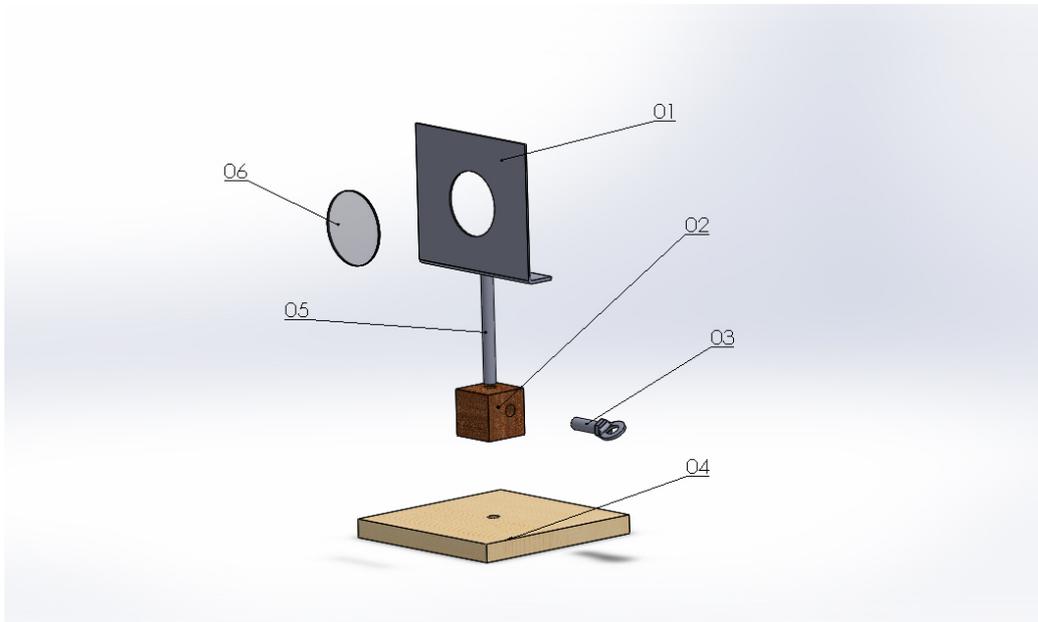




Não é demais prevenir os alunos que as fontes de luz intensa, como o laser, ao serem manuseadas nunca devem ser direcionadas aos olhos de qualquer um dos presentes.

2. Polarizador com eixo de transmissão fixo e seu suporte.

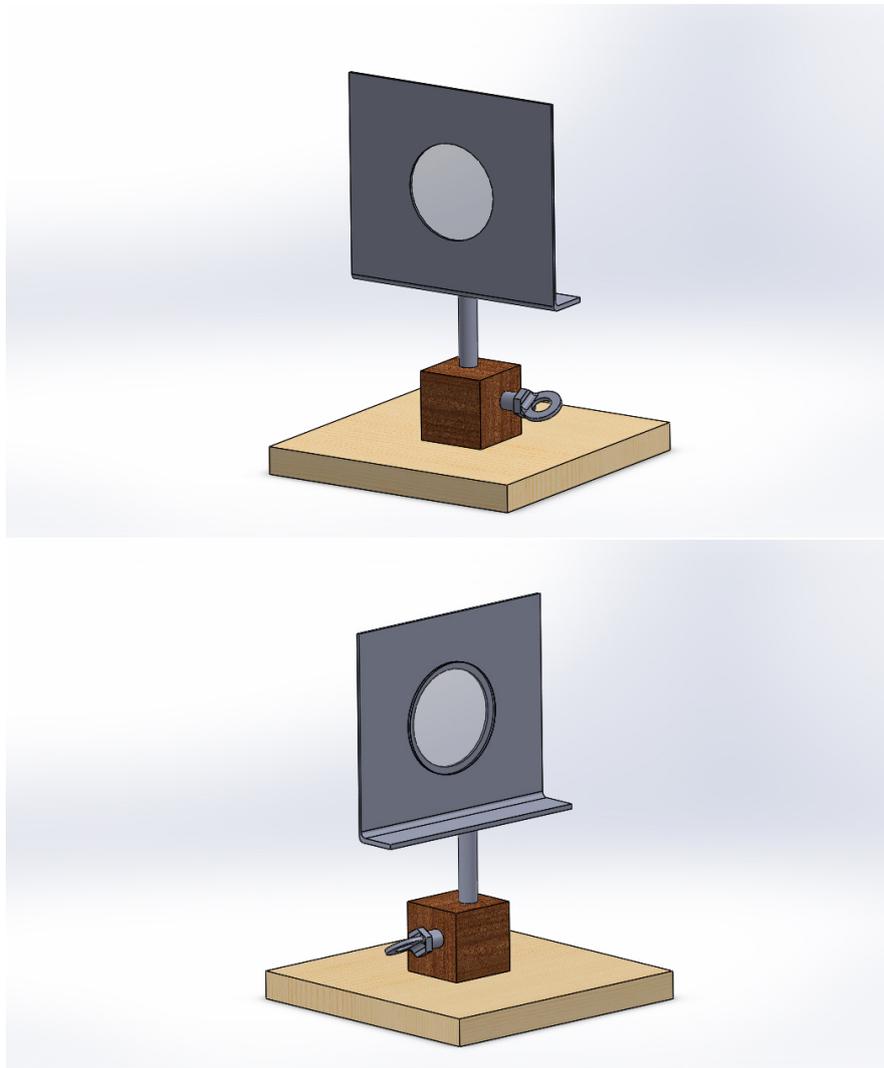
O filtro polarizador com eixo de transmissão fixo transforma a luz não polarizada emitida pela caneta em luz polarizada linearmente ao atravessá-lo. A figura a seguir mostra em detalhes a montagem desse elemento.



Legenda da figura:

1. Chapa de aço de 70 *mm* por 85 *mm* por 0,75 *mm*. Fazer dobra a 15 *mm* da lateral, paralelamente ao lado menor. Fazer um furo no centro com 35 *mm* de diâmetro.
2. Coluna de madeira de 30 *mm* por 30 *mm* por 40 *mm*. Fazer rosca de 1/4 na lateral e furo com 10 *mm* de diâmetro no centro para encaixar a barra.
3. Parafuso (manípulo) de 1/4".
4. Base de madeira de 100 *mm* por 100 *mm* por 20 *mm*. Fazer furo com 10 *mm* de diâmetro no centro.
5. Barra cilíndrica de aço de 3/8" com 60 *mm* de comprimento. Soldar na chapa com estanho.
6. Polarizador. Fixar com resina epóxi ou fita crepe.

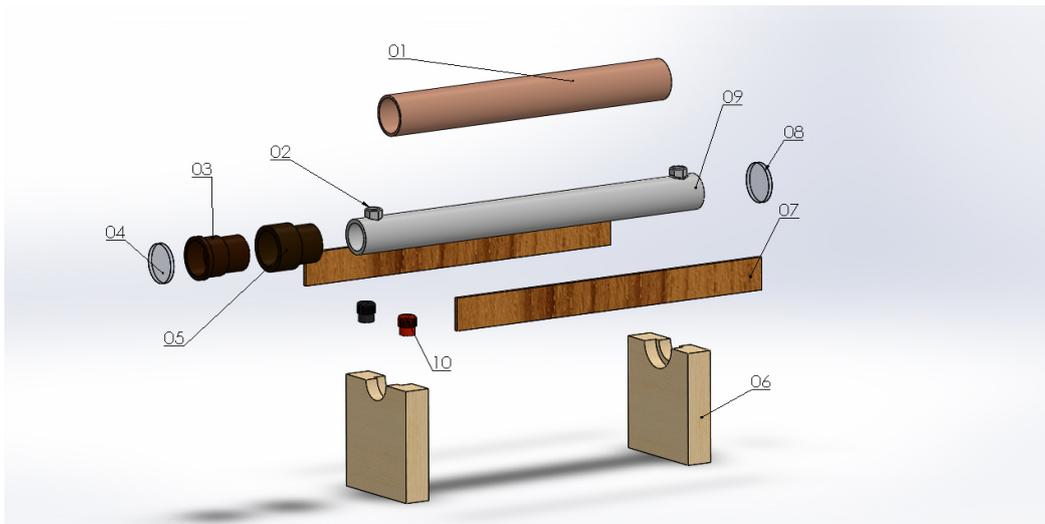
As próximas duas imagens mostram por ângulos diferentes o polarizador fixo em seu suporte.



3. Bobina e seu suporte.

Ao deixar o polarizador fixo, a luz, agora linearmente polarizada, penetra no meio dielétrico contido no interior do tubo de aço sobre o qual a bobina está apoiada. Ao ligar a bobina em uma fonte de tensão, a corrente elétrica nela gerada será responsável pelo surgimento de um campo magnético no meio dielétrico. Esse campo magnético tem a direção do eixo da região cilíndrica formada pela bobina, seu apoio de aço e o material nele contido, isto é, a direção desse campo é a mesma da propagação do feixe de luz. Essa é uma condição necessária para a maximização do efeito de rotação gradual

da polarização linear da luz, conforme ela avança pelo material dielétrico que está submetido à ação do campo magnético. O material usado para ocupar o volume do tubo pode ser água, óleo, azeite ou qualquer outro que permita que o feixe de luz o atravesse. A figura a seguir mostra os detalhes da montagem deste elemento.



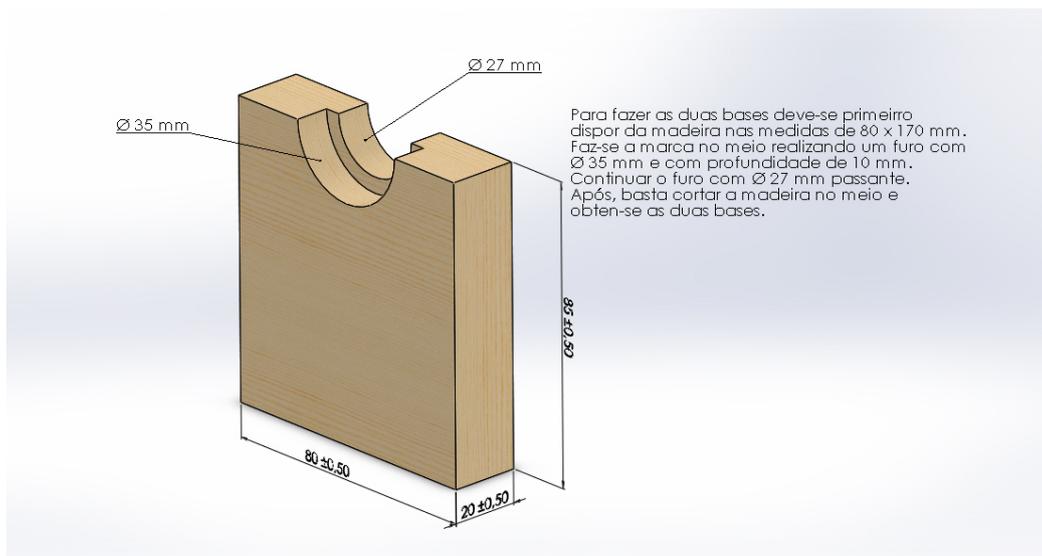
Legenda da figura:

1. Bobina de fio de cobre AWG20 (quatro camadas de 256 espiras).
2. Porca de 1/4 soldada com estanho (uma em cada ponta do tubo).
3. Adaptador 25 x 3/4.
4. Tampa de vidro com 35 *mm* de diâmetro.
5. Luva 25 x 3/4.
6. Bases de madeira de 80 *mm* por 85 *mm* por 20 *mm*.
7. Travessas de madeira de 270 *mm* por 25 *mm* por 3 *mm* (servem para sustentar as bases da bobina).
8. Tampa de vidro com 35 *mm* de diâmetro.
9. Tubo de aço com 27 *mm* de diâmetro externo e 300 *mm* de comprimento. Esse tubo contém um furo a 15 *mm* de cada ponta e com 7 *mm* de diâmetro para botar as porcas de 1/4. As porcas devem ser soldadas com estanho.

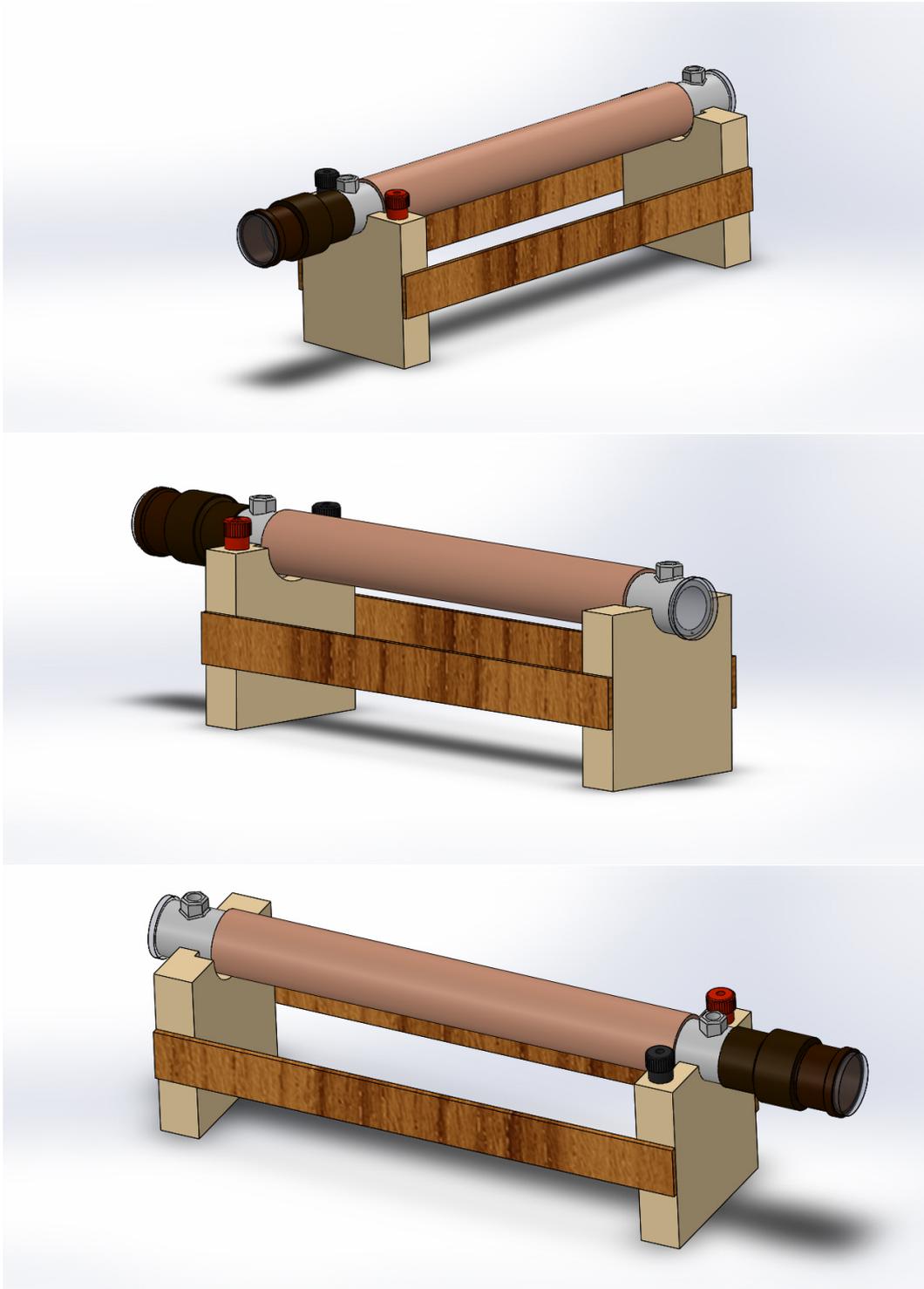
10. Boner vermelho e boner preto para ligar a bobina à fonte de tensão (podem ser colocados em qualquer uma das duas bases).

Confecção das bases da bobina.

Para confeccionar as duas bases deve-se primeiramente dispor de uma madeira com as medidas de 80 mm por 170 mm por 20 mm. Depois deve-se fazer um furo no meio da madeira com 35 mm de diâmetro e com profundidade de 10 mm. Em seguida continua-se o furo, mas com novo diâmetro de 27 mm até atravessar a espessura da madeira. Por fim, corta-se a madeira ao meio, obtendo assim as duas bases nas medidas já apresentadas. Segue uma imagem ilustrativa de uma das bases.



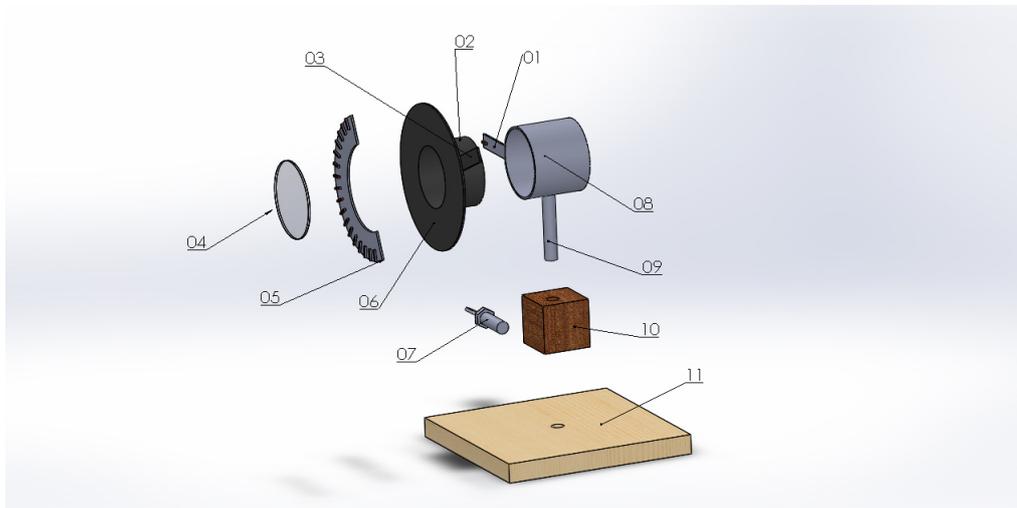
As próximas três imagens mostram a bobina em seu suporte.



4. Polarizador com eixo de transmissão variável (analisador) e seu

suporte.

Ao deixar o meio dielétrico sob a ação do campo magnético, a luz volta a se propagar no ar, mas com sua polarização linear desviada de um ângulo θ cujo valor é obtido com o auxílio do polarizador com eixo de transmissão variável (analisador). O colar graduado (transferidor) presente no suporte desse polarizador permite medir o ângulo desviado. A maneira como se deve proceder para a obtenção dessa medida será apresentada de forma minuciosa mais adiante. A próxima figura apresenta a montagem deste elemento.



Legenda da figura:

1. Tira de aço de 10 *mm* por 30 *mm* (serve de referência para medidas de ângulos pelo colar graduado).
2. Tubo de aço de 11/8" com 30 *mm* de comprimento. Soldar no disco de aço com estanho.
3. Tira de aço de 10 *mm* por 30 *mm* para girar o conjunto.
4. Polarizador fixado com resina epóxi ou fita crepe.
5. Colar graduado (transferidor).
6. Disco de aço com diâmetro de 70 *mm* e espessura de 0,75 *mm*. Deve ser feito um furo no centro desse disco com 35 *mm* de diâmetro.
7. Parafuso (manípulo) de 1/4".
8. Cilindro com 32 *mm* de diâmetro interno e 30 *mm* de comprimento.

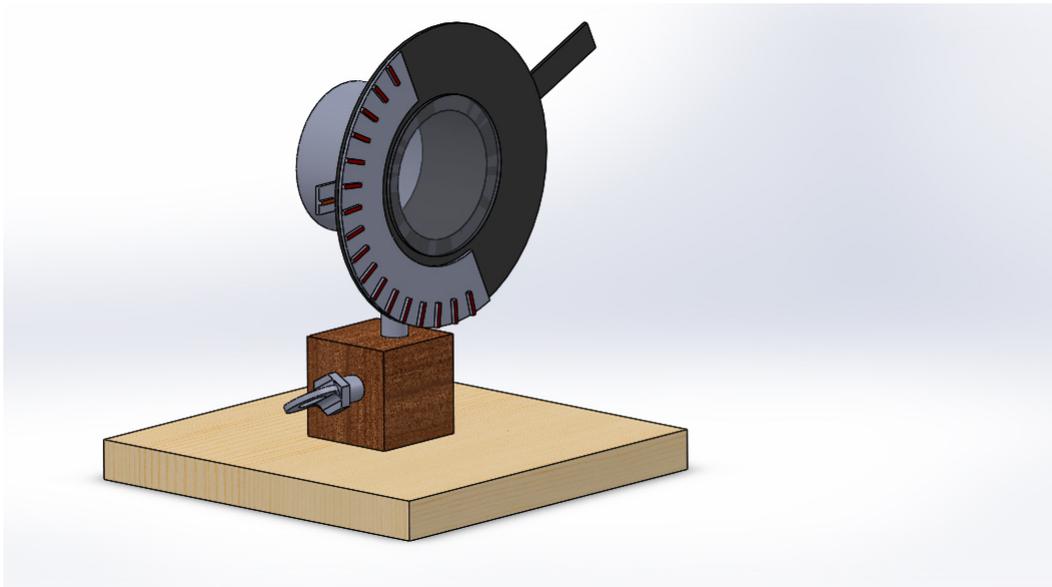
Pode ser feito com um tubo de aço nessas dimensões ou com uma chapa de aço fina enrolada em um tubo de $1\frac{1}{8}$ " e com as pontas soldadas com estanho.

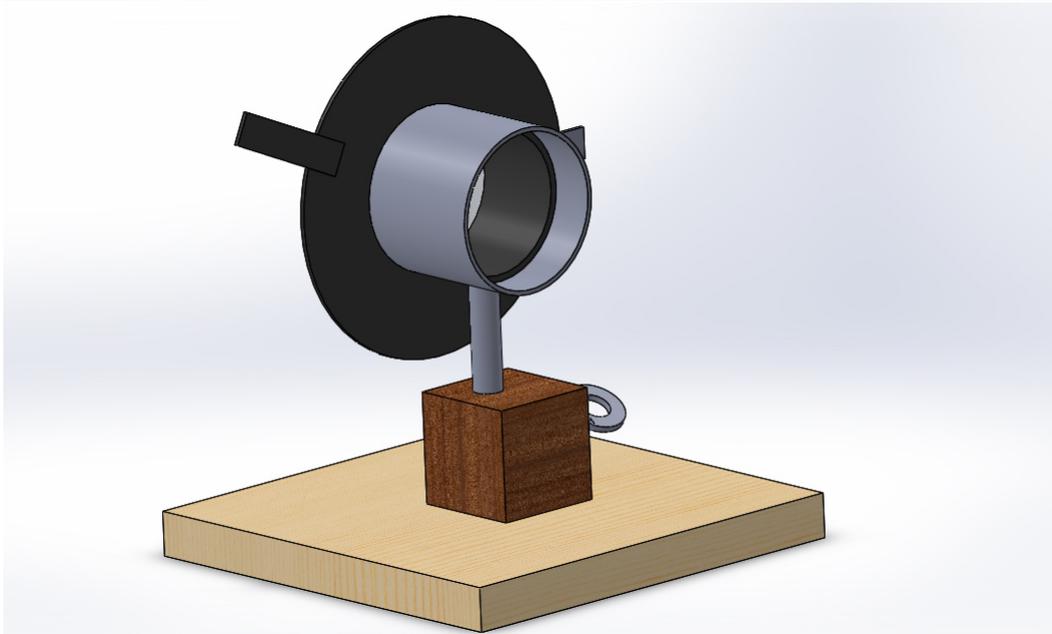
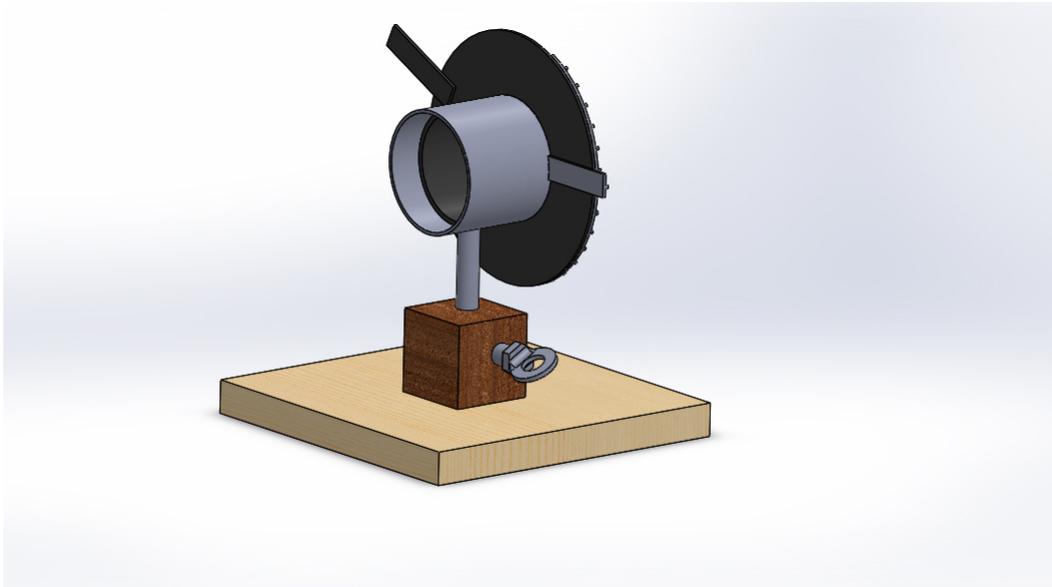
9. Barra de aço de $\frac{3}{8}$ " com 60 mm de comprimento. Essa base deve ser soldada no cilindro com estanho.

10. Coluna de madeira de 30 mm por 30 mm por 40 mm . Uma rosca de $\frac{1}{4}$ " na lateral e um furo com 10 mm de diâmetro no centro devem ser feitos para encaixar a barra.

11. Base de madeira de 100 mm por 100 mm por 20 mm . Deve ser feito um furo com 10 mm de diâmetro no centro dessa base.

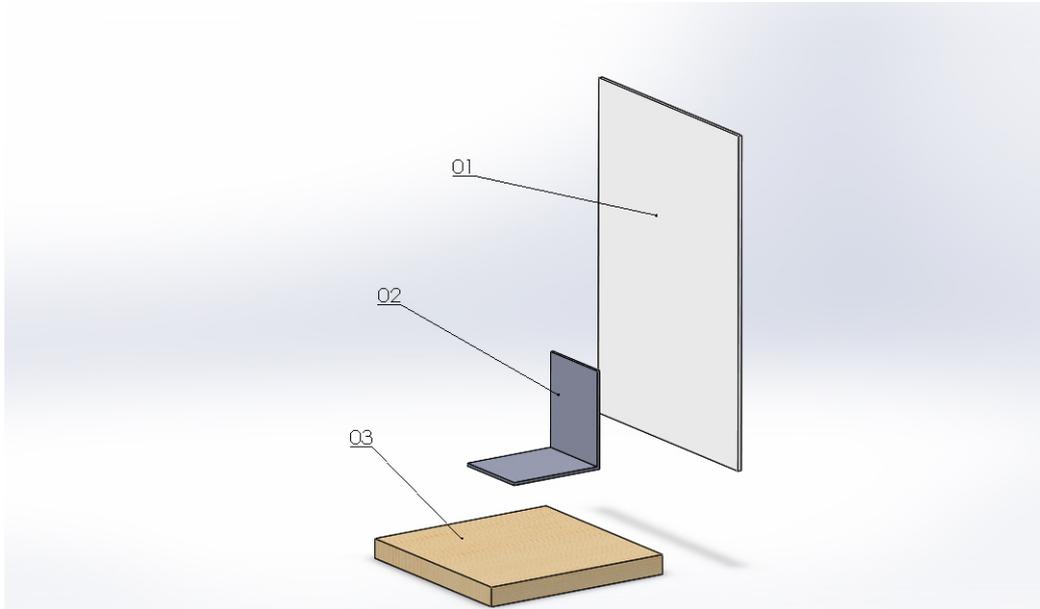
As próximas três imagens mostram o polarizador móvel em seu suporte.





5. Anteparo.

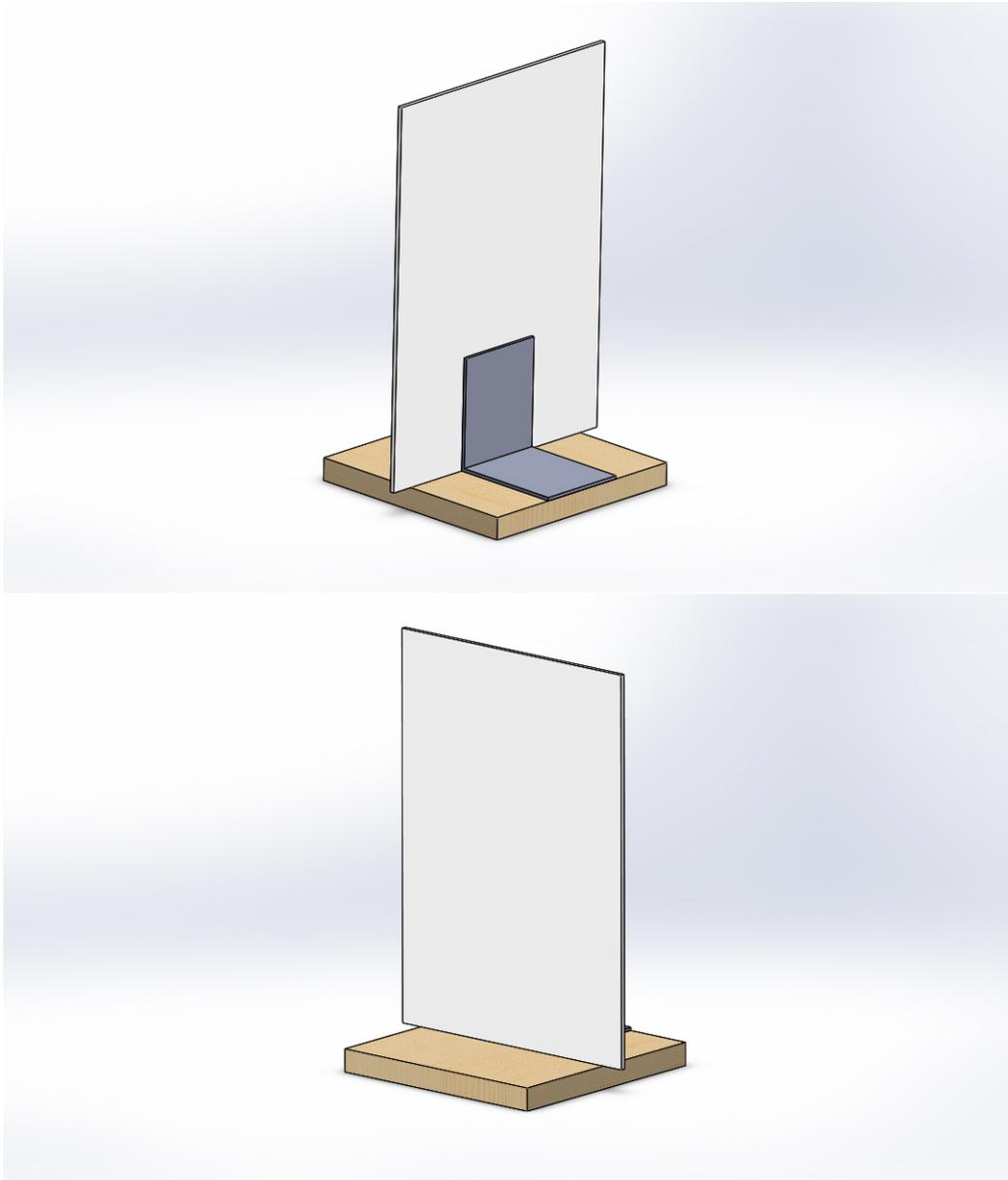
Sobre o anteparo é projetada a luz submetida ao fenômeno em discussão. Esse elemento desempenha duas funções: uma é observar a ocorrência do efeito através da intensidade de luz projetada sobre ele, e a outra é auxiliar o polarizador móvel na medida do ângulo de deflexão da polarização linear da luz. A sua montagem é apresentada na próxima figura.



Legenda:

1. Placa de PS ou acrílico com 100 mm de largura por 200 mm de altura.
2. Cantoneira de alumínio (fixar com parafuso de 4 mm na base de madeira).
3. Base de madeira de 100 mm por 100 mm por 20 mm .

As duas imagens a seguir mostram o anteparo por ângulos diferentes.



4.2 Medida do desvio angular da polarização

Para medir o ângulo θ de desvio da polarização linear da luz, deve-se proceder de acordo com os seguintes passos:

Passo 1. Deixar a luz que se torna linearmente polarizada no polarizador

fixo atravessar o meio dielétrico no interior da bobina conectada à fonte de tensão desligada, de modo que não haja corrente elétrica para induzir campo magnético no meio. Não havendo campo magnético gerado pela bobina, não haverá efeito Faraday, ou seja, a luz passará pelo material no interior da bobina sem sofrer alteração na direção de sua polarização linear.

Passo 2. A luz que emerge do meio dielétrico volta a se propagar no ar e encontra o polarizador móvel. Deve-se, então, girar o polarizador móvel até que este não permita a passagem de nenhuma intensidade luminosa, o que se percebe pela não incidência da luz sobre o anteparo. Nesse caso, os filtros dos polarizadores fixo e móvel terão seus eixos de transmissão perpendiculares entre si.

Passo 3. Ligar a fonte de tensão para que a corrente elétrica gerada na bobina crie um campo magnético no meio dielétrico. Haverá então efeito Faraday no feixe de luz que nele se propaga, ou seja, haverá rotação da polarização linear da luz que se propaga na região interna à bobina. Essa rotação é percebida pela incidência de uma intensidade luminosa no anteparo após o feixe de luz atravessar o polarizador móvel, cujo filtro encontra-se perpendicularmente posicionado em relação ao do polarizador fixo. O fato de que mesmo passando por dois polarizadores perpendiculares entre si alguma intensidade de luz chega ao anteparo, significa que houve rotação da polarização linear da luz entre os dois polarizadores.

Passo 4. Ainda com a bobina conectada à fonte de tensão ligada, girar novamente o polarizador móvel até que nenhuma intensidade luminosa chegue ao anteparo. O ângulo correspondente a esse último giro do polarizador móvel é o valor de θ para o desvio experimentado pela polarização linear da luz ao sofrer o efeito Faraday.

É importante observar que dadas as condições sob as quais esse experimento é realizado, o colar graduado do suporte do polarizador móvel deve ser capaz de medir ângulos da ordem de $1,0^\circ$ ou $1,5^\circ$ pelo menos, uma vez que

estima-se um valor aproximadamente igual a $2,0^\circ$ para o ângulo de desvio da polarização da luz, como mostraremos a seguir.

4.3 Estimativa do desvio angular

O valor do ângulo θ de desvio da polarização linear da luz ao sofrer o efeito Faraday pode ser estimado levando-se em conta o resultado obtido no desenvolvimento teórico do fenômeno. Usamos a equação (3.69),

$$\theta = VBL, \quad (4.1)$$

onde V é a constante de Verdet, B é a intensidade do campo magnético no meio dielétrico e L , o comprimento da bobina. Como a expressão conhecida para a intensidade do campo magnético gerado pela bobina em seu interior é dado por

$$B = \mu_0 n i, \quad (4.2)$$

onde i é a corrente elétrica no fio e n é o número de espiras por unidade de comprimento, isto é, $n = N/L$, sendo N o número total de espiras na bobina, então o ângulo de desvio da polarização da luz pode ser reescrito na forma

$$\theta = V \mu_0 N i. \quad (4.3)$$

A bobina do aparato experimental usado para a verificação do efeito foi construída com $N = 1024$. A corrente elétrica usada foi $i = 6,0A$. O material usado como meio dielétrico no qual a luz sofre o efeito foi a água, cuja constante de Verdet a $20^\circ C$ e para luz verde com $589,3 \text{ nm}$ de comprimento de onda é $V = 3,8108 \text{ rad/Tm}$. A permeabilidade magnética do vácuo conhecida é $\mu_0 = 1,2566 \times 10^{-6} \text{ Tm/A}$. Usando esses valores na expressão para o ângulo de desvio, resulta

$$\theta = 0,03 \text{ rad} \quad (4.4)$$

ou seja,

$$\theta = 1,68^\circ. \quad (4.5)$$

Para obtermos valores mais expressivos para o ângulo θ podemos aumentar o número de espiras na bobina, o que resultará em um campo magnético mais intenso no meio dielétrico. Outra medida que pode ser tomada no sentido de aumentar a intensidade do campo magnético é elevar a corrente elétrica. Essa medida, no entanto, exige muita cautela, porque de acordo com o fabricante, o fio AWG20 usado na confecção da bobina suporta, no máximo, a corrente de 9,0A sem afetar seu funcionamento ou oferecer risco de choque elétrico. Nota-se que, embora dentro desse limite a corrente nessa bobina não ofereça perigo, por cautela, a bobina ativa deve ser manipulada apenas pelo professor ou sob sua atenta supervisão.

Capítulo 5

Considerações finais

Com a realização deste trabalho buscamos oferecer aos professores, em especial os do ensino médio, uma alternativa de intervenção didática fundamentada na necessidade de revisão nos métodos de ensino, que ainda hoje são aplicados quase que de forma unânime ao modo expositivo tradicional. Nesse sentido, elaboramos uma metodologia atenta às demandas da atualidade que, resumidamente, exige cada vez mais da educação formal a construção de um caráter crítico e criativo nos indivíduos em formação. Atentos ainda à diversidade socio-econômica no território nacional, buscamos desenvolver uma estratégia de intervenção acessível a todos os quadros sociais, sendo factível tanto no ensino privado como no público e em todas as regiões do país.

A escolha do efeito Faraday como tema se deu por diversas razões. O próprio valor histórico do fenômeno, de ter sido o primeiro onde se observou a relação entre óptica e magnetismo, já justifica o esforço. Mas, além disso, a riqueza de assuntos que podem ser introduzidos a partir da observação do efeito foi também um forte fator motivacional para a escolha. Apenas a possibilidade de levar ao conhecimento dos alunos a natureza ondulatória da luz e sua polarização transversa de forma simples e surpreendente já foi um dos motivos que nos conduziram ao tema.

Após um primeiro capítulo de caráter introdutório, no segundo capítulo da dissertação buscamos tratar com o maior nível de detalhamento possível

os fundamentos teóricos aplicados na discussão do tema central do trabalho, a ser feita no capítulo seguinte. Naturalmente não esperamos que os assuntos tratados no segundo capítulo, a exemplo da obtenção da equação de onda a partir das equações de Maxwell, ou mesmo a obtenção da solução de onda plana, sejam levados literalmente ao ensino médio, mas acreditamos que favorece a sólida formação do professor, o que contribui enormemente para a melhoria do ensino como um todo. Dessa forma, supomos que ao professor é desejável que se ofereça um nível de formação mais aprofundado que aquele que ele mesmo deve oferecer aos seus alunos.

No terceiro capítulo desenvolvemos teoricamente o tema da dissertação. Nele, o estudo foi iniciado pelo tratamento da atividade óptica natural por razão de conveniência didática. Dessa forma, o leitor fica familiarizado com o efeito de rotação do plano de polarização da luz em meio opticamente ativo e então compreende de forma natural o efeito induzido magneticamente em meio não opticamente ativo; o conhecido efeito Faraday. Como no segundo capítulo, há discussões teóricas que vão muito além do que se espera para o ensino médio. Novamente, o objetivo dessas discussões é oferecer ao professor uma formação sólida sobre o tema tratado. Portanto, de toda a discussão teórica realizada, esperamos que apenas o formalismo elementar seja levado diretamente ao ensino médio e, claro, com a devida orientação. O formalismo geral foi pensado como um instrumento de motivação ao leitor que tiver maior interesse pelo assunto. No entanto, o formalismo resumido leva aos mesmos resultados que os obtidos pelos formalismos mais rigorosos, porém, de uma forma bem mais econômica.

No quarto capítulo desenvolvemos um manual de construção do aparato experimental para a verificação do efeito Faraday, onde também oferecemos todas as informações necessárias para a realização do experimento. Vale destacar que a confecção artesanal do aparato apresenta uma grande vantagem em termos de custo em detrimento dos similares industrializados. Este fator é de extrema relevância para a prosposta do trabalho, que busca ser acessível a diversas as realidades financeiras.

No material instrucional, o produto da dissertação, organizamos um roteiro de três aulas onde buscamos oferecer ao professor a percepção de que o

processo de ensino-aprendizagem deve contar com a participação mais ativa do aluno. Neste sentido, aliada a pequenas intervenções expositivas por parte do professor, sugerimos a proposição de algumas atividades práticas simples nas quais os alunos são motivados a investigar os fenômenos tratados.

O material instrucional da dissertação foi aplicado em turmas de segunda série do ensino médio do Instituto Federal Fluminense Campus Itaperuna. A sequência de aulas foi realizada no quarto bimestre do ano letivo de 2017. As atividades práticas das aulas despertaram muito interesse nos alunos, sobretudo aquelas em que se utilizava luz. A aplicação do material instrucional nos confirmou algo que já suspeitávamos: a realização de atividades práticas por parte dos alunos e a estratégia didática de, na medida do possível, deixá-los investigar fenômenos desconhecidos de forma autônoma, estimulam a curiosidade tão necessária para despertar a vontade de aprender.

Como perspectiva pretendemos redimensionar o aparato experimental do efeito Faraday para que possamos realizar um estudo quantitativo do fenômeno. Desse modo, esperamos encontrar a conhecida relação entre o ângulo de desvio da polarização da luz, o comprimento do meio e a intensidade do campo magnético aplicado sobre ele a partir da análise do experimento. Em outras palavras, pretendemos ser capazes de determinar experimentalmente a constante de Verdet dos meios utilizados no experimento.

Uma outra continuação natural deste trabalho consiste na produção de programas computacionais, com interfaces gráficas, para estudar o efeito Faraday. Um exemplo é dado por setas rotatórias, que descrevem polarizações circulares, compondo-se em polarizações lineares e, mais geralmente, em polarizações elípticas. Tal programa seria uma versão gráfica, acessível a alunos do ensino médio, do teorema dado pela equação (2.78), de que qualquer onda de polarização elíptica pode ser escrita como superposição de duas ondas de polarização circular.

Por fim, do ponto de vista pedagógico, esperamos ter despertado no leitor os sentimentos muito bem expressos pelos seguintes pensamentos de Paulo Freire:

“Ensinar não é transferir conhecimentos, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção.”

“Sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca, não aprendo nem ensino.”

Apêndice A

Equações de Maxwell e ondas planas

As equações de Maxwell no vácuo para os campos $\mathbf{E}(\xi)$ e $\mathbf{B}(\xi)$ de ondas eletromagnéticas, onde $\xi = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - ct$, são

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\xi) = 0, \quad (\text{A.1a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\xi) = 0, \quad (\text{A.1b})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\xi) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\xi) \quad \text{e} \quad (\text{A.1c})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\xi) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\xi). \quad (\text{A.1d})$$

Essas equações podem ser simplificadas dando lugar às condições (2.29) de acordo com o que é mostrado a seguir.

Usando a convenção de Einstein para a soma, tem-se

$$\xi = \hat{k}_i x_i - ct \quad (\text{A.2})$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\xi) = \frac{\partial}{\partial x_j} E_j(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \frac{d}{d\xi} E_j(\xi). \quad (\text{A.3})$$

Como

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_j} = \hat{k}_i \delta_{ij} = \hat{k}_j, \quad (\text{A.4})$$

então

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\xi) = \hat{k}_j \frac{d}{d\xi} E_j(\xi) = \hat{k}_j \left(\frac{d}{d\xi} \mathbf{E}(\xi) \right)_j = \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{d}{d\xi} \mathbf{E}(\xi). \quad (\text{A.5})$$

Com isso, a equação (A.1a) pode ser reescrita por

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{d}{d\xi} \mathbf{E}(\xi) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Integrando os dois membros dessa equação resulta

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{E}(\xi) - \mathbf{E}(\xi_0)) = 0, \quad (\text{A.7})$$

onde ξ_0 é um número fixo arbitrário, de modo que o campo $\mathbf{E}(\xi_0)$ é constante. A validade dessa equação para qualquer valor assumido pelo campo constante assegura que a particular escolha de ξ_0 tal que $\mathbf{E}(\xi_0) = 0$ implica

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}(\xi) = 0. \quad (\text{A.8})$$

A escolha de ξ_0 que torna nulo o campo elétrico é sempre possível porque as soluções das equações de Maxwell são obtidas a menos da adição de um valor constante, então se uma solução $\Psi(\xi)$ não se anula em ξ_0 , ela pode ser substituída por $\Psi(\xi) - \Psi(\xi_0)$ que, por construção, se anula quando $\xi = \xi_0$. A função Ψ representa genericamente os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} que satisfazem às quatro equações.

A partir da equação (A.1b), de forma análoga, se obtém

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B}(\xi) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Como a equação (A.1b) para o campo magnético é idêntica a (A.1a) para o campo elétrico, o desenvolvimento realizado até a forma (A.9) é o mesmo daquele mostrado anteriormente que resultou em (A.8), exceto, é claro, pela substituição de \mathbf{E} por \mathbf{B} .

Na equação (A.1c) há o rotacional do campo elétrico que, em notação

indicial, é dado por

$$\nabla \times \mathbf{E}(\xi) = \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_j} E_k(\xi), \quad (\text{A.10})$$

isto é,

$$\nabla \times \mathbf{E}(\xi) = \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \frac{d}{d\xi} E_k(\xi). \quad (\text{A.11})$$

Usando (A.4), segue que

$$\nabla \times \mathbf{E}(\xi) = \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i k_j \frac{d}{d\xi} E_k(\xi) = \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i k_j \left(\frac{d}{d\xi} \mathbf{E}(\xi) \right)_k, \quad (\text{A.12})$$

ou seja,

$$\nabla \times \mathbf{E}(\xi) = \hat{\mathbf{k}} \times \frac{d}{d\xi} \mathbf{E}(\xi). \quad (\text{A.13})$$

Por outro lado, ainda na mesma equação,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{d}{d\xi} \mathbf{B}(\xi) = -c \frac{d}{d\xi} \mathbf{B}(\xi). \quad (\text{A.14})$$

Portanto, a equação (A.1c) pode ser reescrita por

$$\hat{\mathbf{k}} \times \frac{d}{d\xi} \mathbf{E}(\xi) = c \frac{d}{d\xi} \mathbf{B}(\xi). \quad (\text{A.15})$$

Integrando os dois membros resulta

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\mathbf{E}(\xi) - \mathbf{E}(\xi_0)) = c(\mathbf{B}(\xi) - \mathbf{B}(\xi_0)). \quad (\text{A.16})$$

Como os campos elétrico e magnético podem sempre ser escolhidos de modo que $\mathbf{E}(\xi_0) = 0$ e $\mathbf{B}(\xi_0) = 0$, então

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(\xi) = c\mathbf{B}(\xi). \quad (\text{A.17})$$

Por fim, na equação (A.1d), verifica-se que

$$\nabla \times \mathbf{B}(\xi) = \hat{\mathbf{k}} \times \frac{d}{d\xi} \mathbf{B}(\xi) \quad (\text{A.18})$$

e

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\xi) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{d}{d\xi} \mathbf{E}(\xi) = -\frac{1}{c} \frac{d}{d\xi} \mathbf{E}(\xi). \quad (\text{A.19})$$

Com isso, a equação (A.1d) pode ser reescrita na forma

$$\hat{\mathbf{k}} \times \frac{d}{d\xi} \mathbf{B}(\xi) = -\frac{1}{c} \frac{d}{d\xi} \mathbf{E}(\xi). \quad (\text{A.20})$$

Integrando os dois membros observando que os campos constantes que resultam da integração são irrelevantes em nossa discussão, então

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}(\xi) = -\frac{1}{c} \mathbf{E}(\xi). \quad (\text{A.21})$$

Apêndice B

Ângulo de inclinação da elipse de polarização

Neste apêndice discutiremos o ângulo de inclinação do eixo principal da elipse descrita pela extremidade do vetor campo elétrico de uma onda eletromagnética no caso mais geral de polarização.

A equação cartesiana da elipse de polarização na figura 2.2 é dada pela equação (2.51), que pode ser reescrita por

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2 \sin^2 \delta} - 2 \frac{E_y}{E_{0y}} \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{\cos \delta}{\sin^2 \delta} + \frac{E_x^2}{E_{0x}^2 \sin^2 \delta} = 1. \quad (\text{B.1})$$

Em um novo sistema de coordenadas, obtido pela rotação de um ângulo ψ no sentido anti-horário no sistema de coordenadas original da figura, a equação da elipse toma a forma

$$\left(\frac{E'_y}{E'_{0y}} \right)^2 + \left(\frac{E'_x}{E'_{0x}} \right)^2 = 1. \quad (\text{B.2})$$

É um resultado conhecido da álgebra linear que as coordenadas E'_x e E'_y de um ponto da elipse na nova base estão relacionadas às coordenadas E_x e E_y

do mesmo ponto na base original pela equação matricial

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Com isso, a equação (B.2) pode ser escrita na forma

$$\frac{(-E_x \sin \psi + E_y \cos \psi)^2}{E'_{0y}{}^2} + \frac{(E_x \cos \psi + E_y \sin \psi)^2}{E'_{0x}{}^2} = 1 \quad (\text{B.4})$$

ou

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\cos^2 \psi}{E'_{0y}{}^2} + \frac{\sin^2 \psi}{E'_{0x}{}^2} \right) E_y^2 + \left(\frac{1}{E'_{0x}{}^2} - \frac{1}{E'_{0y}{}^2} \right) 2E_y E_x \sin \psi \cos \psi + \\ & \left(\frac{\sin^2 \psi}{E'_{0y}{}^2} + \frac{\cos^2 \psi}{E'_{0x}{}^2} \right) E_x^2 = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Comparando as equações (B.1) e (B.5), temos

$$\frac{\cos^2 \psi}{E'_{0y}{}^2} + \frac{\sin^2 \psi}{E'_{0x}{}^2} = \frac{1}{E_{0y}{}^2 \sin^2 \delta} \quad (\text{B.6})$$

e

$$\frac{\sin^2 \psi}{E'_{0y}{}^2} + \frac{\cos^2 \psi}{E'_{0x}{}^2} = \frac{1}{E_{0x}{}^2 \sin^2 \delta}, \quad (\text{B.7})$$

então

$$\frac{\cos^2 \psi}{E'_{0y}{}^2} - \frac{\sin^2 \psi}{E'_{0y}{}^2} + \frac{\sin^2 \psi}{E'_{0x}{}^2} - \frac{\cos^2 \psi}{E'_{0x}{}^2} = \left(\frac{1}{E_{0y}{}^2} - \frac{1}{E_{0x}{}^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \delta}, \quad (\text{B.8})$$

isto é,

$$\frac{\cos 2\psi}{E'_{0y}{}^2} - \frac{\cos 2\psi}{E'_{0x}{}^2} = \left(\frac{1}{E_{0y}{}^2} - \frac{1}{E_{0x}{}^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \delta} \quad (\text{B.9})$$

ou

$$\frac{1}{E'_{0y}{}^2} - \frac{1}{E'_{0x}{}^2} = \frac{1}{\cos 2\psi} \left(\frac{1}{E_{0y}{}^2} - \frac{1}{E_{0x}{}^2} \right) \frac{1}{\sin^2 \delta}. \quad (\text{B.10})$$

Ainda comparando (B.1) e (B.5), temos

$$\left(\frac{1}{E'_{0x}{}^2} - \frac{1}{E'_{0y}{}^2} \right) 2 \sin \psi \cos \psi = - \frac{2}{E_{0x} E_{0y}} \frac{\cos \delta}{\sin^2 \delta}. \quad (\text{B.11})$$

Usando (B.10) em (B.11), ficamos com

$$- \frac{1}{\cos 2\psi} \left(\frac{1}{E_{0y}{}^2} - \frac{1}{E_{0x}{}^2} \right) \frac{\sin 2\psi}{\sin^2 \delta} = - \frac{2}{E_{0x} E_{0y}} \frac{\cos \delta}{\sin^2 \delta}, \quad (\text{B.12})$$

o que resulta na expressão (2.52),

$$\tan 2\psi = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}{}^2 - E_{0y}{}^2} \cos \delta, \quad (\text{B.13})$$

que relaciona, no sistema de coordenadas da figura (2.2), o ângulo de inclinação ψ da elipse de polarização geral com as amplitudes E_{0x} e E_{0y} dos componentes do campo elétrico da onda polarizada e a diferença de fase δ entre esses componentes.

Apêndice C

Solução do oscilador harmônico amortecido

Neste apêndice faremos uma discussão sobre as equações homogêneas associadas às equações (3.43). Nosso propósito é mostrar que no regime estacionário as soluções das equações homogêneas são desprezíveis.

As equações homogêneas associadas às equações em (3.43) são as equações de oscilador harmônico amortecido

$$\ddot{s}_- + (\gamma - i\Omega)\dot{s}_- + \omega_0^2 s_- = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{s}_+ + (\gamma + i\Omega)\dot{s}_+ + \omega_0^2 s_+ = 0. \quad (\text{C.1})$$

A solução para a primeira delas é do tipo $s_-(t) = e^{\omega_- t}$. Então, substituindo esta solução, vem

$$\omega_-^2 e^{\omega_- t} + (\gamma - i\Omega)\omega_- e^{\omega_- t} + \omega_0^2 e^{\omega_- t} = 0. \quad (\text{C.2})$$

Segue que a frequência ω_- deve satisfazer à equação característica

$$\omega_-^2 + (\gamma - i\Omega)\omega_- + \omega_0^2 = 0, \quad (\text{C.3})$$

cujas soluções são

$$\omega_{-1} = \frac{-(\gamma - i\Omega) + \sqrt{\gamma^2 - 2i\gamma\Omega - \Omega^2 - 4\omega_0^2}}{2} e \quad (C.4)$$

$$\omega_{-2} = \frac{-(\gamma - i\Omega) - \sqrt{\gamma^2 - 2i\gamma\Omega - \Omega^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

ou, como mostra a **observação** ao final deste apêndice,

$$\omega_{-1} = - \left(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \right) + i \left(\frac{\Omega}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right) e \quad (C.5)$$

$$\omega_{-2} = - \left(\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \right) + i \left(\frac{\Omega}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right),$$

onde $a = (\gamma/2)^2 - (\Omega/2)^2 - \omega_0^2$ e $b = -\gamma\Omega/2$.

Portanto, $s_{-1}(t) = e^{\omega_{-1}t}$ e $s_{-2}(t) = e^{\omega_{-2}t}$ são soluções para a primeira equação homogênea em (C.1), de modo que a solução geral para essa equação é uma combinação linear a coeficientes complexos desses dois resultados, isto é,

$$s_-(t) = C_1 e^{\omega_{-1}t} + C_2 e^{\omega_{-2}t} \quad (C_1, C_2 \in \mathbf{C}). \quad (C.6)$$

Substituindo os valores obtidos para ω_{-1} e ω_{-2} fazendo

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \quad e \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}, \quad (C.7)$$

a solução geral fica

$$\begin{aligned} s_-(t) &= C_1 e^{[-(\frac{\gamma}{2} + \alpha) + i(\frac{\Omega}{2} + \beta)]t} + C_2 e^{[-(\frac{\gamma}{2} - \alpha) + i(\frac{\Omega}{2} - \beta)]t} \\ &= C_1 e^{-(\frac{\gamma}{2} + \alpha)t} e^{i(\frac{\Omega}{2} + \beta)t} + C_2 e^{-(\frac{\gamma}{2} - \alpha)t} e^{i(\frac{\Omega}{2} - \beta)t}, \end{aligned} \quad (C.8)$$

isto é,

$$s_-(t) = C_1 e^{-(\frac{\gamma}{2} + \alpha)t} \left[\cos\left(\frac{\Omega}{2} + \beta\right) + i \sin\left(\frac{\Omega}{2} + \beta\right) \right] + C_2 e^{-(\frac{\gamma}{2} - \alpha)t} \left[\cos\left(\frac{\Omega}{2} - \beta\right) + i \sin\left(\frac{\Omega}{2} - \beta\right) \right]. \quad (\text{C.9})$$

Para a segunda equação homogênea em (C.1), procedendo da mesma forma, se obtém a solução geral

$$s_+(t) = C_3 e^{-(\frac{\gamma}{2} - \alpha)t} \left[\cos\left(\frac{\Omega}{2} - \beta\right) - i \sin\left(\frac{\Omega}{2} - \beta\right) \right] + C_4 e^{-(\frac{\gamma}{2} + \alpha)t} \left[\cos\left(\frac{\Omega}{2} + \beta\right) - i \sin\left(\frac{\Omega}{2} + \beta\right) \right]. \quad (\text{C.10})$$

Como $\gamma/2 > \alpha$, as exponenciais em (C.9) e (C.10) são decrescentes. Essas expressões tornam-se, portanto, desprezíveis nas soluções gerais das equações em (3.43) em um intervalo de tempo consideravelmente curto para efeitos práticos no estudo aqui realizado. Chama-se regime transiente o período na evolução temporal das soluções gerais de (3.43) em que a contribuição de (C.9) e (C.10) apresentam relevância. Quando essas contribuições se tornam irrelevantes, se diz, então, que essa solução atingiu o regime estacionário. Neste trabalho há interesse apenas no regime estacionário na evolução temporal das soluções gerais das equações em (3.43).

Observação.

Uma solução para a equação característica da primeira equação homogênea é

$$\omega_{-1} = \frac{-(\gamma - i\Omega) + \sqrt{\gamma^2 - 2i\gamma\Omega - \Omega^2 - 4\omega_0^2}}{2}, \quad (\text{C.11})$$

que pode ser reescrita por

$$\omega_{-1} = -\frac{\gamma}{2} + i\frac{\Omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 - \omega_0^2 - i\frac{\gamma}{2}\Omega} \quad (\text{C.12})$$

ou

$$\omega_{-1} = -\frac{\gamma}{2} + i\frac{\Omega}{2} + \sqrt{Z}, \quad (\text{C.13})$$

com $Z = a + ib$, onde $a = (\gamma/2)^2 - (\Omega/2)^2 - \omega_0^2$ e $b = -\gamma\Omega/2$.

Segue que

$$\omega_{-1} = -\frac{\gamma}{2} + i\frac{\Omega}{2} + \sqrt{|Z|}e^{i\theta}, \quad (\text{C.14})$$

onde $\cos\theta = a/|Z|$ e $\sin\theta = b/|Z|$,

ou ainda

$$\begin{aligned} \omega_{-1} &= -\frac{\gamma}{2} + i\frac{\Omega}{2} + \sqrt{|Z|}e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= -\frac{\gamma}{2} + i\frac{\Omega}{2} + \sqrt{|Z|}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Como a e b são negativos ($\gamma < \omega_0$), então $\pi < \theta < 3\pi/2$. Logo $\pi/2 < \theta/2 < 3\pi/4$ e, nesse caso, $\cos(\theta/2) = -\sqrt{(1 + \cos\theta)/2}$ e $\sin(\theta/2) = \sqrt{(1 - \cos\theta)/2}$.

Desse modo, temos

$$\begin{aligned} \omega_{-1} &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{|Z|}\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}\right) + i\left(\frac{\Omega}{2} + \sqrt{|Z|}\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}\right) \\ &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{|Z|}\sqrt{\frac{1 + a/|Z|}{2}}\right) + i\left(\frac{\Omega}{2} + \sqrt{|Z|}\sqrt{\frac{1 - a/|Z|}{2}}\right) \\ &= -\left(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{|Z|}\sqrt{\frac{|Z| + a}{2|Z|}}\right) + i\left(\frac{\Omega}{2} + \sqrt{|Z|}\sqrt{\frac{|Z| - a}{2|Z|}}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Portanto

$$\omega_{-1} = -\left(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{|Z| + a}{2}}\right) + i\left(\frac{\Omega}{2} + \sqrt{\frac{|Z| - a}{2}}\right). \quad (\text{C.17})$$

Como $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, resulta finalmente que

$$\omega_{-1} = -\left(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}\right) + i\left(\frac{\Omega}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right). \quad (\text{C.18})$$

Desenvolvendo da mesma forma a solução ω_{-2} da equação característica,

resulta

$$\omega_{-2} = -\left(\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}\right) + i\left(\frac{\Omega}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right), \quad (\text{C.19})$$

lembrando que $a = (\gamma/2)^2 - (\Omega/2)^2 - \omega_0^2$ e $b = -\gamma\Omega/2$.

Para a equação característica da segunda equação homogênea deste apêndice, as soluções ficam

$$\omega_{+1} = -\left(\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}\right) - i\left(\frac{\Omega}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right) \text{ e} \quad (\text{C.20})$$

$$\omega_{+2} = -\left(\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}\right) - i\left(\frac{\Omega}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right),$$

com $a = (\gamma/2)^2 - (\Omega/2)^2 - \omega_0^2$ e $b = \gamma\Omega/2$.

Bibliografia

- [1] Faraday M 1933 *Faraday's Diary* volume IV (Thomas Martin ed.) (London: George Bell and Sons)
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Faraday_effect (consultado em 27/08/2017)
- [3] Kalitéevski N 1980 *Optique Ondulatoire* (Moscou: Mir)
- [4] Cougo-Pinto, M V 2016 *Notas de aulas do curso Tópicos de Física Clássica II*
- [5] Nussenzveing H M 1998 *Curso de Física Básica* vol.4 - 1 ed (São Paulo: Blucher)
- [6] Resnick R, Halliday D, Krane K S 1996 *Física 4* (Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A)
- [7] Tipler P A, Mosca G 2006 *Física para Cientistas e Engenheiros. Volume 2: Eletricidade e Magnetismo, Óptica* 5 ed (Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A) (tradução de Fernando Ribeiro da Silva, Mauro Speranza Neto)
- [8] Lorrain P, Corson D, Lorrain F 2000 *Campos e Ondas Eletromagnéticas* (Lisboa: Fundação Calouste Gubenkian)
- [9] Zangwill A 2013 *Modern electrodynamics* (Cambridge: University Press)
- [10] Griffiths D J 2011 *Eletrodinâmica* 3 ed (São Paulo: Person Addison Wesley) (Tradução de Heloisa Coimbra de Souza)
- [11] Landau L D, Lifshitz E M, Pitaevskii L P 2008 *Electrodynamics of Continuous Media* (Amsterdam:Elsevier)
- [12] <https://en.wikipedia.org/wiki/Birefringence> (consultado em 23/01/2018)

-
- [13] https://en.wikipedia.org/wiki/Optical_rotation (consultado em 13/08/2017)
- [14] Arago F J D 1811 *Mémoire sur une modification remarquable qu'éprouvent les rayons lumineux dans leur passage à travers certains corps diaphanes et sur quelques autres nouveaux phénomènes d'optique*, Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut Impérial de France, **1er partie** 93 – 134.
- [15] Biot J B 1812 Mew. Acad. Roy. SOC. Inst. Fr. **1** 1
- [16] Biot J B 1815 *Phénomène de polarisation successive, observés dans des fluides homogènes* Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique de Paris 190192.
- [17] Biot J B 1817 Mem. Acad. Roy. SOC. Inst. Fr. (2) 2, 41; Ann. Chim. phys. (2) 4, 90.
- [18] Biot J B 1818 e 1819 *Extrait d'un mémoire sur les rotations que certaines substances impriment aux axes de polarisation des rayons lumineux* Annales de Chimie et de Physique, 2e séries **9** 372 – 389; **10** 63 – 81.
- [19] Pasteur L 1848 *Ann. Chim. phys.* **24** 442
- [20] Pasteur L 1850 *Ann. Chim. phys.* **28** 56
- [21] Rossi B 1957 *Optics* (Reading, Massachusetts: Addison-Wesley)
- [22] Fresnel A 1825 *Ann. Chim. phys.* **28** 147
- [23] Hecht E 2002 *Optics* 4th ed (San Francisco: Addison Wesley)
- [24] Mason S F 1968 *Optical Activity and Molecular Dissymmetry* Contemp. Phys. **9** 239
- [25] Guenther R D 1990 *Modern Optics* (New York: John Wiley)
- [26] Sommerfeld A 1954 *Optics* (New York: Academic)
- [27] Fitzpatrick R 2008 *Maxwell's equations and the principles of electromagnetism* (Hingham, Massachusetts: Infinity Science)
- [28] Matveev A N 1988 *Optics* (Moscow: Mir)
- [29] Cotton A, Mouton H 1905 Ct. r. Seánc Acad. Sci. Paris, 141, 317, 349; 1906 Ibid. 142, 203; 1907, Ibid. 145, 229; 1907, Ann. Chem. Phys. 11, 145, 289.

- [30] Kerr J 1901 Br. Assoc. Dep. 568
- [31] Majorana Q 1902 Rendic. Accad. Lincei **11** 374
- [32] Berman P R 2010 *Optical Faraday Rotation* Am. J. Phys. **78** 270
- [33] Crassee I, Levallois J, Walter A L, Ostler M, Bostwick A 2011 *Giant Faraday rotation in single- and multilayer graphene* Nature Physics **7** 48