UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

A métrica de Eddington–Finkelstein

Rodrigo Rodrigues Machado
&
Alexandre Carlos Tort

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Rodrigo Rodrigues Machado, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
fevereiro de 2016

A métrica de Eddington–Finkelstein

Rodrigo Rodrigues Machado
Alexandre Carlos Tort

1 A métrica de Eddington–Finkelstein

Neste Apêndice, usaremos unidades geométricas $G = 1$ e $c = 1$ de tal modo que

$$\frac{GM}{c^2} \to M.$$

Nessas unidades, a massa do Sol, por exemplo, vale $M_\odot = 1.5 \times 10^3$ m, e a massa da Terra $M_\oplus = 0.444\,\text{cm}$. Para efetuar a transformação inversa, basta multiplicar a massa em unidades de comprimento pelo fator $\frac{c^2}{G} \approx 1.35 \times 10^{27}$[kg/m].

A métrica que descreve o espaço–tempo em torno de uma distribuição de massa esférica é a métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

onde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2.$$

As coordenadas t, r, θ e ϕ são as coordenadas do observador distante. No limite $r \to \infty$, a métrica de Schwarzschild reproduz a métrica de Minkowski do espaço–tempo plano:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 = -dt^2 + d\ell^2.$$

onde

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

A métrica de Schwarzschild descreve o espaço-tempo vazio em torno de uma estrela como o Sol desde que ignoremos a sua rotação. Descreve também o espaço–tempo exterior (vazio!) de uma estrela em colapso ou uma estrela pulsante desde que a massa da estrela e a sua simetria esférica sejam mantidas. De fato, é possível mostrar que dada uma distribuição esférica arbitrária, o espaço-tempo externo à distribuição tem uma métrica estática (teorema de Birkhof).

A métrica Schwarzschild tem alguns problemas. O primeiro é que em $r = 2M$, o coeficiente de dr^2 apresenta uma singularidade. Há uma singularidade também no coeficiente de dt^2 em $r = 0$. Outro problema é a inversão de sinal quando $r < 2M$. Em outros dizeres, a métrica de Schwarzschild funciona bem somente para $r > 2M$. O raio crítico:

$$r_{\mathrm{s}} = 2M,$$

é chamado *raio de Schwarzschild* e define uma esfera imaginária dita *horizonte dos eventos* que separa duas regiões distintas do espaço–tempo: a região exterior ao horizonte dos eventos e a região interior. A métrica de Schwarzschild não vale para a região interior. Mas cuidado: o raio de Schwarzschild do Sol, por exemplo, vale aproximadamente 3 km, mas isto não significa que podemos estender a aplicação da métrica de Schwarzschild até quase o centro do Sol, pois para $r < R_\odot$ encontramos matéria e energia, e a métrica de Schwarzschild só vale na ausência destas.

A teoria da relatividade geral permite a utilização de um amplo repertório de coordenadas para descrever o espaço–tempo. Para contornar o problema da métrica de Schwarzschild em $r = 2M$ e a inversão de sinal podemos introduzir uma transformação de coordenadas e obter uma métrica mais adequada. Considere a transformação de Eddington–Finkelstein:

$$t = v - r - 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| . \tag{1}$$

Para $r/2M > 1$, podemos escrever:

$$t = v - r - 2M\,\ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right),$$

e para $0 \leq r/2M < 1$,

$$t = v - r - 2M\,\ln\left(1 - \frac{r}{2M}\right).$$

Consideremos inicialmente o primeiro caso. Como

$$t = t(v,r),$$
$$dt = \frac{\partial t}{\partial v}\,dv + \frac{\partial t}{\partial r}\,dr.$$

Segue que

$$dt = dv - dr + \frac{dr}{1 - \dfrac{r}{2M}} = dv - \frac{dr}{1 - \dfrac{2M}{r}}$$

Portanto,

$$dt^2 = dv^2 - \frac{2dvdr}{1 - \dfrac{2M}{r}} + \frac{dr^2}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^2}. \tag{2}$$

Substituindo este resultado na métrica de Schwarzschild e fazendo as simplificações necessárias, obtemos finalmente

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\,dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \tag{3}$$

Esta é a métrica de Eddington-Finkelstein. Observe que v assume a papel de tempo coordenado. Se considerarmos o segundo caso e seguirmos o mesmo procedimento, obteremos o mesmo resultado final, logo, a métrica de Eddington-Finkelstein vale para $0 < r < \infty$! Isto é: ela descreve todo o espaço-tempo sem inverter o sinal e sem a singularidade em $r = 2M$. Este tipo de singularidade que surge em um conjunto de coordenadas, mas não em outro, é dita *removível*. Já a singularidade na origem $r = 0$ permanece, pois é uma *singularidade essencial*.

As linhas de mundo do tipo luz na métrica de Eddington–Finkelstein

Para entender o comportamento da luz na métrica de Eddington–Finkelstein façamos $ds^2 = 0$ e consideremos apenas o movimento radial. Então

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr = 0.$$

ou, ainda,

$$\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv + 2dr\right] dv = 0. \tag{4}$$

Há três soluções para esta equação.

<u>PRIMEIRA SOLUÇÃO</u> : $v =$constante, isto é: $dv = 0$. Neste caso, da transformação de Eddington–Finkelstein, vemos que para v constante e t crescente, r deve diminuir, Um fóton segue uma linha de mundo retilínea com origem no infinito e término na singulariade. Introduzindo a variável $t^* = v - r$, vemos que podemos desenhar a família de semirretas paralelas (uma semirreta para cada valor da constante) mostrada na Figura 1 definidas por:

$$t^* = C - r. \tag{5}$$

A cada semirreta corresponde um valor de C.

<u>SEGUNDA SOLUÇÃO</u>; integrando a equação diferencial entre colchetes obtemos

$$v = C + 2\left(r + 2M\,\ln\left|\frac{r}{2M} - 1\right|\right)$$

onde C é uma constante arbitrária. Segue que

$$t^* = v - r = C + r + 4M\,\ln\left|\frac{r}{2M} - 1\right|,$$

Como antes, se $r/2M > 1$, escrevemos:

$$t^* = v - r = C + r + 4M\,\ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right), \quad 2M < r < \infty, \tag{6}$$

Se, por outro lado, $r/2M < 1$, escrevemos:

$$t^* = v - r = C + r + 4M \ln\left(1 - \frac{r}{2M}\right), \quad 0 < r < 2M. \tag{7}$$

TERCEIRA SOLUÇÃO A terceira solução é $r = 2M$, isto é $dr = 0$. Neste caso, a solução é a reta paralela ao eixo t^*. A equação $t^* = v - r$ é simplesmente uma identidade.

A Figura 1 mostra um esboço gráfico das três soluções. Como a coordenada t^* deve ser crescente no intervalo $0 < r < \infty$, as linhas de mundo do tipo luz e do tipo tempo convergem para a singularidade em $r = 0$ quando $r < 2M$. Para $r > 2M$, as linhas de mundo do tipo luz dadas pela equação (6) afastam-se do horizonte dos eventos. Em cada ponto do diagrama $t^* \times r$, duas linhas de mundo se interceptam formando o cone de luz. No interior do buraco negro, $r < 2M$, radiação e matéria colapsam na singulariade.

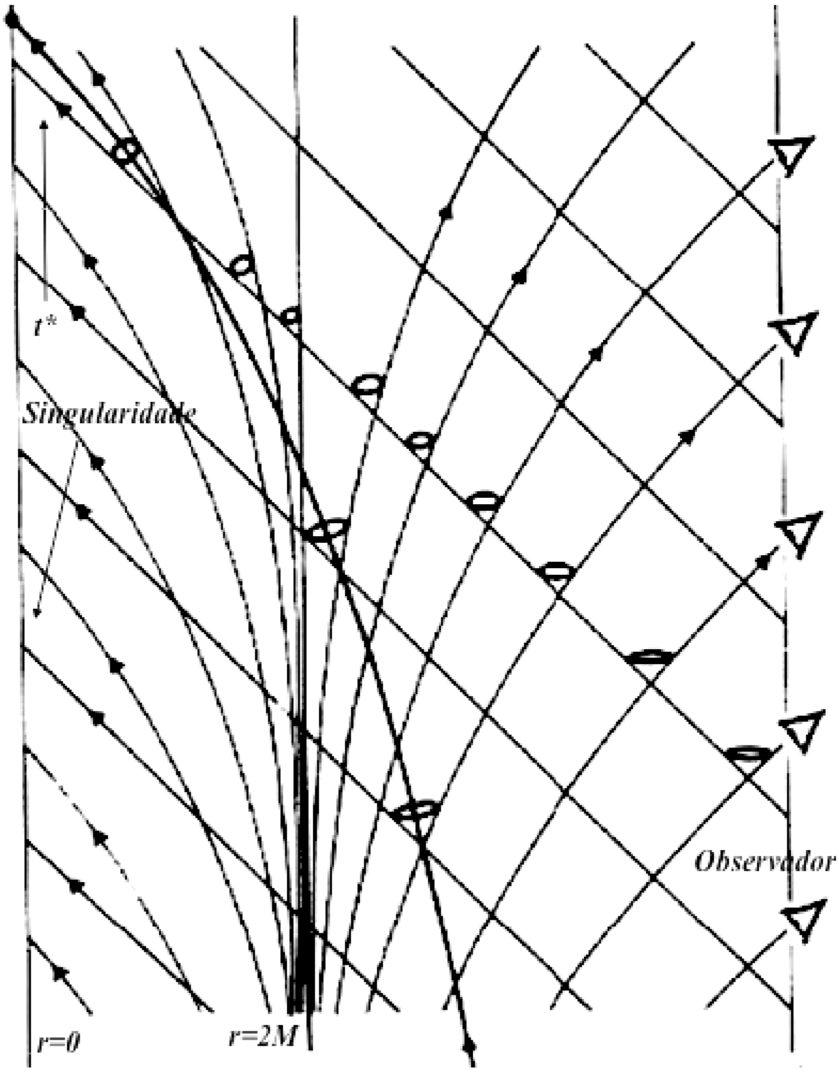

Figura 1: Linhas de mundo do tipo luz para o movimento radial de um fóton. Observe que para $r < 2M$, as linhas de mundo convergem para a singularidade em $r = 0$. O vértice do cone de luz segue a linha de mundo tipo tempo de uma parícula com massa.