



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

A lei de Gauss e a Gravitação Universal

Leandro Batista Germano

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Alexandre.C. Tort

Rio de Janeiro
Dezembro de 2017

A lei de Gauss e a Gravitação Universal

Leandro Batista Germano

Orientador: Alexandre.C. Tort

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

Prof. Alexandre C. Tort (Presidente)

Prof. José Abdalla Helayël Neto

Prof. Carlos Augusto Domingues Zarro

Prof. Felipe Siqueira de Souza Rosa

Rio de Janeiro
Dezembro de 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

G1471 Germano, Leandro Batista

A lei de Gauss e a Gravitação Universal / Leandro Batista Germano. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2017.

viii, 79 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Alexandre.C. Tort.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2017.

Referências Bibliográficas: f. 77-79.

1. Ensino de Física. 2. Gravitação Universal. 3. lei de Gauss. I. Tort, Alexandre C. . II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. A lei de Gauss e a Gravitação Universal.

Dedico essa dissertação a minha mãe Augusta Batista Germano, ao meu pai Wilson Rodrigues Germano, pelo amor, educação e ensinamentos transmitidos.

A minha esposa Michele Germano, que sempre acreditou no meu sonho, e não mediu esforços para me ajudar e ao meu filho Gabriel, pois ele foi o melhor incentivo que Deus poderia ter me concebido para concluir e continuar essa caminhada.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, que se dedicaram para investir em meus estudos e acreditarem no meu sonho.

Agradeço a todos os professores que me ajudaram ao longo de minha trajetória acadêmica.

Agradeço ao prof. Alexandre Carlos Tort, que além de orientador deste trabalho foi meu professor durante o mestrado. Agradeço por sua dedicação e por me mostrar, que mesmo com todos os obstáculos que podem aparecer nas nossas vidas, somos capazes de ultrapassá-los com muita confiança, companheirismo e dedicação.

Agradeço aos alunos, do Ciep 201 Aarão Steinbruch, que se dispuseram em assistir as aulas sobre a lei de Gauss e a Gravitação Universal, pela receptividade e disponibilidade.

RESUMO

A lei de Gauss e a Gravitação Universal

Leandro Batista Germano

Orientador: Alexandre.C. Tort

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Na maior parte dos textos de ensino médio, a lei da gravitação universal é apresentada de forma sucinta e pouco se discute sobre os modos de torná-la plausível aos estudantes. Duas perguntas podem ser feitas: Por que a força gravitacional entre dois corpos depende do produto das suas massas e do inverso do quadrado da distância entre eles? Por que no sistema Sol-Terra, Terra-Lua e similares, os corpos podem ser tratados como massas puntiformes? A primeira pergunta pode ser respondida com argumentos de plausibilidade. A segunda, fazendo uso das técnicas do cálculo. Entretanto, pensando no Ensino Médio a resposta à segunda pergunta é inviável, utilizando as técnicas de cálculo. Aqui propomos o uso da lei de Gauss do eletromagnetismo adaptada à gravitação universal, reformulada para o ensino médio em uma analogia com a mecânica dos fluídos, como um instrumento para justificar o tratamento de corpos extensos como pontos materiais nos casos em que a simetria esférica está presente. Alguns exemplos, o campo gravitacional no interior da Terra, o modelo da Terra oca de Halley, curvas de rotação de galáxias podem ser discutidos. Um material instrucional foi elaborado, onde utilizando uma sequência didática com um questionário pré e pós-aula, e uma aula aplicamos o tema deste trabalho em sala de aula.

Palavras chave: Ensino de Física, Gravitação Universal, lei de Gauss.

Rio de Janeiro
Dezembro de 2017

ABSTRACT

Gauss' law and universal gravitation

Leandro Batista Germano

Supervisor: Alexandre.C. Tort

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

Most of the textbooks written for high school students with a few exceptions the law of universal gravitation is presented in brief way. Consequently nothing is done to introduce it in a more convincing way. Two, questions, can be asked: why the mathematical form of the law is the way it is? Why when we deal with systems like the Sun and the Earth or the Earth and the Moon the masses are treated like points? The first question can be answered with plausibility arguments, the second one with calculus techniques. These mathematical tools are out of reach of the typical high school student e we must find a way to answer the question in another way. Here we propose to adapt Gauss' law of electromagnetic theory to the gravitational field by reformulating it making use of analogies with fluid mechanics. In this way, at least in those cases of high symmetry, we will have of way justifying the treatment of extended bodies as point masses. Moreover, we will be able to discuss several examples normally not considered at this level such as the gravitational field in the interior of the Earth or the rotation curves of the galaxies or Halley's hollow Earth model.

Keywords: Physics education, Universal Gravitation, Gauss' law.

Rio de Janeiro
Dezembro de 2017

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Campo produzido por um anel	2
1.2	Campo produzido por um disco	4
1.3	Campo gravitacional de uma casca esférica homogênea	7
1.4	Campo gravitacional de uma esfera homogênea	11
2	A lei de Gauss e o campo gravitacional	14
2.1	As equações diferenciais do campo gravitacional e os teoremas de Stokes e Gauss	15
2.2	Recalculando o campo gravitacional de cascas e esferas homogêneas com a lei de Gauss	18
2.3	Campo gravitacional de uma casca esférica homogênea	20
2.4	Campo gravitacional de uma esfera homogênea	22
3	A lei de Gauss no Ensino Médio	26
3.1	A lei de Gauss	28
3.2	Mais exemplos	33
4	Aplicação no Ensino Médio	49
5	Conclusões	55
A	A lei de Gauss e a Gravitação Universal: questionários e aula	58
A.1	Apresentação	58
A.2	Questionário Pré aula	60
A.3	Questionário Pós aula	62
A.4	Aula: A lei de Gauss e a Gravitação Universal	63
	Referências bibliográficas	77

Capítulo 1

Introdução

Na maior parte dos textos de ensino médio, com raras exceções, a lei da gravitação universal é apresentada de forma sucinta e conseqüentemente pouco se discute sobre os modos de torná-la plausível aos estudantes, ver por exemplo [1–6] . Duas perguntas podem ser feitas: Por que a força gravitacional entre dois corpos depende do produto das suas massas e do inverso do quadrado da distância entre eles? Por que no sistema Sol-Terra, Terra-Lua e similares, os corpos podem ser tratados como massas puntiformes? A primeira pergunta pode ser respondida com argumentos de plausibilidade. A segunda, fazendo uso das técnicas do cálculo. Entretanto, pensando no Ensino Médio a resposta à segunda pergunta é inviável e devemos encontrar outra modo de respondê-la. Aqui propomos o uso da lei de Gauss do eletromagnetismo adaptada à gravitação universal, reformulada para o ensino médio em uma analogia com a mecânica dos fluídos, como um instrumento para justificar o tratamento de corpos extensos como pontos materiais nos casos em que a simetria esférica está presente. Vários exemplos, o campo gravitacional no interior da Terra, o modelo da Terra oca de Halley, curvas de rotação de galáxias, e outros podem então ser discutidos.

Neste capítulo, voltado principalmente para professores do Ensino Médio, faremos uma revisão do cálculo do campo gravitacional por meio das técnicas do cálculo integral e diferencial. Iniciaremos esta revisão com o cálculo do campo gerado por corpos extenso como, por exemplo uma casca

esférica, com de distribuição de massa uniforme ou esfericamente simétrica, para pontos externos e internos à casca e o cálculo do campo gravitacional gerado por uma esfera maciça, com distribuição de massa uniforme ou esfericamente simétrica, também para pontos externos e internos à distribuição.

Como ponto de partida para esses cálculos, calcularemos o campo gravitacional criado por dois outros corpos extenso: o campo gerado por um anel de massa M uniformemente distribuída em um ponto sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o anel e que passa por seu centro geométrico, ver Figura 1.1. Em seguida calcularemos o campo gerado por um disco de massa uniformemente distribuída, também sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o anel que passa pelo seu centro geométrico, ver Figura 1.2. O cálculo do campo do anel, será por sua vez, o ponto de partida para o cálculo do campo gerado pela casca esférica e o campo gerado por um disco, será o ponto de partida para o cálculo do campo gerado por uma esfera maciça, como veremos, posteriormente.

1.1 Campo produzido por um anel

Considere a Figura 1.1, onde se mostra um anel de raio a e massa M , uniformemente distribuída, em um ponto sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o anel e passa por seu centro geométrico.

Qual será o campo gravitacional produzido por esse anel no um ponto P a uma distância z do anel?

Para realizar esse cálculo dividiremos o anel em elementos infinitesimais de massa dM e calcularemos usando o princípio da superposição a contribuição de cada elemento no ponto z e assim, somando as contribuições de todos esses elementos teremos o campo criado pelo anel, no ponto P . Para essa determinação teremos de calcular vetorialmente as contribuições de todos os elementos dM do anel. Por simetria, teremos as contribuições das componentes de \mathbf{g} perpendiculares o eixo z cancelando-se mutuamente assim a única contribuição do campo gravitacional, não - nula, no ponto em questão estará atuando na direção do vetor unitário \hat{e}_z , em outras palavras

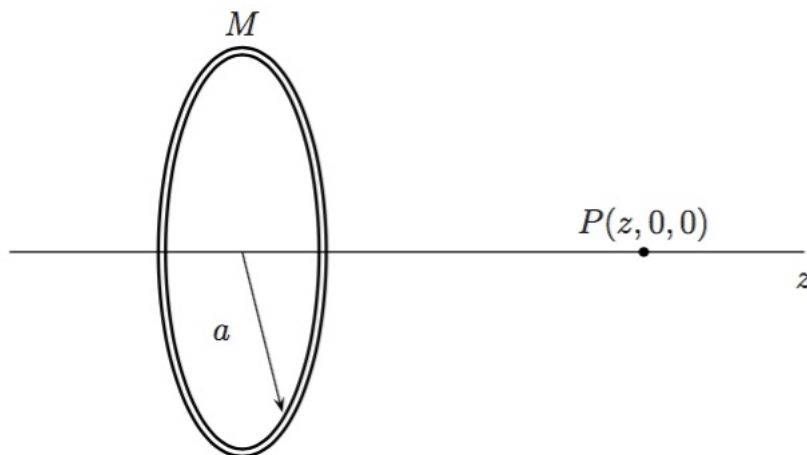


Figura 1.1: anel homogêneo de massa M .

$$\mathbf{g}(z) = g(z)\hat{e}_z.$$

Como o campo gravitacional é atrativo segue que $\mathbf{g}_z(z) < 0$ para $z > 0$ e $\mathbf{g}_z(z) > 0$, para $z < 0$. Deste modo, observando que a componente do campo na direção do eixo, perpendicular ao plano que contém o anel, pode ser escrita como,

$$dg_z = -G \frac{dM}{r^2} \text{sen } \theta.$$

Substituindo o termo, $\text{sen } \theta = \frac{z}{r}$ na equação acima e com $r = \sqrt{(a^2 + z^2)}$, vemos que a contribuição infinitesimal desta componente

$$dg_z = -G \frac{dMz}{r^3} = -G \frac{dMz}{\sqrt{(a^2 + z^2)^3}}.$$

Somando essas contribuições ao longo do anel de massa uniformemente distribuída e sabendo que $dM = \lambda dl$, onde λ é a densidade linear de massa do anel que é uma constante, teremos:

$$g(z) = \int dg_z = -G \frac{z\lambda}{\sqrt{(a^2 + z^2)^3}} \int_0^l dl = \frac{z\lambda(2\pi a)}{\sqrt{(a^2 + z^2)^3}},$$

já que a integral é igual ao comprimento da circunferência do anel e como produto $\lambda(2\pi a)$ é numericamente igual a massa do anel, temos,

$$g(z) = -\frac{GMz}{\sqrt{(a^2 + z^2)^3}}. \quad (1.1)$$

Como o campo produzido pelo anel neste exemplo depende apenas da coordenada z , teremos o campo igual a zero quando esta coordenada for nula, isto é: no centro do anel. E no caso em que z tender ao infinito, ou seja, $z \gg a$, logo a se torna desprezível no denominador e teremos como resultado:

$$g(z) \approx -G\frac{M}{z^2}. \quad (1.2)$$

Esse resultado, nos mostra que para pontos muito afastados do anel, o mesmo se comporta como um ponto material.

1.2 Campo produzido por um disco

A Figura 1.2, mostra um disco, de raio a e massa M de densidade superficial massa σ uniforme e um ponto, sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o anel e passa por seu centro geométrico. Qual seria o campo gravitacional produzido por esse disco em um ponto P , a uma distância z do centro disco? Para obter a solução, dividiremos esse disco em anéis infinitesimais concêntricos e posteriormente calcularemos o campo gerado por cada anel de massa dM no ponto em questão. Cada anel infinitesimal terá massa

$$dM = \sigma dA = (2\pi r)\sigma dr, \quad (1.3)$$

onde, $0 \leq r \leq a$

Como se trata de um anel, onde sua massa se encontra uniformemente distribuída, vale lembrar que esse cálculo já foi realizado neste trabalho. Observando a equação (1.1) e nela fazendo uma substituição de M por dM

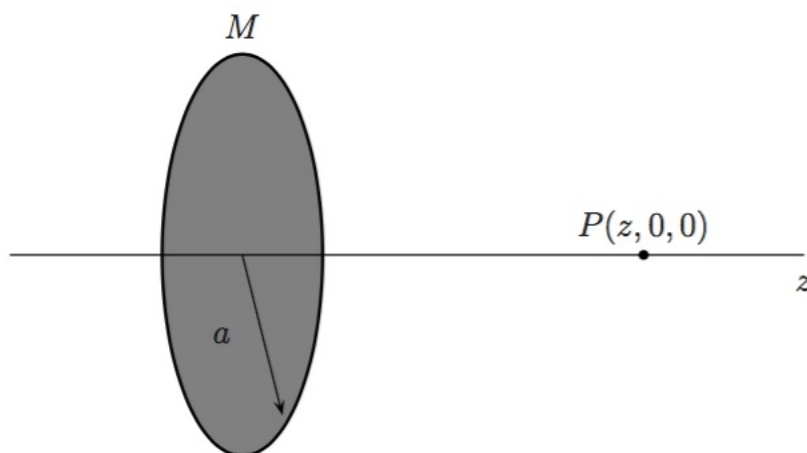


Figura 1.2: Disco de massa M e raio a .

dado acima e de a por r , teremos:

$$dg_z = -\frac{2\pi G z \sigma r dr}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}}.$$

A partir deste ponto, poderemos determinar o campo gravitacional \mathbf{g} em um ponto sobre o eixo z , integrando sobre a superfície do disco, ou seja, sobre a variável r . Vale lembrar que a variável z é uma constante durante esse processo, logo,

$$g(z) = \int dg_z = -2\pi G \sigma z \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}}.$$

Utilizando uma tabela de integrais, verificamos que o resultado da integral acima é dado por:

$$\int_0^a \frac{(r) dr}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} = -2\pi G \sigma z \left[-\frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{1}{z} \right]$$

simplificando, teremos:

$$\boxed{g(z) = -2\pi \sigma G \left[1 - \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right] \quad z > 0} \quad (1.4)$$

Para $z \approx 0$, ou seja, para pontos muito próximos do disco, a equação acima se torna,

$$g(0) = -2\pi G\sigma, \quad z > 0. \quad (1.5)$$

Esse é o campo gravitacional devido a um plano infinito de densidade uniforme, na região $z > 0$.

Agora, para analisarmos o caso para pontos onde $z \gg a$, devemos utilizar a equação (1.4), na forma,

$$g(z) = -2\pi\sigma G \left[1 - \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right],$$

neste caso, fazendo uso da aproximação $(1 + X)^p \approx 1 + pX$, onde, $p = -\frac{1}{2}$ $X = \frac{a^2}{z^2}$, na equação acima

$$g(z) = -2\pi\sigma G \left[1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} \right].$$

Simplificando a equação acima:

$$g(z) = -\frac{2\pi\sigma a^2 G}{z^2},$$

como $M = \pi a^2 \sigma$ é a massa do disco, a equação acima se rescreve

$$g(z) = -\frac{GM}{z^2}, \quad z > 0. \quad (1.6)$$

Para $z < 0$ obtemos:

$$g(z) = \frac{GM}{z^2}, \quad z < 0 \quad (1.7)$$

1.3 Campo gravitacional de uma casca esférica homogênea

Nesta seção, calcularemos o campo gravitacional de uma casca esférica, em pontos internos e externos sobre o eixo de simetria usando as técnicas do cálculo integral e diferencial. Há mais de um modo de aplicar estas técnicas para obter os resultados que queremos. Aqui adotaremos como ponto de partida os resultados válidos para o anel e para o disco. Esta escolha permite-nos enfatizar o princípio da superposição. A ideia é contrastar, exceto no caso das distribuições hemisféricas, as dificuldades envolvidas nestes cálculos com a simplicidade com que os mesmos resultados são obtidos quando levarmos em conta a simetria dos problemas e fizermos uso da lei de Gauss.

Casca esférica homogênea de raio R e massa M

Uma casca esférica de raio R é definida por

$$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = R^2\},$$

onde R é o raio da casca. Se a casca modelar(constituir) uma distribuição homogênea de massa total M , a sua densidade superficial σ será constante, isto é:

$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}.$$

O ponto de partida é o campo gravitacional de um anel de raio R_{anel} e massa M_{anel} sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o anel e passa por seu centro geométrico:

$$g_z(z) = -GM_{\text{anel}} \frac{z}{(z^2 + R_{\text{anel}}^2)^{3/2}}; \quad -\infty < z < +\infty.$$

A casca esférica será dividida em anéis de espessura infinitesimal ds e massa dM de tal modo que o campo de um anel elementar se escreve:

$$dg_z = -GdM \frac{(z - z')}{[(z - z')^2 + R^2 - z'^2]^{3/2}}; \quad -\infty < z - z' < +\infty.$$

onde $(0,0,z)$ são as coordenadas do ponto de observação e $(0,0,z')$ são as coordenadas do centro geométrico do anel elementar. O elemento de massa dM se escreve:

$$dM = \sigma 2\pi (R^2 - z'^2)^{1/2} ds,$$

onde σ é a densidade superficial de massa e R é o raio da casca esférica. Como a distribuição de massa é homogênea, segue que:

$$dM = \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi (R^2 - z'^2)^{1/2} ds.$$

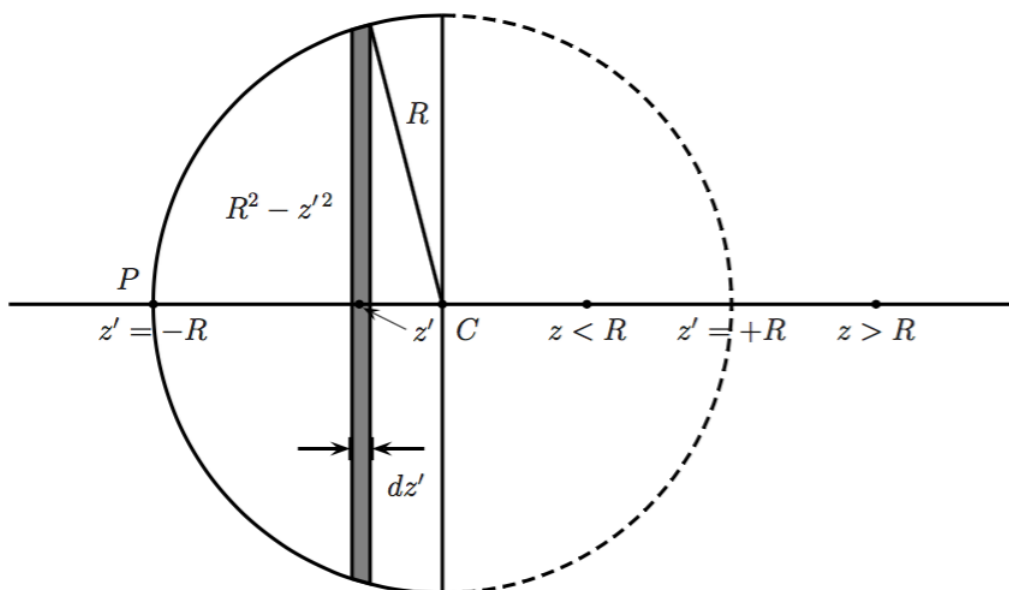


Figura 1.3: Diagrama mostrando os elementos que entram no cálculo do campo gravitacional em pontos internos e externos sobre o eixo de simetria Cz . O diagrama se aplica às cascas esféricas, bolas e semi-esferas

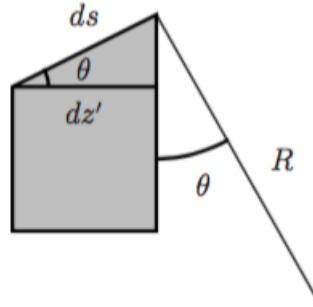


Figura 1.4: Detalhe para o cálculo do campo gravitacional da casca esférica. Observe que no cálculo do campo gravitacional da esfera homogênea, ao contrário do caso da casca esférica, podemos escrever $ds \approx dz'$ sem prejuízo do resultado final

Mas, veja a Figura 1.3,

$$ds = \frac{dz'}{\cos \theta} = \frac{dz'}{(R^2 - z'^2)^{1/2}} = \frac{dz'}{R \sqrt{1 - z'^2/R^2}},$$

logo,

$$dM = \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi R (1 - z'^2/R^2)^{1/2} ds = \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi R \frac{(1 - z'^2/R^2)^{1/2}}{(1 - z'^2/R^2)} dz'.$$

ou ainda,

$$dM = \frac{M}{2} dx',$$

onde $x' = z'/R$. Segue que

$$dg_z = -\frac{GM}{2} dx' \frac{(z - z')}{[(z - z')^2 + R^2 - z'^2]^{3/2}},$$

ou, introduzindo a variável $x = z/R$:

$$dg_z = -\frac{GM}{2R^2} \frac{(x-x') dx'}{[(x-x')^2 + 1 - x'^2]^{3/2}}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad -1 \leq x' \leq +1.$$

Campo para $z > R$

Para calcular o campo gravitacional em um ponto externo à casca integramos o resultado anterior sobre o domínio da variável x' :

$$g_z(z) = -\frac{GM}{2R^2} \int_{-1}^{+1} \frac{(x-x') dx'}{[(x-x')^2 + 1 - x'^2]^{3/2}}$$

O resultado da integração, obtido pelo utilização, ver [7], do *software* Symbolic Calculator, é $\frac{2}{x^2}$, logo

$$g_z(z) = -\frac{GM}{2R^2} \frac{2}{z^2} = -\frac{GM}{R^2 z^2}; \quad -\infty < z < +\infty.$$

A simetria esférica do problema permite fazer a substituição $z \rightarrow r$, onde r é a distância radial ao centro geométrico da casca, logo, a intensidade do campo gravitacional se escreve

$$g(r) = -\frac{GM}{r^2}; \quad r \geq R. \tag{1.8}$$

Campo para $-R \leq z \leq R$ ou $-1 \leq x \leq +1$

Em um ponto sobre o eixo de simetria, mas no interior da casca escrevemos novamente

$$g_z(x) = -\frac{GM}{2R^2} \int_{-1}^{+1} \frac{(x-x') dx'}{[(x-x')^2 + 1 - x'^2]^{3/2}}.$$

Com o *software* Symbolic Calculator e com algum esforço algébrico complementar que essencialmente consiste em interpretar o valor absoluto de $x-1$ no domínio $-1 < x < +1$, obtemos o resultado

$$g_z(x) = 0; \quad -1 < x < 1,$$

ou usando novamente o argumento de simetria, esférica

$$\boxed{g(r) = 0; \quad 0 \leq r < R}, \quad (1.9)$$

1.4 Campo gravitacional de uma esfera homogênea

Uma esfera de raio R (ou bola) é definida por

$$B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\},$$

onde R é o raio da esfera. Se a esfera modelar uma distribuição homogênea de massa total M , a sua densidade ρ será uniforme, isto é:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

O ponto de partida é o campo gravitacional de um disco de raio R_{disco} e massa M_{disco} sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o disco e passa por seu centro geométrico:

$$g_z(z) = \frac{2GM_{\text{disco}}}{R_{\text{disco}}^2} \left[-1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_{\text{disco}}^2}} \right]; \quad z > 0,$$

que também pode ser expressa na forma

$$g_z(z) = 2\pi G\sigma \left[-1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_{\text{disco}}^2}} \right]; \quad z > 0,$$

já que $M_{\text{disco}} = \sigma\pi R_{\text{disco}}^2$, onde σ é a densidade superficial de massa. Para $z < 0$ a expressão para a intensidade do campo é dada por:

$$g_z(z) = 2\pi G\sigma \left[1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_{\text{disco}}^2}} \right]; \quad z < 0.$$

Fazendo as substituições¹ $z \rightarrow z - z'$ e $\sigma \rightarrow \rho dz'$:

$$dg_z = 2\pi GR\rho dz' \left[-1 + \frac{(z - z')}{\sqrt{(z' - z)^2 + R^2 - z'^2}} \right]; \quad z - z' > 0, \quad -R \leq z' \leq +R$$

Introduzindo as variáveis adimensionais $x' = z'/R$ e $x = z/R$, temos para o caso em que $x > x'$:

$$dg_z = 2\pi GR\rho dx' \left[-1 + \frac{(x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + 1 - x'^2}} \right]; \quad x - x' > 0, \quad -1 \leq x' \leq +1. \quad (1.10)$$

Para o caso em que $x < x'$:

$$dg_z = 2\pi GR\rho dx' \left[1 + \frac{(x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + 1 - x'^2}} \right]; \quad x - x' < 0, \quad -1 \leq x' \leq +1. \quad (1.11)$$

Estas equações, a Figura 1.3 é a observação na legenda da Figura 1.4 são os elementos básicos dos cálculos que faremos a seguir.

Campo gravitacional para $z > R$ ou $x > 1$

Se o ponto de observação sobre o eixo de simetria estiver fora da distribuição, digamos: $x > 1$, o campo gravitacional poderá ser calculado com a equação (1.10):

$$g(z) = 2\pi GR\rho \int_{-1}^{+1} dx' \left[-1 + \frac{(x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + 1 - x'^2}} \right].$$

Efetuando a integral com *software* Symbolic Calculator obtemos $-\frac{2}{3x^2}$, logo:

¹Observe que z é o ponto de observação e z' varre a distribuição sobre o eixo de simetria.

$$g(z) = -2\pi G\mathcal{R} \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right) \frac{2}{3} \frac{1}{z^2} = -\frac{GM}{z^2}, \quad z > R.$$

Usando um vez mais o argumento de simetria podemos escrever

$$g(r) = -\frac{GM}{r^2} \quad r > R \quad (1.12)$$

Campo gravitacional para $-R < z < +R$ ou $-1 \leq x' \leq 1$

No interior da esfera escolhemos, sem prejuízo da generalidade, um ponto sobre o eixo de simetria correspondente a $0 < x < 1$, isto é um valor positivo para x . Segue que fazendo uso das equações (1.10) e (1.11) teremos

$$\begin{aligned} g(z) &= 2\pi GR\rho \int_{-1}^x dx' \left[-1 + \frac{(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2 + 1-x'^2}} \right] \\ &+ 2\pi GR\rho \int_x^1 dx' \left[1 + \frac{(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2 + 1-x'^2}} \right] \end{aligned}$$

Mais uma vez, efetuamos as integrais com o *software* Symbolic Calculator e com um pouco de trabalho algébrico adicional obtemos $-\frac{2x}{3}$, logo:

$$g_z(z) = -2\pi G\mathcal{R} \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right) \frac{2z}{3\mathcal{R}} = -\frac{GM}{R^2} \frac{z}{R}; \quad -R < z < R.$$

Simetria esférica permite então escrever a menos de um sinal algébrico:

$$\boxed{g(r) = \frac{GM}{R^2} \frac{r}{R}; \quad 0 \leq r < R.} \quad (1.13)$$

Capítulo 2

A lei de Gauss e o campo gravitacional

Neste capítulo abordaremos o uso da lei de Gauss para o cálculo do campo gravitacional. Sendo assim, iniciamos esse capítulo fazendo uma introdução às equações diferenciais do campo gravitacional e também aos teoremas de Stokes e Gauss. Em seguida, faremos uma pequena analogia entre o campo eletrostático \mathbf{E} e o gravitacional \mathbf{g} , onde mostramos que a lei de Gauss, muito utilizada na eletrostática para o cálculo do campo elétrico de uma carga ou de uma distribuição de cargas, também pode ser uma ferramenta útil para o cálculo do campo gravitacional desde que haja um alto grau de simetria da distribuição de massa. Em seguida, refaremos os cálculos do campo gerado por uma casca esférica para pontos externos e internos da mesma e também para campo gerado por uma esfera maciça, também para pontos externos e internos à distribuição usando a lei de Gauss, mostrando assim que essa ferramenta tem a capacidade de simplificar os cálculos nestes casos.

2.1 As equações diferenciais do campo gravitacional e os teoremas de Stokes e Gauss

As equações do campo gravitacional

As equações para um campo gravitacional arbitrário $\mathbf{g}(\mathbf{r})$, onde $\mathbf{r} = (x, y, z)$, se escrevem:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -4\pi G \rho(\mathbf{r});$$

e

$$\nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{r}) = 0;$$

A primeira relaciona a divergência do campo gravitacional, isto é: o fluxo por unidade de volume, com a densidade local de matéria e a segunda nos informa localmente que o campo é conservativo.

A lei de Gauss na forma integral

Se agora integrarmos a primeira equação em uma região \mathcal{V} , obteremos:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = -4\pi G \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r},$$

onde $d^3\mathbf{r} = dx dy dz$. Usando o teorema de Gauss ou teorema da divergência, ver [8], escrevemos:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{A},$$

onde $\partial\mathcal{V}$ é a borda ou fronteira de \mathcal{V} . Segue que

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{A} = -4\pi G \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r},$$

ou ainda,

$$\Phi_g = -4\pi G M [\partial\mathcal{V}]. \quad (2.1)$$

onde

$$\Phi_g = \int_{\partial V} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{A},$$

é o fluxo do campo gravitacional através da fronteira da região \mathcal{V} , e $M[\partial V]$ é a massa contida no interior de \mathcal{V} :

$$M[\partial V] = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}.$$

A equação (2.1) é a expressão formal da lei de Gauss para o campo gravitacional.

A lei de Gauss como ferramenta de cálculo do campo gravitacional

Embora a lei de Gauss tenha validade para qualquer distribuição de massa, nem sempre ela é útil como ferramenta para calcular o campo gravitacional. Considere a Figura 2.1. Uma massa puntiforme é colocada em dois pontos distintos, primeiramente no ponto P que coincide com o centro geométrico da superfície gaussiana (imaginária) e depois no ponto excêntrico P' . No primeiro caso, podemos escrever:

$$\int_{\partial V} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathcal{A} = \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} \int_{\partial V} d\mathcal{A} = -g(r) \int_{\partial V} d\mathcal{A}.$$

É esta fatoração que torna a lei de Gauss uma ferramenta conveniente no cálculo do campo,. No segundo caso, o ângulo entre \mathbf{g} e $\hat{\mathbf{n}}$ é variável e, logo, o produto escalar não pode ser fatorado. Neste caso, embora válida, a lei de Gauss não é conveniente como instrumento de cálculo do campo. O que aconteceu? No segundo caso, a simetria foi quebrada. A simetria da distribuição de massa é essencial no caso da lei de Gauss como instrumento para calcular \mathbf{g} .

O campo gravitacional como campo conservativo

Integrando a segunda equação de campo:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{g}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 0.$$

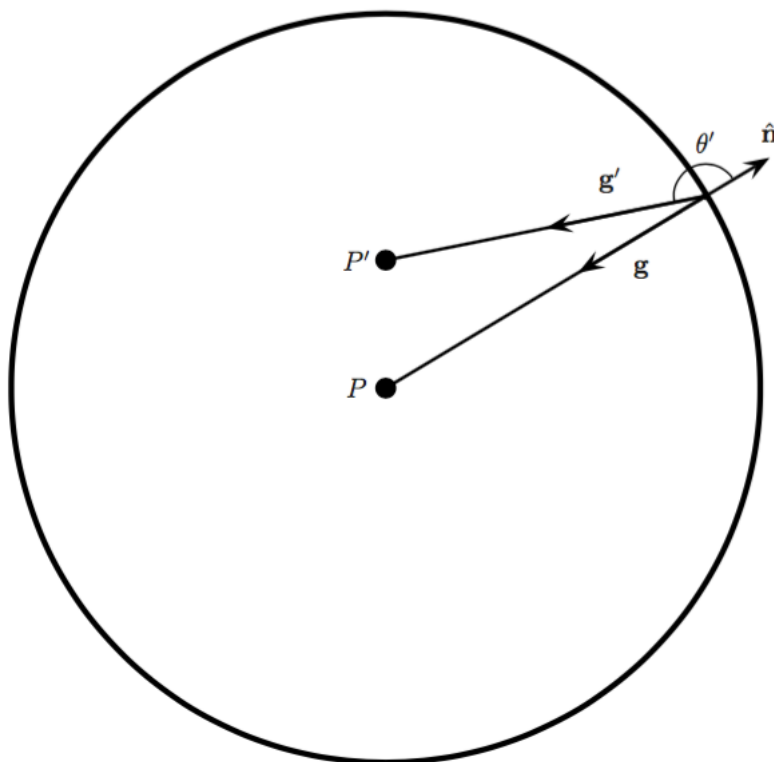


Figura 2.1: A lei de Gauss e a simetria.

Usando o teorema de Stokes

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{g}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \int_{\partial S} \mathbf{g} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

Portanto,

$$\int_{\partial S} \mathbf{g} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0, \quad (2.2)$$

isto é: a integral sobre uma curva fechada ou circulação do campo gravitacional é nula. Segue que:

$$\int_{A;\Gamma_1}^B \mathbf{g} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{B;\Gamma_2}^A \mathbf{g} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0;$$

$$\int_{A;\Gamma_1}^B \mathbf{g} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{A;\Gamma_2}^B \mathbf{g} \cdot d\boldsymbol{\ell}; \quad (2.3)$$

isto é: o trabalho por unidade de massa do campo gravitacional entre dois pontos arbitrários A e B não depende da escolha do caminho, em outras palavras: o campo gravitacional é um campo conservativo.

2.2 Recalculando o campo gravitacional de cascas e esferas homogêneas com a lei de Gauss

É bem sabido que quando existe um alto grau de simetria, a lei de Gauss é aplicada na eletrostática para o cálculo do módulo campo elétrico \mathbf{E} , que relaciona o fluxo desse campo através de uma superfície fechada S , denominada superfície gaussiana, com uma certa quantidade de carga q , que se encontra dentro desta superfície. Para o cálculo do fluxo do campo elétrico, ver por exemplo [9, 10], teremos, por definição:

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da, \quad (2.4)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor normal a superfície S e da é um elemento infinitesimal de área da superfície. Deste modo a lei de Gauss para a eletrostática se escreve:

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad (2.5)$$

onde, q é a carga contida pela da superfície S e ε_0 é a constante de permissividade do vácuo.

Vale notar, que o campo elétrico de uma carga puntiforme possui uma dependência com a distância r , da forma, $\frac{1}{r^2}$ e também um grau de simetria esférica, onde o módulo do campo elétrico sobre uma esfera de raio r terá sempre o mesmo valor.

Não podemos, deixar de perceber que o campo gravitacional, possui a mesma dependência com a distância r , da forma $\frac{1}{r^2}$ e logo possui, um grau

de simetria esférica.

Isto é uma indicação que a lei de Gauss é uma ferramenta que também pode ser utilizada para o cálculo do campo gravitacional.

Nos casos em que houver simetria a lei de Gauss simplifica tremendamente os cálculos. Como já mencionado, na eletrostática essa lei nos diz de que modo os campos na superfície gaussiana estão relacionados com as cargas no interior da superfície, em modo análogo, em relação ao campo da gravitacional, a lei, nos indica como uma partícula ou um corpo extenso encerradas no interior da superfície gaussiana se relacionam com fluxo do campo sobre a mesma.

Na lei de Gauss, a forma da carga ou da massa (partícula ou corpo extenso) no interior da gaussiana não importa, pois a única coisa que se deve levar em consideração são o sinal da carga quando se está trabalhando com a eletrostática e com a massa no caso do cálculo do campo gravitacional. Para utilizar essa ferramenta, no cálculo do campo devido a uma massa M , devemos fazer algumas modificações, no lugar da constante, $\frac{1}{\epsilon_0}$ deveremos por uma outra constante, $-4\pi G$ e no lugar do vetor campo elétrico \mathbf{E} , deveremos colocar o vetor campo gravitacional \mathbf{g} . Deste modo poderemos escrever a lei de Gauss, para a gravitação:

$$\Phi_g = -4\pi GM \quad (2.6)$$

Sendo por sua vez, G a constante da gravitação universal de Newton, M a massa contida dentro da superfície fechada S . Assim, teremos o fluxo do campo gravitacional Φ_g , descrito por:

$$\Phi_g = \oint_S \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da \quad (2.7)$$

Na equação acima, para o cálculo do produto escalar entre vetores campo gravitacional \mathbf{g} , e o vetor normal a superfície gaussiana, $\hat{\mathbf{n}}$, deve se observar que estes possuem sentidos opostos, sobre a superfície fechada, deste modo o resultado da equação sempre terá um valor negativo. Assim, podemos escrever:

$$\oint_S \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = -4\pi GM \quad (2.8)$$

2.3 Campo gravitacional de uma casca esférica homogênea

Neste momento, utilizando a lei de Gauss, iremos refazer o cálculo do campo gravitacional de uma casca esférica homogênea de massa M e raio R e densidade superficial de massa igual a σ , constante, para pontos externo e interno a essa casca, respectivamente. Deste modo, para realizar o cálculo para pontos externos a casca, traçaremos uma superfície gaussiana esférica de raio r , onde $r > R$, como mostrado:

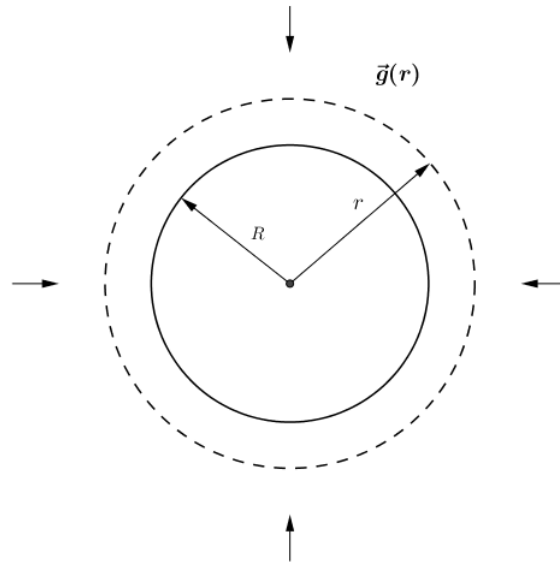


Figura 2.2: Casca esférica de raio R e gassiana de raio r

Aplicando a lei de Gauss, (equação 2.8) obteremos que:

$$-g(r)(4\pi r^2) = -4\pi GM, \quad (2.9)$$

onde $(4\pi r^2)$ é a área, da superfície gaussiana, resolvendo:

$$g(r) = \frac{GM}{r^2}, \quad r > R. \quad (2.10)$$

Deste modo, verificamos que este resultado está de acordo com o resultado

obtido no capítulo anterior, em módulo (Cap. 1 equação 1.6).

Por sua vez, para calcular o campo para pontos internos a casca esférica de raio R , devemos traçar uma superfície esférica gaussiana de raio r , tal que $r < R$. Aplicando mais uma vez a lei de Gauss, podemos escrever:

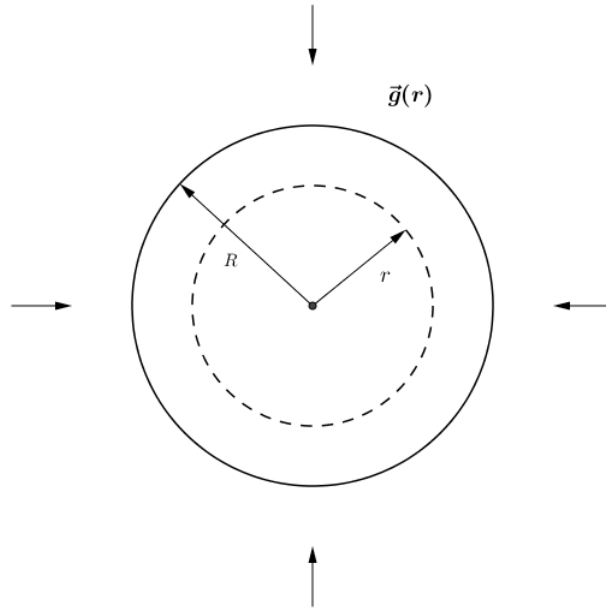


Figura 2.3: Casca esférica de raio R e gaussiana de raio r

$$-g(r)(4\pi r^2) = -4\pi GM. \quad (2.11)$$

Na equação acima, quando isolamos g , pode se notar que r é diferente de zero e que π e G são constantes positivas, logo também diferentes de zero. Porém o valor da massa M dentro da gaussiana é nulo, logo teremos o fluxo do campo sobre a superfície gaussiana, igual a zero, implicando em um campo gravitacional, $g = 0$, dentro da casca esférica.

Newton usando a lei da gravitação universal e suas recém descobertas técnicas de cálculo estabeleceu dois teoremas que se aplicam a força gravitacional exercida por cascas esféricas finas e de massa uniforme [11], onde o resultado acima pode ser verificado:

Teorema de Casca 1

Uma casca esférica de massa específica uniforme atrai uma partícula externa como se toda a massa da casca estivesse concentrada no seu centro

Teorema de Casca 2

Uma casca esférica de massa específica uniforme não exerce nenhuma força gravitacional sobre uma partícula localizada em qualquer lugar no seu interior

Estes dois resultados foram recalculados no capítulo anterior na linguagem do cálculo integral e facilmente reproduzidos neste capítulo com a lei de Gauss.

2.4 Campo gravitacional de uma esfera homogênea

Seguindo os passos do cálculo anterior, faremos agora o cálculo do campo gravitacional criado por uma esfera maciça de massa M , raio R e densidade ρ constante para pontos externos e interno a essa esfera, respectivamente. Sendo assim, para realizar o cálculo do campo para pontos externos a esfera, traçaremos uma superfície gaussiana esférica de raio r , onde $r > R$.

Aplicando a lei de Gauss, para o caso acima, podemos escrever que o campo gravitacional no exterior da esfera maciça é igual:

$$\boxed{g(r) = \frac{GM}{r^2}, \quad R \leq r < \infty.} \quad (2.12)$$

A equação acima, remonta ao resultado da (equação. 1.8), onde o mesmo foi realizado da maneira tradicional. Verificamos, assim, que o campo gravitacional para pontos no exterior da esfera maciça é o mesmo que aquele produzido caso toda a massa da esfera, estivesse concentrada na origem, ou seja, uma massa puntiforme.

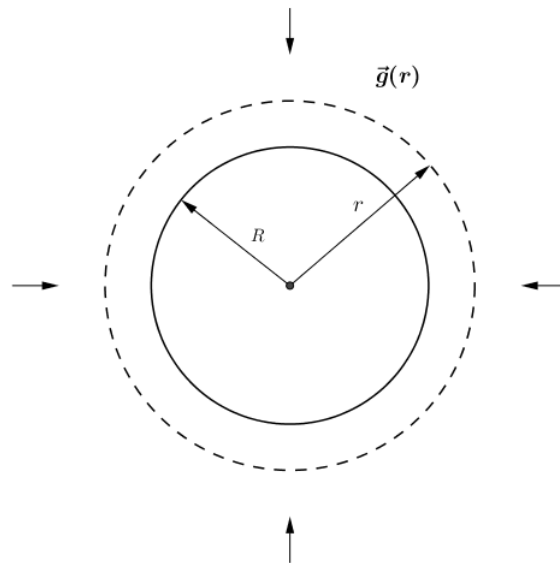


Figura 2.4: Esfera maciça de raio R e gassiana de raio r

Sendo assim, podemos agora calcular o campo gravitacional para pontos internos a essa esfera maciça. Para realizar esse cálculo devemos traçar uma superfície gaussiana de raio r , onde $r < R$.

Agora, a superfície esférica gaussiana encerra uma certa quantidade de massa, M_i , logo, devemos calcular qual é essa massa contida dentro da gaussiana. Para isso, devemos lembrar que a densidade da esfera maciça é ρ e tem valor constante e sendo ela calculada pela razão da massa M da esfera pelo seu volume V , então:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi R^3}{3}}$$

O volume interno, V_i encerrado pela superfície gaussiana é igual a $\frac{4\pi r^3}{3}$, de modo que a massa interna M_i , pode ser escrita, como:

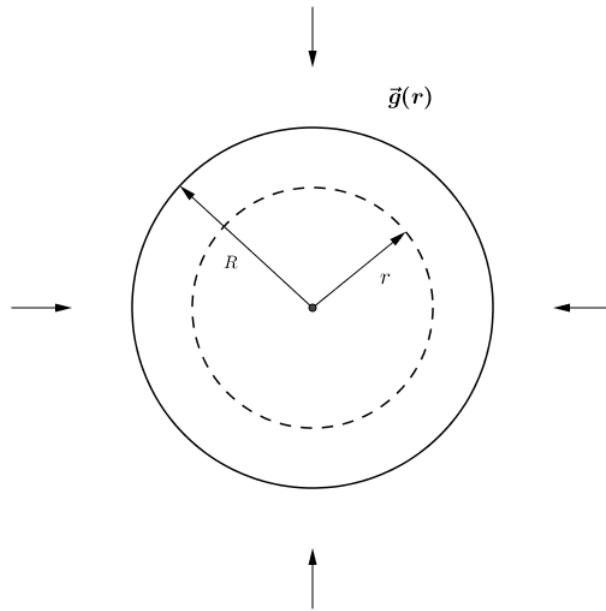


Figura 2.5: Esfera maciça de raio R e gaussiana de raio r

$$M_i = \rho V_i = \left(\frac{M}{\frac{4\pi R^3}{3}} \right) \left(\frac{4\pi r^3}{3} \right) = M \frac{r^3}{R^3}.$$

Utilizando o resultado acima para a massa encerrada dentro da superfície gaussiana e aplicando a lei de Gauss:

$$4\pi r^2 g(r) = 4\pi GM \frac{r^3}{R^3},$$

simplificando:

$$\boxed{g(r) = GM \frac{r}{R^3} \quad \text{ou} \quad g(r) = g_0 \frac{r}{R}; \quad \text{onde} \quad g_0 = \frac{GM}{R^2}.} \quad (2.13)$$

Observemos na equação acima, para o campo gravitacional dentro de uma esfera maciça de densidade constante onde g_0 é o campo gravitacional na superfície da esfera homogênea, que o mesmo varia linearmente com a distância, ou seja, é proporcional a r , sendo igual a zero no centro da esfera.

Desta maneira, após fazermos os cálculos para o campo da casca e da esfera, utilizando um método tradicional e em seguida utilizando a lei de Gauss, verificamos que esta última desde haja simetria suficiente, facilita os cálculos.

Capítulo 3

A lei de Gauss no Ensino Médio

A lei da Gravitação Universal representa um passo gigantesco no entendimento da dinâmica do sistema solar e sua importância não pode deixar de ser enfatizada em sala de aula. Entretanto, a maior parte dos textos destinados ao ensino médio, com algumas exceções, limita-se a apresentar a expressão matemática de forma sucinta e discutir alguns exemplos que envolvem o movimento de planetas e satélites. Mas há duas perguntas que são inevitáveis. A primeira é: como Newton descobriu a forma matemática da lei? E a segunda é: por que quando aplicamos a lei aos sistemas Terra-Sol, Terra-Lua, e sistemas similares podemos considerar os corpos envolvidos como pontos materiais? Afinal de contas, o sol e os planetas são corpos extensos.

Embora a lei da Gravitação Universal não possa ser demonstrada, podemos responder à primeira pergunta recorrendo a argumentos de plausibilidade. Há mais de um argumento de plausibilidade que podemos utilizar em sala de aula, veja por exemplo [12], aqui consideraremos um destes argumentos.

Considere a órbita de um satélite em torno da Terra. Por simplicidade suponhamos que a Terra esteja em repouso em relação às estrelas fixas. Ainda por simplicidade, suponhamos também que a órbita do satélite em torno da Terra seja um círculo de raio r . A terceira lei de Kepler aplicada ao sistema Terra-satélite nos diz que a razão entre o quadrado do período de revolução

do satélite em torno da Terra T e o cubo do raio da órbita é constante

$$\frac{T^2}{r^3} = C.$$

Como a órbita é circular, a força que a Terra exerce sobre o satélite deve ser centrípeta

$$F = m \frac{v^2}{r},$$

onde $v^2 = 2\pi r/T$ é a velocidade orbital. Segue que

$$F = \frac{4\pi^2 m r}{T^2}.$$

Eliminando T com a terceira lei de Kepler obtemos

$$F = \frac{4\pi^2 m}{Cr^2}.$$

Invocando a terceira lei de Newton temos: $\mathbf{F}_{\text{Terra-satélite}} = -\mathbf{F}_{\text{satélite-Terra}}$. Em particular, a magnitude é igual

$$\|\mathbf{F}_{\text{Terra-satélite}}\| = \|\mathbf{F}_{\text{satélite-Terra}}\| = F,$$

onde F é dado pela equação (3). Segue que a constante C deve depender da massa da Terra M . Escrevendo $C = 4\pi^2/GM$, onde G é uma nova constante – a constante de gravitação universal – temos

$$\boxed{F = \frac{GMm}{r^2}}. \quad (3.1)$$

Para responder à segunda pergunta no ensino superior podemos aplicar as técnicas do cálculo diferencial e integral e justificar rigorosamente esta hipótese mas e no ensino médio? A resposta está na transposição didática para o ensino médio da lei de Gauss que é proposta principal deste trabalho.

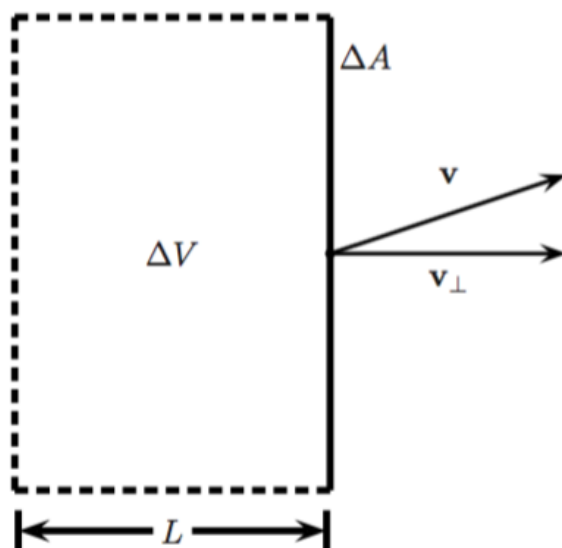


Figura 3.1: Diagrama para o cálculo da massa de água que atravessa a área ΔA . ΔV é o volume de controle.

3.1 A lei de Gauss

Seguindo [13], introduziremos a lei de Gauss por meio de uma analogia com a mecânica dos fluidos: considere um fluido incompressível de densidade ρ , por exemplo, a água. A quantidade de massa Δm contida no volume de referência ΔV que atravessa uma pequena área ΔA em um breve intervalo de tempo Δt é dada por

$$\Delta m = \Phi \Delta t,$$

onde Φ é o fluxo de massa medida em kg/s através da área ΔA . Como $\Delta m = \rho \Delta V$, podemos escrever também

$$\rho \Delta V = \Phi \Delta t.$$

Por outro lado, $V = L \times \Delta A$, veja a Figura 3.1, logo

$$\Phi = \rho \frac{L}{\Delta t} \Delta A.$$

A razão $L/\Delta t$ é igual à magnitude da componente da velocidade do fluido perpendicular à área ΔA a qual denotaremos por v_{\perp} . Portanto, podemos escrever

$$\Phi = \rho v_{\perp} \Delta A.$$

Considere agora uma superfície fechada A que encerra em um dado instante um volume total de água V . A superfície fechada pode ser dividida em pequenas áreas de tamanho ΔA_j , com $j = 1, 2, \dots, N$, veja a Figura 3.2. Considere uma dessas pequenas áreas e a seguinte convenção: se o fluxo de água estiver entrando no volume V então $v_{\perp}^j \Delta A_j < 0$, logo $\Phi_j < 0$; se, por outro lado, fluxo de água estiver saindo do volume V , então $v_{\perp}^j \Delta A_j > 0$ e $\Phi_j > 0$.

Suponhamos agora que no interior da superfície fechada não haja torneiras ou ralos abertos, isto é: não haja fontes e/ou sumidouros. Neste caso, por conservação de massa, a quantidade de água contida em V deve ser sempre a mesma, logo:

$$\sum_{j=1}^N \rho v_{\perp}^j \Delta A_j = 0,$$

isto é: a quantidade de água que entra no volume de controle V é igual a quantidade de água que sai. Se houver fontes e sumidouros escrevemos:

$$\boxed{\sum_{j=1}^N \rho v_{\perp}^j \Delta A_j = \sum_{k=1}^n (\text{fontes} + \text{sumidouros})}. \quad (3.2)$$

Observe que as fontes e sumidouros devem estar localizados no interior do volume V ; fontes e sumidouros externos não entram na soma do lado direito da equação (3.2).

Sob certas condições, os campos elétrico e magnético apresentam simi-

laridades com fluídos em regime estacionário. No caso da eletrostática, por exemplo, se substituirmos o termo ρv_{\perp} por E_{\perp} e considerarmos as cargas elétricas no interior do volume V como fontes (cargas positivas) ou sumidouros (cargas negativas) do “fluído elétrico”, podemos escrever

$$\sum_{j=1}^N E_{\perp}^j \Delta A_j = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k Q_k, \quad (3.3)$$

onde E_{\perp}^j é a componente do campo elétrico perpendicular ao elemento de área ΔA_j . No limite em que $N \rightarrow \infty$ e $\Delta A_j \rightarrow 0$, recuperamos a lei de Gauss na forma integral:

$$\oint E_{\perp} dA = \frac{Q_{\text{liq}}}{\epsilon_0}; \quad (3.4)$$

onde Q_{liq} é a carga líquida encerrada pela superfície fechada.

No caso do campo gravitacional, a troca que deve ser feita é ρv_{\perp} por g_{\perp} , mas a convenção de sinais deve ser mantida. Devemos trocar também a carga elétrica Q_k pela “carga” gravitacional, m_k , e substituir a constante de Coulomb por uma constante C a ser determinada. Neste caso escrevemos:

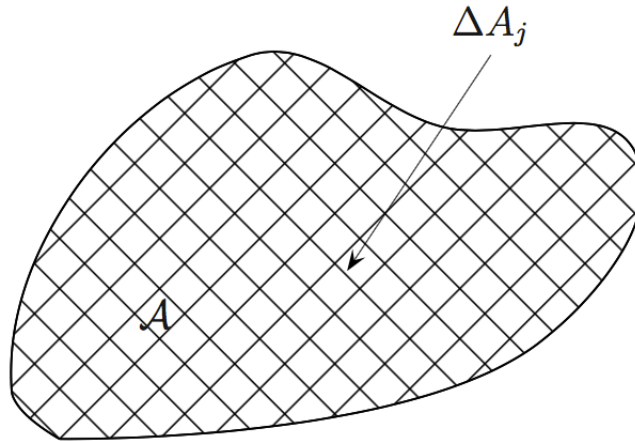


Figura 3.2: Superfície fechada.

$$\sum_{j=1}^N g_{\perp}^j \Delta A_j = C \sum_{k=1} m_k,$$

onde m_k é a k -ésima carga gravitacional e C é uma constante a ser determinada.

Para determinar C consideremos uma única massa puntiforme m . De acordo com a lei da gravitação universal, a força de atração entre esta massa e uma massa de prova m_0 é dada por:

$$F(r) = -\frac{Gmm_0}{r^2},$$

onde o sinal algébrico indica que a força é atrativa. Segue que o campo gravitacional $g(r)$ medido em N/kg (ou m/s²) é dado por

$$g(r) = \frac{F(r)}{m_0} = -\frac{Gm}{r^2}.$$

Escolhemos agora como superfície fechada uma esfera de raio r centrada em torno da massa puntiforme. As componentes perpendicular e paralelas em um ponto sobre a esfera são: $g_{\perp}^j = g(r)$ e $g_{\parallel}^j = 0$, logo, a lei de Gauss aplicada ao campo gravitacional da massa puntiforme permite-nos escrever:

$$-\frac{Gm}{r^2} \sum_{j=1}^N \Delta A_j = C m.$$

Mas, se fizermos $\Delta A_j \rightarrow 0$ ao mesmo tempo em que fizermos $N \rightarrow \infty$, a soma no lado esquerdo da equação acima deve ser igual a área da esfera, isto é:

$$\lim_{\substack{\Delta A_j \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{j=1}^N \Delta A_j = 4\pi r^2. \quad (3.5)$$

Portanto,

$$-\frac{Gm}{r^2} 4\pi r^2 = C m. \quad (3.6)$$

Segue que

$$\boxed{C = -4\pi G} \quad (3.7)$$

Portanto, como a constante que determinamos deve ser a mesma para qualquer configuração das fontes do campo gravitacional, a lei de Gauss se escreve

$$\sum_{j=1}^N g_{\perp}^j \Delta A_j = -4\pi G \sum_{k=1} m_k,$$

Para corpos extensos que apresentam simetria esférica, a lei de Gauss pode ser escrita na forma

$$\boxed{g(r)4\pi r^2 = -4\pi GM(r)}, \quad (3.8)$$

onde $M(r)$ é a massa confinada no interior da superfície gaussiana. Suponhamos que $M_0 = M(r = R)$ seja a massa total de uma distribuição de massa confinada a uma região esférica de raio R . Suponhamos que esta distribuição seja envolta por uma superfície esférica concêntrica de raio $r > R$. Neste caso, a lei de Gauss particularizada para o caso de simetria esférica, equação (3.8), nos dá

$$-g(r)4\pi r^2 = -4\pi GM_0,$$

ou ainda

$$g(r) = \frac{GM_0}{r^2}, \quad r \geq R. \quad (3.9)$$

Este resultado mostra-nos que é permitido considerar o campo gravitacional de uma distribuição esférica de massa, na região externa à distribuição, como uma massa puntiforme localizada na origem, justificando assim a lei da Gravitação Universal.

Vetorialmente :

$$\mathbf{g} = -g(r)\hat{\mathbf{r}}$$

3.2 Mais exemplos

Campo gravitacional no interior da Terra

Suponhamos que a Terra possa ser modelada por uma esfera de raio R e massa M_{\oplus} , uniformemente distribuída. Neste caso,

$$M(r) = M_{\oplus} \frac{r^3}{R^3}, \quad 0 \leq r \leq R.$$

Fazendo uso da equação (3.8), temos

$$g(r) = \frac{GM_{\oplus}}{R^2} \frac{r}{R} = g_{\oplus} \frac{r}{R}, \quad 0 \leq r \leq R,$$

onde g_{\oplus} é o valor do campo gravitacional (ou aceleração da gravidade) na superfície da Terra.

A casca esférica

Considere agora uma casca esférica homogênea de massa M e raio R . Pela lei de Gauss

$$g(r) 4\pi r^2 = 0. \quad (3.10)$$

Segue que por simetria em qualquer ponto do interior da casca, o campo gravitacional é nulo. Para pontos exteriores ($r > R$), a superfície gaussiana envolve toda a massa da casca, logo, para a casca esférica de massa M e raio R , o campo gravitacional se escreve:

$$g(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < R; \\ \frac{GM}{r^2}, & R \leq r < \infty. \end{cases} \quad (3.11)$$

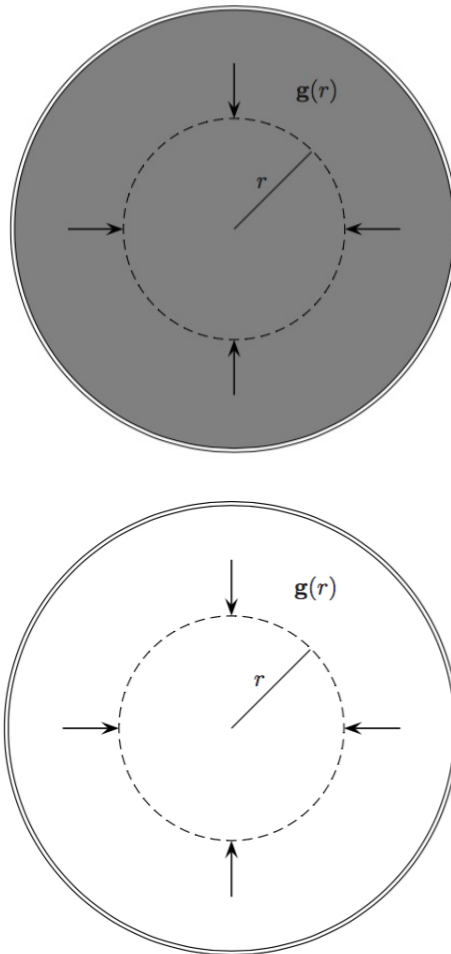


Figura 3.3: Esfera de massa M , raio R e densidade uniforme; casca esférica de massa M e raio R . A esfera tracejada é a superfície gaussiana de raio r .

O modelo da Terra oca de Halley

Em 1692, Edmond Halley propôs um modelo alternativo para explicar a estrutura interna da Terra. No modelo de Halley, a crosta terrestre consiste de uma casca esférica com cerca de 800 km de espessura, duas cascas esféricas internas concêntricas e um núcleo com centro no centro geométrico comum dessa configuração. O espaço entre as cascas esféricas interiores e entre a casca mais interna e o núcleo é preenchido por atmosferas. O modelo deve-



Figura 3.4: Edmond Halley (1656 - 1742) e o modelo da Terra "oca". Fonte: (Imagens Wikipédia)

ria explicar as leituras anômalas das bússolas e com esta finalidade, Halley postulou que cada casca possuiria seu próprio conjunto de polos magnéticos. Se supusermos que a simetria do modelo seja esférica, para distâncias radiais maiores do que o raio da Terra, o campo gravitacional será igual ao campo de uma massa puntiforme, equação (3.9), mas como seria o campo gravitacional no interior da Terra?

Para responder a esta pergunta adotaremos algumas hipóteses simplificadoras adicionais. Como o raio da Terra é da ordem de 6×10^3 km e a espessura das cascas é da ordem de 8×10^2 km, negligenciaremos o campo no interior das cascas. As atmosferas, assim como a rotação das cascas internas também não serão levadas em conta. Sejam então, M_n , a massa do núcleo esférico, M_a , M_b , M_c ; a , b , e c , as massas e os raios das cascas esféricas internas e da casca que representa a crosta terrestre, respectivamente, veja a Figura 3.5. Se aplicarmos a lei de Gauss da gravitação judiciosamente obteremos:

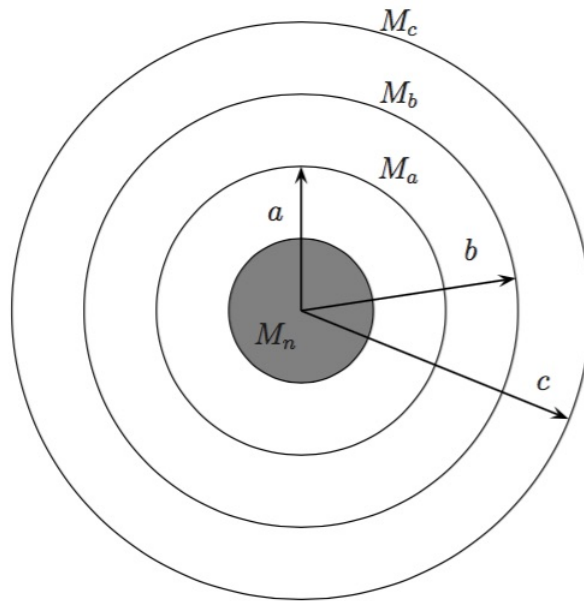


Figura 3.5: O modelo da Terra "oca" de Halley. (Imagens Wikipédia)

$$g(r) = \begin{cases} \frac{GM_n}{r^2}, & a < r < b; \\ \frac{G(M_n + M_a)}{r^2}, & b < r < c; \\ \frac{G(M_n + M_a + M_b)}{r^2}, & b < r < c; \\ \frac{G(M_n + M_a + M_b + M_c)}{r^2}, & c < r < \infty; \end{cases}$$

O modelo de Halley não deve ser confundido com as teorias pseudo-científicas da Terra oca que postulam a existência de civilizações avançadas que habitariam o interior. O modelo de Halley mostrou-se ser errôneo e foi descartado no início do século XIX.

A matéria escura e as curvas galácticas de rotação

No final dos anos 1960 e início dos anos 1970, a astrônoma Vera Rubin mediu as velocidades orbitais das estrelas localizadas nos braços das galáxias espirais [14, 15]. Graças às técnicas modernas utilizadas, os resultados obtidos eram de grande precisão. Em 1975, Rubin e seu colega K. Ford apresentaram os resultados em um encontro *da American Astronomical Society*. Estes resultados mostravam que a maioria das estrelas nos braços espirais orbitavam em torno do centro da galáxia com quase a mesma velocidade orbital, ver Figura 3.6. A conclusão era que ou a mecânica newtoniana não era válida universalmente, ou então boa parte da massa das galáxias estaria escondida na forma de um tipo de matéria não sensível às interações fundamentais, em particular a interação eletromagnética, com exceção da interação gravitacional. Esta forma de matéria chamada *matéria escura* (não confundir com energia escura) é hoje em dia um dos problemas fundamentais ainda não resolvidos pela física moderna.

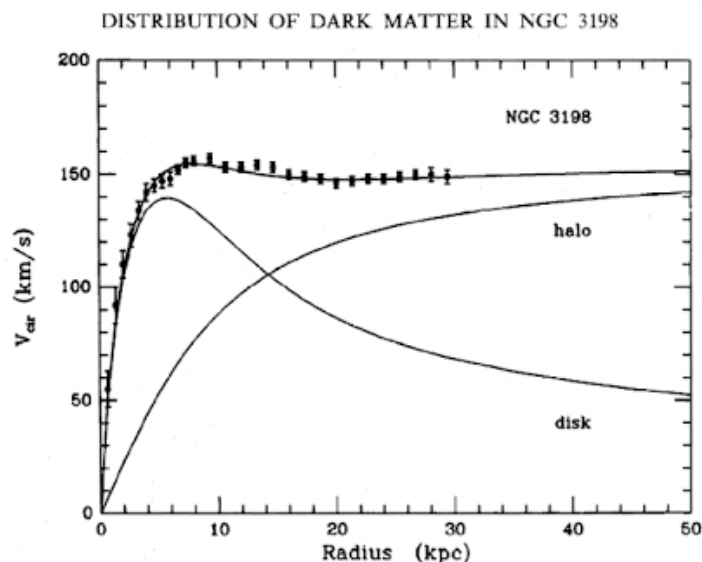


Figura 3.6: Diagrama típico da velocidade orbital em função da distância ao núcleo da galáxia. Fonte: <http://ignatz.phys.rpi.edu/site/index.php/the-physics/>, [16].

Para entender os resultados de Rubin e Ford faremos uso de um modelo muito simples de uma galáxia espiral. Como a maior parte da massa de uma galáxia espiral concentra-se na região central na forma de uma distribuição aproximadamente esférica, faremos a suposição que a galáxia pode ser considerada como uma distribuição esférica uniforme de raio R e massa M , e consideraremos o movimento, também por simplicidade, circular de uma estrela de massa m . Segue então que este caso podemos aplicar os resultados obtidos para o campo gravitacional interior e no exterior da distribuição. Se a estrela move-se no interior da distribuição escrevemos,

$$\frac{GM\varpi}{R^2} \frac{r}{R} = \frac{\varpi v^2}{r}; \quad 0 \leq r \leq R,$$

ou ainda

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{R}} \frac{r}{R}; \quad 0 \leq r \leq R. \quad (3.12)$$

Se a estrela move-se exteriormente à distribuição:

$$\frac{GM\varpi}{r^2} = \frac{\varpi v^2}{r}; \quad r \geq R;$$

logo,

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}; \quad r \geq R; \quad (3.13)$$

Introduzindo a variável adimensional $x = r/R$, podemos escrever:

$$\frac{v(r)}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} = x, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (3.14)$$

e

$$\frac{v(r)}{\sqrt{\frac{GM}{R}}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad 1 \leq x < \infty; \quad (3.15)$$

O gráfico da Figura 3.7 mostrar o comportamento esperado da velocidade orbital em unidades de $\sqrt{GM/R}$. Nosso modelo é muito simples, pois supõe

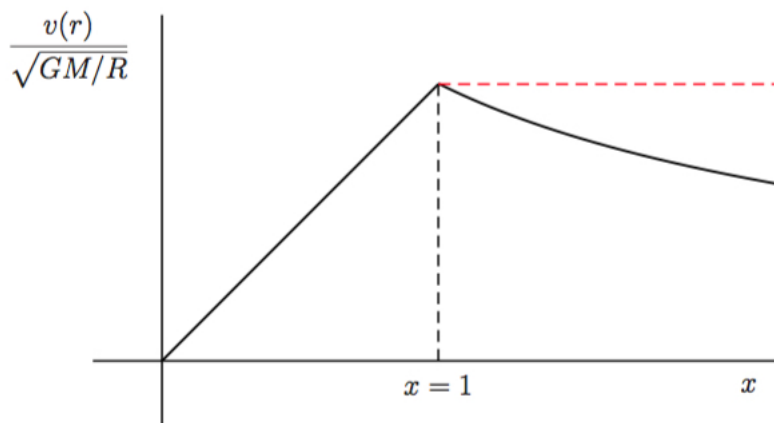


Figura 3.7: Velocidade orbital em função da distância ao centro da galáxia.

uma distribuição contínua e uniforme de matéria, mas permite entender o que está em jogo. Se a gravitação Newtoniana for válida nesta escala, há mais matéria no universo do que supunhamos inicialmente. Há alternativas à hipótese da matéria escura, mas elas implicam em modificações da segunda lei de Newton, veja por exemplo [18].

Cavidades esféricas

Finalmente, como último exemplo discutiremos o que acontece com o campo gravitacional medido em um ponto P exterior á uma distribuição esférica se esta contiver uma cavidade esférica. Considere a Figura 3.8 onde se mostra a Terra representada por uma bola de massa M e raio R . Como antes, faremos a suposição que a Terra tem uma distribuição de massa uniforme. Uma cavidade esférica de raio $R/2$ também é representada na figura. Observe que o centro da Terra, o centro da cavidade e o ponto P estão alinhados. Qual é o valor do campo gravitacional no ponto P . Há mais de um modo de responder a esta pergunta, mas todas envolvem nosso conhecimento do campo no interior da distribuição esférica obtida pela lei de Gauss e o princípio de superposição.

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} - \frac{GM'}{\left(r - \frac{R}{2}\right)^2};$$

onde M' é a massa da cavidade dada por

$$M' = \rho V' = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi (R/2)^3 = \frac{M}{8}.$$

onde M é a massa da Terra. Portanto,

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} - \frac{GM}{8\left(r - \frac{R}{2}\right)^2}$$

que pode ser rescrita na forma

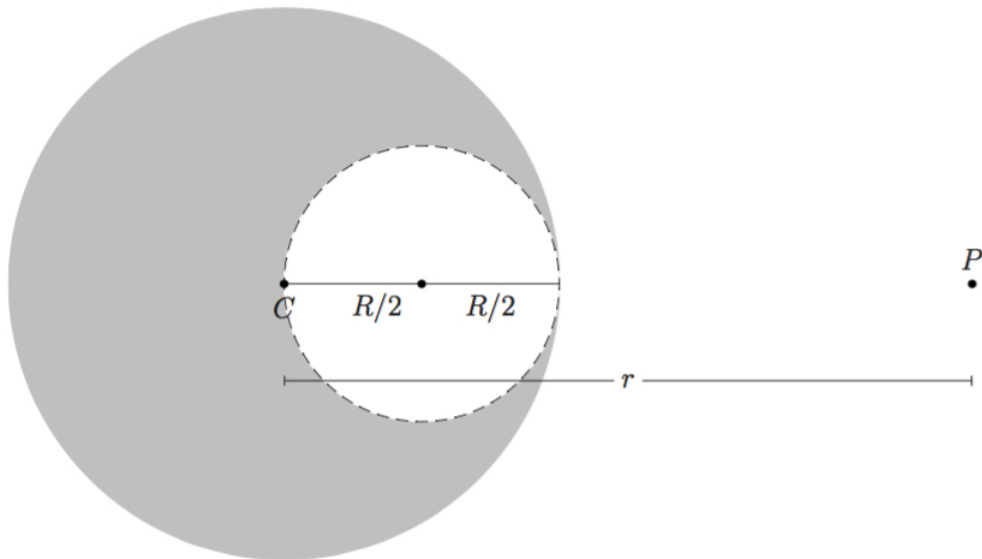


Figura 3.8: Cavidade esférica tangente à superfície da Terra.

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} \left[1 - \frac{1}{8 \left(1 - \frac{R}{2r} \right)^2} \right]. \quad (3.16)$$

Suponha agora que o ponto P seja um ponto bem próximo à superfície da Terra, isto é: $r = R$, Então a expressão acima nos dá $g = g_0/2 \approx 4,9 \text{ m/s}^2$.

Considere agora a Figura 3.9. Como antes, o centro da Terra, o centro da cavidade e o ponto de observação P estão alinhados. Seja R' , o raio da cavidade e M' , a sua massa. A variável x é a distância entre o centro da Terra e o centro da cavidade. Convém expressar x e R' como múltiplos do raio da Terra, isto é: $x = \lambda R$, e $R' = \epsilon R$, onde λ e ϵ são números reais positivos. Se quisermos que a cavidade apenas tangencie a superfície da Terra, a condição:

$$x + R' = R,$$

deve ser obedecida. Se a cavidade não tangencie a superfície da Terra escre-

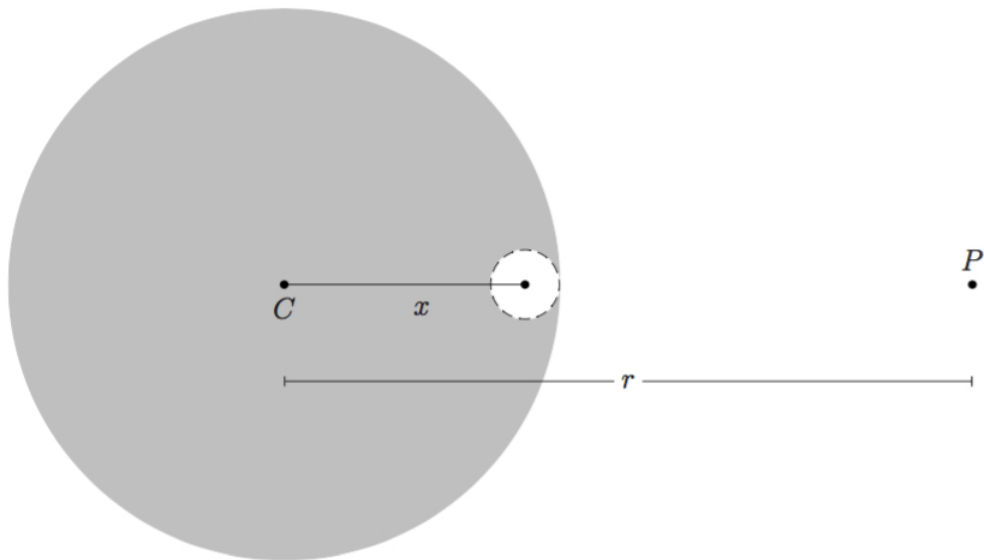


Figura 3.9: Cavidade esférica de massa e raio arbitrários.

vemos:

$$x + R' < R.$$

Fazendo uso da parametrização introduzida acima, podemos rescrever estas condições na forma:

$$\lambda + \epsilon \leq 1.$$

Como antes, o campo no ponto P será dado por

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} - \frac{GM'}{(r-x)^2}.$$

A massa da cavidade pode ser escrita como:

$$M' = \epsilon^3 M.$$

Portanto, levando em conta os parâmetros λ e ϵ , a intensidade do campo gravitacional em P será dada por:

$$g(r; \lambda, \epsilon) = \frac{GM}{r^2} \left[1 - \frac{\epsilon^3}{\left(1 - \frac{\lambda R}{r}\right)^2} \right] \quad (3.17)$$

Observe que para $\lambda = 1/2$ e $\epsilon = 1/2$ obtemos o resultado dado pela equação (3.16), os cálculos envolvendo as cavidades são um bom exemplo do uso do princípio da superposição no caso do campo gravitacional.

Um modelo simples para anomalia gravitacional

Os resultados obtidos para o campo gravitacional por meio da lei de Gauss podem ser utilizados para criar exemplos simples de anomalias gravitacionais para discussão em sala de aula. Uma anomalia gravitacional é simplesmente a diferença entre o valor observado da aceleração de um corpo em queda livre nas proximidades da superfície da Terra e o valor predito pelo modelo teórico da sua gravidade superficial. Aqui discutiremos um exemplo simples.

Considere uma esfera homogênea maciça cujo centro se encontra a uma profundidade z contada a partir da superfície da Terra. A massa da esfera M_e e raio a . A componente g_z do campo gravitacional da esfera no ponto A – veja a Figura 3.10 – a distância do ponto A à reta perpendicular à superfície da Terra e que passa pelo centro geométrico da esfera é x . A componente vertical do campo gravitacional da esfera no ponto A se escreve:

$$g_z = \frac{GM_e}{r^2} \times \frac{z}{r} = \frac{GM_e z}{r^3};$$

onde

$$r = (x^2 + z^2)^{1/2};$$

logo,

$$g_z = \frac{GM_e z}{(x^2 + z^2)^{3/2}},$$

ou ainda

$$g_z^*(x^*) = \frac{g_z}{GM_e/z^2} = \frac{1}{(x^{*2} + 1)^{3/2}}, \quad (3.18)$$

onde $x^* = x/z$. A Figura 3.11, mostra o gráfico da equação (3.18). É fácil perceber que o valor máximo de $g_z^*(x^*)$ acontece quando $x^* = 0$. Neste caso,

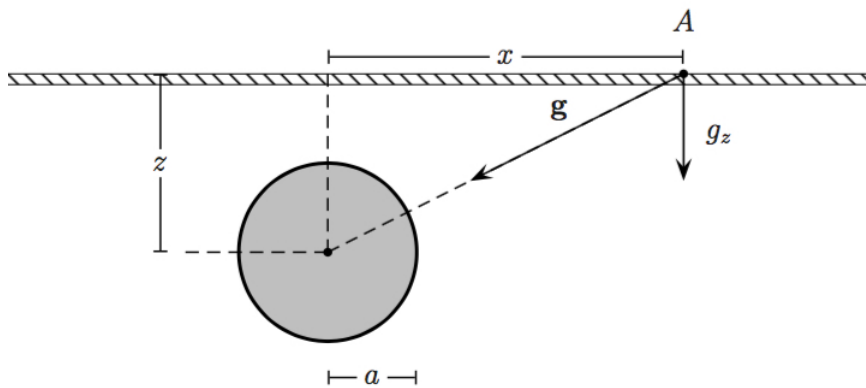


Figura 3.10: Anomalia gravitacional esférica.

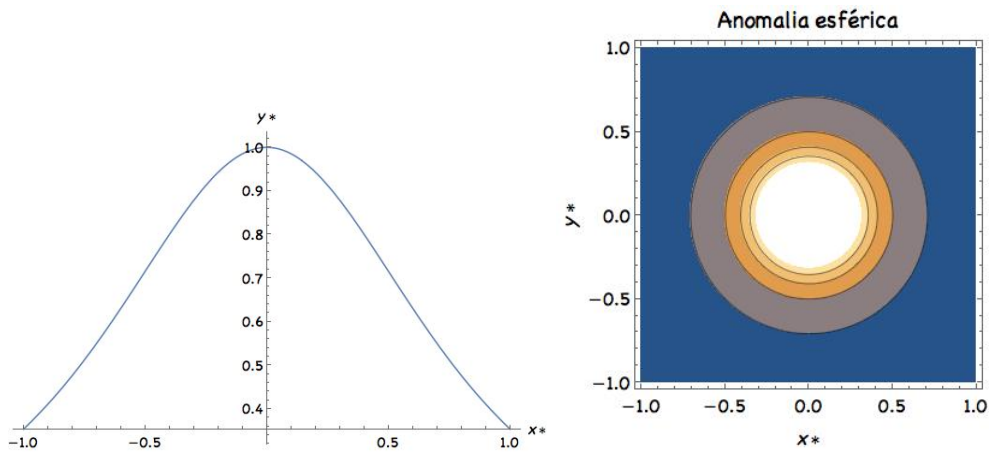


Figura 3.11: Anomalia esférica.

$g_z^*(0) = 1$, e

$$g_z^{\text{máx}} = \frac{GM_e}{z^2}.$$

Para que valor de x^* a aceleração adimensional $g^*(x^*)$ cai para a metade do seu valor? Isto é:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{(x^{*2} + 1)^{3/2}}.$$

Resolvendo esta equação obtemos

$$x_{1/2}^* = \pm 0,766.$$

Portanto, a profundidade do centro da anomalia esférica será:

$$z = \frac{x}{0,766}.$$

Para $x = 100$ m,

$$z = \frac{100}{0,766} \approx 130,55 \text{ m}.$$

Neste caso, a massa da anomalia esférica será

$$M_e = \frac{g^{\text{máx}} z^2}{G};$$

onde $g^{\text{máx}}$ é o valor medido com um gravímetro.

O estudo das anomalias gravitacionais é de grande utilidade na análise geofísica dos solos.

Um modelo simples para a gravidade no interior da Terra.

Façamos a suposição que a Terra possa ser modelada por uma esfera de densidade de massa uniforme e raio R . Neste caso, o modo mais simples de calcular o campo gravitacional terrestre no interior de Terra é por meio da lei de Gauss para a gravitação Newtoniana. Como há simetria esférica, podemos escrever:

$$4\pi r^2 g(r) = 4\pi GM(r),$$

ou ainda

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2},$$

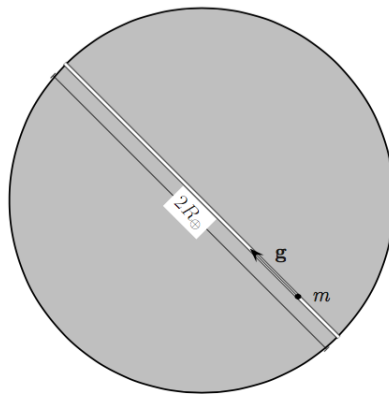


Figura 3.12: Superfície gaussiana no caso de simetria esférica.

Como a densidade é uniforme temos

$$\frac{M(r)}{M} = \frac{r^3}{R^3},$$

onde M é a massa da Terra. Segue que no interior da Terra, isto é: para $0 \leq r \leq R$:

$$g(r) = \frac{GM}{R^2} \frac{r}{R} = g_0 \frac{r}{R},$$

onde identificamos

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = 9,81 \text{ m/s}^2,$$

como a aceleração gravidade na superfície da Terra. Portanto, um corpo de prova de massa m que se move ao longo do diâmetro da esfera terrestre estará sujeito a uma força radial é dada por

$$P_r = -mg(r) = mg_0 \frac{r}{R}. \quad (3.19)$$

Portanto P_r é uma força do tipo restauradora, como a força em uma mola $-kx$. Segue que o corpo oscila de acordo com a equação:

$$r(t) = R \cos\left(\sqrt{\frac{g_0}{R}} t\right). \quad (3.20)$$

e o período será:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}}. \quad (3.21)$$

Se substituirmos os valores médios aceitos de g_0 , aceleração do campo gravitacional na superfície da Terra e R , raio da Terra, obteremos o resultado bem conhecido:

$$T \approx 84 \text{ minutos},$$

para o período de uma oscilação completa e $T_{1/2} \approx 42$ minutos como a duração da viagem entre pontos antípodas. É possível mostrar que o túnel

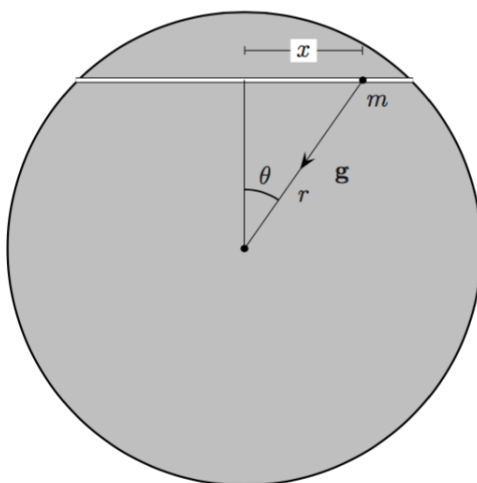


Figura 3.13:

escavado no interior da Terra não precisa passar necessariamente pelo centro da Terra pois o período, e logo, o meio período, serão iguais aos calculados acima, em outras palavras: os pontos de partida e chegada na superfície da Terra não são necessariamente antípodas. Considere a Figura 3.13: a projeção da força gravitacional ao longo do túnel é dada por

$$P_r = -mg(r) \cos \theta = -mg(r) \frac{x}{r},$$

ou ainda

$$P_r = -mg_0 \frac{r}{R} \frac{x}{r},$$

onde usamos a expressão de $g(r)$ para o interior da Terra. A equação de movimento da massa m se escreve:

$$ma_x = -mg_0 \frac{x}{R}.$$

Simplificando e rearranjando obtemos,

$$a_x + \frac{g_0}{R} x = 0,$$

que é a equação de movimento de um oscilador harmônico simples com

frequência angular e período iguais aos calculados anteriormente.

Capítulo 4

Aplicação no Ensino Médio

O autor desta dissertação, em maio de 2017, apresentou duas aulas sobre a lei de Gauss e a Gravitação Universal no Ciep 201 Aarão Steinbruch, na cidade de Duque de Caxias, Rio de Janeiro. As aulas ocorreram em dois dias, tendo duração de uma hora e quarenta minutos, dois tempos de 50 minutos, cada aula, tendo como forma de apresentação o *Data Show* e o quadro branco no auditório do Ciep. Os alunos que participaram das aulas, foram selecionados pelo interesse no assunto, e entre eles havia alunos do segundo e terceiro ano do ensino médio. Treze alunos demonstraram interesse em participar das atividades propostas, pré e pós-aula. Os alunos, duas semanas antes da aula, receberam um questionário, pré-aula, com o intuito de verificar o conhecimento prévio que o aluno tinha sobre o tema e por sua vez, criar uma oportunidade, ao professor de minimizar as dificuldades que os mesmos encontrarão durante a aula. Os alunos, relataram ao autor dessa dissertação que o questionário, pré-aula, despertou ainda mais o interesse no assunto, motivando-os a pesquisar sobre o assunto a ser tratado. As questões pós-aula, tem o intuito de verificar se a abordagem do assunto foi eficiente, servindo-se de um instrumento de avaliação, em relação à eficiência, da abordagem do tema, verificando se existe a necessidade de uma melhor abordagem do tema. Os dois questionários, entregues aos alunos, estão anexados nessa dissertação (apêndice A).

O primeiro questionário, constava de perguntas relacionadas ao conhe-

cimento de alguns astros celestes como estrela e satélites naturais e o conhecimento a respeito do nosso sistema planetário onde foi abordado, por exemplo, por qual motivo os planetas do Sistema Solar orbitam em torno o Sol. Analisando as respostas dos alunos em relação ao primeiro questionário, foi detectado, em alguns alunos, o desconhecimento a respeito do Sistema Solar e dos astros celestes, onde foi citado, em resposta, que *o planeta Terra tem dois satélites naturais*. Seguindo a análise das respostas, foi verificado que em 90 % delas, que a diferença entre aceleração gravidade ou campo gravitacional e força gravitacional, não era conhecida, havendo uma certa confusão no uso dos conceitos. Em relação aos conhecimentos sobre o nosso sistema solar e sobre a força que mantém os astros orbitando o Sol, seguem algumas respostas por escrito dos alunos. A transcrição destas respostas é literal.

- *Estrela é um astro que tem luz própria e que fica rodeado de planetas a sua volta. ex: sistema solar. Planeta é o que fica rodeando as estrelas, mais nem todos são planetas. Satélites naturais, são tipo a lua que fica presa, ligada a Terra por uma força magnética, que faz o satélite natural da Terra girar em nosso planeta girando em nossa volta*

-*Em física, órbita é a trajetória que um corpo percorre ao redor de outro sob a influência de alguma força. As órbitas são aproximadamente elípticas, embora os planetas próximo ao Sol, ao redor do qual orbitam tenham órbitas quase circulares*

- *A órbita dos planetas são uma esfera*

- *órbita elíptica, hiperbólica, parabólica*

-*A gravidade, fazendo com que este orbitem em torno dele.*

- *É a sua gravidade*

Como pode ser visto as respostas as questões formuladas foram variadas, onde até a *força magnética*, foi citada.

Fazendo uma análise das respostas do questionário pré-aula, percebemos que uma aula preparatória era necessária abordando os assuntos: Sistema Solar, corpos celestes, órbitas, figuras geométrica, como também a relação entre força gravitacional e aceleração gravitacional (campo gravitacional), onde ocorreu a maior incidência de erros dos alunos durante o questionário.

Uma semana após essa abordagem, demos início a aula com abordando as leis de Kepler, para o movimento planetário, nesse momento, os alunos puderam observar que as trajetórias dos planetas ao redor do Sol, eram elipses e não poderiam ser uma *esfera*, *parabólica*, como citada por alguns alunos e também foi deixado claro aos alunos que essas trajetórias podem ser tratadas como quase circulares, pois neste momento da aula, foi abordado a questão da excentricidade da órbita dos planetas, para ajudar na compressão, foi usado um programa de computador, *Phet* [17], com a ajuda da animação Gravidade e órbita.

Após a explicação da primeira lei de Kepler, duas perguntas foram feitas:

- *Como Kepler, descobriu que as órbitas eram elipses?*

- *É possível que algum dos planetas aumente ou diminua a sua velocidade de orbital?*

Observando essas perguntas, ficou claro que as respostas do questionário pré-aula, em relação as órbitas foram superadas. As respostas a essas questões foram realizadas durante a aula.

Após a explicação das leis de Kepler, uma aluna fez o seguinte questionamento:

- *Por que os planetas variam a velocidade em relação ao Sol com a distância? E o que causa a diferença entre as estrelas e os planetas?*

Após essa pergunta, ficou evidente que os alunos haviam superado, as dificuldades iniciais, em tudo que se relaciona à cinemática do movimento planetário, pois a atitude, no olhar, dos alunos após essa pergunta foi positiva. Deste modo, questionada, pelo professor sobre onde ela havia pesquisado sobre tal assunto, referente ao movimento das estrelas, já que tal assunto não havia sido abordado em sala até o momento, a aluna mencionou que havia realizado uma pesquisa, motivada pelos assuntos do questionário pré-aula, onde se deparou com tal tema. Sendo assim, foi informada a aluna que seu questionamento seria respondido no decorrer da aula. Após a explicação sobre as leis de Kepler, o assunto abordado foi o da força gravitacional. Neste momento, foi explicado aos alunos por meio de ilustrações que tal força atua a distância e era por causa dela que os planetas, orbitavam o Sol. Neste momento, foi usado um argumento de plausibilidade [12],apresentado

no capítulo terceiro deste trabalho que utiliza a terceira lei de Kepler, em uma análise do movimento de um satélite em movimento circular uniforme ao redor da Terra, para se chegar a expressão onde a força é proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao inverso do quadrado da distância. Após uma breve discussão sobre o resultado obtido com o argumento de plausibilidade, a primeira aula foi encerrada.

Na segunda aula, na semana seguinte, iniciamos fazendo uma recapitulação do que foi visto na última aula e em seguida realizamos um introdução à lei de Gauss no ensino médio, feito por meio de uma analogia com a mecânica dos fluidos. Neste momento, antes de se fazer a analogia, os alunos foram convidados a tomar nota no caderno sobre certos conceitos, como por exemplo, área de algumas superfícies como quadrado, círculo, até que se pudesse chegar no cálculo da área de uma superfície esférica e por fim o conceito de fluxo, somente após essa preparação, a lei de Gauss, foi apresentada aos alunos. Após a apresentação da ferramenta para o cálculo do campo gravitacional, foram apresentados três exemplos, onde a lei de Gauss, pode ser utilizada.

No primeiro exemplo, foi utilizado, o modelo da Terra oca de Edmond Halley, neste exemplo foi perguntado aos alunos se era possível, calcular o campo gravitacional na superfície da Terra, como também nas camadas inferiores da mesma, utilizando a lei de Gauss. Durante a aplicação deste exemplo, ficou evidente para os alunos que o campo gravitacional depende da quantidade de massa que se encontra contida pela da superfície esférica (gaussiana). Motivado por essa descoberta, uma pergunta foi feita, por um aluno:

Se alguém cavasse um buraco muito fundo na Terra e caísse nele, ao chegar no final do buraco a gravidade seria menor ou maior por estar mais perto do núcleo da Terra?

Foi então dito ao aluno que o seu questionamento, estaria sendo respondido, no exemplo seguinte.

No segundo exemplo, a lei de Gauss foi utilizada, para o cálculo do campo gravitacional da Terra, em pontos sobre a superfície e também em pontos no interior da Terra. Com este exemplo foi demonstrado a expressão, que

é utilizada para o cálculo do campo sobre pontos acima da superfície da Terra e sobre a superfície, onde o raio da superfície gaussiana seria igual ao raio da Terra e em seguida foi realizado o cálculo para pontos no interior da Terra. Após os cálculos, foi feita uma avaliação dos resultados, aferindo o que as expressões encontradas queriam nos dizer. Em relação ao cálculo do campo gravitacional, no interior da Terra, durante a análise, os alunos ficaram intrigados com a respostas que obtiveram, descobrindo que o campo variava linearmente com a distância e assim respondendo ao questionamento do aluno.

No terceiro exemplo, utilizamos a lei de Gauss no estudo das curvas de rotação das galáxias espirais, baseado nos estudos de Vera Rubin e Kenneth Ford, onde mostravam que a maioria das estrelas nos braços espirais orbitavam em torno do centro da galáxia com quase a mesma velocidade. Para entender os resultados de Rubin e Ford fizemos uso de um modelo muito simples de uma galáxia espiral. Consideramos que a maior parte da massa da galáxia espiral concentra-se na região central na forma de uma distribuição aproximadamente esférica, fizemos a suposição que a galáxia pudesse ser considerada como uma distribuição esférica uniforme de raio R e massa M , e consideraremos o movimento, também por simplicidade, circular de uma estrela de massa m . Ao fazer isso, e aplicando a lei de Gauss, chegamos ao resultado já obtido no exemplo anterior para o campo gravitacional no exterior e no interior de uma esfera. Pudemos assim demonstrar, a expressão para a velocidade de uma estrela de massa m tanto no interior da esfera, quanto no exterior da mesma. Fizemos a comparação entre o que se é esperado, na teoria e os resultados obtidos por Rubin e Ford. Ao interpretar os resultados, com a ajuda do professor, os alunos puderam perceber que havia algo de diferente nos resultados, pois não eram parecidos, já que o resultado esperado, teoricamente, não era o que se é observado. Na teoria, as velocidades das estrelas nos braços das galáxias teriam que diminuir a velocidade conforme se afastam do centro da mesma, algo que não é observado. Para explicar, o que se é observado devemos entender o conceito de matéria escura [18], mas, tal conceito não é o objetivo deste trabalho. Num contexto geral, a aula foi bastante produtiva. Ela seguiu uma linha lógica, o que facilitou o

entendimento dos alunos e lhes mostrou como conteúdos vistos em sala de aula podem ser aplicados. Isso fez com que eles olhassem a partir de outro ponto de vista os conteúdos lecionados em sala de aula.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho estudamos o cálculo do campo gravitacional, utilizando a lei de Gauss do eletromagnetismo adaptada à gravitação universal reformulada para o ensino médio em uma analogia com a mecânica dos fluídos. No início deste trabalho fizemos uma pesquisa de como o tema, gravitação universal é apresentado no ensino médio, por meio de alguns livros didáticos e verificamos que na maior parte dos livros o tema é apresentado de maneira sucinta. Deste modo, procurando tornar o assunto mais plausível aos estudantes do ensino médio tornando o assunto mais propício a uma aprendizagem significativa, este trabalho foi elaborado.

A aplicação desta dissertação ocorreu, no Ciep 201 Aarão Steinbruch, na cidade de Duque de Caxias, onde os alunos foram selecionados pelo interesse no assunto. Cabe ressaltar que o interesse e o engajamento dos alunos durante a aplicação deste trabalho, em todas as suas etapas, foi muito produtivo, no qual se pode observar a evolução na aprendizagem do estudante.

As atividades pré-aula foram importantíssimas para o bom andamento da aula lecionada, onde pude verificar as dificuldades dos alunos e saber de que maneira deveria abordar o tema. Antes da aula por meio do questionário, pré-aula ficou evidente o desconhecimento de alguns alunos a respeito dos corpos celestes e do sistema solar. Por conta deste fato, foi necessária uma pequena introdução sobre esses temas, que foi feito antes do início da aula com uma semana de antecedência.

A experiência didática, após a aplicação deste trabalho, me leva a crer que, após a aula lecionada, os alunos passaram a ter uma outra visão da Física. Muitos a viam como algo distante do dia a dia e totalmente desconexo da realidade deles. Alguns alunos, antes da aula ou até mesmo antes da entrega do primeiro questionário, acreditavam que as leis da Física ou a Física era algo mágico, muito distante de sua realidade. Isso vem demonstrar, que existe um desconhecimento, por parte dos alunos, da evolução das ideias da Física, ao longo da história da humanidade, em que no decorrer do processo de ensino e aprendizagem, foi necessário ter um cuidado especial nesse aspecto.

Em relação a analogia feita com a mecânica dos fluídos houve uma grande dificuldade na matemática, por alguns alunos, mais especificamente no cálculo da área de figuras geométricas, no qual mesmo abordando o assunto uma semana antes das aulas, já sabendo da dificuldade desses alunos, no decorrer da aula as mesmas dificuldades apareceram e, sendo assim, foi necessária a intervenção do professor no decorrer das atividades.

Esse contratempo ocorreu por conta da dificuldade na aprendizagem desses assuntos no decorrer dos anos anteriores.

Durante a aplicação dos exemplos, neste trabalho, ficou evidente que muitos conceitos foram, corrigidos, pois havia uma notável dificuldade em diferenciar aceleração e força gravitacional, mesmo que verbalmente. Esse problema foi solucionado, por meio da explicação do professor e pelo uso de um programa, animação do *Phet*, utilizado durante a aplicação deste trabalho.

O uso do argumento de plausibilidade [12], foi de suma importância para demonstrar aos alunos um pouco da evolução das ideias na Física, quando foi possível apresentar como é a força de interação entre dois corpos, sendo ela proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional a distância entre eles.

Durante a aplicação dos exemplos, nesta dissertação, ficou evidente que os alunos entenderam como se pode calcular o campo gravitacional. O modelo de Terra de Edmund Halley, utilizado aqui foi de grande valia, pois além de ser um bom exemplo, ajuda a demonstrar ao aluno com ocorre a evolução

das ideias na ciência.

O exemplo da curva de rotação das Galáxias espirais foi bastante proveitoso, pois indicou que o assunto abordado, neste trabalho, pode ser aplicado em astronomia, visto que provoca bastante curiosidade nos alunos e ajuda a demonstrar que a ciência é dinâmica e elaborada com base na observação e no questionamento. Mostra também que assuntos mais contemporâneos, podem ser abordados no ensino médio, [18]. Porém, esse assunto, matéria escura, não era o objetivo desta dissertação e, por isso, não foi totalmente desenvolvido durante este trabalho.

Por fim, esperamos que o tema desta dissertação seja de interesse de vários professores e que possam usar este trabalho não só como referência teórica, mas também que se possa reproduzir, por intermédio desta pesquisa, outras atividades, fomentando o ensino e aprendizagem em Física, demonstrando que o conhecimento é dinâmico.

Apêndice A

A lei de Gauss e a Gravitação Universal: questionários e aula

A.1 Apresentação

Este trabalho apresenta uma sugestão de aplicação do tema *a lei de Gauss e a Gravitação Universal* no ensino médio. Os pré-requisitos para a introdução do tema no ensino médio são:

As leis de Kepler, em particular a terceira

Força Gravitacional

Cálculo de área de figuras geométricas, em particular a área da superfície de uma esfera

Movimento circular uniforme

O material didático aqui apresentado não trata dos temas, listados acima, por supor que os mesmos já foram lecionados aos estudantes. Caso isso, não tenha ocorrido, o uso deste material deve ser precedido da discussão dos temas, listados cima. A saber, esse material, tem duas partes: dois questionários pré e pós aula direcionados aos estudantes e uma aula (ou sugestão de abordagem) ao professor. Os questionários foram pensados de modo a

inserir os alunos ao tema e em seguida verificar se o aluno alcançou o nível de aprendizagem esperado ou se ainda se faz necessário uma abordagem mais detalhada, sobre um determinado assunto. Os slides em *PowerPoint*, que foram utilizados nas aulas, lecionada aos alunos do ensino médio se encontram neste apêndice. As duas aulas ministradas, tiveram um tempo de duração de dois tempos de 50 minutos, cada uma.

A.2 Questionário Pré aula

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Questionário introdutório
A lei de Gauss e a Gravitação Universal

Aluno: Leandro Batista Germano

Nome do aluno(a):

Turma:

Série:

1. O que são: Estrelas, Planetas e Satélites naturais?
2. O que é um sistema planetário?
3. Como é chamado o nosso sistema planetário?
4. Quantos planetas há no nosso sistema planetário?
5. Quantas Estrelas?
6. Você sabe dizer o nome de cada planeta que faz parte do nosso sistema solar? Quais os nomes?
7. O que é um planeta Anão?
8. O que é um asteróide?
9. Quantas Luas tem a Terra?
10. Quantas Luas tem Marte? Você sabe o nome dessas Luas?
11. Quantas Luas tem Júpiter?
12. Qual a “cola” que mantém os planetas girando em torno do Sol?

13. O que é uma órbita?
14. Qual a forma geométrica da órbita de um planeta?
15. Por que a Lua não cai sobre a Terra?

A.3 Questionário Pós aula

**Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física**

Questionário Final
A lei de Gauss e a Gravitação Universal

Aluno: Leandro Batista Germano

Nome do aluno(a):

Turma:

Série:

1. Qual a “cola” que mantém os planetas girando em torno do Sol?
2. O que é uma órbita?
3. Qual a forma geométrica da órbita de um planeta?
4. Por que a Lua não cai sobre a Terra?

A.4 Aula: A lei de Gauss e a Gravitação Universal

Universidade Federal do Rio de Janeiro -UFRJ

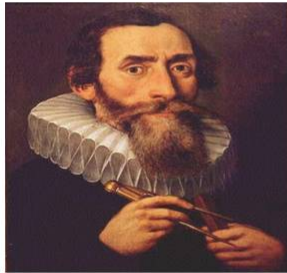


Mestrado Profissional em Ensino de Física
Aluno: Leandro Batista Germano

RIO DE JANEIRO, 22 de Maio de 2017

A lei de Gauss e a Gravitação Universal

As Leis de Kepler



Johannes Kepler (1571-1630)

Fonte: <http://www.siteastronomia.com>

Em 1609, publicou:

Nova Astronomia baseada nas causas ou Física do Céu Junto com comentários sobre o movimento do planeta Marte.

Nesta publicação estão enunciadas as duas primeiras leis.

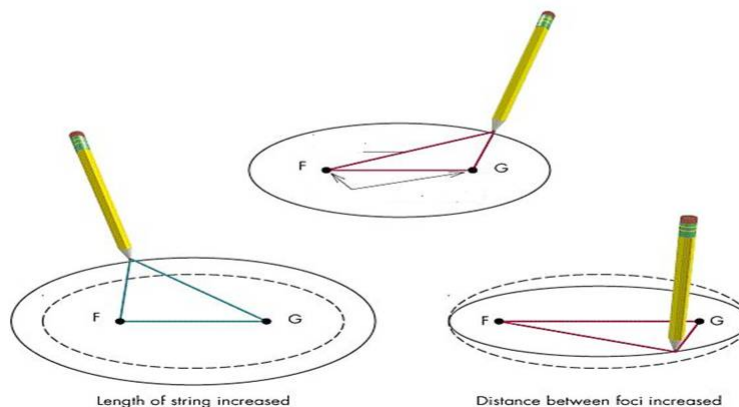
Em 1619, publicou:

A Harmonia do Mundo.

Nesta publicação, em meio a uma enorme quantidade de informações se encontra enunciada a Terceira lei dos movimentos planetários

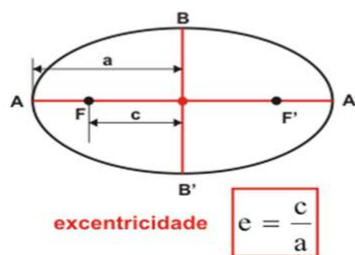
1ª Lei – A Lei das órbitas

Todos os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol ocupando um dos focos.



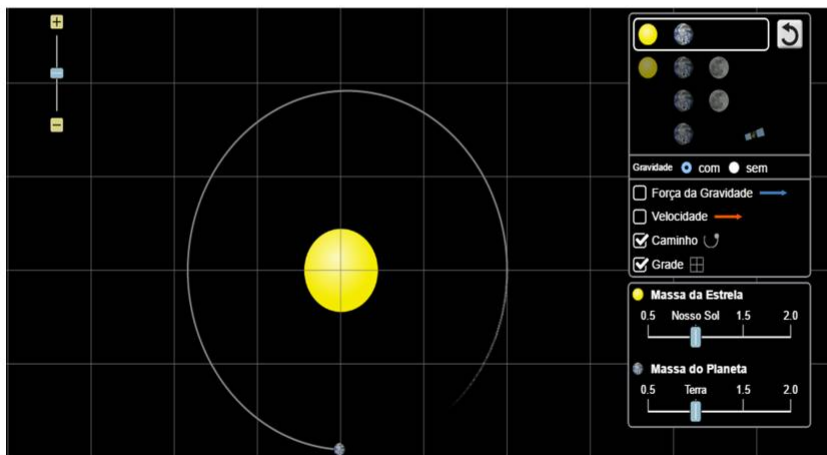
1ª Lei – A Lei das órbitas

No entanto, no caso das órbitas planetárias do sistema solar essas elipses possuem baixa excentricidade, isto é, são quase circunferências.



Elipse (cálculo da excentricidade)
Fonte : www.objetoeducacionais2.mec.gov.br

1ª Lei – A Lei das Órbitas

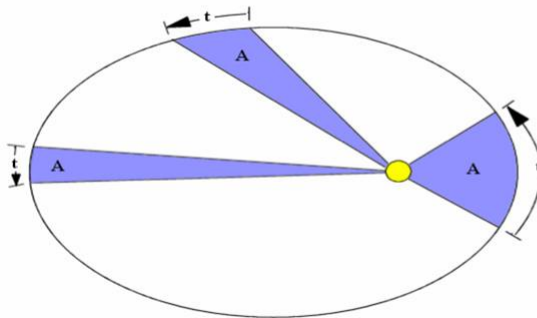


Órbita, Simulação

Fonte: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/gravity-and-orbits

2ª Lei – Lei das áreas

Uma linha imaginária que liga um planeta até o Sol varre áreas iguais em iguais intervalos de tempo.



Quanto mais perto um planeta estiver do Sol (periélio) mais rápido ele se move e quanto mais afastado estiver do Sol (afélio) mais devagar o planeta se move.

Lei das áreas

Fonte:

https://en.wikibooks.org/wiki/General_Astronomy/Print_version

3ª Lei – Lei dos períodos

Para todo os planetas, o quadrado de seu período de revolução é diretamente proporcional ao cubo do raio médio de sua órbita.

$$\frac{T^2}{r^3} = C$$

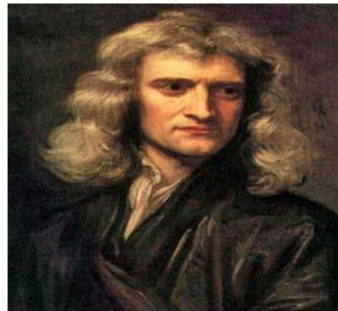
Planeta	Valores de Copérnico			Valores atuais		
	T (anos)	R (U.A.)	T^2/R^3	T (anos)	R (U.A.)	T^2/R^3
Mercúrio	0,241	0,38	1,06	0,241	0,387	1,00
Vênus	0,614	0,72	1,01	0,615	0,723	1,00
Marte	1,881	1,52	1,01	1,881	1,524	1,00
Júpiter	11,8	5,2	0,99	11,862	5,203	1,00
Saturno	29,5	9,2	1,12	29,457	9,539	1,00

Fonte: Nussenzveig, 2013, p.242

Gravitação Universal

Do ponto de vista dinâmico, que tipo de força o Sol exerce sobre os planetas, obrigando-os a se moverem de acordo com as leis que Kepler?

A resposta foi dada por Isaac Newton:



A Força Gravitacional !

Fonte:

https://pt.wikipedia.org/wiki/isaac_Newton/

Gravitação Universal

Argumento de plausibilidade:

$$\frac{T^2}{r^3} = C$$

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

$$F = \frac{4\pi^2 m}{Cr^2}$$

$$C = \frac{4\pi^2}{GM}$$

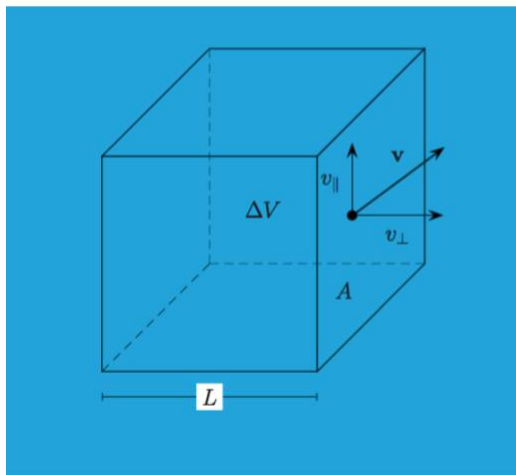
$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

• $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$

Figura A.1: slide 10: Fim da primeira aula

lei de Gauss no E.M.

Analogia com mecânica dos fluidos:



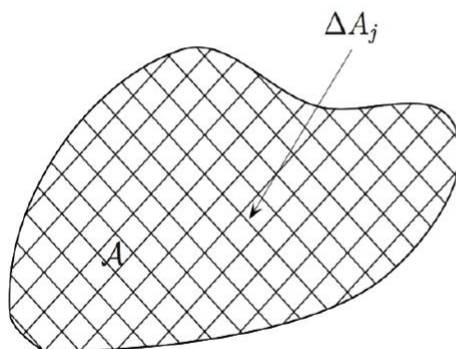
$$\Delta m = \Phi \Delta t,$$

$$\rho \Delta V = \Phi \Delta t.$$

$$\phi = \rho \frac{L}{\Delta t} \Delta A$$

$$\Phi = \rho v_{\perp} \Delta A.$$

lei de Gauss no E.M.

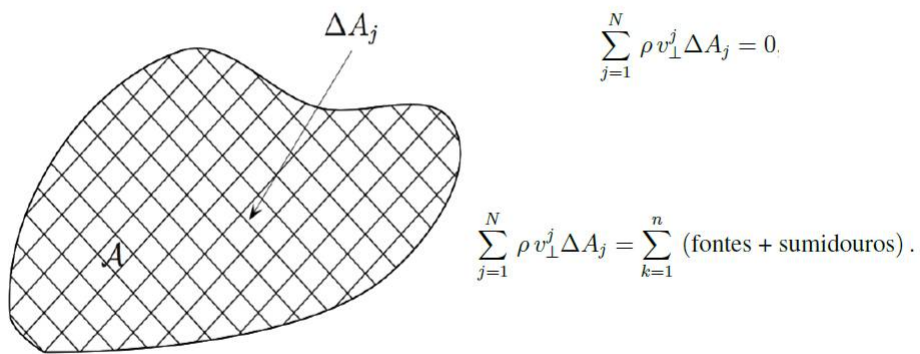


A superfície encerra em um dado momento um volume total de água V .

$$v_{\perp}^j < 0, \text{ logo } \Phi_j < 0.$$

$$v_{\perp}^j > 0 \text{ e } \Phi_j > 0$$

lei de Gauss no E.M.



lei de Gauss no E.M.

O campo elétrico e o campo magnético apresentam similaridades com os fluidos no regime estacionário.

$$\rho v_{\perp}$$

$$E_{\perp}$$

$$\sum_{j=1}^N E_{\perp}^j \Delta A_j = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k Q_k.$$

Lei de Gauss no E.M.

Considere uma distribuição esférica de massa M_0 e raio R . Para $r > R$:

$$\sum_{j=1}^N g_{\perp}^j \Delta A_j = -4\pi G \sum_{k=1} m_k$$

Simetria Esférica ($g_{\parallel} = 0$ e $g_{\perp} = g$)

$$-g(r)4\pi r^2 = -4\pi G M_0,$$

$$g(r) = \frac{GM_0}{r^2}, \quad r \geq R.$$

Exemplo 1



Crosta é uma casca esférica com cerca de 800Km de espessura.

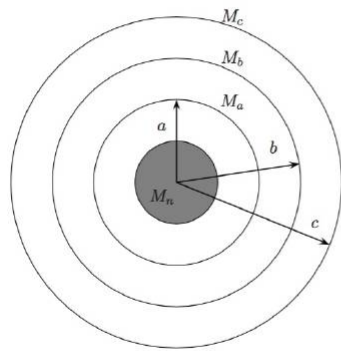
Casca esférica concêntrica e um núcleo com centro geométrico comum a essa configuração.

Espaços era preenchido por atmosfera.

Edmond Halley (1656 - 1742) e o modelo da Terra "oca"

Visava explicar as leituras anômalas do campo magnético terrestre.

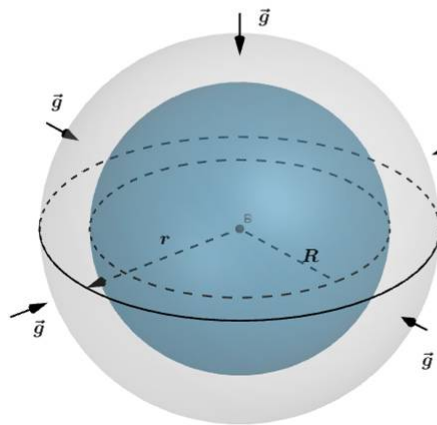
Terra "oca"



$$g(r) = \begin{cases} \frac{GM_n}{r^2}, & a < r < b; \\ \frac{G(M_n + M_a)}{r^2}, & b < r < c; \\ \frac{G(M_n + M_a + M_b)}{r^2}, & c < r < \infty; \\ \frac{G(M_n + M_a + M_b + M_c)}{r^2}, & c < r < \infty; \end{cases}$$

Exemplo 2

Campo Gravitacional da Terra



R= Raio da Terra
r = Raio da superfície imaginária

R < r

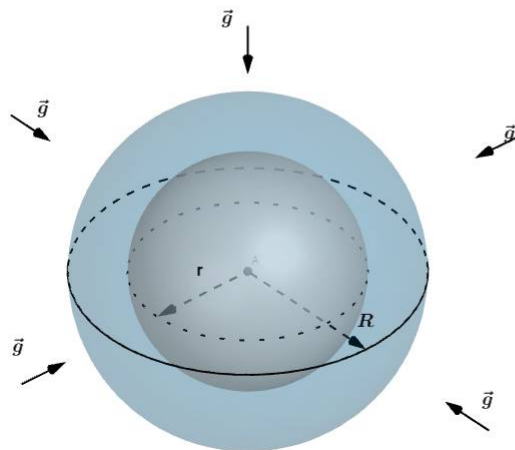
Aplicando os conhecimentos, adquiridos em sala de aula, teremos para o campo gravitacional?

$$-g(r)4\pi r^2 = -4\pi GM_0,$$

$$g(r) = \frac{GM_0}{r^2}, \quad r \geq R.$$

Exemplo 2

Campo Gravitacional da Terra



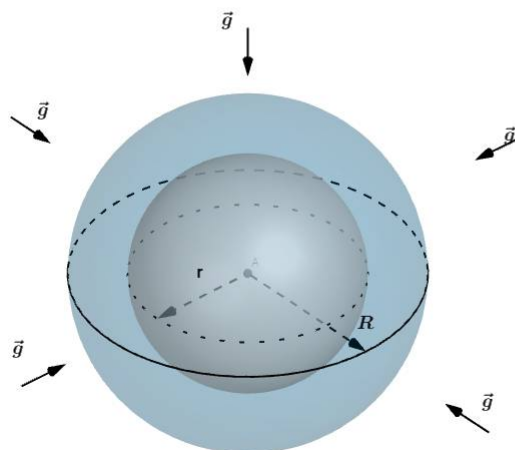
R = Raio da Terra
 r = Raio da superfície imaginária

$R > r$ (no interior da Terra)

Aplicando os conhecimentos, adquiridos em sala de aula, teremos para o campo gravitacional?

Exemplo 2

Campo Gravitacional da Terra



$$M(S) = \rho V_i = \left(\frac{M}{\frac{4\pi R^3}{3}}\right) \left(\frac{4\pi r^3}{3}\right) = M \frac{r^3}{R^3}$$

$$-g(4\pi r^2) = -4\pi GM(S)$$

$$g = g_0 \frac{r}{R} \quad \text{onde} \quad g_0 = \frac{GM}{R^2}$$

Exemplo 3

A curva de rotação das Galáxias



Galáxias Espirais

Fonte: <https://noticias.uol.com.br/ciencia/ultimasnoticias/redacao/2010/10/27/novas-imagens-mostram-detalhes-de-seis-galaxias-espirais.htm>

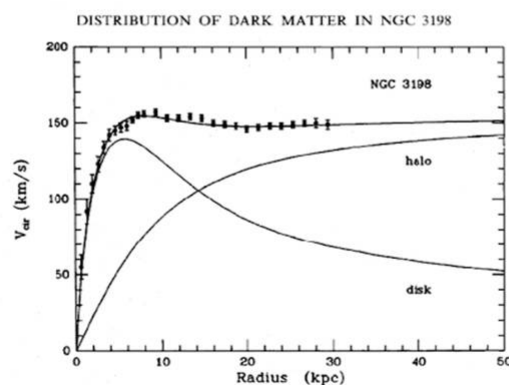
No final da década 1960 e início da década de 1970 a astrônoma Vera Rubin mediu a velocidade das estrelas localizadas nos braços das Galáxias espirais.

Em 1975 Rubin e seu colega K. Ford apresentaram seu Resultado.

Estes resultados mostravam que a maioria das estrelas nos braços espirais orbitavam em torno do centro da galáxia com quase a mesma velocidade.

Exemplo 3

A curva de rotação das Galáxias



Fonte: <http://ignatz.phys.rpi.edu/site/index.php/the-physics/>

Exemplo 3

Para entender os resultados de Rubin e Ford faremos uso de um modelo muito simples de uma galáxia espiral. Vamos considerar que a maior parte da massa de uma galáxia espiral concentra-se na região central na forma de uma distribuição aproximadamente esférica, faremos a suposição que a galáxia pode ser considerada como uma distribuição esférica uniforme de raio R e massa M , e consideraremos o movimento, também por simplicidade, circular de uma estrela de massa m . Segue então que este caso podemos aplicar os resultados obtidos para o campo gravitacional interior e no exterior da distribuição.

Exemplo 3

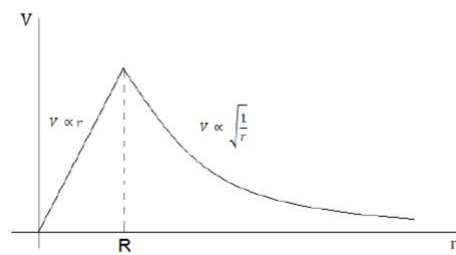
A curva de rotação das Galáxias

$$\frac{GM\pi r}{R^2 R} = \frac{\pi v^2}{r}; \quad 0 \leq r \leq R, \quad \frac{GM\pi}{r^2} = \frac{\pi v^2}{r}; \quad r \geq R;$$

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{R} \frac{r}{R}}; \quad 0 \leq r \leq R. \quad v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}; \quad r \geq R;$$

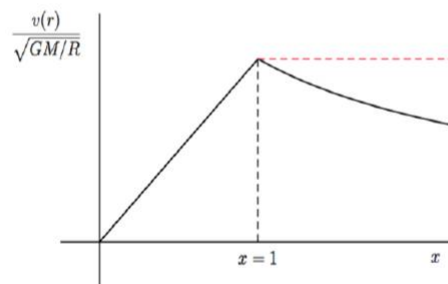
Exemplo 3

A curva de rotação das Galáxias



Exemplo 3

A curva de rotação das Galáxias



Referências Bibliográficas

- [1] A. Máximo, B. Alvarenga: *Física 1 contexto e aplicações*, 1ª edição, Scipione. São Paulo, 2014
- [2] L.F.Fuke, Y.Kazuhito: *Física para o Ensino Médio 1*, 2ª edição, Saraiva. São Paulo, 2011
- [3] A. Gaspar: *Física: Mecânica*, 1ª edição, Ática. São Paulo, 2000
- [4] C.M.A. Torres, N.G.Ferraro, P.A.T. Soares, P.C.M. Pentead: *Física Ciência e Tecnologia*, 3ª edição, Moderna. São Paulo, 2013
- [5] C.A. Kantor, L.A. Paoliello Jr, L.C. Mendes, M.C.B.O. Canto Jr: *Coleção Quanta Física 2*, 2ª edição, Pearson. São Paulo, 2013
- [6] G.Martini, W. Spinelli, H.C. Reis: *Conexões com a Física 1*, 2ª edição, Moderna. São Paulo, 2013
- [7] <https://itunes.apple.com/br/app/symbolic-calculator/id333252515?mt=8>, *software* Symbolic Calculator
- [8] J.Stewart: *Cálculo volume 2*, 5ª edição, Thomsom. São Paulo, 2006
- [9] Nussenzveig, H.M.: *Eletromagnetismo 3 curso de Física básica*, 2ª edição, Blucher. São Paulo, 2015
- [10] R.Resnick, D.Halliday e K.S. Krane: *Física 3*, 5ª edição, LTC. Rio de Janeiro, 2011
- [11] R.Resnick, D.Halliday e K.S. Krane: *Física 2*, 5ª edição, LTC. Rio de Janeiro, 2011
- [12] R.F.F Cunha e A.C.Tort *Plausibility argumentes and universal gravitation*, Phys. Edu.**52** 035001,2017
- [13] T. Bunk, A. Eisenkraft e L. D. Kirkpatrick *Quantoons* NSTA Press Arlington 2006.

- [14] V.C. Rubin and W.k. Ford *Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions*, The Astrophysical Journal v. 159, p. 379. 1970
- [15] V.C. Rubin, W.k. Ford and N.Thonnard *Rotational properties of 21 Sc galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 (R=4 kpc) to UGC 2885 (R=122 kpc)*, The Astrophysical Journal v. 238, p. 471. 1980
- [16] [http : //ignatz.phys.rpi.edu/site/index.php/the – physics/](http://ignatz.phys.rpi.edu/site/index.php/the-physics/). Particle Astrophysics at Rensselaer - Rensselaer Polytechnic Institut
- [17] [https : //phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/gravity – and – orbits](https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulation/gravity-and-orbits). Acessado em 10/05/17
- [18] Ximenes,S. J. Carvalho *A Matéria escura no ensino médio*, 2016. 86f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física)- Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.
- [19] A. Gaspar: *Compreendendo a Física 3, eletromagnetismo e Física moderna*, 2ª edição, Ática. São Paulo, 2013
- [20] Hewitt, P.G.: *Física conceitual* , 9ª edição, Ática. Porto alegre, 2008
- [21] Nussenzveig, H.M. : *Mecânica 1 curso de Física básica*, 5ª edição, Blucher. São Paulo, 2013
- [22] O. Freire Jr., M. Matos Filho, A. L. do Valle: *Uma exposição didática de como Newton apresentou a força gravitacional*. A Física na Escola v.5, n.1 2004.
- [23] P.M.C.Dias, W.M.S.Santos e M.T.M de Souza *A Gravitação Universal, um texto para o Ensino Médio*, Revista Brasileira de Ensino de Física, V.26,n 3, p.257-271,2004
- [24] P.R. da S.Rosa: *curso de Física básica II*, Departamento de Física-UFMS. Campo Grande,2009
- [25] R. D. Gregory: *Classical Mechanics* CUP Cambridge 2006.
- [26] A.S.T. Pires: *Evolução da ideias da Física*, 1ª edição, Livraria da Física. São Paulo, 2008
- [27] [http : //www.siteastronomia.com](http://www.siteastronomia.com). Acessado em 10/05/17

- [28] www.objetoeducacionais2.mec.gov.br. Acessado em 09/05/17
- [29] [https : //en.wikibooks.org/wiki/General_Astronomy/Print_version](https://en.wikibooks.org/wiki/General_Astronomy/Print_version).
Acessado em 10/05/17
- [30] [https : //pt.wikipedia.org/wiki/isaac_Newton/](https://pt.wikipedia.org/wiki/isaac_Newton/). Acessado em 05/05/17
- [31] [https : //noticias.uol.com.br/ciencia/ultimasnoticias/redacao/2010/10/27/novas-imagens - mostram - detalhes - de - seis - galaxias - espirais.htm](https://noticias.uol.com.br/ciencia/ultimasnoticias/redacao/2010/10/27/novas-imagens-mostram-detalhes-de-seis-galaxias-espirais.htm).
Acessado em 05/05/17