



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## **A gravitação e a precessão de Mercúrio: um texto para professores do Ensino Médio**

Ricardo Fagundes Freitas da Cunha

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Alexandre Carlos Tort

Rio de Janeiro  
01 de 2017

**A gravitação e a precessão de Mercúrio: um texto para  
professores do Ensino Médio**

Ricardo Fagundes Freitas da Cunha

Orientador: Alexandre Carlos Tort

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Prof. Alexandre Carlos Tort (Presidente)

---

Prof. Carlos Farina de Souza

---

Prof. Sérgio Eduardo de Carvalho Eyer Jorás

---

Prof. Victor Augusto Giraldo

Rio de Janeiro  
01 de 2017

## FICHA CATALOGRÁFICA

C972g Cunha, Ricardo Fagundes Freitas da  
A gravitação e a precessão de Mercúrio: um texto para professores do Ensino Médio / Ricardo Fagundes Freitas da Cunha.  
– Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2017.  
xi, 121 f. : il. ; 30 cm.  
Orientador: Alexandre Carlos Tort.  
Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2017.  
Referências Bibliográficas: f. 119-121.  
1. Ensino de Física. 2. Problema de Kepler. 3. Precessão do Periélio. I. Tort, Alexandre Carlos. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. A gravitação e a precessão de Mercúrio: um texto para professores do Ensino Médio.

Dedico esta dissertação a todos os professores que apesar de tantas dificuldades fazem o seu melhor, preocupando-se sempre com a educação e com o futuro deste país.

## **Agradecimentos**

Agradeço a todos os meus amigos, familiares e professores, que tanto contribuíram para que eu chegasse até esse ponto.

Em especial, deixo meus agradecimentos à minha noiva, Sammya Perrota Calil, por todo o apoio e carinho que sempre me deu, aos meus pais, Fátima Cristina Fagundes Freitas e Ricardo Joaquim da Cunha Júnior, que sempre se preocuparam com a minha educação, ao meu orientador, Alexandre C. Tort, pela paciência e atenção, desde a sua orientação no meu TCC até o dia de hoje e ao professor Carlos Farina de Souza, por inúmeras e fundamentais contribuições a esse trabalho.

## RESUMO

### **A gravitação e a precessão de Mercúrio: um texto para professores do Ensino Médio**

Ricardo Fagundes Freitas da Cunha

Orientador: Alexandre Carlos Tort

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

O trabalho consiste no estudo de gravitação e tem como público alvo professores de Física do Ensino Médio.

A primeira etapa é voltada para as três leis de Kepler: i) chegamos à equação das cônicas, obtendo a 1ª lei; ii) através das propriedades de forças centrais pudemos obter a 2ª lei; iii) fazendo uso da 2ª lei associada à geometria elíptica, obtivemos a 3ª lei de Kepler. Porém sabemos que um planeta não sofre influência apenas do Sol e que este não é perfeitamente esférico. Essas perturbações são responsáveis pelo não fechamento das órbitas. A cada volta o periélio sofre uma pequena variação angular. Esse fenômeno é conhecido como precessão.

Mercúrio, por estar mais próximo do Sol, sofre maior correção da relatividade geral. A diferença de aproximadamente 43 segundos de arco por século entre a precessão calculada usando a mecânica newtoniana e a observada foi objeto de nossos estudos.

A segunda etapa são os materiais instrucionais, que são sugestões de atividades para o Ensino Médio. No primeiro material apresentamos um exemplo de aula usando o *Modellus*. Com esse programa os alunos poderão visualizar órbitas sem e com perturbação. O segundo trata-se de um roteiro para o professor que queira apresentar argumentos de plausibilidade para a lei da gravitação universal e não simplesmente enunciá-la. Já o nosso último material, Nibiru, foi elaborado para que o professor trabalhe com seus alunos a 3ª lei de Kepler.

Palavras chave: Ensino de Física, Problema de Kepler, Precessão do Periélio.

Rio de Janeiro  
01 de 2017

## ABSTRACT

### Gravitation and precession of Mercury for secondary school teachers

Ricardo Fagundes Freitas da Cunha

Supervisor: Alexandre Carlos Tort

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

This work consists in the study of gravitation and has as a target secondary school teachers.

After this first stage our studies were directed to Kepler's three laws: (i) we get at the equation for the conic sections, obtaining the 1<sup>st</sup> law; ii) through the properties of central forces we were able to obtain 2<sup>nd</sup> law; iii) using the 2<sup>nd</sup> law combined with elliptic geometry, we obtained the 3<sup>rd</sup> and last Kepler's law. As we know a planet is not influenced only by the Sun and that it is not perfectly spherical. These and other factors causes small disturbances in its orbit. At each turn the period suffers a small angular variation (the orbit do not close). This phenomenon is known as precession.

Mercury is the most affected by relativistic contribution due to its proximity to the Sun. The difference of 43 secons of arc between experimental and observed values for the perihelion shift of Mercury was subject of our studies.

The second step is the instructional materials, which are suggestions for activities for the Secondary School. In the first material we present an example of class using *Modellus*. With this program students can view orbits with and without disturbance. The second is a script for teachers who wants to show plausibility arguments for universal gravitation and does not simply enunciate it. Our latest material, *Nibiru*, was written for teachers to work with his students on Kepler's 3<sup>rd</sup> law.

Keywords: Physics education, Kepler Problem, Precession of Perihelion.

Rio de Janeiro  
01 de 2017

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>O problema de Kepler</b>	<b>5</b>
2.1	Força central . . . . .	7
2.1.1	Duas propriedades importantes de um campo de força central . . . . .	8
2.1.2	A Segunda Lei de Kepler: a lei das áreas . . . . .	14
2.1.3	A energia potencial efetiva . . . . .	15
2.1.4	Obtendo $r$ em função de $\theta$ a partir das constantes de movimento $E$ e $L$ . . . . .	17
2.1.5	A órbita de um planeta em torno do Sol . . . . .	18
2.1.6	As cônicas em coordenadas cartesianas . . . . .	22
2.1.7	A energia de uma órbita elíptica . . . . .	26
2.1.8	A terceira lei de Kepler . . . . .	29
2.1.9	O oscilador harmônico isotrópico . . . . .	31
2.1.10	Outros métodos de cálculo da equação da órbita . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Precessão</b>	<b>43</b>
3.1	Introdução . . . . .	43
3.2	A precessão de Mercúrio . . . . .	45
3.3	Métodos de cálculo da precessão de Mercúrio . . . . .	46
3.3.1	Um cálculo da precessão com base nos períodos orbital e radial da órbita . . . . .	46
3.3.2	Um método mais tradicional: equação de Binet . . . . .	53
3.3.3	O método usando o vetor de Laplace-Runge-Lenz . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Órbitas e precessão usando o <i>Modellus</i></b>	<b>63</b>
4.1	Introdução . . . . .	63
4.2	Usando o <i>Modellus</i> no problema de Kepler . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>80</b>

<b>A Um argumento de plausibilidade para a gravitação universal</b>	<b>83</b>
<b>B Nibiru</b>	<b>89</b>
<b>C A elipse</b>	<b>100</b>
<b>D O Sistema Solar</b>	<b>105</b>
D.1 Introdução . . . . .	105
D.2 Resumo da atividade . . . . .	105
<b>E Órbitas planetárias</b>	<b>115</b>
E.1 Introdução . . . . .	115
E.2 Resumo da atividade . . . . .	115
<b>Referências bibliográficas</b>	<b>119</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Gravitação é um dos assuntos mais fascinantes de Física abordados no ensino médio. Bastam algumas idas a museus de Astronomia e observatórios para vermos filas cheias de pessoas de todas as idades querendo conhecer um pouco mais sobre estrelas, planetas, cometas, galáxias. O universo é absolutamente intrigante e impressionante, um verdadeiro laboratório a céu aberto. Essa mesma busca por conhecimentos está nos alunos de Ensino Médio.

A lei de gravitação universal de Newton sustenta nossa compreensão de dinâmica do Sistema Solar e de uma boa parte do universo observável. No nível do ensino médio, há duas maneiras bem testadas de introduzir esta importante lei da natureza para os nossos alunos. A primeira é começar com a lei de Newton da gravitação universal, descrevendo como ela foi descoberta e como funciona, e depois discutir algumas de suas implicações como o peso, a ausência de peso, as marés e movimentos de planetas e/ou de satélites. Esta primeira abordagem termina com uma discussão sobre as três leis de Kepler. A outra maneira é seguir a "ordem cronológica", começando com as leis de Kepler do movimento planetário como empíricas e depois seguir para a discussão da lei de Newton da gravitação universal.

Nessa dissertação apresentamos um caminho ao professor para que consiga explorar o tema com foco no aluno e na sua aprendizagem. Os capítulos 2 e 3 compõem

o suporte teórico, um texto para professores de Física. Já o capítulo 4 e os apêndices A e B formam o material instrucional, com exemplos de como trabalhar as leis de Kepler e a lei da gravitação universal de Newton em sala.

Iniciamos essa dissertação trabalhando propriedades de forças centrais e, a partir delas, deduziremos as três leis de Kepler. Após a leitura, o professor pode recorrer ao material instrucional e aplicar as atividades relativas à 1ª e a 3ª leis.

A atividade a ser feita com os alunos relativa à 1ª lei se encontra no capítulo *Modellus* dessa dissertação e está também no material instrucional. Fazendo uso do programa computacional *Modellus*, os alunos poderão simular órbitas dos planetas, podendo ver que quando um corpo é submetido a uma força central do tipo  $\mathbf{F} = -|k|/r^2 \hat{\mathbf{r}}$ , sua órbita será elíptica, sob a condição de velocidade orbital sempre menor que a velocidade de escape (veremos que essa condição está relacionada com o nível de energia mecânica do sistema planeta - Sol). Poderão notar também que o centro de força não está localizado no centro geométrico da órbita. Já a atividade relativa à 3ª lei está no apêndice *Niburu* e também se encontra no material instrucional. Essa atividade possibilita que o professor trabalhe mais que a 3ª lei com seus alunos. Conforme o aluno vai realizando as atividades, poderá aprender sobre a energia mecânica do sistema planeta – Sol, poderá relacionar excentricidade com a forma da órbita e também a relação entre a velocidade orbital e o raio vetor.

Após o professor ter trabalhado as três leis de Kepler em sala, pode também falar sobre um problema que foi objeto de estudos por séculos de vários astrônomos: a precessão das órbitas (ver figura 1.1).

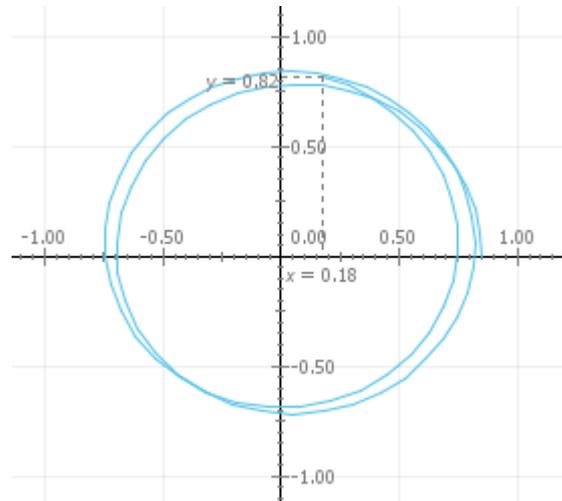


Figura 1.1: Precessão de origem relativística feita usando o programa *Modellus*. No capítulo *Modellus* encontra-se o passo - a - passo de como o professor e o aluno podem fazer a mesma simulação.

Os planetas não sofrem apenas a ação da força gravitacional exercida pelo Sol. Não é um problema simples de dois corpos. Os próprios planetas produzem interações uns com os outros, por exemplo, fazendo com que as órbitas dos planetas não fechem, ou seja, sofram precessão.

Esse fenômeno pode ser trabalhado com alunos de ensino médio, ampliando seus conhecimentos sobre as órbitas dos planetas. No capítulo 3, *Precessão*, estudaremos com mais detalhes e que é precessão e algumas de suas origens, com ênfase em uma dessas origens, uma pequena perturbação na órbita que permaneceu sem explicação por muito tempo, uma força de origem relativística.

Pequenas perturbações fazem com que o semi eixo da órbita rotacione lentamente. A velocidade com que o semi eixo rotaciona é a velocidade de precessão da órbita. Essas perturbações possuem várias origens: o fato de o Sol não ser perfeitamente esférico, o de existirem vários planetas, fazendo com que uns atraiam os outros e vice – versa e um fator que será nosso destaque, o fato de que o Sol deforma o tecido de espaço – tempo, fazendo com que a luz sofra um desvio na região. Esse último fator decorre da teoria da relatividade geral criada por Einstein hÃ;

aproximadamente um século.

Por que Mercúrio? Bom, A proximidade de Mercúrio com o Sol faz com que ele sofra mais com esse efeito relativístico que os outros planetas. Desde as primeiras medidas da precessão de Mercúrio usando a mecânica newtoniana houve uma pequena discrepância com o valor observado. Desde meados do século XIX vários astrônomos se debruçaram sobre esse problema da precessão de Mercúrio. Havia uma discrepância entre os valores teórico e experimental na precessão de sua órbita de aproximadamente 43 segundos de arco por século, que só pode ser explicada com a teoria da relatividade de Einstein. De fato, essa foi a primeira comprovação (foram realizados outros testes além desse) de que sua teoria estava correta. Isso mostra a importância desse cálculo.

Voltando ao capítulo *Modellus*, o professor encontrará também uma atividade para realizar com seus alunos, para que possam visualizar, de maneira qualitativa, esse efeito da precessão nas órbitas dos planetas.

No apêndice A, o professor encontrará exemplo de como pode trabalhar em sala argumentos de plausibilidade para a lei da gravitação de Sir Isaac Newton. A maioria dos livros didáticos introduzem esse assunto do jeito mais simples possível, mostrando a fórmula matemática da lei da gravitação e algumas de suas aplicações. Nesse apêndice trabalhamos alguns argumentos de plausibilidade, acreditando que possa melhorar a aprendizagem dos estudantes em relação à essa lei vital da natureza. Através de algumas perguntas, o professor pode construir passo - a - passo essa lei com seus alunos.

Um fruto desse apêndice foi produção de um artigo sobre argumentos de plausibilidade, publicado na revista *Physics Education* [1].

Espero que a leitura seja agradável e que possa auxiliar o professor tanto no suporte teórico quanto na prática docente, através de exemplos de como trabalhar certos conteúdos da gravitação universal em sala.

## Capítulo 2

### O problema de Kepler

A solução do problema de Kepler representa um dos grandes triunfos das leis do movimento e da gravitação newtoniana (ver figura 2.1). O problema, no nosso contexto, consiste em obter as três leis de Kepler, a saber:

- (i) *Lei das órbitas*: a órbita de um planeta em torno do Sol é uma elipse e o Sol ocupa um dos focos desta elipse;
- (ii) *Lei das áreas*: um segmento de reta que une o Sol ao planeta varre áreas iguais em tempos iguais;
- (iii) *Relação entre o período e o semi-eixo maior da elipse*: para uma órbita elíptica, o quadrado do período  $T$  é proporcional ao cubo do comprimento do semi-eixo maior  $a$ , isto é:  $T^2 \propto a^3$ ;

Entretanto, para entendermos a solução do problema de Kepler é necessário que, primeiramente, façamos uma revisão do conceito de força central e das propriedades que a acompanham. No que segue, nossas referências principais são as referências [4–6].



Figura 2.1: À esquerda, Johannes Kepler (1571–1630): Astrônomo e matemático alemão. Dedicou-se ao estudo do movimento dos planetas. Seu questionamento sobre o centro das órbitas planetárias o levou, após anos de trabalho duro, a corrigir a teoria de Copérnico, afirmando que as órbitas planetárias não são circulares, mas sim elípticas. Mais tarde veio a melhorar seu modelo, obtendo a 1ª de suas três leis. Kepler publicou as duas primeiras leis no livro *Astronomia Nova* (1609) e, em meados de 1618, quase 10 anos depois, após várias tentativas, conseguiu obter a 3ª lei, publicando-a no prefácio de seu livro *Harmonices Mundi* (1619) ; À direita, Sir Isaac Newton (1643–1727): Físico, astrônomo, matemático e alquimista inglês. Após se formar em bacharel de humanidades pela universidade de Cambridge no ano de 1665, refugiou-se na casa de sua mãe, onde havia nascido, em Woolsthorpe, devido à peste negra. Durante seu isolamento, nos anos de 1665 e 1666, fez várias descobertas incríveis, tanto no campo da matemática quanto da física. Entre essas descobertas provou que as órbitas dos planetas são elípticas porque sofrem a ação de uma força central inversamente proporcional ao quadrado de suas respectivas distâncias ao Sol. No final de 1684, anos mais tarde, publicou essa sua descoberta a cerca da gravitação. Um pouco depois, em 1687, publicou o *Principia*, uma das obras mais importantes já feitas pelo homem. Posteriormente Newton publicou duas novas edições, com algumas correções. Publicou diversos outros trabalhos, como, por exemplo, o *Opticks*, um tratado de óptica geométrica. Foi presidente da casa da moeda, presidente da Royal Society e recebeu o título do cavaleiro *sir* pela rainha Anne ([2, 3]). Figuras wikipédia.

## 2.1 Força central

**Definição:** Um campo de força, i.e.: uma função vetorial do vetor posição  $\mathbf{r}$ , em relação a um ponto fixo  $O$ , denominado centro de força (ver figura 2.2), é dito central se for escrita sob a forma

$$\mathbf{F} = F(r) \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.1)$$

onde  $r = |\mathbf{r}|$  e  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ .

**Exemplos:**

- (a) um exemplo de força central é o associado ao oscilador harmônico isotrópico para o qual a lei de força se escreve:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\kappa r \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.2)$$

sendo  $\kappa$  uma constante positiva;

- (b) outro exemplo é dado pela lei da gravitação universal, para a qual

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.3)$$

sendo  $G$  a constante da gravitação universal e  $m_1$  e  $m_2$ , as massas dos corpos no espaço que sofrem atração gravitacional mútua.

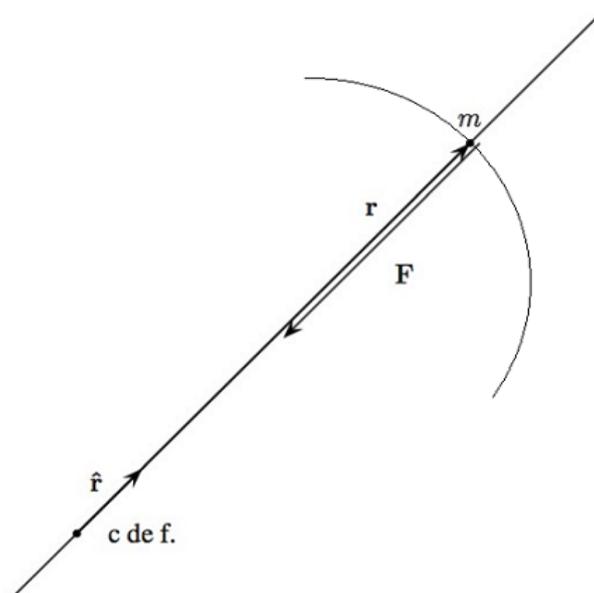


Figura 2.2: Um exemplo de força central é o caso Terra - Lua. Nesse caso, podemos considerar o centro de força do sistema na Terra, de massa  $m_1$ , em repouso, e a Lua, de massa  $m_2$ , orbitando ao redor da Terra sob ação de uma força central - gravitacional - que depende do inverso do quadrado da distância. Newton descobriu que, um corpo submetido a esse tipo de força  $F \propto \frac{1}{r^2} \hat{r}$  possui uma trajetória elíptica, sob a condição de sua velocidade orbital ser menor que a velocidade de escape. Em se tratando do sistema Terra - Lua, a excentricidade da elipse é tão pequena que podemos dizer que a órbita é aproximadamente circular. O mesmo vale para as órbitas dos planetas ao redor do Sol. A que apresenta maior excentricidade (da ordem de 0.2) é a de Mercúrio, que será nosso objeto de estudo mais adiante.

### 2.1.1 Duas propriedades importantes de um campo de força central

Um campo de forças central apresenta simetria esférica e pelo menos duas propriedades muito importantes. Vejamos cada uma delas em detalhe.

#### 1. O momento angular é uma constante de movimento

O momento angular  $L$  de uma partícula de massa  $m$ , em relação a um ponto  $O$ , é definido por:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor posição da partícula em relação ao ponto  $O$  e  $\mathbf{p} = m \, d\mathbf{r}/dt$  é o seu momento linear. A evolução temporal do momento angular é dada pela expressão abaixo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (2.5)$$

Como  $d\mathbf{r}/dt$  e  $\mathbf{p}$  são colineares, o primeiro termo do lado direito desta equação é nulo, logo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (2.6)$$

Fazendo uso da 2ª lei de Newton,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (2.7)$$

O produto vetorial  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$  é o torque em relação ao ponto  $O$ . Se a força for central, teremos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times F(r) \hat{\mathbf{r}} = 0, \quad (2.8)$$

ou seja,  $\mathbf{L}$  é uma constante de movimento em relação ao ponto  $O$ . Este resultado será muito importante na discussão do problema de Kepler. Uma consequência é que o movimento de uma partícula submetida à ação de uma força central se dá sobre um plano invariável.

Como o movimento se dá no plano, convém utilizar coordenadas plano-polares:

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}; \quad (2.9)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}; \quad (2.10)$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.11)$$

Considerando a atuação exclusiva de força central e fazendo uso da 2ª lei de Newton, teremos que:

$$\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}}, \quad (2.12)$$

e, substituindo a equação (2.10) na equação (2.4), podemos reescrever o momento linear sob a seguinte forma:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \left( m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = m r \hat{\mathbf{r}} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) = m r^2 \dot{\theta} \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.13)$$

Como  $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{z}}$ , o vetor momento angular pode ser definido como:

$$\mathbf{L} = m r^2 \dot{\theta} \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.14)$$

Portanto a componente do momento angular ortogonal ao plano da órbita de uma partícula sob ação de uma força central pode ser definida como:

$$L = m r^2 \dot{\theta}. \quad (2.15)$$

Essa componente, assim como o momento angular, é uma constante de movimento.

## 2. Uma força central é conservativa

Uma força é dita conservativa quando o trabalho  $W$  realizado por ela de um ponto  $A$  até um ponto  $B$  qualquer é o mesmo, independentemente do caminho. Ou seja, depende apenas do ponto de partida e do ponto de chegada. Podemos dizer também, através do mesmo argumento, que uma força é conservativa quando o trabalho realizado por ela ao longo de uma curva fechada é nulo.

Agora que sabemos a definição de força conservativa, verificaremos se uma força central se encaixa nessa classificação:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.16)$$

onde  $d\mathbf{s}$  é o vetor deslocamento infinitesimal da partícula.

O produto escalar  $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s}$  que aparece na equação anterior equivale à variação infinitesimal  $dr$  do módulo do raio vetor  $\mathbf{r}$  entre os pontos A e B, ou seja:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = dr. \quad (2.17)$$

Então, voltando à (2.16), teremos que:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = \int_{r_A}^{r_B} F(r) dr, \quad (2.18)$$

onde  $r_A$  é a distância entre o centro de força O e a posição inicial da partícula A  $r_A = |\mathbf{OA}|$  e  $r_B$  é a distância entre O e a posição final da partícula B  $r_B = |\mathbf{OB}|$ . Assim, podemos concluir que o trabalho realizado por uma força central independe do caminho. Então toda força central é conservativa. Essa propriedade nos diz que a energia mecânica E é mais uma constante de movimento.

Outro ponto importante é que calcular o trabalho que uma força conservativa realiza ao deslocar uma partícula de um ponto a outro é o mesmo que medir sua diferença de energia potencial U entre esses pontos:

$$U_A - U_B = W_{A \rightarrow B} = \int_{r_A}^{r_B} F(r) dr. \quad (2.19)$$

A consequência da relação acima é que, conhecendo  $F(r)$ , podemos calcular o trabalho dessa força e assim, a variação da energia potencial de A até B.

Para o caso de a força central ser uma força gravitacional, teremos que:

$$U(r) - U(r_0) = +Gm_1m_2 \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{Gm_1m_2}{r_0}, \quad (2.20)$$

onde  $r_0$  é uma distância radial à origem de referência. Aqui temos que lembrar que o a (2.19) é capaz de informar é a diferença de energia potencial  $\Delta U$ . Para obtermos a energia potencial em um ponto r qualquer,  $U(r)$ , temos que definir

arbitariamente a energia no ponto  $r_0$ . Nesse caso, o mais comum é escolher o ponto de referência no infinito e tomar a energia potencial nesse ponto como nula, uma vez que a força gravitacional depende do inverso do quadrado da distância, ou seja, conforme a distância tende ao infinito, a interação gravitacional tende a zero. Portanto, fazendo  $r_0 \rightarrow \infty$  e escolhendo  $U(r_0 \rightarrow \infty) = 0$ , temos:

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}. \quad (2.21)$$

Esta expressão representa a energia potencial gravitacional de um sistema de duas massas puntiformes.

Tomaremos, como exemplo, um objeto de massa  $m$  se afastando da superfície terrestre. Pela (2.21), podemos ver que, à medida que o objeto se afasta da Terra, sua energia potencial vai aumentando, conforme mostra a figura 2.3. O mesmo acontece quando o objeto aumenta sua altura em regiões próximas à superfície. A diferença entre as duas situações é que, no 1º caso, a aceleração da gravidade varia com a distância, enquanto no 2º caso, a variação é desprezível. Até mesmo para objetos abandonados de grandes alturas, como as de voos comerciais, da ordem de  $10km$ , superiores ao Monte Everest ( $\sim 8km$ ), podemos considerar que gravidade é igual á do nível do mar, uma vez que o raio da Terra (considerando-a aproximadamente esférica) é de aproximadamente  $6370$  km. A tabela 2.1 mostra a energia potencial nos dois casos:

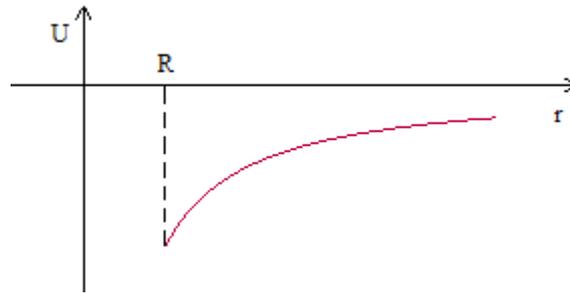


Figura 2.3: Energia potencial gravitacional em função de  $r$ . A curva começa em  $r = R$ , onde  $R$  é o raio da Terra porque a equação (2.3) é válida apenas para regiões externas as massas, ou seja, nesse caso, funciona somente para região externa ao planeta Terra.

Objeto próximo à superfície	Objeto afastado da superfície terrestre
$U(h) = mgh ; h_0 = 0 \text{ e } U(h_0) = 0$	$U(r) = -\frac{GM_{\oplus}m}{r} ; r_0 \rightarrow \infty \text{ e } U(r_0) = 0$

Tabela 2.1: Energia potencial de objetos próximos e afastados da superfície terrestre.

Agora vamos supor que o objeto afastado sofra um deslocamento infinitesimal  $h$ , conforme mostra a figura 2.4. Expandindo o potencial no ponto  $R+h$ , teremos que:

$$U(R+h) = U(R) + U'(R)h + \frac{1}{2}U''(R)h^2 + \dots \quad (2.22)$$

Eliminando os termos de ordem igual ou superiores a 2, teremos que:

$$U(R+h) - U(R) \approx \frac{GMm}{R^2}h, \quad (2.23)$$

onde  $\frac{GMm}{r^2}$  corresponde a aceleração da gravidade  $g$ . Logo:

$$U(R+h) - U(R) = mgh. \quad (2.24)$$

O resultado acima nos mostra que, para pequenos deslocamentos ( $h \ll R$ ), a gravidade se mantém constante, e a variação de energia potencial é dada por  $mgh$  é a mesma que para casos de variações de alturas próximas à superfície terrestre.

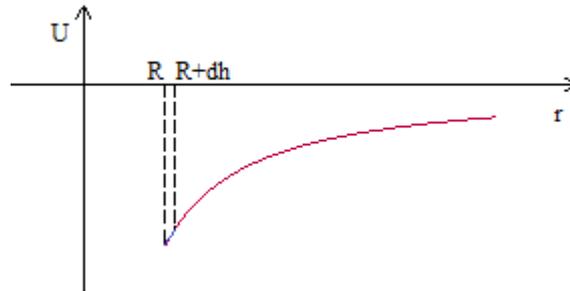


Figura 2.4: Para pequenas variações de  $r$ , tais que  $h \ll R$ , a energia potencial varia linearmente com  $h$ .

### 2.1.2 A Segunda Lei de Kepler: a lei das áreas

Uma das consequências importantes da simetria esférica da força central e da consequente caracterização do momento angular como uma constante de movimento em relação ao centro de força é a obtenção da segunda lei de Kepler ou lei das áreas.

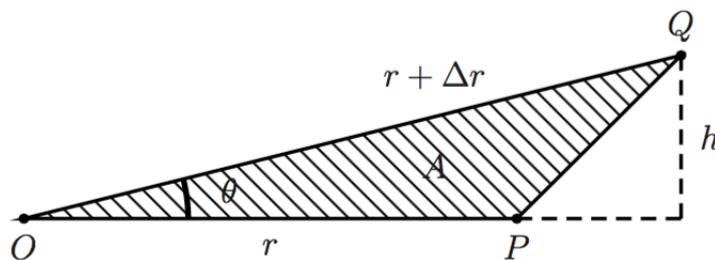


Figura 2.5: A figura representa a área percorrida pelo raio vetor - que liga o centro de força à partícula - durante seu deslocamento infinitesimal de  $P$  até  $Q$ .

A partir da figura 2.5, podemos escrever que:

$$A = \frac{1}{2}r(r + \Delta r)\text{sen}\theta. \quad (2.25)$$

Considerando que o deslocamento da partícula de P até Q é muito pequeno,  $\theta \ll 1$ , ou ainda,  $\text{sen}\theta \approx \theta$ . Então:

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right) \quad ; \quad \frac{\Delta r}{r} \ll 1, \quad (2.26)$$

Logo:

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta. \quad (2.27)$$

Dividindo por  $\Delta t$  e tomando o limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (2.28)$$

Fazendo uso do momento angular como constante de movimento para rescrever  $r^2 d\theta/dt = L/m$ , segue que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{constante}. \quad (2.29)$$

Portanto, como estamos tratando com uma força central que, por sua vez, implica a constância do momento angular, a velocidade areolar  $\frac{dA}{dt}$  de um planeta é uma constante de movimento. Como a lei da Gravitação Universal é uma força central, concluímos que ela satisfaz a segunda lei de Kepler.

### 2.1.3 A energia potencial efetiva

Conforme vimos anteriormente, forças centrais são conservativas e uma consequência é que corpos sujeitos à atuação exclusiva de forças desse tipo é que suas energias mecânicas  $E$  são constantes. No caso de corpos submetidos à ação de forças centrais, não somente  $E$ , mas o momento angular  $\mathbf{L}$  e,consequentemente, sua componente ortogonal ao plano da trajetória  $L = mr^2\dot{\theta}$  são também constantes de movimento. A próxima etapa será relacionar  $E$  e  $L$ , a fim de obtermos  $r$  em função de  $\theta$ . A começar, seguiremos com a definição de energia mecânica:

$$E = \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} + U(r), \quad (2.30)$$

onde o termo  $\frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2}$  é a energia cinética  $T$ . Fazendo uso da equação (2.10), podemos obter  $\dot{\mathbf{r}}^2$ :

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) \cdot (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\theta}), \quad (2.31)$$

$\Rightarrow$

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2. \quad (2.32)$$

Substituindo esse resultado na equação (2.30), reescreveremos a energia mecânica sob a forma:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r), \quad (2.33)$$

ou ainda:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r), \quad (2.34)$$

relacionando, assim, as constantes  $E$  e  $L$ .

A conservação do momento angular reduz o problema dinâmico a um problema unidimensional para uma partícula com uma energia potencial efetiva  $U_{ef}$  definida por:

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad (2.35)$$

e, conseqüentemente, a força efetiva  $F_{ef}$  que atua sobre a partícula é:

$$F_{ef}(r) = -\frac{\partial U_{ef}}{\partial r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (2.36)$$

$\Rightarrow$

$$F_{efetiva} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}. \quad (2.37)$$

Esta equação é idêntica à uma equação de movimento unidimensional de uma partícula sujeita à atuação de uma força  $F(r) + L^2/mr^3$ . Para  $L \neq 0$ , o termo,

$L^2/mr^3$  é o termo "centrífugo" da equação. Essa força tende a afastar a partícula do centro. Por esse motivo o potencial associado a essa força é chamado de barreira centrífuga, como mostra a figura 2.6. Somente para  $L = 0$  esta barreira é inexistente.

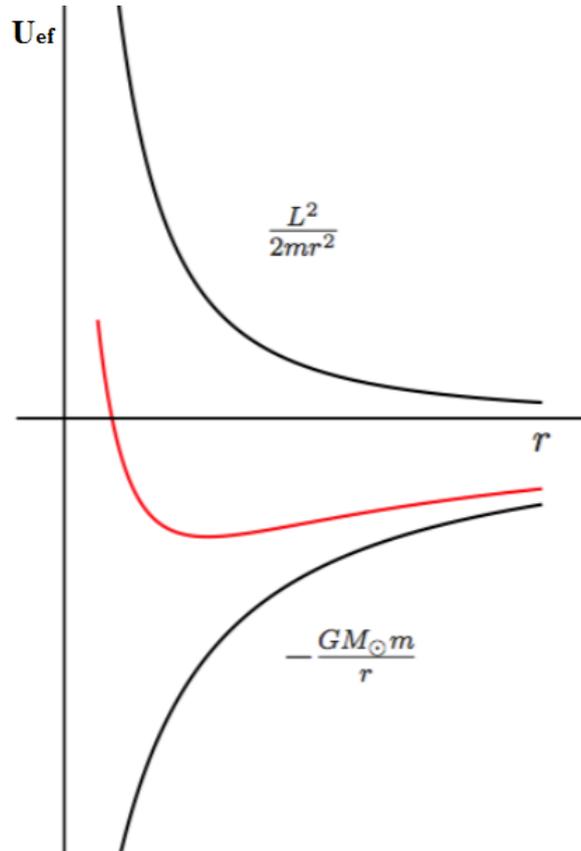


Figura 2.6: A curva superior indica a barreira centrífuga, já a energia potencial gravitacional está relacionada com a curva inferior. A combinação das duas curvas está em vermelho e representa a energia potencial efetiva.

### 2.1.4 Obtendo $r$ em função de $\theta$ a partir das constantes de movimento $E$ e $L$

Da equação (2.34), segue que:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} - U(r) \right), \quad (2.38)$$

mas, como

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt},$$

e

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2},$$

temos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \left( \frac{L}{mr^2} \right), \quad (2.39)$$

logo:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \left( \frac{mr^2}{L} \right). \quad (2.40)$$

Substituindo a equação (2.38) na equação acima e, elevando cada lado ao quadrado, obteremos:

$$\left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} - U(r) \right) \left( \frac{mr^2}{L} \right)^2, \quad (2.41)$$

ou ainda:

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2mU(r)}{L^2}. \quad (2.42)$$

Esta será a nossa equação-mestre a partir da qual obteremos a primeira lei de Kepler.

### 2.1.5 A órbita de um planeta em torno do Sol

Consideremos agora a interação gravitacional entre o Sol e um planeta de massa  $m$ . De acordo com a lei da gravitação universal, a interação gravitacional entre os dois é descrita por:

$$F(r) = -\frac{GM_{\odot}m}{r^2}, \quad (2.43)$$

onde  $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N m}^2/\text{kg}^2$  é a constante de gravitação universal,  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{kg}$  é a massa do Sol,  $m$  é a massa do planeta (para a Terra, por exemplo,  $m \approx 6 \cdot 10^{24} \text{kg}$ ) e  $r$  é a distância entre o Sol e o planeta.

A tabela(2.1.5) mostra, entre outras coisas, a massa dos planetas em unidades de massa solar. Em todos os casos vemos que a massa dos planetas é muito menor do que a a massa do Sol. O planeta com maior massa, Júpiter, possui aproximadamente 1/1000 da massa do Sol. Portanto, é razoável supor que os planetas estão orbitando em torno de um Sol fixo. Como veremos mais tarde, a rigor deveríamos considerar a massa reduzida do sistema definida por

$$\mu = \frac{M_{\odot} m}{M_{\odot} + m}.$$

Mas como  $M_{\odot} \gg m$ , segue que  $\mu \approx m$ . Retornando à equação (2.21), a energia potencial associada à força gravitacional entre o Sol e um planeta qualquer do sistema solar, de massa  $m$ , é:

$$U(r) = -\frac{GM_{\odot}m}{r}. \quad (2.44)$$

Substituindo o potencial gravitacional na equação (2.91) e, definindo, por conveniência,  $\alpha = GM_{\odot}m$ , obtemos

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2m\alpha}{rL^2}. \quad (2.45)$$

Observando que:

planeta	excentricidade ( $\epsilon$ )	massa ( $\times 10^{-6} M_{\odot}$ )	símbolo astrológico
Mercúrio	0,206	0,17	☿
Vênus	0,007	2,08	♀
Terra	0,017	3,00	♁
Marte	0,093	0,32	♂
Júpiter	0,048	954,79	♃
Saturno	0,056	285,89	♄
Urano	0,049	43,66	♅
Netuno	0,009	51,51	♆

Tabela 2.2: Excentricidade e massa dos planetas em unidades da massa do Sol  $M_{\odot}$  [7].

$$\frac{d(1/r)}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}, \quad (2.46)$$

e definindo  $u = 1/r$ , temos:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2. \quad (2.47)$$

Voltando à equação (2.45) e fazendo uso da substituição  $u = 1/r$  definida acima, podemos concluir que:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = -u^2 + \frac{2mE}{L^2} + \frac{2mu\alpha}{L^2}. \quad (2.48)$$

Completando quadrado, obtemos:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = -\left(u - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2} + \left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2. \quad (2.49)$$

Definindo

$$z = u - \frac{m\alpha}{L^2} \quad \text{e} \quad B = \frac{m\alpha}{L^2} \left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right)^{1/2}, \quad (2.50)$$

chegamos à equação abaixo:

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -z^2 + B^2, \quad (2.51)$$

cuja solução é:

$$z = B \cos(\theta - \theta_0) + B. \quad (2.52)$$

Como

$$z = \frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2},$$

segue que

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2} + z = \frac{m\alpha}{L^2} + B \cos(\theta - \theta_0), \quad (2.53)$$

ou ainda

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2} + \frac{m\alpha}{L^2} \left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right)^{1/2} \cos(\theta - \theta_0), \quad (2.54)$$

onde

$$\epsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right)^{1/2} \quad (2.55)$$

é a excentricidade da órbita. Substituindo  $\epsilon$ , obteremos a equação da órbita de um planeta de massa  $m$  orbitando ao redor do Sol fixo

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{L^2} [1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)]. \quad (2.56)$$

Por conveniência escolhemos  $\theta_0 = 0$  e escrevemos

$$r(\theta) = \frac{L^2}{m\alpha(1 + \epsilon \cos \theta)}, \quad (2.57)$$

A escolha  $\theta_0 = \pi$  é também frequentemente utilizada na literatura. A posição inicial do planeta em nada altera a nossa discussão física do problema. Neste caso,  $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$  e a equação da órbita se escreve

$$r(\theta) = \frac{L^2}{m\alpha(1 - \epsilon \cos \theta)}, \quad (2.58)$$

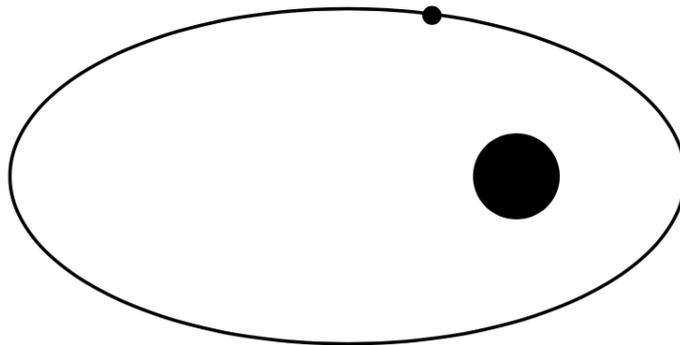


Figura 2.7: Órbita de um planeta ao redor do Sol é uma curva elíptica.

As equações (2.57) ou (2.58) descrevem mais do que a órbita de um planeta em torno do Sol. Elas descrevem uma classe de curvas que recebem o nome de *cônicas*. As cônicas são caracterizadas pelo valor da excentricidade  $\epsilon$  dividem-se em quatro famílias distintas: *elipses*, *círculos* (que são casos limites de elipses), *parábolas* e *hipérboles*. Para comprovar isto convém passar para coordenadas cartesianas.

### 2.1.6 As cônicas em coordenadas cartesianas

Consideremos a equação (2.57) e por conveniência introduzamos a definição

$$k = \frac{L^2}{m\alpha}, \quad (2.59)$$

ou seja:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 + \epsilon \cos \theta), \quad (2.60)$$

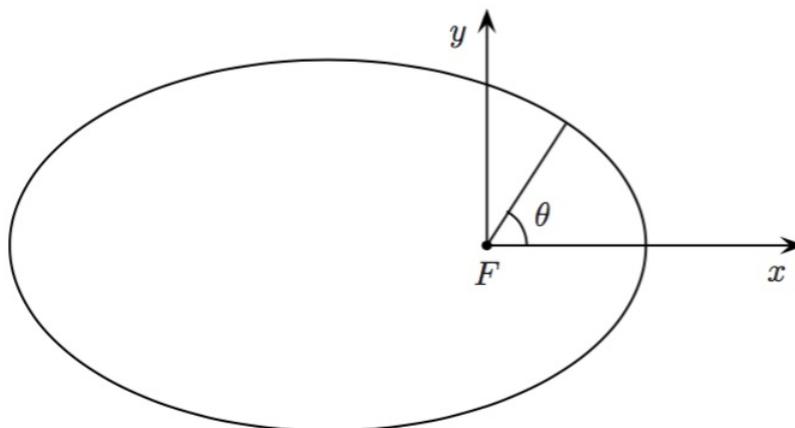


Figura 2.8: A elipse em coordenadas cartesianas

Introduzindo um sistema de coordenadas cartesianas com origem em um dos focos da elipse, veja a figura (2.8), vemos que  $\cos \theta = x/r$ . Substituindo essa relação na (2.60) e lembrando que  $r^2 = x^2 + y^2$ , obteremos que:

$$x^2 + y^2 = k^2 - 2\epsilon kx + \epsilon^2 x^2. \quad (2.61)$$

A equação (2.61), como veremos a seguir, representa as cônicas em coordenadas cartesianas e a partir dela podemos analisar separadamente os quatro casos mencionados anteriormente.

**O círculo**  $\epsilon = 0$

Neste caso, a equação (2.61) nos dá:

$$x^2 + y^2 = k^2, \quad (2.62)$$

que descreve um círculo de raio igual a  $r_0 = L^2/m\alpha$ . Da equação (2.55) vemos que a energia da órbita circular pode ser rescrita na forma

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2L^2} = -\frac{GM_{\star}m}{r_0} < 0. \quad (2.63)$$

**A elipse**  $0 < \epsilon < 1$

Reorganizando a equação (2.61), teremos que:

$$x^2(1 - \epsilon^2) + 2\epsilon kx + y^2 = k^2. \quad (2.64)$$

Fazendo  $b = \frac{k}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$  e dividindo a (2.64) por  $k^2$ , obtemos:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{2\epsilon x}{k} + \frac{y^2}{k^2} = 1. \quad (2.65)$$

Completando quadrado, temos:

$$\left(x + \frac{\epsilon b}{\sqrt{(1 - \epsilon^2)}}\right)^2 \frac{1}{b} + \frac{y^2}{k^2} = 1 + \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{1}{1 - \epsilon^2}. \quad (2.66)$$

Multiplicando a equação acima por  $1 - \epsilon^2$  e realizando a substituição  $a = \frac{b}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = \frac{k}{1 - \epsilon^2}$ , poderemos chegar à equação da órbita elíptica:

$$\frac{(x + \epsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.67)$$

onde

$$a = \frac{k}{1 - \epsilon^2}, \quad e \quad b = \frac{k}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}. \quad (2.68)$$

Esta expressão nos mostra que o centro geométrico da elipse localiza-se no ponto

$$\left( -\frac{k\epsilon}{1 - \epsilon^2}, 0 \right).$$

Um dos focos da elipse  $F_1$  localiza-se na origem,  $(0,0)$ , no nosso caso é onde posicionamos o Sol. A distância focal, isto é, a distância entre o centro geométrico da elipse e a origem é dada por<sup>1</sup>:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = a\epsilon.$$

O outro foco localiza-se no ponto

$$F_2 = (-2c, 0) = (-2a\epsilon, 0).$$

A equação (2.55) pode ser rescrita na forma

$$(\epsilon + 1)(\epsilon - 1) = \frac{2EL^2}{m\alpha^2}. \quad (2.69)$$

Como  $0 < \epsilon < 1$ , vemos que a energia de uma órbita elíptica deve ser negativa,  $E = -|E| < 0$ .

**A parábola  $\epsilon = 1$**

Agora a equação (2.61) nos dá:

$$y^2 = -2k \left( x - \frac{k}{2} \right). \quad (2.70)$$

<sup>1</sup>Para maiores detalhes sobre propriedades geométricas da elipse, o leitor pode consultar o apêndice A elipse.

Como  $\epsilon = 1$ , a equação (2.55) ou a (2.69) nos informa que  $E = 0$  para uma órbita parabólica.

**A hipérbole  $\epsilon > 1$**

$$\frac{(x - \epsilon a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.71)$$

onde:

$$a = \frac{k}{\epsilon^2 - 1}, \quad e \quad b = \frac{k}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}. \quad (2.72)$$

Neste caso, a equação (2.69) nos diz que  $E > 0$ .

A figura 2.9 mostra exemplos das possíveis cônicas vistas anteriormente:

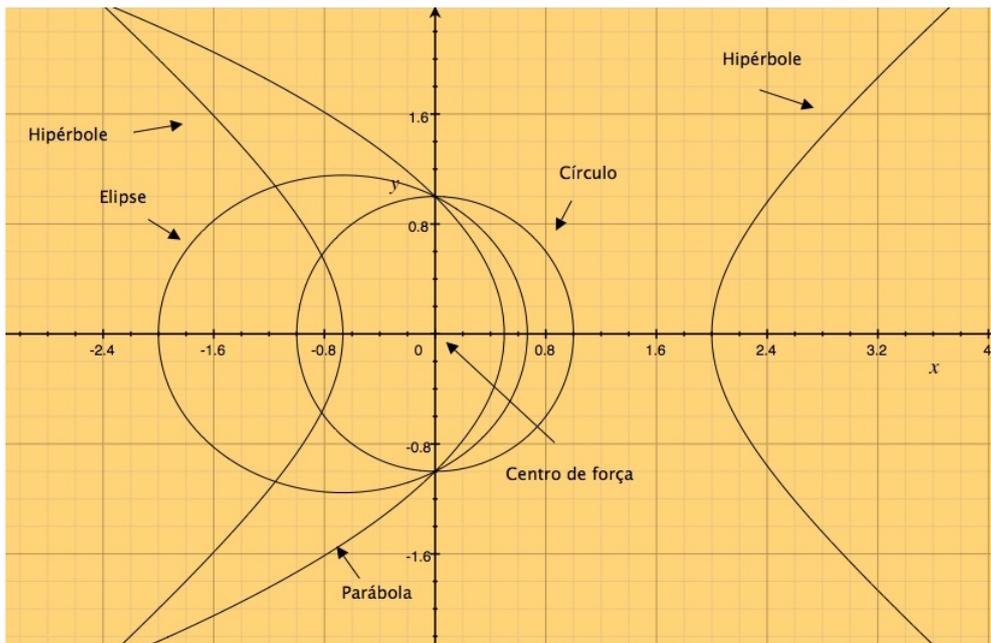


Figura 2.9: As cônicas.

### 2.1.7 A energia de uma órbita elíptica

A maior aproximação do planeta ao centro de força  $r_{\min}$ , é chamada de *pericentro*. Como no nosso caso o Sol se encontra no centro de força, essa distância mínima é chamada *periélio*. O maior afastamento radial,  $r_{\max}$ , é chamado *apocentro*, no caso do Sol: *afélio*.

Para uma órbita elíptica, por meio da equação (2.57), podemos calcular facilmente o pericentro e o apocentro. Os resultados são

$$r_{\min} = \frac{L^2}{m\alpha(1 + \epsilon)}, \quad (2.73)$$

pois, quando  $r = r_{\min}$ ,  $\theta = 0$ , e

$$r_{\max} = \frac{L^2}{m\alpha(1 - \epsilon)}. \quad (2.74)$$

pois, quando  $r = r_{\max}$ ,  $\theta = \pi$ . Observe que, para  $\epsilon = 0$ ,  $r_{\min} = r_{\max} = L^2/m\alpha$ , isto é quando excentricidade é nula, a trajetória é circular, com raio igual a  $r_0 = L^2/m\alpha$ . Para trajetória elíptica,  $0 < \epsilon < 1$ . Da (2.69), temos que:

$$\epsilon^2 - 1 = \frac{2EL^2}{m\alpha}, \quad (2.75)$$

e com auxílio da (2.68) e da (2.59), podemos ver que:

$$\frac{k}{a} = \frac{L^2}{a m \alpha^2} = \frac{2EL^2}{m\alpha}, \quad (2.76)$$

ou seja, a energia mecânica de um sistema planeta – Sol é:

$$E = -\frac{\alpha}{2a} = -\frac{GM_{\odot}m}{2a}. \quad (2.77)$$

Este resultado mostra-nos que podemos ter uma família de órbitas elípticas com a mesma energia mecânica, basta para isso que elas possuam o mesmo semi-eixo maior  $a$ , mas diferentes semi-eixos menores  $b$ , logo, com diferentes excentricidades, veja a figura 2.10 . Esta figura representa três elipses e um círculo de mesma energia, porém diferentes excentricidades. O semi-eixo maior vale  $a = 2$  unidades de comprimento e a equação (2.67), depois de substituirmos  $k$  por  $2(1 - \epsilon^2)$

e  $b$  por  $2\sqrt{1-\epsilon^2}$ , pode ser expressa em termos de  $\epsilon$  como

$$\frac{(x + 2\epsilon)^2}{4} + \frac{y^2}{4(1-\epsilon^2)} = 1. \quad (2.78)$$

As curvas da figura 2.10 são obtidas escolhendo  $\epsilon = 0; 0,25; 0,50; 0,75$ . O foco na origem  $F = (0,0)$  permanece na origem, mas o outro foco move-se para a esquerda, pois  $F' = (-4\epsilon, 0)$ . Convém lembrar que como  $E$  não muda, a forma das elipses varia porque  $\epsilon$  depende do valor do momento angular  $L$ .

Esta degenerescência está relacionada com uma simetria escondida do problema de Kepler que por sua vez está associada como veremos mais adiante com uma constante de movimento adicional: o *vetor de Laplace-Runge-Lenz*.

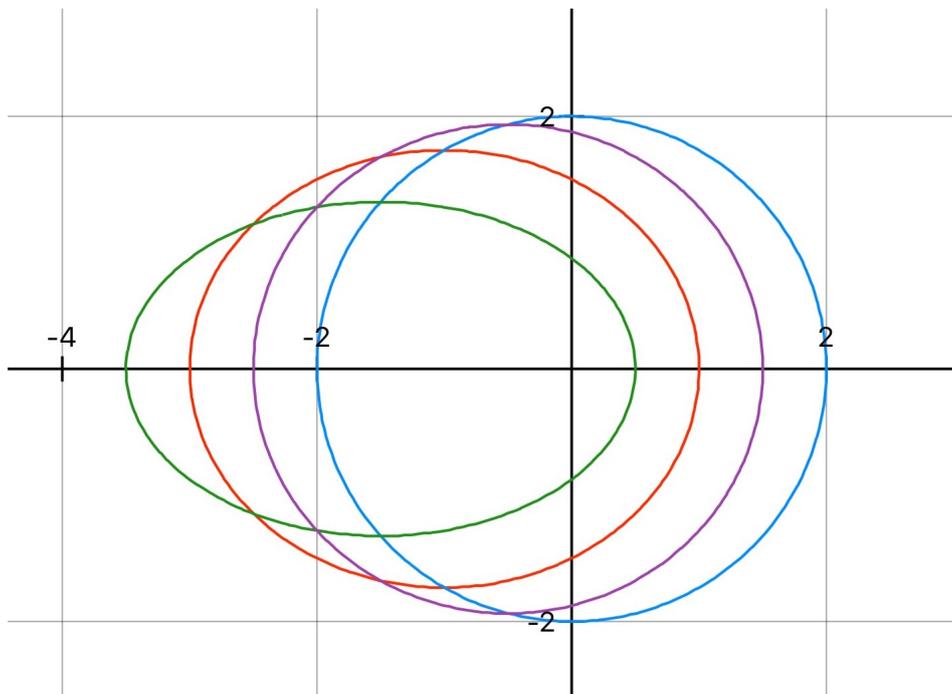


Figura 2.10: Todas as órbitas elípticas com mesmo semi-eixo maior têm a mesma energia, porém enquanto o foco na origem permanece fixo, o segundo foco, à esquerda, desloca-se para a direita, diminuindo sua excentricidade. No caso limite, o círculo, os focos coincidem na origem.

Finalmente, observe que o módulo da velocidade do planeta em qualquer

ponto da órbita elíptica pode ser obtido da equação

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GM_{\odot}m}{r} = -\frac{GM_{\odot}m}{2a}, \quad (2.79)$$

onde  $v = \|\mathbf{v}\|$ .

A tabela 2.1.7 mostra, resumidamente, as características de cada cônica: excentricidade, equação e energia. O gráfico 2.1.7 é um complemento dessa tabela, apresentando a relação entre níveis de energia e órbita.

órbita	excentricidade	equação	energia
círculo	$\epsilon = 0$	$x^2 + y^2 = k^2$	$E = -\frac{GM_{\odot}m}{r_0} < 0$
elipse	$0 < \epsilon < 1$	$\frac{(x+\epsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a = \frac{k}{1-\epsilon^2}$ $b = \frac{k}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$	$E = -\frac{GM_{\odot}m}{a} < 0$
parábola	$\epsilon = 1$	$y^2 = -2k \left(x - \frac{k}{2}\right)$	$E = 0$
hipérbole	$\epsilon > 1$	$\frac{(x-\epsilon a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a = \frac{k}{\epsilon^2-1}$ $b = \frac{k}{\sqrt{\epsilon^2-1}}$	$E > 0$

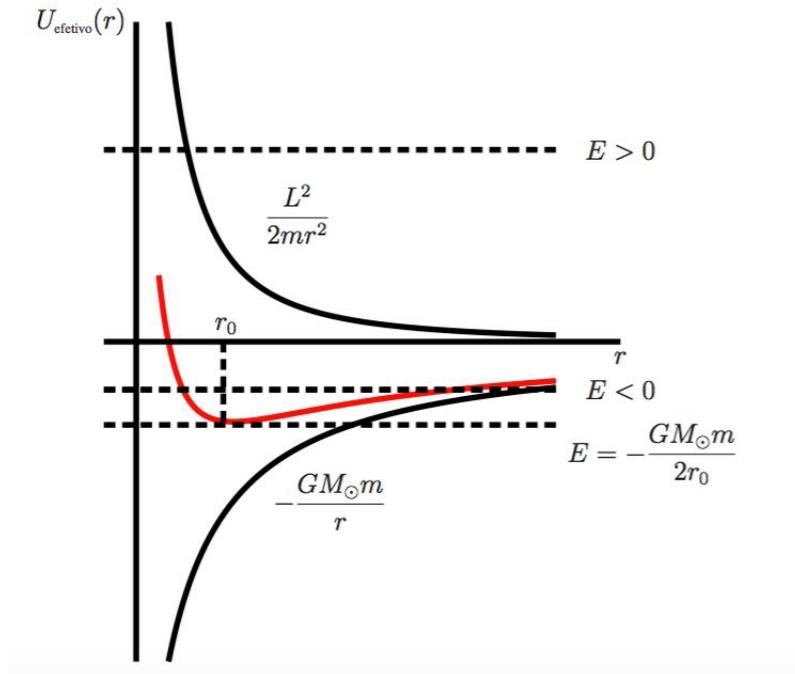


Figura 2.11: As linhas horizontais representam os níveis de energia. Perceba que, para  $E < 0$ , as órbitas são limitadas. A linha mais abaixo representa uma trajetória circular, uma vez que  $r = r_0 = \text{constante}$ . Já a linha imediatamente superior representa uma trajetória elíptica, uma vez que há dois pontos de retorno, pontos que a linha corta o gráfico. O ponto mais próximo à origem é o periélio e, o mais afastado, o afélio. Para  $E \geq 0$ , as órbitas não são limitadas.

### 2.1.8 A terceira lei de Kepler

Para completar a solução do problema de Kepler vejamos agora como obter a terceira lei que relaciona o período com o comprimento do semi-eixo maior. Da lei das áreas segue que

$$A = \frac{LT}{2m}, \quad (2.80)$$

onde  $T$  é o período de um planeta que descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Por outro lado, a área de uma elipse é dada por

$$A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}. \quad (2.81)$$

Elevando ao quadrado cada uma destas equações e igualando os resultados obtemos

$$\pi^2 a^4 = \frac{L^2 T^2}{4m^2 (1 - \epsilon^2)}. \quad (2.82)$$

Lembrando que  $k = L^2/m\alpha$ , e que  $a = k/(1 - \epsilon^2)$ , escrevemos

$$\pi^2 a^3 = \frac{\alpha T^2}{4m} = \frac{GM_{\odot} T^2}{4}, \quad (2.83)$$

ou ainda

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}}, \quad (2.84)$$

que é a Terceira Lei de Kepler.

Um modo simples de escrever a equação (2.84) é primeiro aplicá-la à Terra:

$$\frac{T_{\oplus}^2}{a_{\oplus}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}}, \quad (2.85)$$

e depois escrever:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_{\oplus}^2}{a_{\oplus}^3}. \quad (2.86)$$

Escrevendo o  $T = pT_{\oplus}$  e  $a = qa_{\oplus}$ , onde  $p$  e  $q$  são números reais não nulos e positivos, segue que

$$\frac{p^2}{q^3} = 1. \quad (2.87)$$

A tabela 2.3 mostra a aplicação da equação (2.87) aos oito planetas do Sistema Solar.

Com este resultado completamos a solução do problema de Kepler, isto é, mostramos que as três leis decorrem da Lei da Gravitação Universal.

Planeta	Semi-eixo maior (em U.A.)	Período (anos terrestres)	$p^2/q^3$
Mercúrio	0,387	0,241	1,002
Vênus	0,723	0,615	1,001
Terra	1,000	1,000	1,000
Marte	1,524	1,881	1,000
Júpiter	5,204	11,862	0,998
Saturno	9,582	29,457	0,986
Urano	19,201	84,011	0,997
Netuno	30,047	164,79	1,001

Tabela 2.3: A Terceira Lei de Kepler e o Sistema Solar [8] .

### 2.1.9 O oscilador harmônico isotrópico

Anteriormente estudamos a equação da órbita em função das constantes de movimento  $E$  e  $L$ , para obter a órbita de um planeta ao redor do Sol. Como ficou demonstrado, a órbita do planeta é uma elipse e o Sol ocupa um dos focos (Primeira Lei de Kepler). Há outra possibilidade de obtermos órbitas elípticas, ou melhor, há outra lei de força central que também leva a uma órbita elíptica: a lei de Hooke particularizada para um oscilador harmônico isotrópico [2].

$$\mathbf{F}(r) = -\kappa \mathbf{r} = -\kappa r \hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad \kappa > 0, \quad (2.88)$$

onde  $\kappa$  é a constante elástica da mola e  $r$ , a distância radial da origem do centro de forças. Como se trata de uma força central, logo, conservativa, sabemos que podemos associar a esta força uma energia potencial  $U(r)$  que, no caso, será dada por:

$$U(r) = \frac{1}{2} \kappa r^2. \quad (2.89)$$

Sendo assim, voltando à equação (2.91), o movimento de uma partícula sob ação de uma força central para o problema do oscilador harmônico isotrópico será determinado pela equação abaixo:

$$\frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{2mE}{L^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{m\kappa r^2}{L^2}. \quad (2.90)$$

Definindo  $u = 1/r^2$ , temos

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{2}{r^3} \frac{dr}{d\theta} \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^3}{2} \frac{du}{d\theta}. \quad (2.91)$$

Substituindo a (2.91) em (2.90), usando a relação  $u = 1/r^2$  e completando quadrado, segue que:

$$\left(\frac{1}{2} \frac{du}{d\theta}\right)^2 = -\left(u - \frac{mE}{L^2}\right)^2 - \frac{m\kappa}{L^2} + \left(\frac{mE}{L^2}\right)^2. \quad (2.92)$$

De modo análogo à solução do problema de Kepler definimos

$$z = u - \frac{mE}{L^2},$$

e escrevemos

$$\left(\frac{1}{2} \frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -z^2 + \left(\frac{mE}{L^2}\right)^2 \left(1 - \frac{\kappa L^2}{mE^2}\right). \quad (2.93)$$

Portanto,

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -4z^2 + 4B^2, \quad (2.94)$$

onde:

$$B = \frac{mE}{L^2} \sqrt{\left(1 - \frac{\kappa L^2}{mE^2}\right)}. \quad (2.95)$$

Também como antes podemos inferir que a solução é dada por

$$z(\theta) = B \cos[2(\theta - \theta_0)] + B. \quad (2.96)$$

Como definimos, anteriormente,  $z = u - mE/L^2$ , vemos que:

$$u(\theta) = B \cos[2(\theta - \theta_0)] + \frac{mE}{L^2}, \quad (2.97)$$

ou ainda,

$$u(\theta) = \frac{mE}{L^2} \xi \cos[2(\theta - \theta_0)] + \frac{mE}{L^2}, \quad (2.98)$$

onde, nesse caso:

$$\xi = \sqrt{\left(1 - \frac{\kappa L^2}{mE^2}\right)}. \quad (2.99)$$

Observe que ao contrário do problema de Kepler,  $\xi$  não é a excentricidade da órbita. Rescrevendo a equação acima, teremos a equação da órbita  $r(\theta)$ :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{mE}{L^2} (1 + \xi \cos[2(\theta - \theta_0)]). \quad (2.100)$$

Escolhendo  $\theta_0 = 0$ ,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{mE}{L^2} (1 + \xi \cos 2\theta)^2. \quad (2.101)$$

Definindo:

$$\psi = \frac{mE}{L^2},$$

e usando a relação

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2},$$

podemos rescrever a equação (2.101) em coordenadas cartesianas:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\psi} \left(1 + \frac{\xi x^2}{r^2} - \frac{\xi y^2}{r^2}\right), \quad (2.102)$$

logo:

$$\frac{1}{\psi}(x^2 + y^2 + \xi x^2 - \xi y^2) = 1$$

ou ainda

$$\frac{1}{\psi}[(1 + \xi)x^2 + (1 - \xi)y^2] = 1.$$

Rearranjando,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.103)$$

Podemos ver que a equação acima descreve uma trajetória elíptica, centrada na

<sup>2</sup>Mais a frente, na figura 3.2 e no texto que a antecede, o leitor poderá ver a consequência de, no caso do O.H.I.  $r$  depender de  $\cos(2\theta)$  e, em Kepler, depender de  $\cos(\theta)$ .

origem, cujos semi-eixos são dados por:

$$a = \sqrt{\frac{\psi}{1 + \xi}} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{\frac{\psi}{1 - \xi}}, \quad (2.104)$$

conforme mostra a figura 2.12.

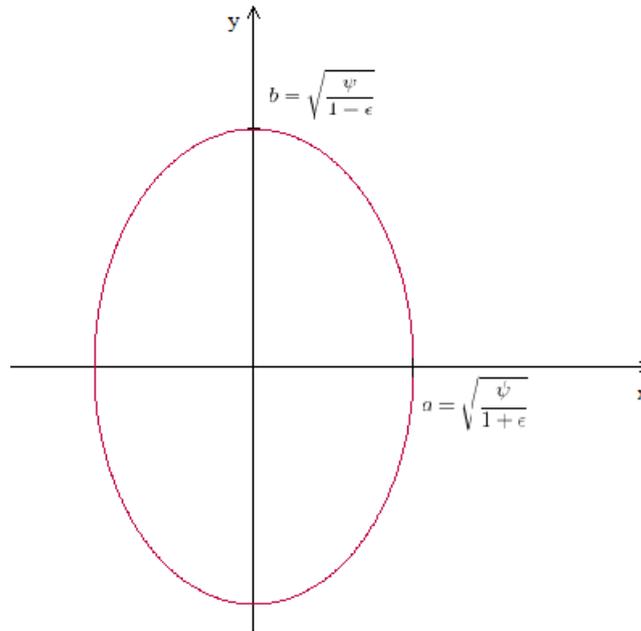


Figura 2.12: Órbita elíptica para um oscilador harmônico isotrópico. Centro de força C.F. na origem.

Anteriormente afirmamos que  $\xi$  não é a excentricidade da órbita. Vejamos qual é a relação entre a excentricidade e as constantes de movimento  $E$  e  $L$ , para o caso do oscilador harmônico isotrópico.

A medida da excentricidade de uma elipse é dada pela razão entre a distância focal  $c$  e o semi-eixo maior  $b$ . Por meio das equações (2.99) e (2.104), concluímos que  $\xi \geq 0$ . Para  $\xi = 0$ , teremos uma órbita circular e, para  $\xi > 0$ , elíptica. Recorrendo ao apêndice A elipse, podemos ver que a excentricidade  $e$  da cônica é dada por:

$$e = \frac{c}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}. \quad (2.105)$$

Substituindo a (2.104) na equação da excentricidade acima, obteremos  $e$  em fun-

ção de  $\xi$ :

$$e = \sqrt{1 - \frac{(1 - \xi)}{(1 + \xi)}}, \quad (2.106)$$

ou ainda:

$$e = \sqrt{\frac{2\xi}{1 + \xi}}, \quad \text{com} \quad \xi = \sqrt{1 - \frac{\kappa L^2}{mE^2}}. \quad (2.107)$$

Como  $e$  é um número real, a equação (2.107) implica a condição

$$\frac{\kappa L^2}{mE^2} \leq 1. \quad (2.108)$$

A igualdade significa que  $\xi = 0$  e, conseqüentemente, que  $e = 0$ , isto é, a órbita é um círculo de raio  $r_0 = a = b$  igual a  $\sqrt{mE/L^2}$ , conforme observamos anteriormente, através das relações encontradas na 2.68. Por outro lado, se

$$\frac{\kappa L^2}{mE^2} < 1, \quad (2.109)$$

segue que  $0 < e < 1$ , isto é, a órbita é uma elipse. Embora órbitas abertas como a parábola e a hipérbole não sejam admissíveis, há a possibilidade de um terceiro tipo de órbita, um segmento de reta que passe pela origem. Isto acontecerá se o momento angular  $L$  for nulo. O mesmo ocorre no problema de Kepler. Neste caso  $\xi = e = 1$ . Lembre-se de que uma excentricidade igual à unidade, no caso da Gravitação Universal, implica uma órbita parabólica. Não é o caso quando o potencial é quadrático em  $r$ .

### 2.1.10 Outros métodos de cálculo da equação da órbita

Anteriormente estudamos um método de solução da equação da órbita  $r(\theta)$  de uma partícula sob ação de uma força central. Usando as equações de movimento em coordenadas polares, obtivemos a equação da energia mecânica do sistema (2.34) que, por sua vez, originou a (2.38). Eliminando o tempo e, com um pouco de esforço matemático, obtivemos a equação mestre (2.91). Substituindo o potencial  $U(r)$  associado à força central escolhida, conseguimos obter a equação da

órbita.

Utilizamos esse método para descobrir a equação da trajetória em dois exemplos de forças centrais: força gravitacional (problema de Kepler) e força elástica (oscilador harmônico isotrópico).

Nessa sessão nos dedicaremos a demonstrar dois outros métodos de cálculo da equação da órbita: Binet e Laplace-Runge-Lenz.

• **Equação de Binet**

Conforme discutido acima, podemos também achar as equações de movimento através de outra análise matemática. Começaremos com a equação (2.15). Substituindo  $\dot{\theta}$  em função da constante  $L$  na 2ª lei de Newton (2.12), poderemos eliminar o tempo, a fim de obtermos  $r(\theta)$ :

$$\dot{\theta}(t) = \frac{L}{mr^2}. \quad (2.110)$$

E, subsequentemente, teremos  $\dot{r}$  e  $\ddot{r}$ :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (2.111)$$

e

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right). \quad (2.112)$$

Substituindo (2.110) na equação acima, temos que:

$$\ddot{r} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right), \quad (2.113)$$

onde

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{L}{mr^2} \right) \frac{dr}{d\theta} + \frac{L}{mr^2} \frac{d^2r}{d\theta^2}, \quad (2.114)$$

sendo

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{L}{mr^2} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{L}{mr^2} \right) \frac{dr}{d\theta} = -2 \frac{L}{mr^3} \frac{dr}{d\theta}. \quad (2.115)$$

Então:

$$\ddot{r} = \frac{L}{mr^2} \left( -\frac{2L}{mr^3} \frac{dr}{d\theta} \frac{dr}{d\theta} + \frac{L}{mr^2} \frac{d^2r}{d\theta^2} \right), \quad (2.116)$$

ou ainda:

$$\ddot{r} = \frac{L}{m^2r^4} \frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2L^2}{m^2r^5} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2. \quad (2.117)$$

Agora que obtivemos  $\dot{r}$  e  $\ddot{r}$ , substituindo (2.10) e (2.11) na equação de movimento radial (2.12), temos que:

$$F(r) = \frac{L^2}{mr^4} \frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2L^2}{mr^5} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 - \frac{L^2}{mr^3}. \quad (2.118)$$

Multiplicando a equação acima por  $\frac{mr^4}{L^2}$ , segue que:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = r + \frac{mr^4}{L^2} F(r), \quad (2.119)$$

e, definindo  $u = \frac{1}{r}$ :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{du}{d\theta} \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \quad (2.120)$$

e

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left( -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{u^2} \right) - \frac{1}{u^2} \frac{d^2u}{d\theta^2}, \quad (2.121)$$

sendo:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{u^2} \right) = -\frac{2}{u^3} \frac{du}{d\theta}, \quad (2.122)$$

logo:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{2}{u^3} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (2.123)$$

Substituindo na equação diferencial da trajetória (2.119):

$$\frac{2}{u^3} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left( -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right)^2 = r + \frac{mr^4}{L^2} F(r), \quad (2.124)$$

ou melhor, como  $r = 1/u$ , obteremos, a partir da equação acima:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \frac{2}{u^3} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{u^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{2}{u^3} \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = \frac{1}{u} + \frac{m}{u^4 L^2} F(u), \\ \Rightarrow \quad & -\frac{1}{u^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{u} + \frac{m}{u^4 L^2} F(u), \\ \Rightarrow \quad & -\frac{1}{u} \frac{d^2u}{d\theta^2} = 1 + \frac{m}{u^3 L^2} F(u), \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right). \quad (2.125)$$

Essa é a equação de Binet. Essa equação de movimento pode ser muito útil, visto que, conhecendo  $F$  em função de  $r$ ,  $F = F(r)$ , podemos obter a equação da órbita  $r(\theta)$ . Por exemplo, para o caso de Kepler, teremos que:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{m\alpha}{L^2} = 0. \quad (2.126)$$

Seguindo os passos realizados a partir da (2.50), podemos obter a equação da órbita (2.57).

- **Uma nova constante de movimento: vetor Laplace-Runge-Lenz**

Além de  $E$  e  $L$ , há outra constante de movimento, o vetor de Laplace -Runge - Lenz (LRL), representado por  $A$ , definido matematicamente através da equação abaixo<sup>3</sup>:

<sup>3</sup>Em um sistema com  $n$  graus de liberdade há  $2n$  constantes independentes a ele associada.

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m \alpha \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.127)$$

A figura a seguir mostra o vetor LRL na órbita de um planeta ao redor do Sol:

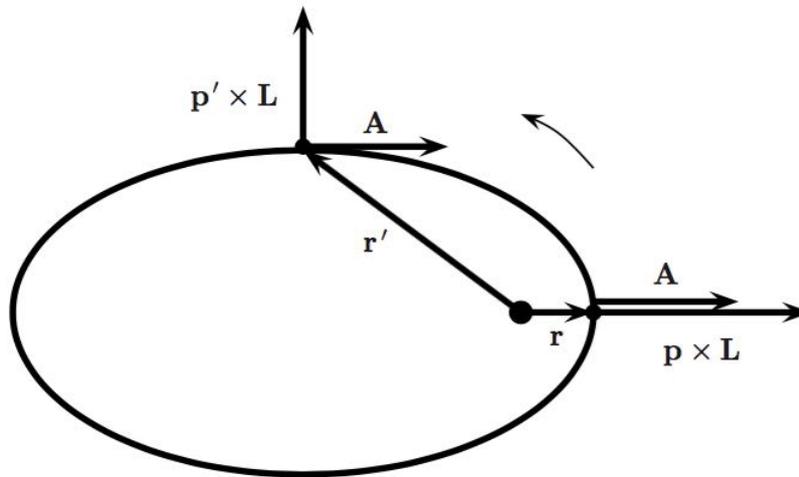


Figura 2.13: Vetor de Laplace - Runge - Lenz. A direção de  $\mathbf{A}$  é a mesma do eixo de simetria da órbita e seu sentido dependerá do sentido do movimento da partícula. Nesse caso, por exemplo,  $\mathbf{A}$  aponta para a direita, uma vez que a partícula se movimenta no sentido trigonométrico, assim como fizemos nos métodos anteriores. Se o movimento ocorresse o sentido horário, o vetor LRL apontaria para a esquerda. Com isso, podemos dizer que o vetor LRL orienta a órbita.

Antes de prosseguirmos com um método de cálculo da órbita baseado nessa nova constante de movimento, vamos verificar se, de fato, o vetor LRL é constante ao longo de toda a trajetória do planeta. Para isso, começaremos substituindo (2.4) em (2.127):

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - m \alpha \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.128)$$

Nesse problema, das 7 constantes ( $E$ ,  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ ,  $A_x$ ,  $A_y$  e  $A_z$ ), note que apenas cinco são independentes, devido a duas relações, a saber: (2.55) e  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} = 0$ .

onde, usando propriedade de produto vetorial, temos que  $\mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})$ . Então:

$$\mathbf{A} = m^2 \{ \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) \} - m \alpha \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.129)$$

Fazendo uso das equações de movimento (2.9) e (2.10), obteremos que:

$$\mathbf{A} = m^2 \{ (r\ddot{r} + r^3\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} - (r\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}\dot{\theta}) \} - m \alpha \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.130)$$

Reorganizando a equação anterior, fazendo  $\alpha = GMm$  e derivando a respeito do tempo, teremos:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = m^2 \left\{ \frac{d}{dt} ((r^3\dot{\theta}^2 - GM)\hat{\mathbf{r}}) - \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}\dot{\theta}) \right\}, \quad (2.131)$$

onde:

$$\frac{d}{dt} ((r^3\dot{\theta}^2 - GM)\hat{\mathbf{r}}) = (3r^2\dot{r}\dot{\theta}^2 + 2r^3\dot{\theta}\ddot{\theta})\hat{\mathbf{r}} + (r^3\dot{\theta}^2 - GM)\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \quad (2.132)$$

e

$$\frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}\dot{\theta}) = 2r\dot{r}^2\dot{\theta} + r^2\ddot{r}\dot{\theta} + r^2\dot{r}\ddot{\theta} + r^2\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{dt}. \quad (2.133)$$

Sendo:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{e} \quad \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}}.$$

Substituindo as relações anteriores na (2.131), obteremos:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = m^2 \left\{ (3r^2\dot{r}\dot{\theta}^2 + 2r^3\dot{\theta}\ddot{\theta} + r^2\dot{r}\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r^3\dot{\theta}^3 - GM\dot{\theta} - 2r\dot{r}^2\dot{\theta} - r^2\ddot{r}\dot{\theta} - r^2\dot{r}\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} \right\}. \quad (2.134)$$

Como se trata de uma força central, retornando a (2.11), temos que  $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$ . Com isso,  $2r^3\dot{\theta}\ddot{\theta} = -4r^2\dot{r}\dot{\theta}^2$  e  $r^2\dot{r}\ddot{\theta} = 2r\dot{r}^2\dot{\theta}$ . Logo:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \{r^2\dot{\theta}(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r}) - GM\dot{\theta}\}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.135)$$

Retornado novamente à (2.11), podemos ver que  $(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}}$  representa a aceleração de uma partícula sujeita à ação de uma força central que, no caso de Kepler, equivale a  $-\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ . Então:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = (GM\dot{\theta} - GM\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} = \text{zero}, \quad (2.136)$$

ou seja,  $\mathbf{A}$  é constante. Agora que podemos afirmar que o vetor LRL é, de fato, uma constante de movimento, seguiremos com mais esse método de cálculo da equação da órbita.

Fazendo o produto escalar entre os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{r}$  obteremos:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = Ar \cos \theta = L^2 - m\alpha r, \quad (2.137)$$

sendo  $\theta$  o ângulo entre os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{r}$ . Logo:

$$r(\theta) = \frac{L^2/m\alpha}{1 + (A/m\alpha) \cos \theta}. \quad (2.138)$$

Essa é a equação da cônica de excentricidade  $\epsilon = A/m\alpha$ .

Note que, para  $\theta = 0$ , a distância da partícula ao centro de força será a menor possível (pericentro) e, para  $\theta = \pi$ , será a maior possível (apocentro).

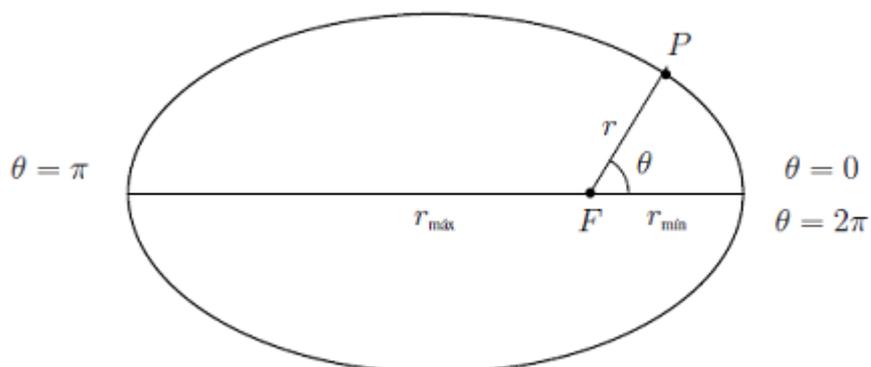


Figura 2.14: Trajetória elíptica.

Assim, podemos reescrever o vetor LRL como:

$$\mathbf{A} = (m\alpha\epsilon)\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}}, \quad (2.139)$$

onde  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}}$  é um vetor unitário que aponta para o periapsis. Para órbitas elípticas, podemos substituir (2.77) e (2.55) em (2.138) e, assim, teremos:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (2.140)$$

Utilizando coordenadas cartesianas, como fizemos anteriormente, obteremos a equação das cônicas (2.61).

# Capítulo 3

## Precessão

### 3.1 Introdução

Se a interação entre o Sol e um planeta (ou mais rigorosamente: entre dois corpos) obedecer a lei da gravitação universal, onde a força depende do inverso do quadrado da distância, órbita do planeta será uma elipse com o Sol ocupando um dos seus focos. Essa afirmativa é válida porque a energia mecânica do sistema planeta – Sol é negativa e, conforme vimos no capítulo anterior, quando  $E < 0$ , a órbita do planeta será elíptica ou circular (de fato, a excentricidade das órbitas dos planetas é pequena e, como veremos, podemos considerá-las aproximadamente circulares). As mesmas possibilidades de órbitas são encontradas em interações onde a força central é diretamente proporcional à distância ao centro de força (O.H.I.), excluindo a hipótese de momento angular nulo (para  $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ , a trajetória é uma linha reta). Se a lei de força não for proporcional ao inverso do quadrado ou diretamente proporcional à distância entre os dois corpos não podemos mais assegurar que a órbita seja fechada para quaisquer condições iniciais. Este resultado é conhecido como *Teorema de Bertrand* e é um dos mais elegantes da mecânica clássica <sup>1</sup>. As referências principais usadas para esse capítulo são [9–14].

No capítulo anterior, discutimos as duas leis de força mencionadas acima supondo que um planeta particular e o Sol fossem os únicos corpos em interação, isto é,

---

<sup>1</sup>Mas adiante, com o auxílio da figura 3.2 e do texto que a antecede, o leitor encontrará mais detalhes sobre o teorema de Bertrand.

como se o Sistema Solar fosse formado por apenas um planeta e o Sol. Sabemos que isto não é verdade e que o Sistema Solar é um sistema de muitos corpos que interagem entre si por meio da atração gravitacional. Em primeira aproximação é válido considerar apenas a interação planeta–Sol, mas se fizermos medidas mais refinadas precisaremos refazer o nosso modelo. Considere por exemplo, um planeta como Mercúrio, um planeta-chave para a validação experimental da versão relativística da gravitação newtoniana, a Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein (1916). A órbita de Mercúrio é afetada pelo desvio da esfericidade perfeita do Sol, a sua oblatividade, que introduz um termo adicional ao potencial newtoniano puro que leva ao fenômeno da precessão. Da mesma forma, a influência dos demais planetas do Sistema Solar e a pequena mas crucial contribuição da Teoria da Relatividade Geral completam o desvio da gravitação newtoniana pura. Esta última será o foco principal deste capítulo.

Quando há uma força perturbativa atuante em uma partícula como no caso de Kepler, por exemplo, a órbita não fechará, conforme mostra a figura abaixo:

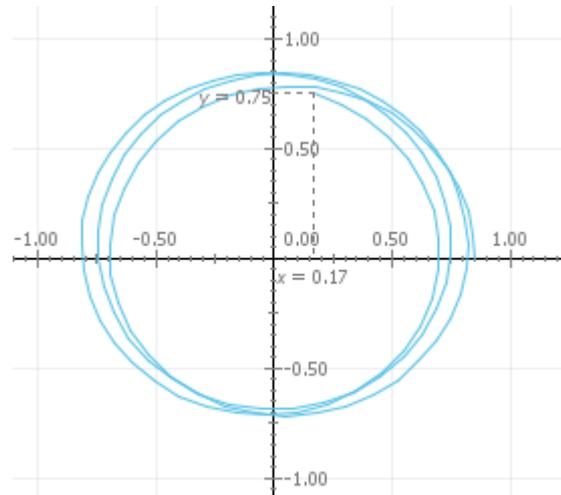


Figura 3.1: Precessão de uma órbita devido ação de uma força perturbativa central. Essa e outras trajetórias que aparecem ao longo desse capítulo foram feitas usando o programa *Modellus*. Mais adiante veremos mais detalhes (criação de trajetórias, gráficos e tabelas) apresentando exemplos de usos desse programa no ensino de Física.

Dizemos, então, que a órbita precessa. A diferença angular entre o ponto dito

inicial da primeira volta (o periélio, por exemplo) e o ponto de partida após uma volta completa é o ângulo correspondente à precessão dessa órbita a cada volta.

### 3.2 A precessão de Mercúrio

A história da precessão de Mercúrio está ligada ao nome do astrônomo francês Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811 – 1877) [15]. Le Verrier, fervoroso defensor da teoria newtoniana da gravitação, a partir de 1839 envolveu-se no cálculo da estabilidade do Sistema Solar e de órbitas planetárias. Em particular, por volta de 1841 sua atenção volta-se para o problema da determinação precisa da órbita de Mercúrio. Este planeta é o mais próximo do Sol e sua órbita tem excentricidade razoável e um período muito curto. O detalhamento da órbita seguida por Mercúrio apresentava-se na época como um teste crucial da Gravitação Universal. Em 1845, Le Verrier calcula a precessão de Mercúrio com um erro de 16 segundos de arco. Insatisfeito com o resultado, deixa de publicá-lo e passa a dedicar-se a outro problema: o atraso do movimento de Urano. Este problema levou-o à descoberta de Netuno, compartilhada com o astrônomo de Cambridge John Couch Adams. Netuno foi observado pela primeira vez na posição prevista por ele e Couch pelo Observatório de Berlim em 1846. Le Verrier retoma o problema de Mercúrio e em 1859 começa a examinar os registros dos trânsitos de Mercúrio e conclui que a órbita de Mercúrio precessa lentamente o que era perfeitamente natural se a influência dos demais planetas fosse levada em conta. A precessão observada era de 565 segundos de arco por século. Le Verrier obtém um valor teórico de 527 segundos de arco. Seu cálculo explica corretamente a mudança angular do periélio de Mercúrio, mas apresenta um déficit de 38 segundos de arco entre os valores observados e calculados ( $565 - 527$ ), inexplicáveis dentro do quadro newtoniano. Posteriormente, este resíduo tornou-se um dos primeiros testes observacionais da versão de Einstein da gravitação. Atualmente temos que a precessão causada pela influência do efeito gravitacional dos outros planetas na órbita de Mercúrio vale  $532''$  e, o valor observado da precessão de sua órbita é de  $575''$ . Focalizaremos, portanto, em calcular essa diferença de famosos 43 segundos de arco ( $575 - 532$ ). A origem dessa diferença, que permaneceu sem explicação por um longo período, veio com Einstein, que pode comprovar a sua teoria da relatividade, mostrando

que essa diferença de se deve aos efeitos da geometria do espaço-tempo em torno do Sol.

### 3.3 Métodos de cálculo da precessão de Mercúrio

O que calcularemos aqui, usando três métodos diferentes, é justamente essa diferença de 43 segundos de arco entre os valores observados e o medidos da precessão da órbita de Mercúrio.

Essa discrepância, conforme abordada anteriormente, pode ser calculada usando a correção relativística à teoria da gravitação universal de Newton. Quando essa correção é levada em conta, a força de atração gravitacional entre o Sol e um planeta é melhor descrita utilizando a equação abaixo:

$$\mathbf{F} = - \left( \frac{GMm}{r^2} + 3 \frac{GML^2}{mr^4 c^2} \right) \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.1)$$

onde  $c$  é o módulo da velocidade da luz no vácuo. Assim, o termo perturbativo é do tipo  $-\frac{\gamma}{r^4} \hat{\mathbf{r}}$ , sendo  $\gamma = 3 \frac{GML^2}{mc^2}$  constante. Fazendo também que  $k = GMm$  e sabendo que a magnitude dessa perturbação é muito pequena, temos que  $\frac{k}{r^2} \gg \frac{\gamma}{r^4}$ .

Seguiremos, então, aos cálculos de precessão devido à essa perturbação de origem relativística.

#### 3.3.1 Um cálculo da precessão com base nos períodos orbital e radial da órbita

Usaremos, nesse método, a razão entre o período orbital e o período radial de uma partícula sob ação de uma força central  $F(r)$  (para isso, falaremos um pouco mais sobre teorema de Bertrand e sua consequência), considerando sua órbita quase circular, obtendo a expressão do ângulo apsidal da trajetória em função de  $F(r)$ . Substituindo a força pela gravitacional (3.1) e conhecendo os valores das constantes para o caso Mercúrio - Sol, calcularemos a precessão da órbita de Mercúrio devido à perturbação de origem relativística.

Iniciaremos essa solução com a (2.37), resultando na equação de movimento:

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}. \quad (3.2)$$

Como a órbita quase circular, podemos calcular o período orbital<sup>2</sup> em primeira aproximação supondo  $\ddot{r} = 0$ . Com isso, a equação acima se reduz a:

$$F(r) = -\frac{L^2}{mr^3}, \quad (3.3)$$

Esta equação determina o período orbital  $T_{orbital}$ , uma vez que  $L = mr^2\dot{\theta}$  e  $T_{orbital} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$ . Sendo assim:

$$F(r) = -mr\dot{\theta}^2, \quad (3.4)$$

ou seja:

$$\dot{\theta} = \omega = \sqrt{-\frac{F(r)}{mr}}. \quad (3.5)$$

Fazendo uso da relação acima, podemos escrever o período orbital em função do raio médio orbital  $r$  e da força central  $F(r)$ :

$$\Rightarrow T_{orbital} = 2\pi\sqrt{-\frac{mr}{F(r)}}. \quad (3.6)$$

A fim de calcularmos o período orbital (em primeira aproximação), escreveremos  $r = r_0 + x$ , com  $|x| \ll r_0$ . Assim, retornando à (3.2), teremos:

$$m\ddot{x} = F(r_0 + x) + \frac{L^2}{m}(r_0 + x)^{-3} = F(r_0 + x) + \frac{L^2}{mr_0^3}\left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^{-3}. \quad (3.7)$$

Expandindo os dois termos, obtemos:

$$m\ddot{x} = [F(r_0) + F'(r_0)x + \dots] + \frac{L^2}{mr_0^3}\left[1 - \frac{3x}{r_0} + \dots\right], \quad (3.8)$$

mas como  $F(r_0) = -L^2/(mr_0^3)$ , temos:

<sup>2</sup>Período orbital é o tempo necessário para que a partícula realize uma volta completa em torno de centro de força.

$$m\ddot{x} \approx F(r_0) + F'(r_0) - F(r_0)\left[1 - \frac{3x}{r_0}\right] \approx \left[F'(r_0) + \frac{3}{r_0}F(r_0)\right]x, \quad (3.9)$$

ou ainda:

$$m\ddot{x} + \left(-\frac{3F(r_0)}{r_0} - F'(r_0)\right)x = 0. \quad (3.10)$$

A partir da equação acima, podemos ver que, para

$$\frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0) < 0,$$

a solução será harmônica, com período radial  $T_{radial}$ <sup>3</sup> bem definido:

$$T_{radial} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{-\frac{3F(r_0)}{r_0} - F'(r_0)}}. \quad (3.11)$$

O próximo passo desse método será discutir ângulo apsidal ( $\Phi$ ) dessa órbita. Ângulo apsidal é o ângulo varrido pelo raio vetor entre o ponto de maior aproximação (pericentro) e o de maior afastamento (apocentro) subsequente em relação ao centro de força e, por consequência, o tempo transcorrido pela partícula para varrer o ângulo apsidal é a metade do período radial ( $T_{radial}/2$ ). Como a órbita é quase circular, temos:

$$\Phi = \frac{T_{radial}}{2} \dot{\theta}. \quad (3.12)$$

Assim, fazendo uso das equações 3.5 e 3.11, podemos ver que o ângulo apsidal pode ser descrito como:

---

<sup>3</sup>Período radial é o tempo necessário para que a partícula se locomova de um ponto até outro ao longo da trajetória de mesmas distâncias  $r$  até o centro de força e com a mesma velocidade radial. No caso de Kepler sem perturbação, o período radial é o tempo que a partícula levará para ir, por exemplo, do periélio até retornar novamente ao periélio. Sendo assim, o ângulo varrido durante esse intervalo de tempo será  $2\pi$  rad. Já no O.H.I., como o centro de força se localiza no centro geométrico da órbita, seu período radial é o tempo necessário para a partícula ir de um ponto até o ponto cuja distância angular entre si vale  $\pi$  rad.

$$\Phi = \pi \left( 3 + r \frac{F'(r)}{F(r)} \right)^{-1/2}. \quad (3.13)$$

Como  $F(r)$  é força central, para os casos que nos interessam, podemos reescrevê-la sob a forma  $F(r) = -kr^n$  e, conseqüentemente,  $F'(r) = -knr^{n-1}$ . Logo:

$$r \frac{F'(r)}{F(r)} = n \quad \rightarrow \quad \Phi = \frac{\pi}{\sqrt{3+n}} \text{rad}. \quad (3.14)$$

No caso de Kepler,  $n = -2$ , então  $\Phi = \pi$  rad. Já no OHI,  $n = 1$ , ou seja,  $\Phi = \frac{\pi}{2}$  rad. A figura 3.2 ilustra esses dois tipos de forças centrais e seus respectivos ângulos apsidais. Os pontos A são os pericentros das trajetórias e os pontos B, os apocentros. Note que, na figura da esquerda, o ângulo entre os pontos A e B vale  $\Phi = \pi$  rad e, na figura da direita,  $\Phi = \frac{\pi}{2}$  rad:

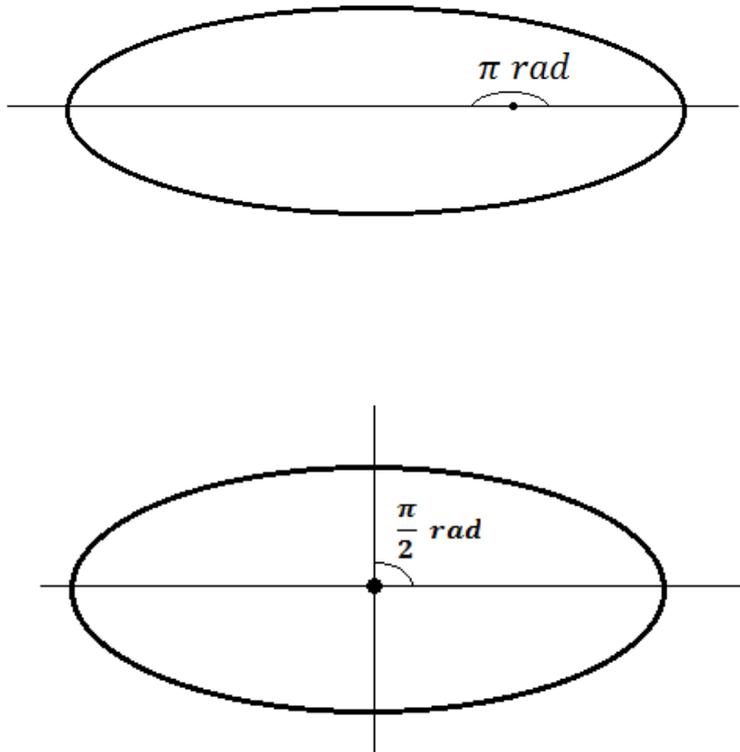


Figura 3.2: Kepler  $\Phi = \pi rad$ ; OHI  $\Phi = \frac{\pi}{2} rad$ .

Com isso, analisar a órbita usando o ângulo apsidal é o mesmo que verificar a relação entre os períodos radial e orbital  $\frac{T_{radial}}{T_{orbital}}$  da mesma. No caso de Kepler, por exemplo,  $\frac{T_{radial}}{T_{orbital}} = 1^4$  e, para O.H.I., essa relação vale 1/2. Ou seja, podemos dizer que  $\Phi = \left(\frac{T_{radial}}{T_{orbital}}\right) \pi \text{ rad}$ .

O teorema de Bertrand nos diz que, quando  $\frac{T_{radial}}{T_{orbital}} \in \mathbb{Q}$ , a órbita será limitada e fechada.

<sup>4</sup>Com isso, podemos concluir que, se o período orbital for ligeiramente diferente do radial, a órbita do planeta precessa. Se o período orbital for ligeiramente menor que o radial, o periélio retrocede. Já se o período orbital foi ligeiramente maior que o radial, o periélio avança. Ao final desse capítulo veremos qual a condição necessária para  $T_{radial} > T_{orbital}$  ou  $T_{radial} < T_{orbital}$ , para forças do tipo  $\mathbf{F} = -k r^n \hat{\mathbf{r}}$ .

A força central  $F(r)$  à qual Mercúrio está submetido durante a sua órbita ao redor do Sol, com a correção relativística, é descrita pela equação (3.1). Assim,  $F'(r)$  é:

$$F'(r) = \frac{2k}{r^3} + \frac{4\gamma}{r^5}. \quad (3.15)$$

Substituindo  $F(r)$  e  $F'(r)$  na equação 3.13, podemos descobrir o ângulo apsidal da trajetória de Mercúrio:

$$\Phi = \pi \left[ 3 - r \frac{(2kr^{-3} + 4\gamma r^{-5})}{(kr^{-2} + \gamma r^{-4})} \right]^{-1/2}, \quad (3.16)$$

$$\Phi = \pi \left[ 3 - 2 \frac{\left(1 + \frac{2\gamma}{kr^2}\right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{kr^2}\right)} \right]^{-1/2}, \quad (3.17)$$

$$\Phi = \pi \left[ 3 - 2 \frac{\left(1 + \frac{2\gamma}{kr^2}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{kr^2}\right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{kr^2}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{kr^2}\right)} \right]^{-1/2}. \quad (3.18)$$

O termo correspondente à correção relativística,  $\frac{\gamma}{r^4}$ , trata-se de uma perturbação central, onde  $\frac{\gamma}{r^4} \ll \frac{k}{r^2}k$ , e tomaremos  $\frac{\gamma^2}{k^2 r^4} \approx 0$ . Logo:

$$\Phi = \pi \left[ 3 - 2 \frac{\left(1 - \frac{\gamma}{kr^2} + \frac{2\gamma}{kr^2} + \cancel{\frac{\gamma^2}{kr^4}}\right)}{\left(1 - \cancel{\frac{\gamma^2}{kr^4}}\right)} \right]^{-1/2} = \pi \left[ 3 - 2 \left(1 + \frac{\gamma}{kr^2}\right) \right]^{-1/2}, \quad (3.19)$$

Então, o ângulo apsidal correspondente à órbita de Mercúrio é:

$$\Phi = \pi \left[ 1 - \frac{2\gamma}{kr^2} \right]^{-1/2} \approx \pi \left[ 1 + \frac{\gamma}{kr^2} \right]; \quad k, \gamma > 0. \quad (3.20)$$

Podemos ver que, se  $\gamma = 0$ , ou seja, se não considerássemos a perturbação, teríamos uma órbita fechada, sem precessão, cujo ângulo apsidal seria  $\Phi = \pi$  rad. Como sabemos, no caso de Kepler sem perturbação, duas periapsis (ou apoapsis) consecutivas equivale a uma volta completa, ou seja,  $\pi$  rad. Ou seja, quando a

órbita fecha,  $2\Phi - 2\pi = 0$ . No caso de haver perturbação, o periélio muda angularmente de posição a cada volta. Essa mudança de posição angular é a precessão  $\Delta\phi$ . Então, para Kepler perturbado, podemos calcular a precessão como:

$$\Delta\phi = 2\Phi - 2\pi. \quad (3.21)$$

Aplicando em (3.20), obteremos que:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\gamma}{kr^2} = \frac{6\pi GM}{rc^2}. \quad (3.22)$$

Fazendo  $GM = \frac{4\pi^2 r^3}{T_0^2}$ , obteremos que:

$$\frac{24\pi^3 r^2}{T_0^2 c^2}. \quad (3.23)$$

Consultando a tabela (2.3) podemos ver que o período de translação de Mercúrio ao redor do Sol é 0,241 vezes o período da Terra,  $T_0 = 0,241 \cdot T_{\oplus} = 7,69 \cdot 10^6$  s. Sabendo-se também que o raio médio orbital de Mercúrio,  $5,79 \cdot 10^{10}$  m, podemos substituir esses valores na equação acima:

$$\Delta\phi = \frac{24\pi^3 (5,79 \cdot 10^{10})^2}{(7,69 \cdot 10^6)^2 (3 \cdot 10^8)^2} = 4,68 \cdot 10^{-7} \text{ rad}, \quad (3.24)$$

ou seja, a precessão da órbita de Mercúrio é de  $4,68 \cdot 10^{-7}$  rad por volta. Em um século, Mercúrio realiza  $\frac{100}{0,241}$  voltas ao redor do Sol. Sendo assim, a precessão da órbita em um século é:

$$\Delta\phi = \frac{100}{0,241} 4,68 \cdot 10^{-7} = 1,94 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 1,94 \cdot 10^{-4} \left( \frac{360}{2\pi} \right) 3600 \approx 40'', \quad (3.25)$$

bem próximo do valor mais preciso calculado, de aproximadamente 43 segundos de arco por século.

### 3.3.2 Um método mais tradicional: equação de Binet

Nessa subseção, as referências mais usadas foram [13, 14]. Vamos começar com a equação de Binet:

$$u'' + u = H(u), \quad (3.26)$$

onde

$$H(u) = -\frac{m}{L^2 u^2} F(u), \quad (3.27)$$

sendo  $u = 1/r$ . Para órbita circular  $u = u_0$ :

$$\begin{aligned} H(u_0) &= -\frac{m(u_0)^4}{m^2(u_0)^2 \dot{\theta}^2} \frac{m \dot{\theta}^2}{u} \\ \Rightarrow H(u_0) &= u_0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para órbitas quase circulares, podemos escrever que  $u = u_0 + \Delta$ , sendo  $|(\Delta)/u_0| \ll 1$ , e, expandindo, obtemos:

$$u'' + u \approx H(u_0) + H'(u_0)(\Delta) + \sigma^2, \quad (3.29)$$

onde  $\sigma^2$  é o termo de ordem 2 da expansão. Usando a equação 3.28, chegaremos à equação abaixo:

$$\Delta'' + [1 - H'(u_0)]\Delta = \sigma^2. \quad (3.30)$$

A solução da equação anterior para órbitas circulares estáveis<sup>5</sup> ou seja, quando  $1 - H'(u_0) > 0$ , será:

$$\Delta(\theta) = A \cos(\alpha\theta), \quad (3.31)$$

onde  $\alpha = \sqrt{[1 - H'(u_0)]}$  e, por simplicidade, consideramos  $\theta_0 = 0$ . Note também que  $A/u_0 \ll 1$ . Então, duas periapsis consecutivas (ou duas apoapsis consecutivas, equivalente a duas vezes o ângulo apsidal  $\Phi$ ) apresentarão uma separação

<sup>5</sup>órbitas circulares estáveis, ao sofrerem uma pequena perturbação, se mantêm próximas à órbita anterior. Já as instáveis, ao sofrerem uma perturbação, a partícula tende a se afastar da trajetória anterior.

angular  $\Delta\theta$  igual a:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{\alpha} \approx 2\pi \left( 1 + \frac{1}{2}H'(u_0) \right) \quad ; \quad |H'(u_0)| \ll 1. \quad (3.32)$$

Perceba que para o problema de Kepler não perturbado,  $\alpha = 1$  e nenhuma precessão ocorre.

Então podemos calcular a precessão da órbita  $\Delta\Phi$  após uma volta como a diferença angular entre  $2\Phi$  e  $2\pi$ , tal como fizemos no método anterior:

$$\Delta\phi = \Delta\theta - 2\pi = 2\pi \left( \frac{1}{2}H'(u_0) \right) \quad (3.33)$$

e assim a velocidade angular média de precessão  $\Omega$  é dada por:

$$\Omega = \frac{\Delta\phi}{T_0} = \frac{2\pi}{T_0} \frac{H'(u_0)}{2} = \dot{\theta} \frac{H'(u_0)}{2}, \quad (3.34)$$

Voltando à equação de Binet (3.27), temos:

$$H(u) = \frac{mk}{L^2} - \frac{mF(u)}{L^2u^2}, \quad (3.35)$$

logo:

$$H'(u) = -\frac{m}{L^2u^2} \frac{d}{du} F(u) + \frac{2mF(u)}{L^2u^3}. \quad (3.36)$$

Como  $\frac{dF}{du} = \frac{dF}{dr} \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2} \frac{dF}{dr}$  e  $L \approx mr_0^2\dot{\theta}$ , podemos concluir que a velocidade de precessão  $\Omega$  pode ser representada por:

$$\Omega \approx \left( \frac{F(r_0)}{mr_0\dot{\theta}} + \frac{F'(r_0)}{2m\dot{\theta}} \right) \frac{\mathbf{L}}{|\mathbf{L}|}. \quad (3.37)$$

Para calcularmos a precessão relativa à órbita de Mercúrio, substituiremos  $F(r_0)$  e  $F'(r_0)$  de acordo com as equações (3.1) e (3.15):

$$\Omega = \frac{1}{m\dot{\theta}} \left[ -\frac{k}{r_0^3} - \frac{\gamma}{r_0^5} + \frac{k}{r_0^3} + \frac{2\gamma}{r_0^5} \right] = \frac{\gamma}{m\dot{\theta}r_0^5}. \quad (3.38)$$

Logo:

$$\Omega = \frac{3GM\omega^2 r_0^4}{\omega r_0^5 c^2} = \frac{3GM\omega}{r_0 c^2}. \quad (3.39)$$

Assim, a velocidade de precessão da órbita de Mercúrio relacionada à correção relativística vale:

$$\Omega = \frac{6\pi GM}{T_0 r_0 c^2}. \quad (3.40)$$

A relação entre a velocidade e o ângulo de precessão,  $\Omega = \frac{\Delta\phi}{T_0}$ , escrita anteriormente nos levará a mesmo resultado do método anterior:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{r_0 c^2}. \quad (3.41)$$

### 3.3.3 O método usando o vetor de Laplace-Runge-Lenz

Esse método foi introduzido por Greenberg [17] há muito tempo para órbitas quase circulares. Ele se baseia no fato de que o vetor de LRL ser uma constante de movimento no problema de Kepler não perturbado e que tem a direção do eixo de simetria da órbita que passa pelo centro de força. Significa que, quando há perturbação, a taxa de rotação desse vetor será a velocidade de precessão da órbita.

As referências para essa subseção são [17–25]. No artigo da referência [18], J. Silvardière aplica a mesma ideia, porém, para calcula a precessão de órbita com quaisquer excentricidades. Por simplicidade, trabalharemos apenas com órbitas quase circulares. O resultado deve coincidir com o de Silvardière, quando tomarmos o limite para pequenas excentricidades.

Iniciaremos esse método com a definição de  $\mathbf{A}$  dada em (2.127):

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m \alpha \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.42)$$

onde  $\mathbf{L}$  é o momento angular da partícula,  $\mathbf{p}$  é o momento linear e  $\hat{\mathbf{r}}$  é o vetor radial unitário. Para o potencial de Kepler, conforme verificamos no capítulo anterior,  $\mathbf{A}$  é uma constante de movimento. Chamando de  $\theta$  o ângulo entre os vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{r}$ , ao resolver o produto escalar  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$  obteremos:

$$A \cdot r \cos \theta = L^2 - m \alpha r. \quad (3.43)$$

Então:

$$r(\theta) = \frac{L^2/m\alpha}{1 + (A/m\alpha)\cos\theta}. \quad (3.44)$$

Essa é a equação da cônica de excentricidade  $\epsilon = A/m\alpha$ . Para  $\theta = 0$ , a distância da partícula ao centro de força será a menor possível (pericentro), e o vetor RL pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = (m\alpha\epsilon)\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}}, \quad (3.45)$$

onde  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}}$  é um vetor unitário que aponta para o pericentro. Para órbitas elípticas, podemos usar duas relações bem conhecidas:

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2} \quad (3.46)$$

e

$$E = -\frac{k}{2a}. \quad (3.47)$$

Sendo assim, substituindo na equação (3.44), teremos a equação da órbita (2.140):

$$r(\theta) = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon\cos\theta}. \quad (3.48)$$

Quando a partícula estiver submetida a uma força dada pela (3.1), a órbita não será mais fechada, ou seja, o vetor LRL não será mais constante e é justamente essa variação desse vetor  $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$  que nos levará ao cálculo da velocidade de precessão da órbita  $\Omega$ :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d(\mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\alpha\hat{\mathbf{r}})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} - m\alpha\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}. \quad (3.49)$$

Como  $\mathbf{L}$  é constante,  $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$  é nulo. Definindo  $\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}} = -\frac{k}{r^2} + f(r)\hat{\mathbf{r}}$ , onde  $k = \alpha$ ,  $f(r) = -\frac{\gamma}{r^4}$  e fazendo uso da 2ª lei de Newton,  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ , teremos que:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} + f(r)\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - km\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (3.50)$$

Usando a equação (2.14), teremos:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \times (mr^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}) + f(r)\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - km\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cancel{km\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}} - \cancel{km\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}} + f(r)\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}. \quad (3.51)$$

Então a variação do vetor LRL em respeito ao tempo pode ser representada pela expressão abaixo:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = f(r)\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}. \quad (3.52)$$

Como calcular a velocidade de precessão da órbita é calcular a velocidade de rotação do vetor RL, podemos colocar a equação acima na forma:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \quad (3.53)$$

Devido à simetria, tomando a média temporal da equação anterior ao longo da órbita não perturbada, obtemos:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle f(r)\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} \rangle. \quad (3.54)$$

Como o vetor  $\mathbf{L}$  é constante, podemos escrever:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle f(r)\hat{\mathbf{r}} \rangle \times \mathbf{L}. \quad (3.55)$$

Reescrevendo  $\hat{\mathbf{r}}$  em coordenadas polares:

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\hat{\mathbf{u}}_p + \text{sen}\theta\hat{\mathbf{y}}, \quad (3.56)$$

onde  $\hat{\mathbf{e}}_y$  é o vetor unitário que aponta para o eixo y. Sob essa ótica, podemos reescrever  $\langle f(r)\hat{\mathbf{r}} \rangle$  como:

$$\langle f(r)\hat{\mathbf{r}} \rangle = \langle f(r)\cos\theta \rangle\hat{\mathbf{u}}_p + \langle f(r)\text{sen}\theta \rangle\hat{\mathbf{y}}. \quad (3.57)$$

Como a órbita é simétrica em relação ao semi-eixo maior, é fácil perceber que:

$$\langle f(r)\text{sen}\theta \rangle = 0 \quad (3.58)$$

e ainda:

$$\langle f(r) \cos \theta \rangle \neq 0. \quad (3.59)$$

Assim, a equação (3.54) pode ser reescrita sob a seguinte forma:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle f(r) \cos \theta \rangle \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{p}} \times \mathbf{L}, \quad (3.60)$$

ou, ainda, fazendo uso da equação (3.45), como:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \left[ \frac{\langle F(r) \cos \theta \rangle}{mk\epsilon} \right] \mathbf{A} \times \mathbf{L}. \quad (3.61)$$

Para uma órbita aproximadamente circular, como a de Mercúrio, iremos expandir o termo  $F(r)$  até o termo de primeira ordem <sup>6</sup>:

$$f(r) \approx f(r_0) + f'(r_0)(r - r_0). \quad (3.62)$$

Usando a equação (2.140) e fazendo  $\epsilon^2 \approx 0$  e  $a = r_0$ , teremos que:

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta} \approx \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos \theta} \approx r_0(1 - \epsilon \cos \theta), \quad (3.63)$$

onde usamos o fato de que  $(1 + \epsilon \cos \theta)^{-1} \approx (1 - \epsilon \cos \theta)$ . Logo:

$$(r - r_0) \approx -r_0 \epsilon \cos \theta. \quad (3.64)$$

Com isso, temos:

$$f(r) \approx f(r_0) - f'(r_0) r_0 \epsilon \cos \theta. \quad (3.65)$$

Substituindo a expressão acima na equação (3.61) veremos que:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{mk\epsilon} \langle (f(r_0) \cos \theta - f'(r_0) r_0 \epsilon \cos^2 \theta) \rangle \mathbf{A} \times \mathbf{L} \quad (3.66)$$

<sup>6</sup>McDonald, Farina e Tort [19] apontaram a existência de uma discrepância entre alguns resultados obtidos usando o método de Laplace - Runge - Lenz [17] e outras técnicas e, devido a essas discrepâncias, questionou a relevância do vetor LRL na época. Essa discrepância em relação a outros métodos surge se usarmos esse método considerando que  $f(r) \approx f(r_0)$ , onde  $r_0$  seria o raio da trajetória circular. Esse foi o erro cometido nas referências [17] e [26]. Devemos, então, expandir  $f(r)$  até o termo de primeira ordem. Fazendo a expansão, perceberemos que existe uma contribuição adicional para a velocidade de precessão que permanece finita no limite  $\epsilon \rightarrow 0$  [18].

Agora teremos que tomar a média temporal de  $\cos \theta$ ,  $\langle \cos \theta \rangle$  e de  $\cos^2 \theta$ ,  $\langle \cos^2 \theta \rangle$  ao longo da trajetória:

$$\langle \cos(\theta) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos \theta \frac{d\theta}{\dot{\theta}}, \quad (3.67)$$

uma vez que  $dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$ . Fazendo  $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ , teremos que:

$$\langle \cos(\theta) \rangle = \frac{m}{LT_0} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} r^2(\theta) \cos(\theta) d\theta. \quad (3.68)$$

Usando a aproximação dada pela (3.63), teremos que:

$$\langle \cos(\theta) \rangle = \frac{m}{LT_0} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} r_0^2 (1 - \epsilon \cos \theta)^2 \cos(\theta) d\theta, \quad (3.69)$$

ou ainda:

$$\langle \cos(\theta) \rangle = \frac{mr_0^2}{LT_0} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} (1 - 2\epsilon \cos \theta) \cos(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} (1 - 2\epsilon \cos \theta) \cos(\theta) d\theta. \quad (3.70)$$

Logo:

$$\langle \cos(\theta) \rangle = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos \theta d\theta - 2\epsilon \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right\}. \quad (3.71)$$

Como  $\cos^2 \theta = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$ ,  $\int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\pi$ . Então:

$$\langle \cos(\theta) \rangle = \frac{1}{2\pi} \{-2\pi\epsilon\} = -\epsilon. \quad (3.72)$$

Usaremos o mesmo raciocínio para calcularmos  $\langle \cos^2 \theta \rangle$ :

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} (1-2\epsilon \cos \theta) \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos^2 \theta d\theta - 2\epsilon \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos^3 \theta d\theta \right\}, \quad (3.73)$$

⇒

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2\pi \right\} = \frac{1}{2}. \quad (3.74)$$

Agora podemos substituir esses valores obtidos das médias temporais em (3.66), obtendo:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{mk\ell} \left( f(r_0)\ell + \frac{1}{2}f'(r_0)r_0\ell \right), \mathbf{L} \times \mathbf{A}. \quad (3.75)$$

Recorrendo à (3.53), podemos concluir que a velocidade de rotação associada ao vetor de Laplace-Runge-Lenz, ou seja, a velocidade de precessão da órbita aproximadamente circular equivale a:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{mk} \left( f(r_0) + \frac{f'(r_0)r_0}{2} \right) \mathbf{L}, \quad (3.76)$$

onde, para o caso de Kepler com perturbação, a força perturbativa central de origem relativística  $f(r_0)$  é dada pela seguinte expressão:  $f(r_0) = -\frac{3GML^2}{mr_0^4 c^2} \mathbf{e}$ , consequentemente, temos que  $f'(r_0) = \frac{12GML^2}{mr_0^5 c^2}$ . Ou seja:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{mk} \left( -\frac{3GML^2}{mr_0^4 c^2} + \frac{12GML^2}{2mr_0^4 c^2} \right) \mathbf{L} = \frac{1}{mk} \left( \frac{3GML^2}{mr_0^4 c^2} \right) \mathbf{L}, \quad (3.77)$$

ou ainda:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{GMm^2} \left( \frac{3GM}{mr_0^4 c^2} m^2 r_0^4 \dot{\theta}^2 \right) mr^2 \dot{\theta} \hat{\mathbf{z}} = 3 \frac{r_0^2 \dot{\theta}}{c^2} \dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.78)$$

onde  $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T_0} \mathbf{e}$ ,  $\dot{\theta}^2 = \frac{GM^3}{r_0}$ . Fazendo essas substituições acima, obteremos a expressão da velocidade de precessão da órbita :

$$\Omega = \frac{6\pi GM}{r_0 c^2 T_0} \hat{z}. \quad (3.79)$$

Perceba que, se a perturbação central fosse repulsiva ( $f(r_0) > 0$ ), a velocidade de precessão teria o seu sentido invertido em relação ao calculado. Usando as definições de período radial e orbital, podemos escrever, para pequenas perturbações, que:

$$T_{orbital} \approx T_{radial} + \delta T_{orbital}. \quad (3.80)$$

Veja que, para  $\delta T_{orbital} = 0$ ,  $T_{orbital} = T_{radial}$  e a órbita fecha (Kepler sem perturbação). Perceba também que, se  $\delta T_{orbital} < 0$ ,  $T_{orbital} < T_{radial}$ , resultando em um retrocesso de periélio, conforme discutido anteriormente nesse capítulo. Se  $\delta T_{orbital} > 0$ ,  $T_{orbital} > T_{radial}$ , fazendo com que o periélio avance. Podemos definir então que essa mudança angular do periélio  $\Delta\phi$  (precessão), avanço ou retrocesso, pode ser escrita através da seguinte equação:

$$\Delta\phi = \dot{\theta} \delta T_{orbital} \quad (3.81)$$

e, conseqüentemente, a velocidade de precessão pode ser escrita como:

$$\Omega = \dot{\theta} \frac{\delta T_{orbital}}{T_{orbital}}. \quad (3.82)$$

Observando a equação acima, concluímos que, quando  $\delta T_{orbital} < 0$ ,  $\Omega < 0$  e, quando  $\delta T_{orbital} > 0$ ,  $\Omega > 0$ . Voltando à (3.79), podemos ver que para força perturbativa atrativa, como é caso da correção relativística que estudamos,  $\Omega > 0 \rightarrow \delta T_{orbital} > 0 \rightarrow$  avanço do periélio. Já no caso de a perturbação ser repulsiva, teríamos o sinal da equação (3.79) invertido, isto é,  $\Omega < 0 \rightarrow \delta T_{orbital} < 0 \rightarrow$  retrocesso do periélio. Então é o fato de a força perturbativa ser atrativa ou repulsiva que diz se o periélio avança ou retrocede.

Esse método, além da sua elegância, é mais poderoso que os outros mostrados anteriormente, por pelo menos dois seguintes motivos: i) pode ser usado para calcular a velocidade de precessão de órbitas com qualquer excentricidade ii) pode ser usado de maneira simples e eficiente em casos onde as correções à força de

Kepler não sejam centrais.

## Capítulo 4

# Órbitas e precessão usando o *Modellus*

### 4.1 Introdução

O *Modellus* é uma ferramenta que pode ser usada tanto pelo professor quanto pelo aluno, no processo de ensino-aprendizagem de Física. Muito simples de usar e não requer nenhum conhecimento prévio de programação.

No site do programa, <http://modellus.co/index.php?lang=pt>, é possível entender o seu propósito, que é estimular a aprendizagem, utilizando a matemática para criar ou explorar modelos de forma interativa. Para isso, basta que os usuários insiram equações matemáticas (e as suas condições iniciais). Ao clicar no play, o programa é capaz de realizar simulações, gráficos e tabelas. Veja o exemplo abaixo:

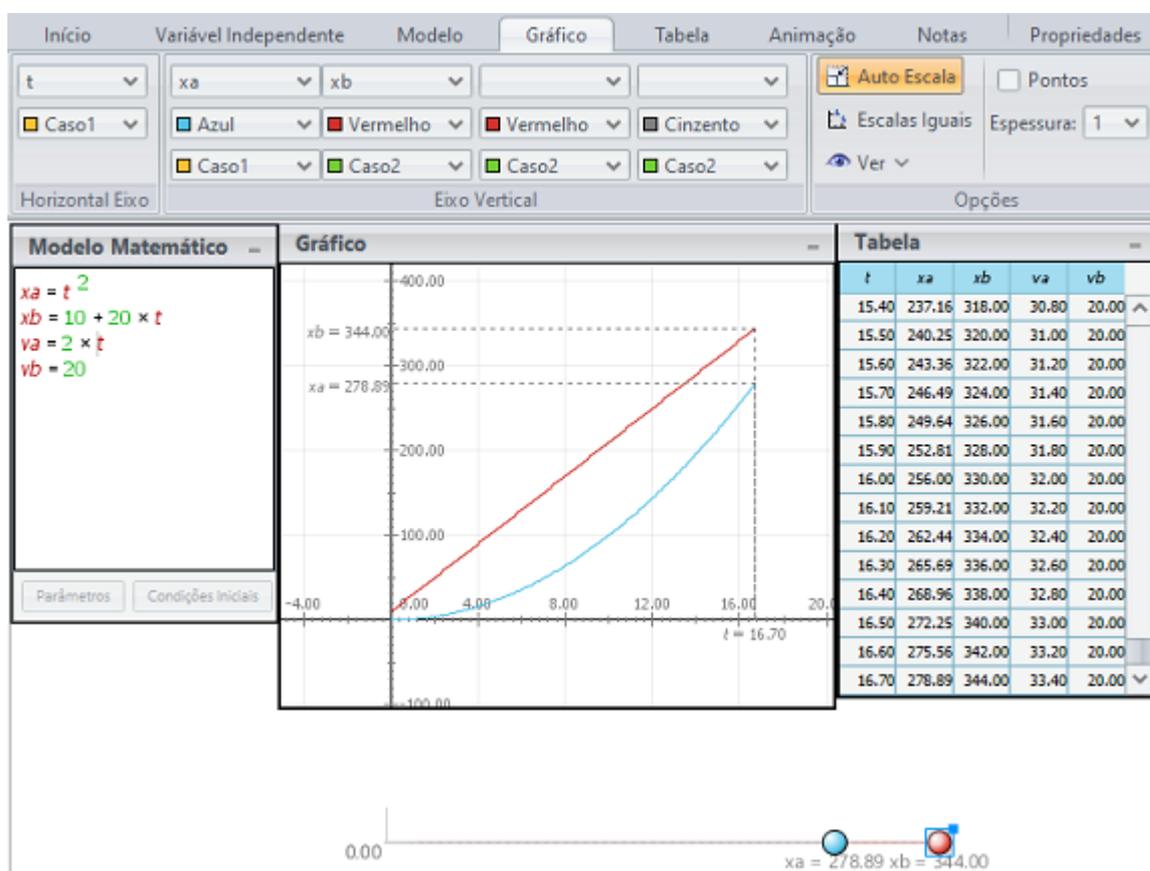


Figura 4.1: antes da encontro.

Nesse exemplo temos dois móveis, A e B, que estão na mesma reta horizontal e seus movimentos possuem o mesmo sentido. Suas equações de movimento estão escritas no canto superior esquerdo, no Modelo Matemático. Com o auxílio do programa, os alunos poderão visualizar os movimentos dos móveis, podendo explorar melhor a Física que o problema aborda: posição a cada instante de tempo de cada móvel, velocidade a cada instante de tempo, tempo de encontro e outras informações.

Tudo isso é possível ver com o auxílio da animação e da tabela. Além disso, construir gráficos no *Modellus* é extremamente simples, basta clicar no ícone gráficos e escolher a grandeza correspondente a cada eixo. O gráfico feito na simulação anterior corresponde a posição x tempo de cada móvel. é possível construir velo-

cidade x tempo também, por exemplo.

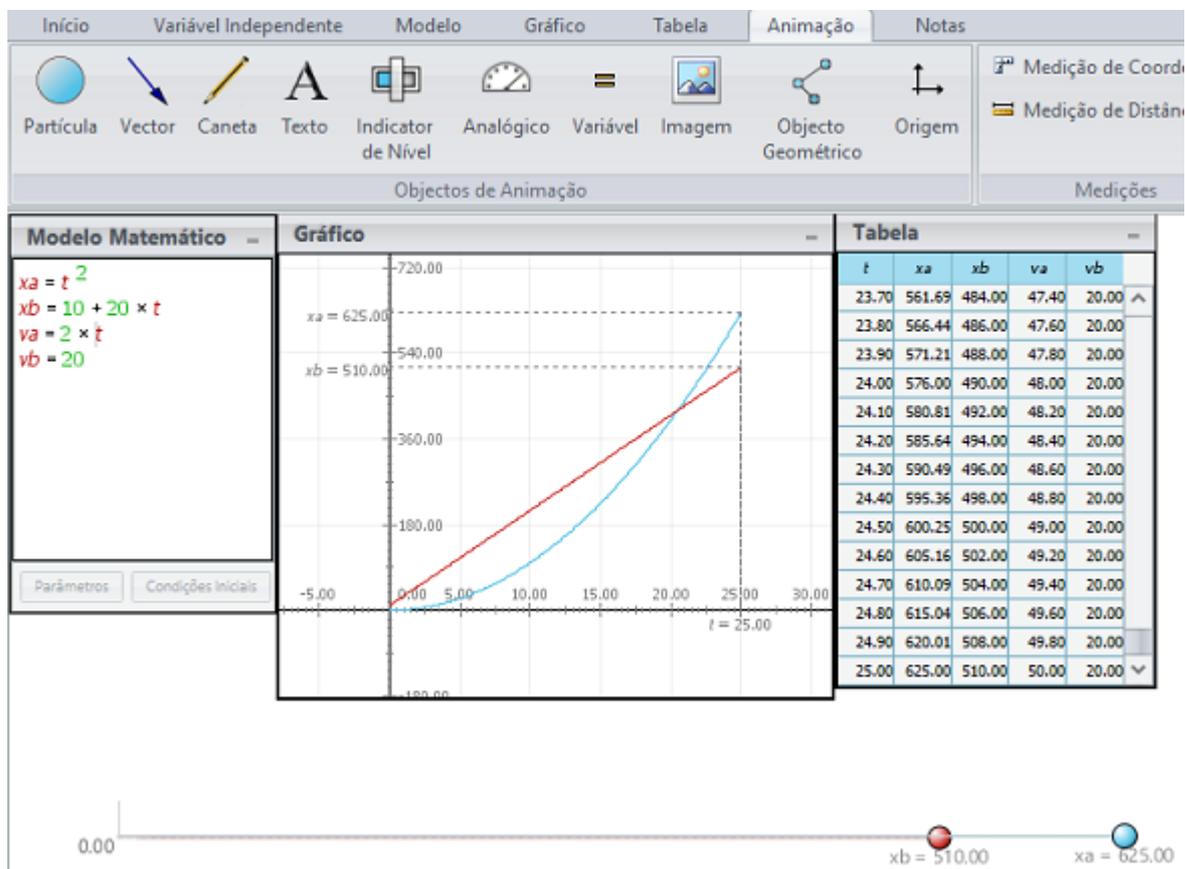


Figura 4.2: depois do encontro.

De modo geral, alunos de Ensino Médio, especialmente os da 1ª série, apresentam bastante dificuldade em interpretar e contruir gráficos. Um erro muito comum nesse tipo de exercício quando há um gráfico velocidade x tempo é achar que, o instante de tempo em que as retas se encontram é o instante de tempo de encontro dos móveis. Basta o aluno comparar os gráficos posição x tempo e velocidade x tempo que poderá ver que essa afirmativa é falsa.

Realizei essa prática em dezembro de 2015 com 36 alunos ( 21 de 25 da turma A e 23 de 25 da turma D ) da 1ª série do Instituto Federal Fluminense, *campus* Santo Antônio de Pádua. Distribuí aos alunos um papel com a seguinte tarefa: Dois móveis, A e B, estão na mesma horizontal, sendo que o B está 10 m na frente de

A. A velocidade inicial de A é nula e a sua aceleração é constante igual a  $2m/s^2$ , ambas em relação ao solo. Já o móvel B realiza um deslocamento constante de 72 Km a cada hora, em relação ao solo. Usando o *Modellus*:

1. Escreva o Modelo Matemático desse exercício, ou seja, escreva as equações de movimento dos dois móveis;
2. Vá ao ícone Tabela e peça para informar  $t, v_a, v_b$ ;
3. Vá ao ícone Gráfico e faça o gráfico velocidade x tempo dos móveis e diga se os móveis se encontram. Caso se encontrem, informe o instante que o encontro ocorre;
4. Vá ao ícone animação e crie duas partículas, correspondentes a A e a B. Faça a animação e veja novamente se as partículas se encontram, informando, caso sim, o instante que ocorre. A resposta foi igual ao item anterior ?
5. Vá ao ícone Gráfico e construa o gráfico posição x tempo dos móveis. Antes de clicar no play, vá também ao ícone Tabela e acrescente  $x_a$  e  $x_b$ . Os móveis se encontram? Caso sim, sua resposta coincidiu com os dois itens anteriores ?

Durante a tarefa, fui de mesa em mesa auxiliando os alunos quando surgiam algumas dificuldades, tanto na Física do problema quanto no uso do programa. Grande parte dos alunos (32 dos 36 alunos) achou, após a observação do gráfico velocidade x tempo, que quando as retas se encontram, os móveis também se encontravam. Usando a tabela, os estudantes falaram que os móveis se encontravam quando  $t = 10s$ . Quando olharam para a animação e para a nova tabela 4.3, perceberam que os móveis se encontram um pouco depois dos 20 s. Quando fizeram o último item, perceberam que o tempo de encontro era entre  $t = 20,40s$  e  $t = 20,50s$ .

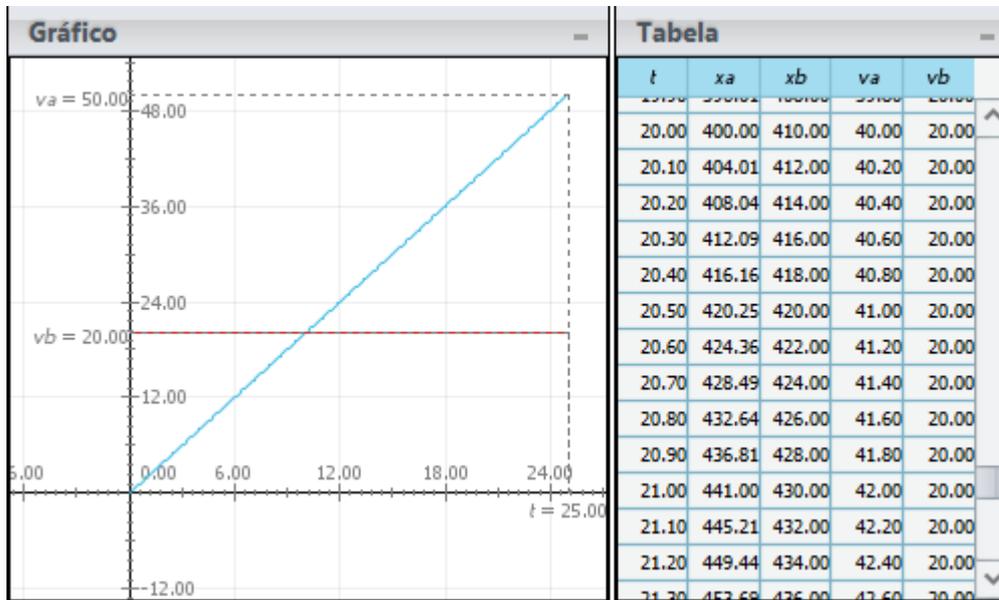


Figura 4.3: passo 0.1.

Perguntei aos alunos como fazer para melhorar a precisão do tempo de encontro. Um, mesmo que baixinho, disse: alterar a marcação do tempo. Ou seja, o *Modellus* estava programado para calcular, a cada intervalo de 0.1s, as posições e velocidades dos móveis, mas esse intervalo pode ser menor, para aumentar a precisão. Mudando para 0.01s de intervalo, por exemplo, descobrimos que o encontro acontece entre  $t = 20.48s$  e  $t = 20.49s$ , conforme a tabela 4.4 nos informa.

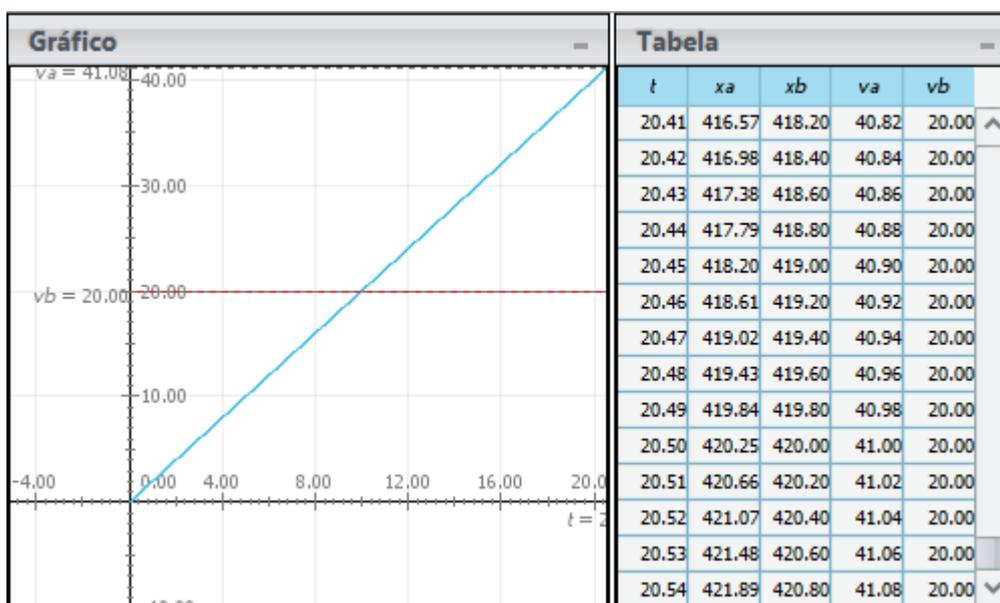


Figura 4.4: passo 0.01.

Após descobrirmos o tempo de encontro, perguntei aos alunos o que significa aquele tempo em que as retas do gráfico velocidade x tempo se encontram e o porquê é diferente do tempo no gráfico posição x tempo quando a parábola (A) encontra a reta (B). O objetivo dessa pergunta era saber se, de fato, os alunos entenderam a essência do problema e ajudá-los a interpretar gráficos.

Encerrada a discussão do problema fomos para a última etapa. Sem o uso do programa, como podemos descobrir o tempo de encontro? Como havíamos discutido bastante, quase todos os alunos responderam: igualando as equações. Sendo assim,  $t^2 = 10 + 20t$ . Com o uso de uma calculadora científica (de celular), obtivemos que  $t = 20.488088482s$ , ou seja,  $t \approx 20.49s$ , que é dentro do esperado.

Essa atividade durou 2h de aula e é apenas um dos inúmeros meios de se utilizar o *Modellus* como ferramenta didática.

## 4.2 Usando o *Modellus* no problema de Kepler

Nessa seção nos dedicaremos à aplicação do *Modellus* em uma aula de órbitas de planetas para alunos do Ensino Médio. Essa aula foi aplicada em três turmas da 1ª série do Ensino Médio do IFFluminense *campus* Santo Antônio de Pádua, em Outubro de 2016. O assunto trabalhado após recesso de Agosto (mês das Olimpíadas do Rio de Janeiro) foi dinâmica em trajetórias curvilíneas e, dando continuidade ao cronograma, iniciamos os estudos de Gravitação.

Cada aula teve duas horas de duração. Na 1ª aula de Gravitação foi feita uma breve abordagem histórica, que perpassa pela origem da palavra planeta, remetendo à relação que os gregos tinham com o céu até a Lei da Gravitação Universal, do sir. Isaac Newton.

Na 2ª aula levei os alunos para o micródomo da escola. Cada turma possui, em média, 25 alunos e o *campus* possui dois micródomos, cada um com um quadro branco e 25 computadores, um por aluno. Realizei todas as atividades dessa seção nas turmas B, C e D, no dia 11 de outubro de 2016.

Tabela 4.1: Aulas.

turma B	turma C	turma D
8:00 - 10:00 h	10:30 - 12:30 h	14:00 - 16:00 h

Os alunos já conheciam o *Modellus*. Os alunos são apresentados ao programa logo no 1º trimestre, no estudo de gráficos de M.U. e M.U.V., porém essa aula pode ser feita independente de os alunos conhecerem ou não o programa. Como é bem simples de usar, com um ou dois exemplos os alunos já conseguirão realizar as atividades propostas. Talvez não seja possível fazer tudo em uma aula, o que não é um problema. Caso a turma tenha mais alunos que computadores, não há prejuízo algum se fizerem as atividades em dupla.

A aula foi dividida nas seguintes etapas :

Etapa 1: A primeira parte da atividade consistiu em relembrar a Lei da Gravitação Universal:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.1)$$

Etapa 2: Na segunda etapa desenhei o plano cartesiano com o Sol no centro, para facilitar, e um planeta em um ponto arbitrário (x,y):

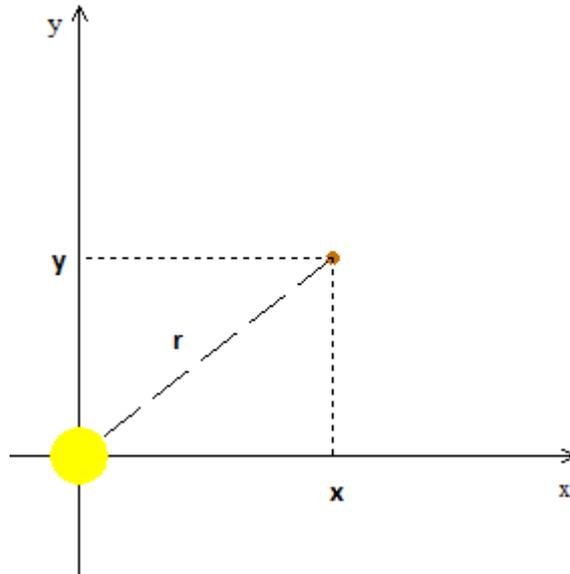


Figura 4.5: Planeta orbitando ao redor de um Sol fixo, centrado na origem.

Aqui vale a pena mostrar aos alunos a relação matemática entre x, y e r:

$$r^2 = x^2 + y^2. \quad (4.2)$$

Etapa 3: Próximo passo é decompor a força  $\mathbf{F}$ . Para isso, vale a pena aproveitar o desenho anterior para mostrar as decomposições e deixar os alunos tentarem chegar às expressões abaixo:

$$\mathbf{F}_x = -F \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \hat{\mathbf{x}} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_y = -F \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \hat{\mathbf{y}}, \quad (4.3)$$

onde  $F = |\mathbf{F}|$ .

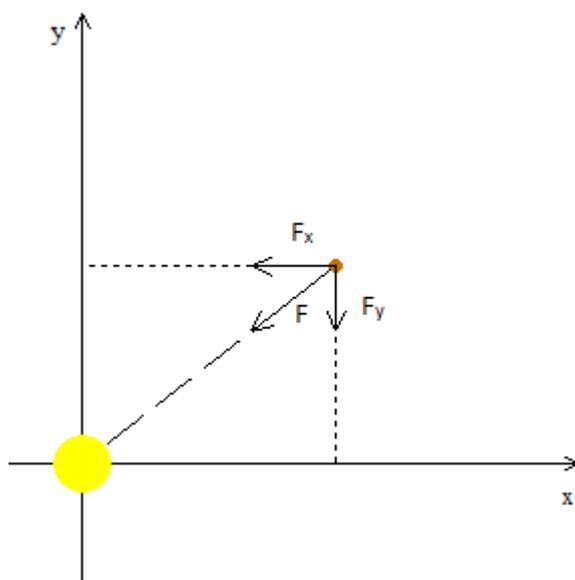


Figura 4.6: decomposição da força  $F$  em  $F_x$  e  $F_y$ .

Etapa 4: Substituindo (4.2) e (4.1) em (4.3), obteremos as equações das decomposições  $F_x$  e  $F_y$ :

$$\mathbf{F}_x = -GMm \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{x}} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_y = -GMm \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{y}}. \quad (4.4)$$

O sinal negativo não deve passar despercebido. Nas turmas que apliquei as atividades, nenhum aluno lembrou de colocar o sinal negativo. Usando a figura anterior, mostre que  $F_x$  aponta para o sentido negativo do eixo  $x$  e  $F_y$  aponta para o sentido negativo do eixo  $y$ . Como estamos trabalhando com força, que é uma grandeza vetorial, temos que analisar direção e sentido.

Nos exercícios que fizemos anteriormente, em outros assuntos, envolvendo velocidade, por exemplo, os alunos puderam perceber que, se não se atentarem ao uso corretos dos sinais, o programa vai calcular algo totalmente diferente que o desejado. Lembrando, mais uma vez, que os alunos já estão familiarizados com *Modellus*.

Etapa 5: Agora que já temos as expressões de cada força, vamos ao programa. Ao abri-lo aparecerá uma aba escrito modelo matemático. É nesse espaço que devemos colocar as equações que regem o nosso sistema, conforme mostra a figura 4.7.



Figura 4.7: Modelo matemático. O objetivo dessa atividade é que aluno veja a órbita de um planeta sujeito apenas a atuação da força gravitacional exercida sobre ele pelo Sol. É uma atividade qualitativa, portanto, ao escrever as equações com os alunos, o professor pode fazer  $GM$  é numericamente igual a 1, explicando o motivo aos alunos. Até porque esse programa apresenta limitações e não roda os valores reais das constantes  $G$  e  $M$  nem tão pouco as distâncias astronômicas.

Aqui, caso seja a primeira vez que os alunos estejam usando o programa, vale a pena comentar que o termo matemático  $\frac{d}{dt}$  mede a variação de uma grandeza em função do tempo. Assim,  $\frac{dx}{dt}$  é a variação de  $x$  em relação ao tempo  $t$ , ou seja, é a medida da velocidade da componente horizontal. Assim, a aceleração nessa componente vale  $\frac{dv_x}{dt}$ . Com isso,  $F_x$  será escrito, no modelo, como  $m \frac{dv_x}{dt}$ . Então:

$$F_x = -GMm \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \rightarrow \frac{dv_x}{dt} = -x(x^2 + y^2)^{-1.5} ,$$

onde, por simplicidade, podemos considerar que  $GM$  numericamente igual a 1, uma vez que estamos trabalhando com os alunos uma análise qualitativa da 1ª lei de Kepler, buscando apenas observar como é

a órbita de um planeta ao redor do Sol (sem perturbações de quaisquer tipos), sem uma preocupação com medidas.

Após escrever as equações conforme mostra a figura (4.7), peça aos alunos para apertarem o item **interpretar**. Tanto o item interpretar quanto o  $\frac{dx}{dt}$ , correspondente à taxa de variação, encontram-se na aba superior do programa (ver figura 4.8):

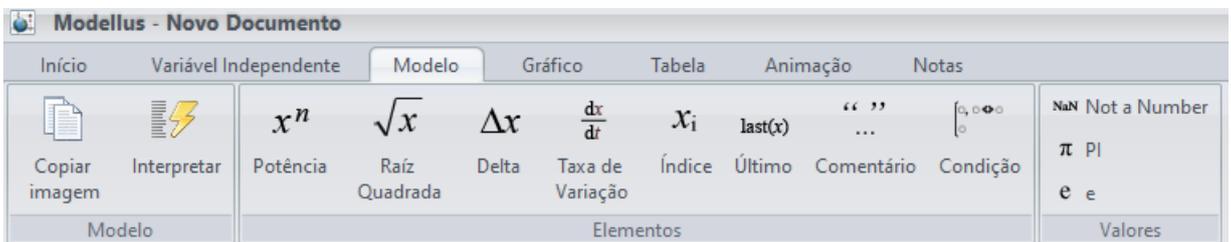


Figura 4.8: aba superior.

Etapa 6: Para finalizar essa primeira atividade, basta escolher as condições iniciais e apertar o play:



Figura 4.9: condições iniciais.

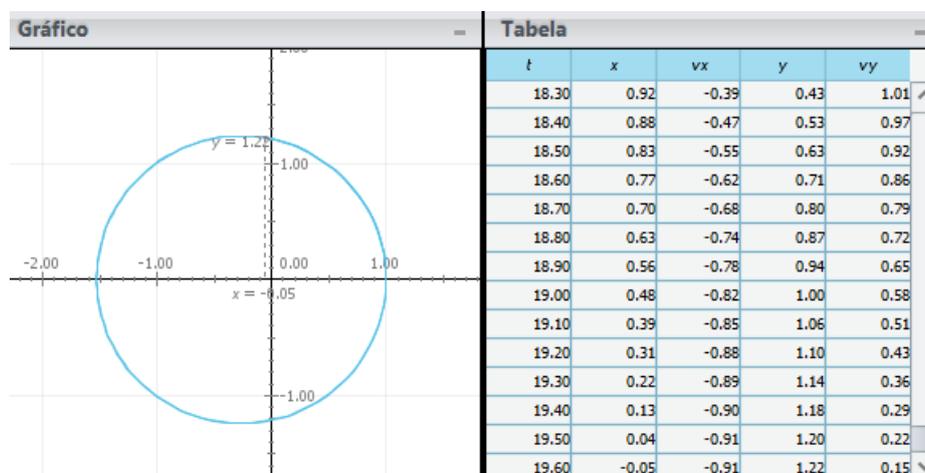


Figura 4.10: trajetória.

- **Dica 01:** Para os alunos visualizarem a trajetória acima eles devem ir à aba superior, clicar no item **Gráfico**, construir  $x$  e  $y$  e apertar no botão **Auto Escala**:

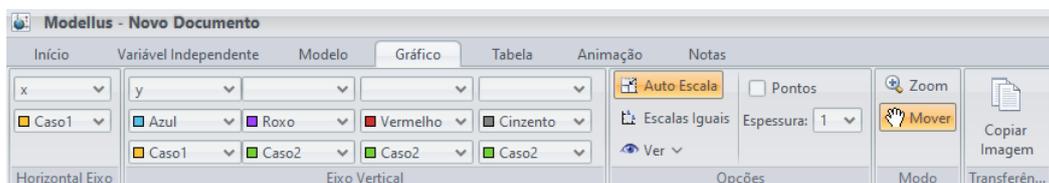


Figura 4.11: gráfico.

- **Dica 02:** Para os alunos visualizarem a tabela com os valores de  $x$ ,  $y$ ,  $v_x$  e  $v_y$ , por exemplo, devem clicar no item **Tabela** e escrever o que querem que a tabela apresente. Na figura abaixo estão as grandezas mencionadas:

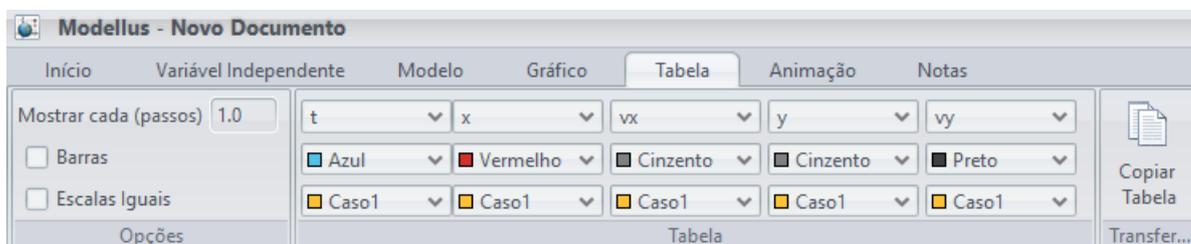


Figura 4.12: Criando tabela com *Modellus*.

Com essa atividade os alunos poderão ver que a trajetória de um planeta ao redor do Sol é elíptica quando consideramos que a força atuante é do tipo  $\mathbf{F} = -k/r^2 \hat{\mathbf{r}}$  (considerando que a sua velocidade orbital seja sempre inferior à velocidade de escape).

Etapa 7: Agora seguiremos para a segunda atividade da aula: a órbita de Mercúrio. Os planetas sofrem, além da força gravitacional, a ação de uma força perturbativa  $f(r)$ , também central:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -3 \frac{GML^2}{mr^4 c^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.5)$$

sendo  $L$  a intensidade da componente do momento angular ortogonal ao plano da órbita, constante durante a trajetória e  $c$ , a velocidade da luz no vácuo. A priori, o professor pode apenas forçar esse termo adicional para a realização dessa atividade. Depois que os alunos observarem o que acontecerá com a trajetória, o professor poderá explicar a origem da perturbação e a sua importância <sup>1</sup>.

Sendo assim, a força que atua em Mercúrio pode ser representada como:

$$\mathbf{F} = - \left( \frac{GMm}{r^2} + 3 \frac{GML^2}{mr^4 c^2} \right) \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.6)$$

ou ainda, fazendo  $k = GMm$  e  $\gamma = \frac{3GML^2}{mc^2}$ , onde  $k$  e  $\gamma$  são constantes, podemos reescrever a equação anterior de uma forma mais simples:

$$\mathbf{F} = - \left( \frac{k}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4} \right) \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.7)$$

Seguindo o mesmo raciocínio da atividade anterior, escreveremos então as componentes da força que atua em Mercúrio:

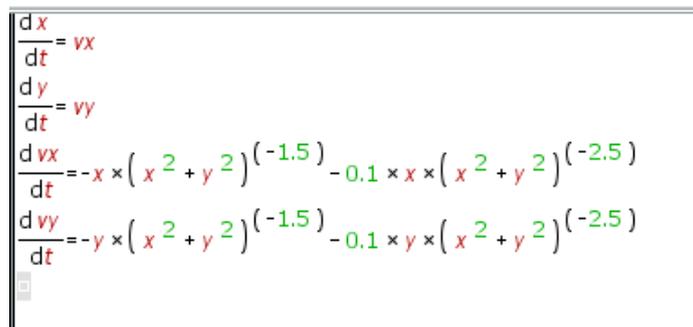
$$\mathbf{F}_x = \left( -k \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \gamma \frac{x}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) \hat{\mathbf{x}} \quad (4.8)$$

e

<sup>1</sup>No capítulo *Precessão* desse trabalho há um texto com essas informações. Caso o professor queira, também pode recorrer às referências [2, 4, 5], por exemplo.

$$\mathbf{F}_y = \left( -k \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \gamma \frac{y}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right) \hat{\mathbf{y}} \quad (4.9)$$

No *Modellus*, as equações que representarão a trajetória de Mercúrio estão na figura 4.13:



```

d x
dt = vx
d y
dt = vy
d vx
dt = -x * (x^2 + y^2)^(-1.5) - 0.1 * x * (x^2 + y^2)^(-2.5)
d vy
dt = -y * (x^2 + y^2)^(-1.5) - 0.1 * y * (x^2 + y^2)^(-2.5)
    
```

Figura 4.13: Como estamos preocupados com a parte qualitativa – o aluno observar que a órbita não fecha – o professor pode explicar aos aluno que, ao colocar as equações no programa, a força perturbativa deve ter módulo bem menor que a gravitacional e, para garantir que isso aconteça, multiplicou o termo perturbativo por 0.1. O professor pode mostrar que, para cada valor que escolher multiplicar esse termo, a órbita será diferente e que, para valores muito pequenos, a órbita parece que é fechada.

Etapa 8: Uma vez escritas as equações no programa, basta apertar o botão interpretar, colocar as mesmas condições iniciais da primeira atividade (4.9) a mandar rodar.

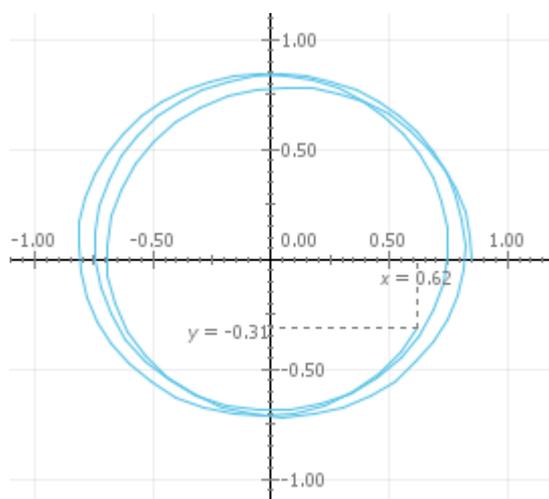


Figura 4.14: Órbita com precessão.

Etapa 9: Pede-se para os alunos interpretarem a trajetória calculada pelo programa. O objetivo é que percebam que continua sendo uma elipse, mas que não fecha. Então, após essa conclusão, o professor explica que essa perturbação causa uma precessão na órbita.

- **Para o professor e para o aluno** Precessão: Dizemos que uma órbita precessa quando o periélio muda de posição com o tempo. Assim, a órbita não fecha. Todos os planetas apresentam precessão, um mais, outros menos, pois não sofrem ação apenas da força gravitacional planeta - Sol. No caso do Mercúrio, por exemplo, ele sofre força dos outros planetas, do seu satélite e o fato de o Sol não ser perfeitamente esférico também influencia. A tabela 4.2 mostra detalhadamente os fatores que influenciam a precessão de Mercúrio:

Precessão (segundos de arco por século)	Origem
531,4	efeito gravitacional dos demais planetas
0,0254	o fato de o Sol ser oblato
43	relatividade geral

Tabela 4.2: Origens da precessão do periélio de Mercúrio.

Etapa 10: As principais atividades foram feitas. Essa última é apenas mais um exemplo de precessão, onde o professor pode sugerir mudar o parâmetro 0.1 para 0.01. Assim o efeito fica quase que imperceptível. O importante é manter o segundo termo muito menor que o primeiro. A trajetória, nesse caso, apresentará uma precessão menos acentuada, conforme mostra a figura 4.15:

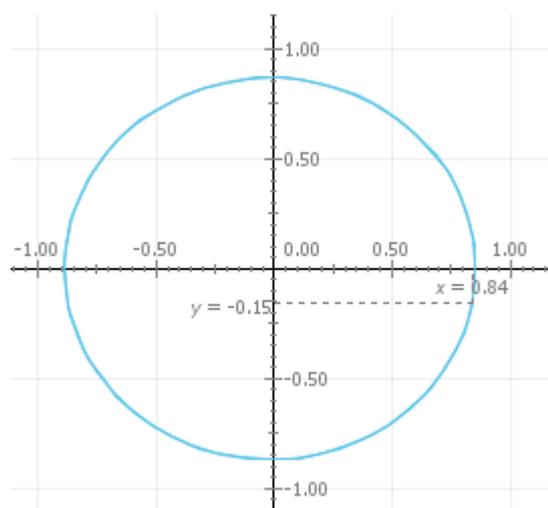


Figura 4.15: O fator multiplicativo 0.01 garante que a perturbação seja bem pequena, parecendo que a órbita é limitada e fechada. Após pedir para que os alunos façam esse exemplo, o professor pode comentar que, de fato, a precessão causada pelo efeito relativístico é bem pequena e, mesmo em Mercúrio, planeta que, pela proximidade com o Sol, sofre mais com esse efeito, a precessão é de aproximadamente 43 segundos de arco (vale a pena explicar a relação entre segundo de arco e grau para os alunos) a cada cem anos.

Usando a ferramenta **zoom** é possível ver com mais clareza que, após algumas voltas, o planeta não retorna ao ponto inicial, ou seja, que a órbita não fecha, como mostra a figura 4.16:

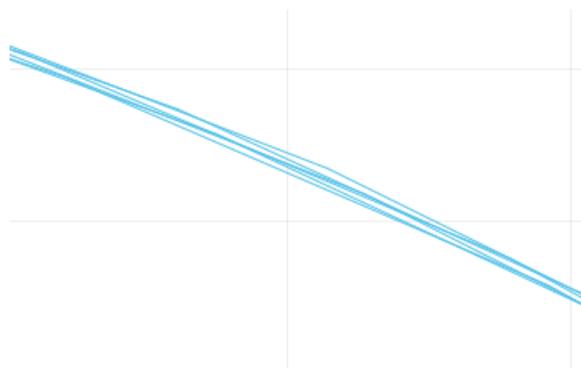


Figura 4.16: A figura representa uma ampliação de parte da trajetória da figura 4.15, mostrando uma pequena perturbação nessa órbita.

Assim, usando o *Modellus*, o professor poderá trabalhar a 1<sup>a</sup> lei de Kepler e o fenômeno da precessão com seus alunos de uma maneira não tradicional (uma aula menos expositiva), dando maior liberdade aos alunos, tornando-os menos passivos e mais participativos na sala de aula.

# Capítulo 5

## Conclusões

Nesse trabalho estudamos a gravitação universal, as três Leis de Kepler e diferentes métodos para calcular a precessão da órbita de Mercúrio devido à contribuição relativística.

Esperamos que os argumentos e os cálculos mostrados aqui sejam de leitura agradável aos professores de Física e que o fato de termos descrito diversos métodos seja útil de alguma forma.

O objetivo principal ao trabalhar o tema precessão em um turma heterogênea, como são as turmas de ensino médio nesse país, de modo geral, é apresentá-lo de maneira mais qualitativa, usando o *Modellus*. Dessa forma o professor pode tornar a sala um ambiente mais promissor à uma aprendizagem mais significativa, inclusive para os alunos que não se afeiçoam pela Física ou pela área de Ciências da Natureza.

Após os dois primeiros capítulos, apresentamos algumas aplicações em sala de aula, como uma lista de exercícios e alguns exemplos de usos do programa de simulação computacional *Modellus*. Essa dissertação, que conta com a parte teórica e com a parte prática, é voltada para o professor que quer explorar o assunto de precessão nas suas aulas.

Todas as aplicações sugeridas foram usadas em turmas da 1ª série de Ensino Médio e, além disso, o tema Cônicas e leis de Kepler foi abordado em um seminário no IFFluminense e no museu Espaço Ciência Viva (ECV), como forma de divulgação científica, para o público em geral.

Meus alunos foram, de modo geral, muito bem nas avaliações no último trimestre. Acredito que melhor que o professor simplesmente enunciar a 1ª lei de Kepler, por exemplo, é deixar o aluno ver o que acontece quando uma partícula sujeita está uma força central inversamente proporcional ao quadrado da distância. Os cálculos são muito complicados para alunos de ensino médio. São apenas para o professor entender a matemática por trás do programa *Modellus*. Percebi que a reação dos alunos ao rodar o programa e ver uma órbita elíptica traçada na tela do computador foi muito positiva. Conforme uns iam acabando queriam me mostrar e de modo muito entusiasmado. E a mesma reação se estendeu quando trabalhei com os alunos a ideia de pequena perturbação central, causando precessão na trajetória. Os primeiros alunos que acabaram essa 2ª atividade se mostraram bastante surpresos com o que aparecia na tela. Conforme os outros iam acabando, podíamos discutir com mais riqueza e de maneira qualitativa o que estava acontecendo.

Essa experiência didática me leva a crer que a possibilidade de esses alunos esquecerem a 1ª lei de Kepler é muito menor que se eles tivessem tido contato com esse tema com uma abordagem mais tradicional, no quadro, apenas com a enunciação da lei. Deixar o aluno fazer, aumentando seu grau de liberdade, é um caminho para uma aprendizagem mais significativa.

Em relação a Nibiru, os alunos com maiores dificuldades matemáticas precisaram da minha ajuda no decorrer da atividade para fazer as equações que envolvem potência. As minhas turmas tinham uma variedade muito grande de alunos no sentido de solidez em suas bases matemáticas contruídas ao longo do ensino fundamental. A escola, IFFluminense *campus* Pádua, até a presente data, possui apenas duas modalidades de ensino: Ensino Médio Técnico e Integrado e o PRO-EJA e encontra no interior do Estado do Rio de Janeiro, ficando estampado para nós, docentes da escola, os problemas da educação pública básica da região. Mui-

tos alunos chegam com dificuldades de leitura e de matemática básica (conteúdos que alunos que concluíram o ensino fundamental deveriam saber como: m.m.c., equação de 1º grau, geometria plana, por exemplo). Digo isso porque mesmo com alunos que estavam em processo de recuperação de conteúdos matemáticos, conseguimos, juntos, realizar a atividade e o resultado nas avaliações escritas foram positivos. Na 1ª turma que fui fazer essa lista percebi, logo nos primeiros minutos, que alguns alunos estavam com essa dificuldade na matemática. O que fiz antes de prosseguir foi dar uma breve explicação, com exemplos, de como trabalhar com potência e raiz. Então, uma dica: professor, se a sua turma mostrar dificuldades na matemática envolvida na resolução de exercícios que envolvam 3ª lei de Kepler, use um tempinho inicial da aula para trabalhar algumas propriedades de potenciação e radiciação. Se puder, peça para que o professor de matemática trabalhe esse conteúdo na mesma semana. Uma grande vantagem desse *campus* que trabalhei é que nos três dias que eu lecionava (terça, quarta e quinta) havia pelo menos um professor de matemática que dividia turmas comigo e a comunicação entre as equipes era muito boa. Assim, no dia seguinte após ter feito a lista com eles, o professor de matemática trabalhou potência com eles e ainda aplicou o conteúdo calculando o período de translação de Marte (em anos terrestres) ao redor do Sol. Se achar que os alunos continuaram com dúvidas mesmo após todos esses recursos, uma opção pode ser criar uma lista com 5, 6 exercícios, para que continuem estudando em casa. Combine com eles uma data de entrega. Uma semana, por exemplo. Assim não irão deixar a matéria de lado. Eu também disponibilizava 2 horas semanais para tirar dúvidas dos alunos. Essa prática é comum nos Institutos Federais. Caso haja essa possibilidade na sua escola e tenha carga horária disponível, os alunos só terão a ganhar. Muitas escolas particulares onde trabalhei contam com o serviço de monitoria, onde o aluno pode tirar suas dúvidas e mater seus estudos em dia, mas acredito que essa realidade é distante das encontradas nas escolas públicas estaduais, por exemplo.

Por fim, esperamos também que esse tema seja de interesse de vários professores e que possam usar esse trabalho não só como referência teórica, mas também que possa reproduzir as atividades aqui propostas, fomentando a aprendizagem em Física.

## Apêndice A

# Um argumento de plausibilidade para a gravitação universal

Há duas maneiras bem testadas de introduzir a lei da gravitação universal aos alunos: i) começando com a lei de Newton da gravitação universal, descrevendo como ela foi descoberta e como ele funciona, e depois discutir algumas de suas implicações e, posteriormente, trabalhar as três leis de Kepler; ii) seguir a "ordem cronológica", começando com as leis de Kepler do movimento planetário como empíricas e prosseguir com a discussão da lei de Newton da gravitação universal.

Em ambas as abordagens, em algum momento após a introdução qualitativa, a expressão matemática da magnitude da lei da gravitação universal de Newton é apresentada e suas principais características são discutidas. Entretanto, independentemente da ordem escolhida pelo professor, ao introduzir esta lei fundamental da natureza aos alunos argumentando com exemplos de plausibilidade apropriados pode propiciar uma maior possibilidade de compreensão dos alunos sobre este importante tema da Física.

Argumentos de plausibilidade para a lei de gravitação universal podem ser encontrados em alguns livros didáticos de nível universitário como, por exemplo, em [2] e [27], mas no nível médio é mais difícil de encontrar.

No que se segue, analisamos alguns exemplos de plausibilidade que podem facilitar a introdução da lei de Newton da gravitação universal na sala de aula. Dessa forma, esse apêndice dedica-se à apresentação de um roteiro para o professor que queira apresentar argumentos de plausibilidade para a Lei da gravitação universal em sala de aula. Para facilitar, foram elaboradas etapas, sugestões de sequência de raciocínio a apresentar aos alunos. O texto escrito a seguir, nesse capítulo, deu origem ao trabalho [1].

**ETAPA 1:** Ao iniciar a aula o professor pode perguntar aos alunos como é o movimento da Lua em relação ao planeta Terra. Esse será o nosso ponto de partida. A Lua realiza um movimento aproximadamente circular (consideraremos circular) ao redor da Terra. Após essa conclusão, a próxima pergunta será: se a Lua está realizando uma trajetória circular, qual é o módulo da sua aceleração?

A expectativa é que os alunos relembrem que, em um movimento circular com módulo da velocidade constante, o módulo da aceleração (centrípeta)  $a$  é:

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (\text{A.1})$$

Aplicando a equação acima ao problema Terra - Lua,  $v$  corresponde ao módulo da velocidade orbital da Lua e  $r$  a distância entre os astros (raio orbital), conforme mostra a figura a seguir:

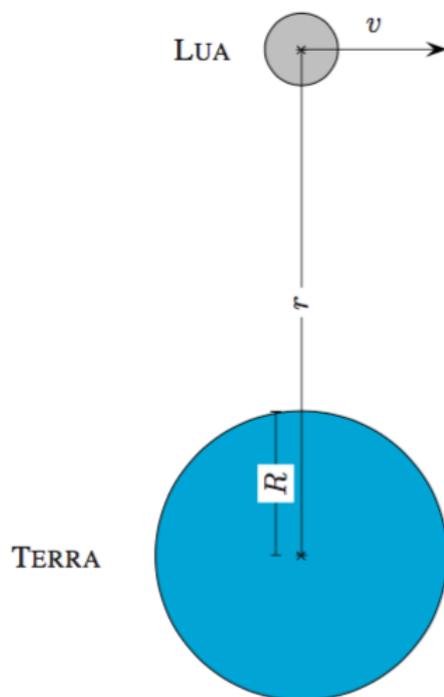


Figura A.1: Sistema Terra - Lua.

Podemos ainda relacionar a velocidade  $v$  com o período orbital  $T$ :

$$v = \frac{2\pi}{T}r. \quad (\text{A.2})$$

Substituindo na equação (A.1), temos o módulo da aceleração da Lua em função de  $T$  e  $r$ :

$$a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r. \quad (\text{A.3})$$

Para o nosso problema,  $r = 3,8 \cdot 10^8$  m e  $T = 2,4 \cdot 10^6$  s. Então;

$$a = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

**ETAPA 2:** Calculada a aceleração que a Lua está submetida, iremos relacioná-la com o valor da gravidade na superfície terrestre:

$$\frac{a}{g} = \frac{2,6 \cdot 10^{-3}}{9,8} = 2,7 \cdot 10^{-4}, \quad (\text{A.4})$$

Por outro lado essa distância  $r$  é cerca de 60 vezes o raio  $R$  da Terra, como Newton já sabia. Assim:

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{R^2}{(60R)^2} = \frac{1}{3600} = 2,8 \cdot 10^{-4}. \quad (\text{A.5})$$

Observando os valores encontrados nas duas relações, podemos inferir que:

$$\frac{a}{g} \approx \frac{R^2}{r^2}, \quad (\text{A.6})$$

ou ainda:

$$a \approx g \frac{R^2}{r^2}. \quad (\text{A.7})$$

Segue então da 2ª Lei de Newton que:

$$ma = mg \frac{R^2}{r^2}, \quad (\text{A.8})$$

onde  $m$  é a massa da Lua. Concluímos que a força  $F$  à qual a Lua está submetida é dada por:

$$F = mg \frac{R^2}{r^2} \quad (\text{A.9})$$

**ETAPA 3:** A partir daqui faremos duas hipóteses importantes:

- 1:  $F$  deve obedecer à 3ª Lei de Newton. Analisando a equação (A.9) sob a ótica desse ponto, podemos escrever que  $g$  deve ser proporcional a  $M$

$$g \propto M.$$

- 2: Terra comporta-se como um ponto massivo. Com isso o termo  $R^2$  que diz respeito à geometria de Terra não deve aparecer no resultado final. Combinando isto com a hipótese anterior, temos que:

$$g \propto \frac{M}{R^2} \quad \rightarrow \quad g = G \frac{M}{R^2}, \quad (\text{A.10})$$

onde  $G$  é uma constante de proporcionalidade cuja dimensão é:

$$\frac{m}{s^2} = [G] \frac{kg}{m^2} \quad \rightarrow \quad [G] = \frac{m^3}{kg \cdot s^2}. \quad (\text{A.11})$$

Portanto:

$$F = m \frac{g M R^2}{R^2 r^2} = \frac{GMm}{r^2}. \quad (\text{A.12})$$

A atividade acima é um exemplo de como o professor pode trabalhar em sala de aula determinado tema dentro da gravitação. O professor pode fazer com que os alunos obtenham a Lei da gravitação por meio de um método heurístico simples, preparando um roteiro, de modo que as perguntas conduza-os para o objetivo.

Segue abaixo o roteiro exemplo:

- a) Calcule a aceleração da Lua em relação à Terra. O raio da órbita da Lua vale  $3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$  e o período de translação da Lua ao redor da Terra vale  $27,3 \text{ dias}$ .
- b) Calcule a razão  $\frac{a}{g}$ , onde  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

c) Newton sabia que o raio da órbita da Lua em relação à Terra é aproximadamente 60 vezes o raio da Terra, i.e.:  $r = 60R$ . Mostre que:

$$\frac{a}{g} \approx \frac{R^2}{r^2}. \quad (\text{A.13})$$

d) Mostre que a força que a Terra exerce sobre a Lua é dada, em módulo, por:

$$F = m g \frac{R^2}{r^2}, \quad (\text{A.14})$$

onde  $m$  é a massa da Lua.

e) Mostre que:

- $F$  deve obedecer à terceira Lei de Newton (ação e reação);
- A Terra deve ser tratada como um ponto, o que leva a relação de proporcionalidade abaixo:

$$g \propto \frac{M}{R^2}, \quad (\text{A.15})$$

onde  $M$  é a massa da Terra.

f) Após as conclusões até aqui, mostre que  $F \propto \frac{Mm}{r^2}$ .

Para transformar a proporcionalidade ( $\propto$ ) em igualdade (=) precisamos de uma constante que você pode indicar por  $G$ . Segue então que:

$$F = \frac{GMm}{r^2}. \quad (\text{A.16})$$

Calcule também qual a dimensão de  $G$ .

# Apêndice B

## Nibiru

O objetivo dessa atividade é mostrar como funciona a 3ª Lei de Kepler e escrevê-la sob a forma adimensional.

**EXERCÍCIO 1.** Enuncie a 3ª lei de Kepler.

### Resolução

A 3ª lei de Kepler nos mostra que a razão entre o quadrado do período orbital de uma planeta qualquer do Sistema Solar  $T^2$  e o cubo do semi-eixo maior de sua órbita  $a^3$  é constante, ou seja:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}, \quad (\text{B.1})$$

sendo essa constante igual a  $\frac{4\pi^2}{GM_{\odot}}$  e válida para qualquer planeta do Sistema Solar. Podemos, ainda, escrever a 3ª lei sob a forma adimensional, uma vez que podemos igualar a razão  $\frac{T^2}{a^3}$  de um planeta qualquer do Sistema Solar com a da Terra:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_{\oplus}^2}{a_{\oplus}^3}, \quad (\text{B.2})$$

ou ainda, reorganizando:

$$\frac{T^2}{\frac{T_{\oplus}^2}{a^3}} = 1. \quad (\text{B.3})$$

Fazendo  $T^2/T_{\oplus}^2 = p^2$  e  $a^3/a_{\oplus}^3 = q^3$ , a equação anterior pode ser reescrita sob uma forma mais simples:

$$\frac{p^2}{q^3} = 1. \quad (\text{B.4})$$

Essa razão, como veremos na tabela (B.2), é válida para todos os planetas do Sistema Solar.

**EXERCÍCIO 2.** *A energia mecânica do sistema Sol-planeta* Mostre que para uma órbita circular de raio  $R$ , a energia mecânica do sistema *Sol - planeta* é dada por

$$E = -\frac{GM_{\odot}m}{2R}. \quad (\text{B.5})$$

**Resolução:**

Primeiramente começaremos com a equação da energia mecânica:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_{\odot}m}{R}. \quad (\text{B.6})$$

Para órbitas circulares, teremos que a força gravitacional é justamente a resultante centrípeta do movimento. Logo:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GM_{\odot}m}{R^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM_{\odot}}{R}, \quad (\text{B.7})$$

onde  $v$  é o módulo da velocidade orbital do planeta nessas condições. Substituindo a equação (B.7) na (B.6) concluiremos que a energia mecânica do sistema Sol - planeta vale:

$$E = \frac{1}{2}m\frac{GM_{\odot}}{R} - \frac{GM_{\odot}m}{R} = -\frac{GM_{\odot}m}{2R}. \quad (\text{B.8})$$

Um cálculo da energia total que leva em conta o fato da órbita de um planeta em torno do Sol ser na verdade uma elipse nos mostra que o raio da órbita circular deve ser substituído pelo semi-eixo maior  $a$ , resultando em (2.77).

**EXERCÍCIO 3.** A Tabela B.1 mostra os valores para os semi-eixos maiores e períodos em anos terrestres dos oito planetas do Sistema Solar. A última linha diz respeito a um planeta hipotético que discutiremos no próximo exercício. **Complete a última coluna da tabela.**

Planeta	$a/a_{\oplus}$	$T/T_{\oplus}$	$p^2/q^3$
Mercúrio	0,387	0,241	?
Vênus	0,723	0,615	?
Terra	1,000	1,000	?
Marte	1,524	1,881	?
Júpiter	5,204	11,862	?
Saturno	9,582	29,457	?
Urano	19,201	84,011	?
Netuno	30,047	164,79	?
Nibiru	?	?	?

Tabela B.1: A terceira lei de Kepler e o Sistema Solar ([8]).

**Resolução:**

Para resolvermos esse exercício basta realizarmos a operação  $p^2/q^3$  para cada planeta. É de se esperar, conforme vimos no 1º exercício, que essa razão seja igual a 1 (ou bem próxima de 1) para qualquer planeta do Sistema Solar. Vejamos:

Planeta	$a/a_{\oplus}$	$T/T_{\oplus}$	$p^2/q^3$
Mercúrio	0,387	0,241	1,002
Vênus	0,723	0,615	1,000
Terra	1,000	1,000	1,000
Marte	1,524	1,881	0,999
Júpiter	5,204	11,862	0,998
Saturno	9,582	29,457	0,986
Urano	19,201	84,011	0,997
Netuno	30,047	164,79	1,001
Nibiru	?	?	?

Tabela B.2: Razão  $p^2/q^3$  dos planetas.

**EXERCÍCIO 4.** Use os dados da Tabela B.2 e faça um gráfico em escala log-log no qual no eixo horizontal são representados os valores de  $p^2$  e no eixo vertical os valores  $q^3$ . Identifique cada ponto do gráfico com o planeta correspondente.

**Resolução:**

Para identificarmos cada planeta, vamos acrescentar à tabela os valores de  $\log q^3$  e  $\log p^2$  correspondentes:

Planeta	$a/a_{\oplus}$	$T/T_{\oplus}$	$p^2/q^3$	$\log q^3$	$\log p^2$
Mercúrio	0,387	0,241	1,002	-1,237	-1,236
Vênus	0,723	0,615	1,000	-0,423	-0,422
Terra	1,000	1,000	1,000	0	0
Marte	1,524	1,881	0,999	0,549	0,549
Júpiter	5,204	11,862	0,998	2,149	2,148
Saturno	9,582	29,457	0,986	2,944	2,938
Urano	19,201	84,011	0,997	3,849	3,849
Netuno	30,047	164,79	1,001	4,433	4,434
Nibiru	?	?	?		

Tabela B.3:  $\log p^2$  e  $\log q^3$  dos planetas.

A partir dos valores acima, podemos plotar o gráfico  $\log q^3$  e  $\log p^2$ :

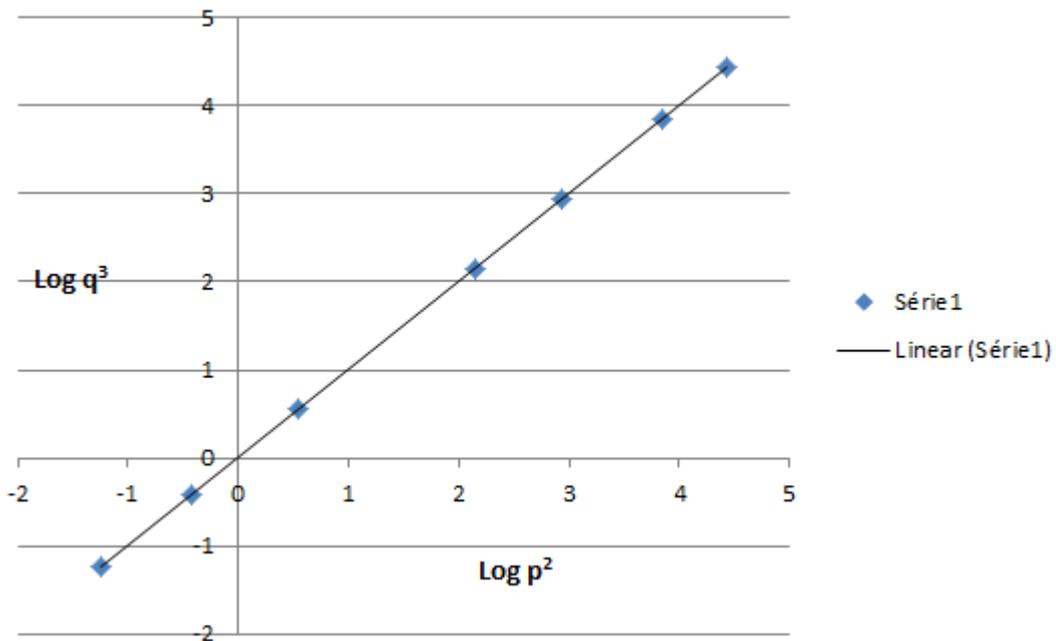


Figura B.1: Gráfico  $\log q^3$  x  $\log p^2$ .

Outro gráfico interessante para que os alunos construam é o

$\log q \times \log p$ . A partir desse gráfico, os alunos podem extrair a 3ª lei de Kepler. Veja o resultado na figura abaixo B.2:

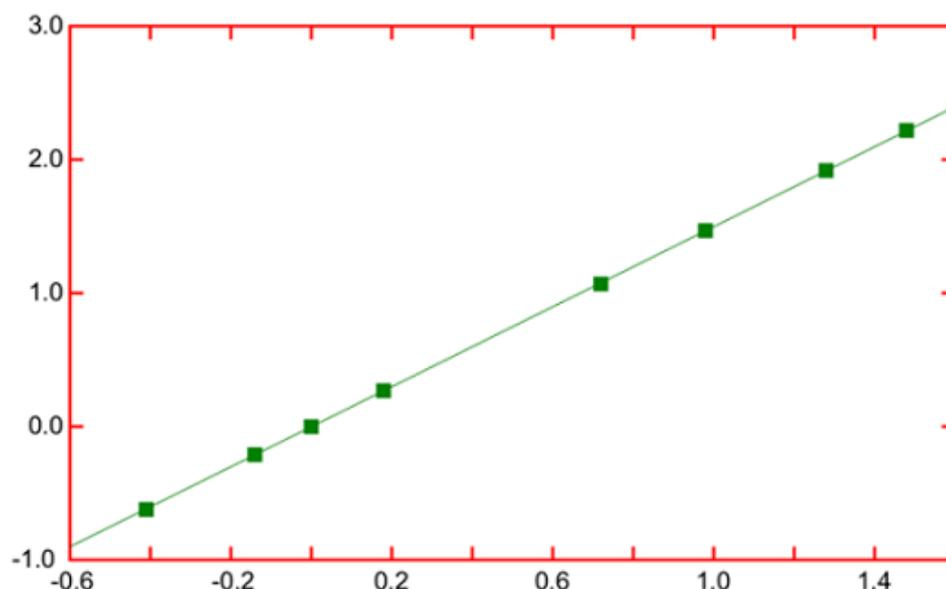


Figura B.2: Gráfico  $\log q \times \log p$  é uma reta cuja tangente vale  $\frac{3}{2}$ , comprovando a 3ª lei de Kepler  $\frac{q^3}{p^2} = \text{constante}$ .

**EXERCÍCIO 5.** *Nibiru ou o Planeta X* De acordo com uma tradução e interpretação peculiares do escritor e estudioso amador, *Zecharia Sitchin* (1920–2010), os sumérios reconheciam a existência de 12 planetas, os atuais oito planetas do Sistema Solar mais Plutão, o Sol, a Lua e um décimo segundo planeta chamado *Nibiru*. De acordo com Sitchin, o período orbital de Nibiru seria de 3 600 anos terrestres e sua massa igual a 10 vezes a massa da Terra. Ainda de acordo com Sitchin, a órbita elíptica de Nibiru seria muito alongada, isto é, sua excentricidade seria próxima da unidade. Os estudiosos profissionais da cultura sumeriana e da escrita cuneiforme descartam como errôneas as traduções e as interpretações de Sitchin, e os astrônomos descartam a existência de Nibiru. Suponhamos, porém, que Nibiru seja um planeta

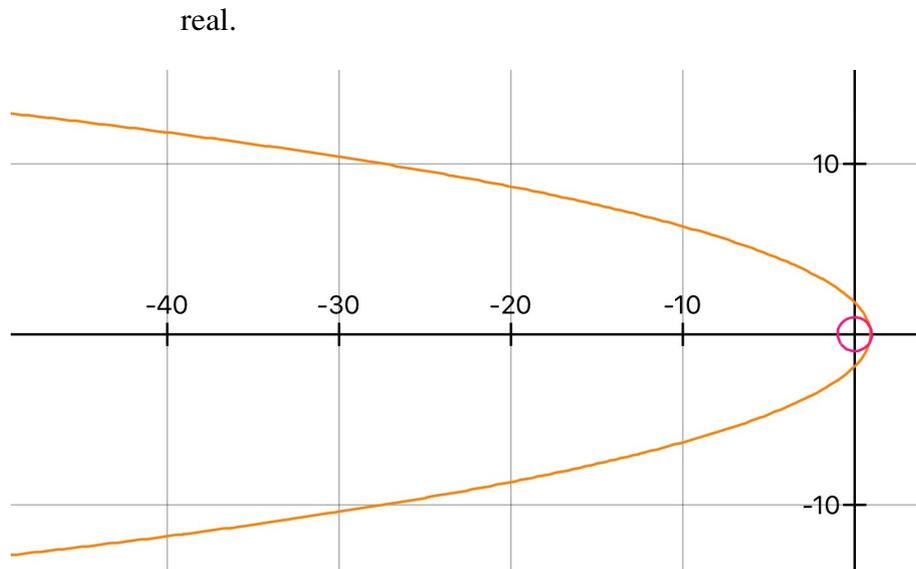


Figura B.3: A órbita excêntrica de Nibiru e órbita quase circular da Terra.

- (a) Calcule o semi-eixo maior da órbita de Nibiru.

**Resolução:**

Conforme vimos anteriormente, no 1º exercício, todos os planetas do Sistema Solar obedecem a relação (B.2), então:

$$\frac{a^3}{3600^2} = a_{\oplus}^3 \quad \Rightarrow \quad a = 3600^{(2/3)} a_{\oplus} \approx 234,892 a_{\oplus}. \quad (\text{B.9})$$

- (b) Observando a figura 5, podemos ver que a menor distância entre Nibiru e o Sol é da ordem de um semi-eixo terrestre. Calcule a excentricidade da órbita de Nibiru e compare-a com a excentricidade das órbitas da Terra e de Marte.

**Resolução:**

A resolução desse exercício permissa pelo cálculo geométrico da excentricidade  $\epsilon$  de uma elipse, conforme mostra a equação abaixo:

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{a_{\oplus}}{3600 a_{\oplus}^{4/3}}} \Rightarrow \epsilon = 0,999. \quad (\text{B.10})$$

Perceba, fazendo uso da figura (5), que o semi - eixo menor na órbita de Nibiru  $b$  é da ordem de semi - eixo maior da órbita da Terra  $a_{\oplus}$ . Assim, podemos considerar, por simplicidade, que  $b = a_{\oplus}$ .

Em uma elipse,  $0 < \epsilon < 1$ . Para  $\epsilon = 1$ , a trajetória é uma parábola. Assim, podemos dizer que sua órbita é quase parabólica.

- (c) Complete a última linha da Tabela 1.

**Resolução:**

Planeta	$a/a_{\oplus}$	$T/T_{\oplus}$	$p^2/q^3$
Mercúrio	0,387	0,241	1,002
Vênus	0,723	0,615	1,000
Terra	1,000	1,000	1,000
Marte	1,524	1,881	0,999
Júpiter	5,204	11,862	0,998
Saturno	9,582	29,457	0,986
Urano	19,201	84,011	0,997
Netuno	30,047	164,79	1,001
Nibiru	234,892	3600	1,000

Tabela B.4: Nibiru.

- (d) Mostre que a magnitude da velocidade de Nibiru em qualquer ponto da órbita é dada por

$$v = \sqrt{2GM_{\odot} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)}, \quad (\text{B.11})$$

onde  $v = \|\mathbf{v}\|$  e  $r$  é a distância radial entre o Sol e o planeta.

**Resolução:**

A energia cinética  $K$  é dada pela diferença entre as energias mecânica  $E$  e potencial  $U$ :

$$K = E - U. \quad (\text{B.12})$$

Fazendo uso da equação (2.77) e sabendo-se que:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{e} \quad U = -\frac{GM_{\odot}m}{r}, \quad (\text{B.13})$$

podemos reescrever a energia cinética como:

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GM_{\odot}m}{2a} - \left(-\frac{GM_{\odot}m}{r}\right), \quad (\text{B.14})$$

então:

$$v = \sqrt{2GM_{\odot} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}. \quad (\text{B.15})$$

- (e) Calcule  $v$  para a menor distância entre Nibiru e o Sol (o periastro).

**Resolução:**

Usando a relação do exercício anterior e substituindo  $r$  por  $a_{\oplus}$ , a menor distância entre Nibiru e o Sol, teremos que:

$$v = \sqrt{2GM_{\odot} \left(\frac{1}{a_{\oplus}} - \frac{1}{2a}\right)}, \quad (\text{B.16})$$

onde, conforme calculamos anteriormente, o semi-eixo maior da órbita de Nibiru ao redor do Sol é  $a = 3600^{2/3} a_{\oplus}$ . Assim:

$$v = \sqrt{2GM_{\odot} \left(\frac{1}{a_{\oplus}} - \frac{1}{2 \cdot 3600^{2/3} a_{\oplus}}\right)} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{a_{\oplus}} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 3600^{2/3}}\right)}, \quad (\text{B.17})$$

ou ainda:

$$v = 0,999 \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{a_{\oplus}}}. \quad (\text{B.18})$$

Sendo  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$ ,  $M = 1,989 \cdot 10^{30} Kg$  e  $a_{\oplus} = 1,521 \cdot 10^9 m$ , a velocidade de Nibiru no ponto quisto é:

$$v \approx 417 Km/s. \quad (\text{B.19})$$

Como trata-se do ponto mais próximo do Sol, essa é velocidade orbital máxima de Nibiru.



Figura B.4: Os sumérios, como quase todos os povos da antiguidade, reconheciam 7 planetas: Utu (o Sol), Nanna (a Lua), Enki (Mercúrio), Inanna (Vênus), Gugulanna (Marte), Enlil (Júpiter) e Ninurta (Saturno). Zecharia Sitchin afirma que a tableta representa os oito planetas do Sistema Solar mais Plutão, Sol e Lua. O 12º planeta, mostrado no detalhe, é Nibiru. Na verdade, de acordo com os estudiosos, o que está sendo representado é um grupo de estrelas. A estrela central não representa o Sol.

# Apêndice C

## A elipse

Como a elipse é a cônica mais importante para o problema de Kepler fazamos uma breve revisão da sua definição geométrica e das suas principais propriedades.

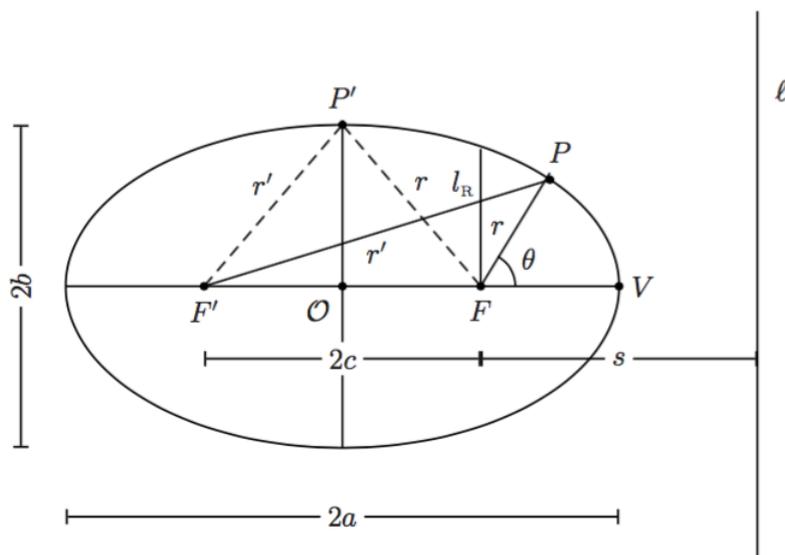


Figura C.1: A *elipse*.  $2a$  é a reta que passa pelo dois focos  $F$  e  $F'$ , chamada de eixo maior e, portanto,  $a$  é o semi-eixo maior;  $2b$  é o eixo menor, segmento de reta perpendicular ao eixo maior, dividindo-o ao meio e, assim,  $b$  é o semi-eixo menor;  $2c$  a distância entre eles;  $s$  é a distância entre o foco  $F$  e a reta diretriz  $\ell$ . O segmento de reta  $l_R$  perpendicular ao eixo maior que vai do foco  $F$  até um ponto da elipse é o *semilatus rectum*. A soma de qualquer ponto  $P$  da elipse até seus focos  $\overline{PF} + \overline{PF'} = \text{constante}$ .

Os elementos principais da geometria da elipse estão definidos na Figura C.1. Observe que a seguir faremos uso de duas definições equivalentes para a elipse.

DEFINIÇÃO 1: foco + diretriz:

$$|FP| = \epsilon |PL| \quad (\text{C.1})$$

Da Figura C.1 segue que

$$|FP| = r;$$

$$|P\ell| = s - r \cos \theta,$$

e da Definição 1:

$$r = \epsilon (s - r \cos \theta),$$

logo

$$r = \frac{\epsilon s}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad (\text{C.2})$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{s\epsilon}{(1 + \epsilon \cos \theta)}. \quad (\text{C.3})$$

Agora:

$$\frac{1}{r_{\text{mín}}} = \frac{1}{s\epsilon} (1 + \epsilon); \quad (\text{C.4})$$

e

$$\frac{1}{r_{\text{máx}}} = \frac{1}{s\epsilon} (1 - \epsilon); \quad (\text{C.5})$$

$$r_{\text{máx}} + r_{\text{mín}} = 2a. \quad (\text{C.6})$$

Segue que

$$\frac{r_{\text{máx}}}{r_{\text{mín}}} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}; \quad (\text{C.7})$$

e

$$\epsilon = \frac{r_{\text{máx}} - r_{\text{mín}}}{r_{\text{máx}} + r_{\text{mín}}}. \quad (\text{C.8})$$

Da Figura C.1 vemos que

$$c + r_{\text{mín}} = a; \quad (\text{C.9})$$

$$r_{\text{máx}} - c = a; \quad (\text{C.10})$$

Com estas duas equações podemos mostrar facilmente que

$$c = \frac{r_{\text{máx}} - r_{\text{mín}}}{2}; \quad (\text{C.11})$$

segue então que

$$\epsilon = \frac{r_{\text{máx}} - r_{\text{mín}}}{r_{\text{máx}} + r_{\text{mín}}} = \frac{2c}{2a}, \quad (\text{C.12})$$

ou

$$\epsilon = \frac{c}{a}. \quad (\text{C.13})$$

DEFINIÇÃO 2: dois focos:

$$|F'P| + |PF| = 2a. \quad (\text{C.14})$$

Da Figura C.1,

$$r' + r = 2a. \quad (\text{C.15})$$

Para o ponto  $P'$  da Figura C.1,  $r' = r$ , logo, como  $2r = 2a$ , segue que  $r = a$ , e

$$c^2 = r^2 - b^2 = a^2 - b^2; \quad (\text{C.16})$$

logo,

$$\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (\text{C.17})$$

EQUIVALÊNCIA:

$$r' + r = 2a; \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} r'^2 &= (2c + r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta \\ &= 4c^2 + 4cr \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &= 4c^2 + 4cr \cos \theta + r^2. \end{aligned}$$

$$r' = 2a - r; \quad (\text{C.19})$$

$$(2a - r)^2 = 4c^2 + 4cr \cos \theta + r^2. \quad (\text{C.20})$$

Efetuando e simplificando:

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (\text{C.21})$$

Segue que as duas definições são equivalentes se fizermos a identificação:

$$s\epsilon = a(1 - \epsilon^2). \quad (\text{C.22})$$

O SEMILATUS RECTUM DA ELIPSE:

Da equação (C.21) fazendo  $\theta = \pi/2$  temos:

$$r = l_R = a(1 - \epsilon^2);$$

logo, em termos do *semilatus rectum*

$$a = \frac{l_R}{1 - \epsilon^2}. \quad (\text{C.23})$$

Como  $\epsilon^2 = (a^2 - b^2)/b^2$ , segue que:

$$b = \frac{l_R}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}. \quad (\text{C.24})$$

Segue também que a equação da elipse em coordenadas plano-polares com origem no foco  $F$  também pode ser escrita como:

$$r = \frac{l_R}{1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (\text{C.25})$$

No problema de Kepler, o *semilatus rectum* é relacionado com o momento angular. Voltando à equação 2.57, podemos ver que:

$$\frac{L^2}{m\alpha} = l_R \quad (\text{C.26})$$

# Apêndice D

## O Sistema Solar

### D.1 Introdução

Com o objetivo de promover uma integração entre universidade, museu e sociedade, o Espaço Ciência Viva realiza atividades temáticas todo último sábado de cada mês. São os sábados da ciência. O público é livre, qualquer idade.

No sábado dia 28 de maio de 2016 realizei uma apresentação para o público, apresentando os planetas do Sistema Solar, a geometria de suas órbitas e um pouco sobre a Via Láctea e o nosso Universo. Esse apêndice é um resumo dessa atividade.

### D.2 Resumo da atividade

O planeta em que vivemos é o planeta Terra, que é apenas um dos 8 planetas do Sistema Solar. Na ordem (do centro de força para fora): Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.

Além desses planetas, existem 5 planetas anões no Sistema Solar. O principal deles é o Ceres. Os outros (incluindo o Plutão) possuem órbitas muito distantes do Sol. O Sedna, cuja órbita está representada na figura D.2 ainda não é considerado um planeta anão.

Primeiramente foi apresentado aos visitantes um slide (a apresentação foi em power point, conectando o laptop à televisão através de um cabo HDMI) com a ilustração abaixo, muito comum em livros didáticos. O tamanho dos planetas

e as suas respectivas distâncias em relação ao Sol estão completamente fora de escala. Mas essa ilustração facilita a visualização dos planetas e de suas órbitas.

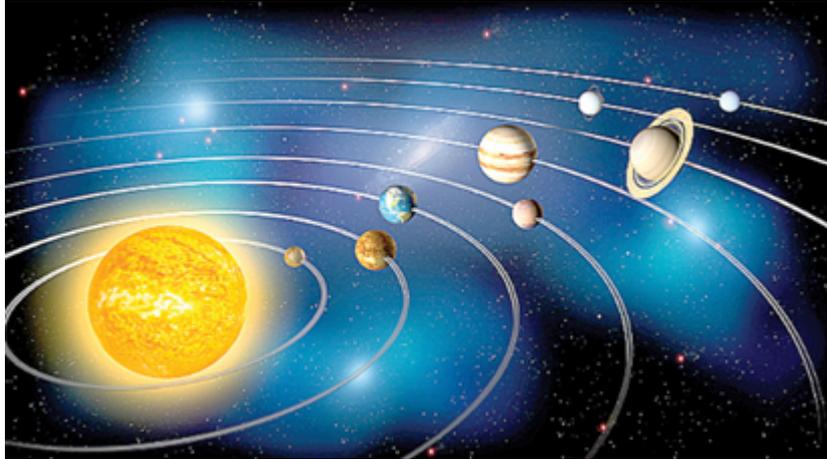


Figura D.1: Ilustração do Sistema Solar

No dois próximos slides foram apresentadas as órbitas dos planetas em escala. Com esse modelo fica impossível visualizar os planetas (o Sol não passa de um ponto), mas assim os visitantes podem ver a geometria de cada órbita e a distância dos planetas ao Sol.

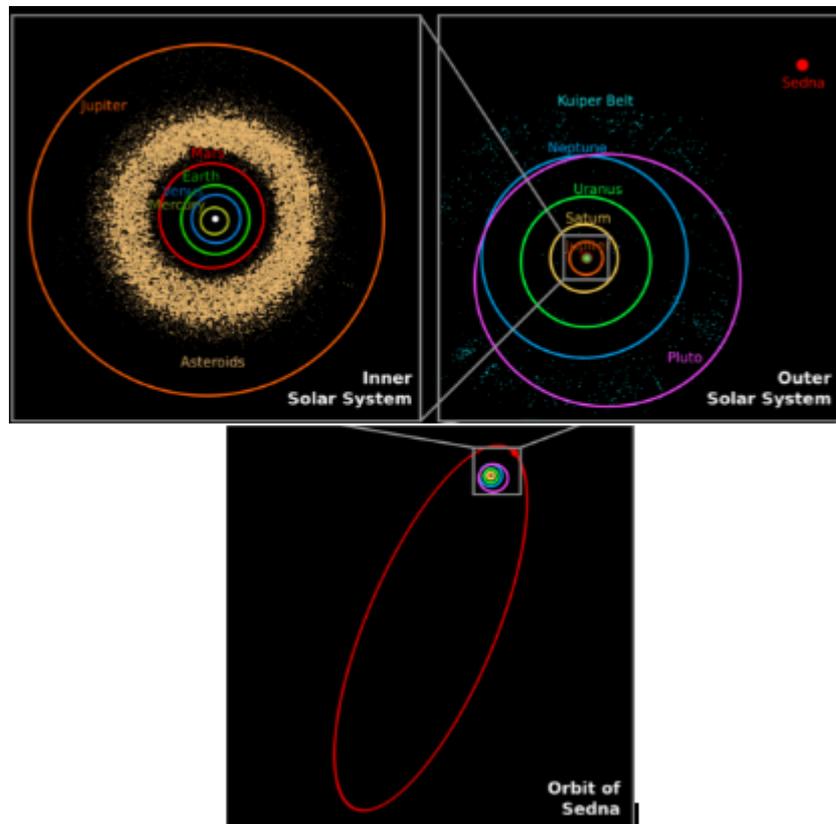


Figura D.2: órbitas dos Planetas do Sistema Solar

Antes de falarmos de movimento dos planetas temos que discutir a ideia de movimento. Através de perguntas ao público, a construção de um referencial foi surgindo. O movimento depende do referencial. Após chegarmos juntos a essa conclusão, podemos avançar para a próxima etapa: o movimento dos planetas.

Para um observador em repouso em relação ao Sol, a órbita dos planetas é quase um círculo. Quase. Para mostrar esse quase fiz uma simulação ??, usando o programa Modellus, da órbita de Mercúrio [28]. Podemos observar que a órbita não é, de fato, circular, mas sim uma elipse. O próximo slide mostrava a diferença entre um círculo e uma elipse. Muitos participantes ficaram surpresos (os pais, principalmente), pois achavam que as órbitas possuíam uma excentricidade maior (muito por causa de gravuras em livros).

Na verdade, a órbita de Mercúrio, mesmo sendo quase circular, é a que tem maior excentricidade. A Terra, por exemplo, possui uma órbita mais parecida com um

círculo que a de Mercúrio. Depois, usando novamente o Modellus, mostrei uma simulação da órbita de Mercúrio sofrendo uma perturbação central D.4. Como essa perturbação (Problema de Kepler Perturbado), a órbita passa a precessar [26]. "Mas que perturbação é essa?"Essa pergunta foi feita por um dos participantes. Só o fato de o Sol não ser perfeitamente esférico já é um motivo. A verdade é que as órbitas de todos os outros planetas apresentam precessão, não só pelo motivo anterior, mas também porque os planetas influenciam no movimento uns dos outros. Mas a simulação foi apenas adicionando uma força central na ordem de  $\mathbf{F} \propto -\frac{1}{r^4} \hat{\mathbf{r}}$ , referente à correção relativística à precessão da órbita de Mercúrio. O Sol é tão grande e massivo (em relação aos planetas do Sistema Solar) que ele deforma o tecido do espaço tempo ao seu redor. Esse efeito é sentido por todos os planetas e, principalmente, por Mercúrio, devido ao fato de ser o planeta mais próximo do Sol.

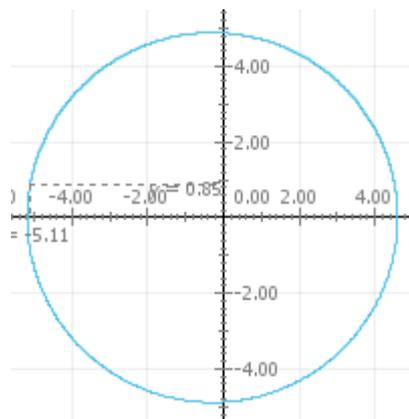


Figura D.3: Simulação de uma órbita de um planeta (Mercúrio, por exemplo) sob ação apenas da força gravitacional newtoniana exercida pela Sol, usando o programa *Modellus*

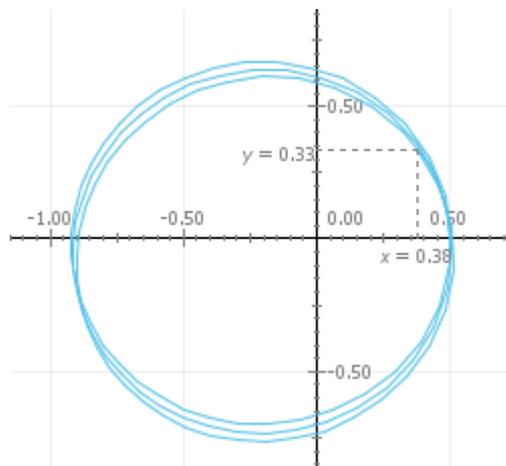


Figura D.4: Problema de Kepler Perturbado.

Além de 8 planetas e 5 planetas anões, existem centenas de satélites, milhares de cometas e centenas de milhares de asteróides no Sistema Solar. Quando um cometa, por exemplo, passa perto de um planeta (ou até mesmo do Sol), a sua trajetória passa a ser influenciada pelo campo gravitacional local. O mesmo acontece com a Terra e o Sol, por exemplo. O Sol é tão pesado (sua massa é aproximadamente 300 mil vezes a da Terra) que atrai outros corpos que estão ao seu redor. A Lua gira ao redor da Terra pelo mesmo motivo. Assim, mostrei a órbita do dois cometas: Eleniin e Jacques (o 1º foi descoberto pelo astrônomo amador russo Elenin [29] e o 2º, por um astrônomo amador Jacques, no Brasil, Minas Gerais [30]).

Foi mostrado o vídeo de uma gravação de um simulador de órbita disponibilizado no site da NASA [31]. Este simulador permite, entre outras coisas, ver a trajetória de cometas no Sistema Solar. Nesse vídeo podemos ver o dia em que esse cometa teve aproximação máxima em relação à Terra. Essa cometa tem uma trajetória hiperbólica, como mostra a figura D.5. Já o cometa Jacques possui uma trajetória parabólica, apresentada na figura D.6.

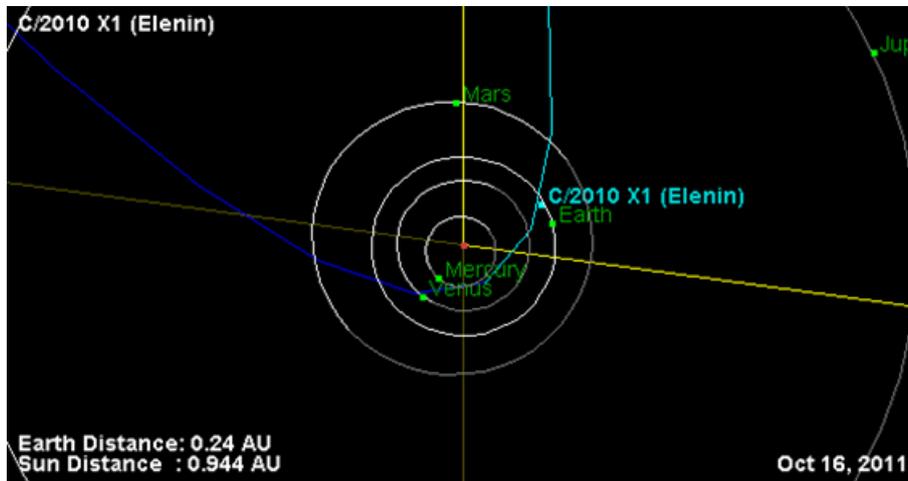


Figura D.5: Cometa Elenin

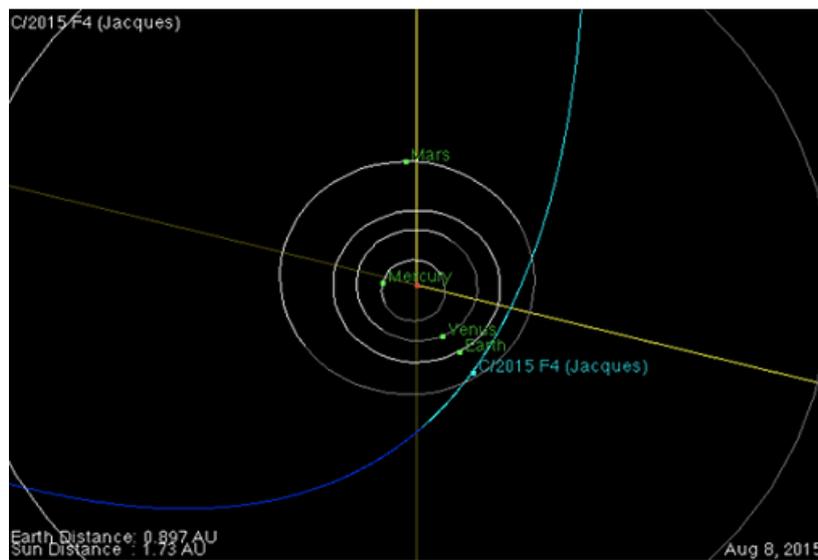


Figura D.6: Cometa Jacques

Para que o participante veja com maior clareza a diferença entre as geometrias de cada órbita, foi mostrado a figura D.7 [5]:

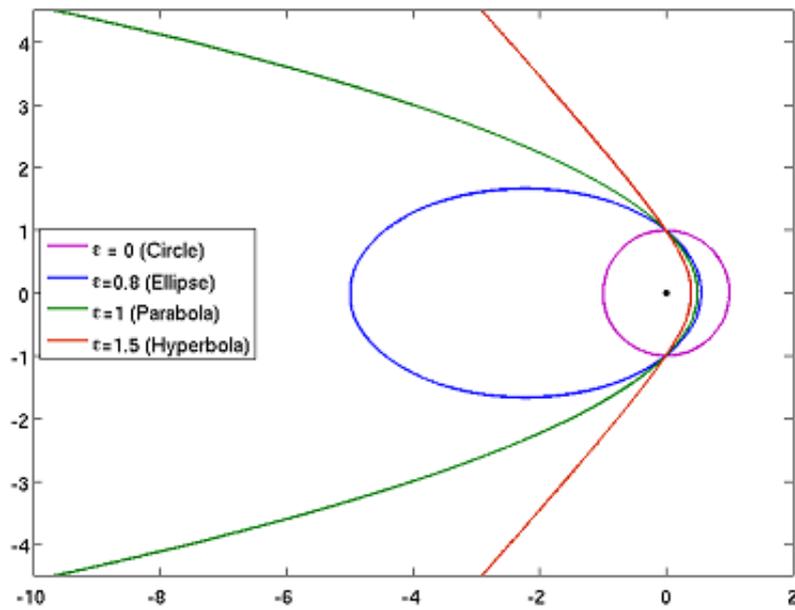


Figura D.7: Geometria das possíveis trajetórias

O que vai determinar como vai ser a trajetória do corpo será a sua energia e o seu momento angular [14] [32], mas não há a necessidade de entrarmos nesse quesito. O objetivo da apresentação é apenas fazer com que os participantes possam saber um pouco mais sobre o Sistema Solar e, em especial, sobre as órbitas de planetas e outros corpos massivos. Vimos os movimentos dos planetas em relação ao Sol, mas será que o Sol não poderia estar orbitando em relação a algum referencial? O Sistema Solar é apenas um dos vários sistemas planetários que existem na nossa galáxia, a Via Láctea:

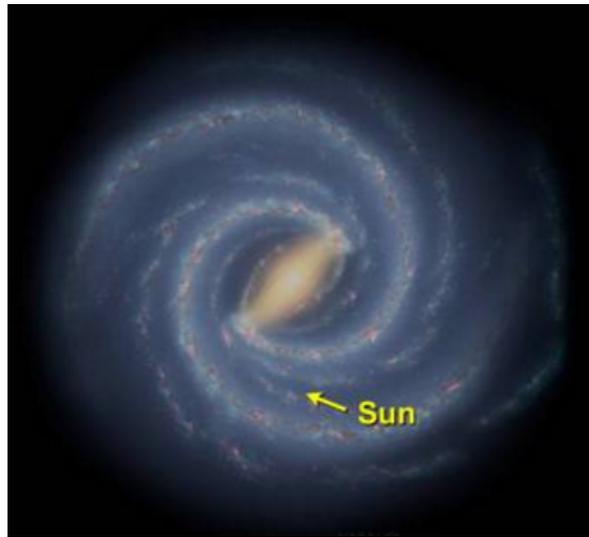


Figura D.8: Via Láctea

Voltando à ideia de atração, o nosso sistema sofre atração por algo extremamente pesado que existe no centro da nossa galáxia, um gigantesco Buraco Negro, com massa milhões de vezes maior que a do Sol. Sendo assim, o Sol está orbitando em relação ao centro da Via Láctea e, então, para esse referencial, os planetas do Sistema Solar possuem uma trajetória helicoidal (ou algo muito próximo a isso).

E as distâncias? Qual a distância da Terra ao Sol? Do Sol ao centro da Via Láctea? Exploramos toda essa parte também, começando com o nosso cotidiano. Usamos centímetros para medirmos o tamanho de uma caneta ou de um copo, por exemplo. Para medirmos o nosso tamanho, usamos metro. Distância de uma passeio, quilômetros. E distância entre planetas, faz sentido usarmos quilômetros? Essa pergunta foi feita para crianças para todos, inclusive para crianças de 7,8 anos de idade e grande parte dos participantes respondeu que não. Bom, então temos que inventar uma nova unidade de medida.

Dentro do Sistema Solar, usamos a distância Terra-Sol como referência: 1 UA. A distância de Mercúrio ao Sol, por exemplo, vale aproximadamente 0,4 UA. Mas, como vimos pela figura acima, a distância do centro da galáxia até o Sol é muito maior que a da Terra ao Sol. De fato, nem conseguimos ver o Sol na escala. As-

sim, para grandes distâncias astronômicas, vamos usar ano-luz como media. A distância que a luz percorre em um ano, que equivale a quase 10 trilhões de km !! (Apesar de a unidade mais usada ser parsec e seus múltiplos, não fiz uso da mesma, pois, falar de arco de segundo para justificar essa relação estaria fora do propósito dessa apresentação). O uso da unidade ano-luz não nos causou prejuízo.

A nossa galáxia tem um diâmetro de 100 mil anos-luz e estamos a aproximadamente 25 mil anos-luz de seu centro [33]. Essa distância é tão grande que é difícil de assimilarmos. Bom, como se isso não fosse suficiente para percebermos o quão pequenos somos em meio a toda a imensidão do Universo, foi apresentado um vídeo [34] no slide seguinte mostrando que não existe apenas a nossa galáxia, mas inúmeras outras e o que somos em relação a todo o Universo observável. A figura abaixo nos ajuda com esse "problema de escala" [35]:

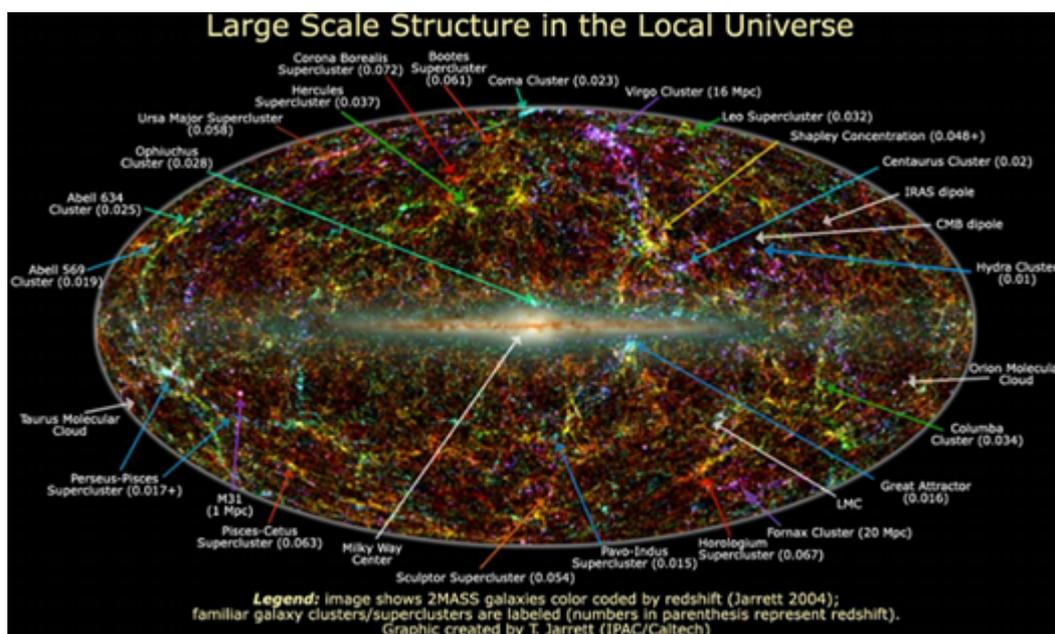


Figura D.9: Universo observável.

O objetivo da apresentação (total de 4 apresentações de 30 minutos cada) foi fazer com que os participantes vejam como são as órbitas dos planetas do Sistema Solar (em especial a de Mercúrio) e mostrar o tamanho da nossa galáxia e do Universo,

fazendo uso de unidades de medidas que não estão no nosso cotidiano.

# Apêndice E

## Órbitas planetárias

### E.1 Introdução

Na semana do dia 30 de maio até o dia 03 de junho de 2016 ocorreu a I Semana de Integração do IFFluminense campus Santo Antônio de Pádua, que tem como objetivo aproximar o IFFluminense da comunidade local/regional e promover a valorização dos saberes produzidos nas instituições de ensino, grupos culturais e demais instituições públicas e privadas da região, estabelecendo diálogos entre os diversos setores da sociedade envolvidos na produção e difusão de conhecimentos sobre o Noroeste Fluminense.

Durante o período de 20 de abril a 12 de maio qualquer servidor poderia submeter trabalhos que propusessem a realização de palestras, oficinas, minicursos e atividades esportivas que apresentassem cunho pedagógico.

Esse apêndice é um resumo da atividade que fiz com os alunos nessa I Semana de Integração.

### E.2 Resumo da atividade

Os alunos que se inscreveram para assistir a apresentação são do 1º e do 2º anos do Ensino Médio Integrado ao Técnico, totalizando 30 alunos, a lotação máxima da atividade.

Como temos um clube de Astronomia no campus com vários alunos participantes, o tema agradou bastante, com grande procura.

Foi uma apresentação em Power Point onde, a qualquer momento, alunos podiam fazer perguntas, para ser o mais transparente possível. A participação dos alunos foi bastante ativa, interessados, questionando o tempo todo.

Primeiramente apresentei o conceito de força central aos alunos e, posteriormente, usei a força gravitacional como exemplo e, a partir daí, foram mostradas as possíveis órbitas, dependendo da energia (ou da excentricidade) da partícula.

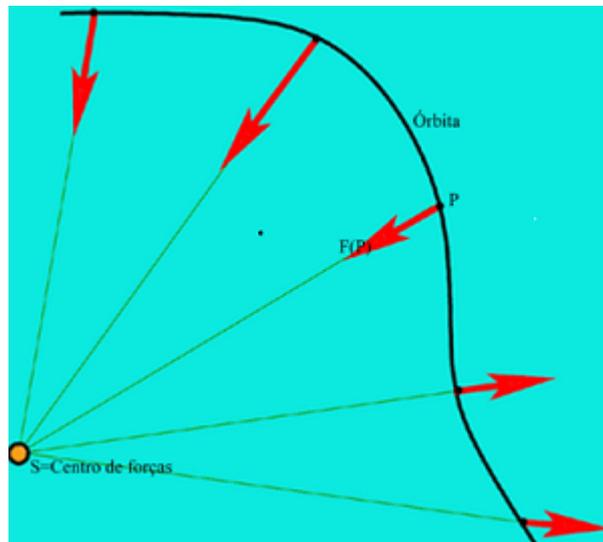


Figura E.1: Força central

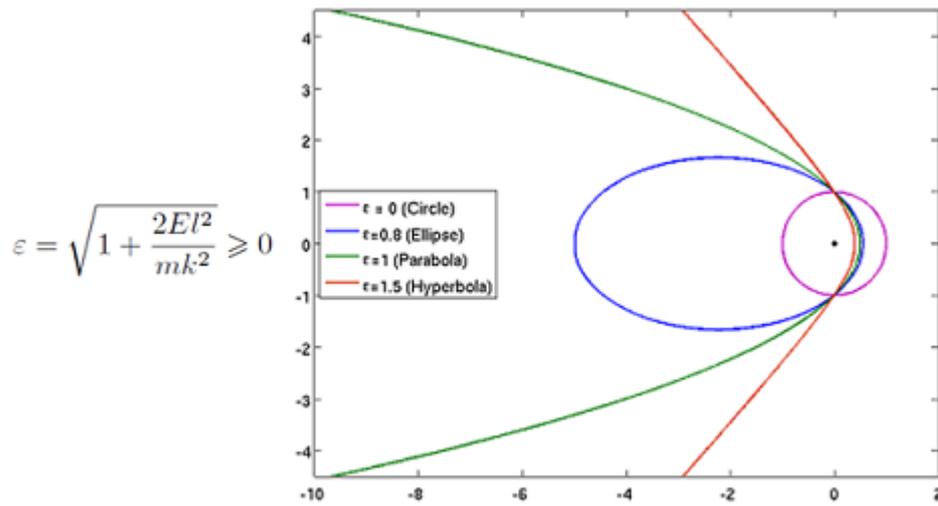


Figura E.2: Trajetórias

Após essa primeira parte da apresentação, mostrei alguns vídeos e fotos [31] de algumas órbitas de cometas, como o Jacques, Honda e o Ellenin. O vídeo mostra a distância do cometa em relação a Terra e em relação ao Sol, basta escolher a data da filmagem. Para exemplificar, a figura E.3 representa uma imagem do vídeo. Do lado esquerdo inferior a distância e, do lado direito, a data:

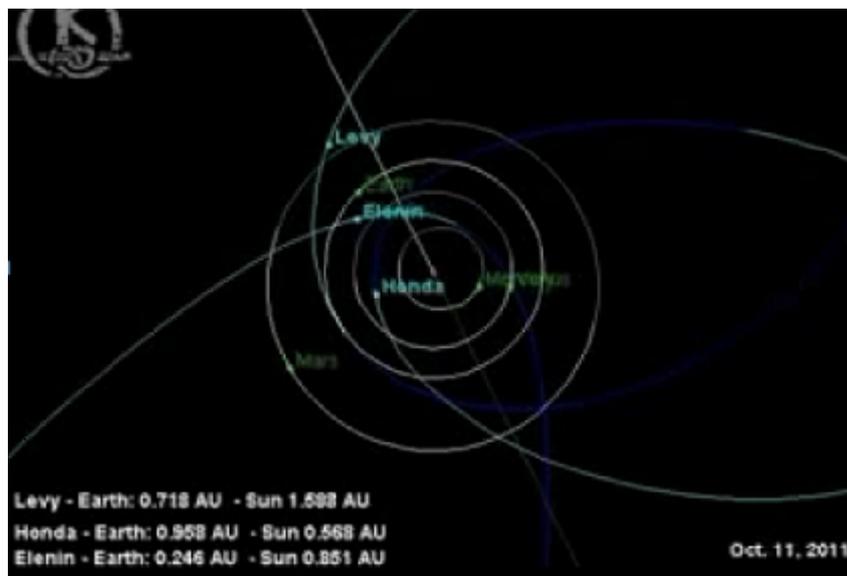


Figura E.3: Trajetórias de cometas

A próxima etapa foi mostrar forças do tipo  $-k/r^2$  e  $-kr$  podem gerar órbitas fechadas e limitadas - Teorema de Bertrand [14]:

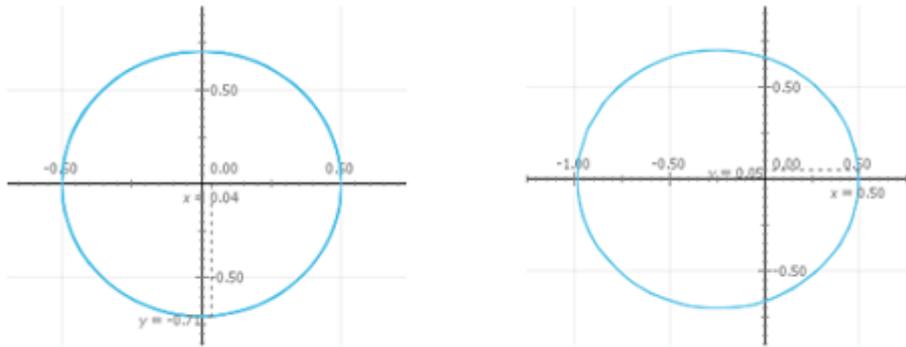


Figura E.4: Órbitas Fechadas e Limitadas

A última parte da apresentação foi introduzir perturbações centrais - Problema de Kepler Perturbado - fazendo com que as órbitas sejam mais fechadas, havendo precessão. Para isso, fiz uso do Modellus, facilitando a visualização do problema pelos alunos, mostrando com mais clareza o que é uma precessão em uma órbita. A atividade durou cerca de 50 minutos e o objetivo foi apresentar precessão de órbitas e mais um uso do Modellus, programa que eles já usam durante o ano letivo em algumas aulas de Física.

A atividade serviu também como divulgação, atraindo mais alunos para o projeto de extensão que eu coordenei, o *Cosmos*, um dos ramos do clube de Astronomia do *Campus*.

# Referências Bibliográficas

- [1] CUNHA, Ricardo F. F.; TORT, A. C . Plausibility arguments and universal gravitation. *Physics Education*, v. 52, n. 3, p. 035001 (6 pp), 2017.
- [2] NUSSENZVEIG, H. Moysés, *Curso de Física Básica*, vol.1, 4ª edição rev., São Paulo: Edgard Blücher, 2002;
- [3] <http://www.ghtc.usp.br/Biografias/Newton/Newtonopticks.htm>;
- [4] MORIN, D. *Introduction to Classical Mechanics*. CUP, Cambridge, 2007.
- [5] MARION, J. B.; THORNTON, S. T. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5th edition. Belmont: Brooks/Cole, 2004.
- [6] UZÊDA, Diego Dias. *Tópicos em Física Clássica*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2011. 181p. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- [7] [astro.if.ufrgrs.br/ssolar.htm](http://astro.if.ufrgrs.br/ssolar.htm).
- [8] KITTEL, C.; KNIGHT, W. D.; RUDERMAN, M. A. *Berkeley Physics Course, vol. 1 Mechanics*, 2nd edition. McGraw-Hill, NY, 1965.
- [9] [http://www.math.toronto.edu/~colliand/426\\_03/Papers03/CPollock.pdf](http://www.math.toronto.edu/~colliand/426_03/Papers03/CPollock.pdf).
- [10] RICE, Michael P.; RUSH, William F. Nonrelativistic contribution to Mercury's perihelion precession. *Am. J. Phys.*, v. 47, n. 6, p. 531 - 534 (1979).
- [11] SANTOS, Farina C.; SOARES, V.; TORT, A. C. Uma tradução da demonstração original do teorema de Bertrand. IF/UFRJ (2010).
- [12] FARINA, Carlos; TORT, A. C. A Simple Way of Evaluating the Speed of Precession of Orbits. *Am. J. Phys.*, v. 56, n. 8, p.761 - 763 (1988).

- 
- [13] D'ELISEO, Maurizio M. The First-order orbital equation. *Am. J. Phys.*, v. 75, n. 4, 352 - 355, 2007.
- [14] GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*, 2nd edition. Addison-wesley (1980).
- [15] BAUM, R.; SHEEHAN, E. *In Search of Planet Vulcan: The Ghost in Newton's Clockwork Universe*. Plenum, NY (1997).
- [16] RYDIN, Roger A. *The Theory of Mercury's Anomalous Precession*. College Park, MD (2011).
- [17] GREENBERG, David F. Accidental degeneracy. *Am. J. Phys.*, v. 34, n. 12, p. 1101 - 1109 (1966).
- [18] SILVARDIÈRE, J. Precession of Elliptical Orbits. *Am. J. Phys.*, v. 52, n. 10, p. 909-912 (1984).
- [19] MCDONALD, K. T.; FARINA, C.; TORT, A. C. Right and wrong use of the Lenz vector for non-Newtonian potentials. *Am. J. Phys.*, v. 58, n. 6, p. 540-542 (1990).
- [20] GOLDSTEIN, H. More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector. *Am. J. Phys.*, v. 44, n. 11, p. 1123 - 1124 (1976).
- [21] STEWART, M. G. Precession of the perihelion of Mercury's orbit. *Am. J. Phys.*, v. 73, n.8, p. 730 - 734 (2005).
- [22] DAVIES, B. Elementary theory of perihelion precession. *Am. J. Phys.*, v. 51, n. 10, p. 909 - 911 (1983).
- [23] GARAVAGLIA, T. The Runge - Lenz vector and Einstein perihelion precession. *Am. J. Phys.*, v. 55, n. 2, p. 164 - 165 (1987).
- [24] TORT, A. C.; FARINA, C. Equivalence of different methods for evaluating the speed of precession of orbits. *IF/UFRJ* (1989).
- [25] CORNBLEET, S. Elementary derivation of the advance of the perihelion of a planetary orbit. *Am. J. Phys.*, v. 61, n. 7, p. 650-651 (1993).
- [26] FARINA, C.; MACHADO, M. The Rutherford cross section and Perihelion Shift of Mercury with the Runge-Lenz Vector. *Am. J. Phys.*, v. 55, n. 10, p. 921 - 923 (1987).
- [27] FRENCH, A. P. *Newtonian Mechanics*. W. W. Norton, NY (1971).

- [28] FEYNMAN, Richard P. *Lições de Física de Feynman*, edição definitiva / Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands; tradução Adriana Válio Roque da Silva ... [et al.].- Porto Alegre: Bookman (2008).
- [29] <http://www.jpl.nasa.gov/news/news.php?release=2011-135>.
- [30] [http://www.observatorio-phoenix.org/t\\_proj/Sonear/sonear.htm](http://www.observatorio-phoenix.org/t_proj/Sonear/sonear.htm).
- [31] <http://www.jpl.nasa.gov>.
- [32] SYMON, Keith R. *Mechanics*, 3rd edition. Addison-Wesley (1971).
- [33] MAJAESS, D. *Concerning the Distance to the Center of the Milky Way and Its Structure*. Acta A. 60 (2010);
- [34] <https://www.youtube.com/watch?v=HiN6Ag5-DrU>;
- [35] STORCHI - BERGMANN, Thaisa. *O tamanho, idade e conteúdo do Universo*. IF/UFRGS.