UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Uma dedução heurística da métrica de Schwarzschild

Rodrigo Rodrigues Machado
&
Alexandre Carlos Tort

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Rodrigo Rodrigues Machado, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
fevereiro de 2016

Uma dedução heurística da métrica de Schwarzschild

Rodrigo Rodrigues Machado
Alexandre Carlos Tort

1 Uma dedução heurística da métrica de Schwarzschild

Neste Apêndice, obteremos a métrica de Schwarzschild por meio de uma abordagem heurística, entretanto, convém ter sempre em mente que o método heurístico nos dá uma abordagem prática e objetiva, porém necessariamente limitada, de um resultado teórico ou experimental.

Na gravitação newtoniana, a interação entre duas massas é dada pela Lei da Gravitação Universal. Suponhamos a existência de duas massas M e m isoladas. Suponhamos também, por simplicidade, que $M \gg m$. A interação gravitacional entre elas é descrita por

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2}.$$

A força é instantânea e o sinal negativo indica que M exerce uma força atrativa sobre m. Podemos considerar, por exemplo, M como a massa do Sol e m como a massa de um planeta. Combinando as leis do movimento de Newton com a Lei da Gravitação Universal obteremos as órbitas elípticas dos planetas do Sistema Solar. Correções que levam em conta perturbações devidas a vários fatores, por exemplo: a oblaticidade do Sol, podem posteriormente ser adicionadas. Com a excecão de uma pequena correção adicional à precessão de Mercúrio, a gravitação newtoniana explica perfeitamente a mecânica do Sistema Solar.

A gravitação newtoniana, porém, por questões envolvendo a instantaneidade, a simultaneidade e outras questões, é incompatível com a Teoria de Relatividade Restrita (TRR) e as tentativas de formular uma teoria da gravitação que satisfizesse seus postulados não prosperaram, ver [1]. Na Teoria da Relatividade Geral (TRG), as massas não interagem por meio de uma força, em outras palavras: não há força gravitacional. O que acontece é que m descreve uma trajetória extremante (um máximo ou um mínimo) entre dois eventos do espaço–tempo cuja geometria (curvatura) é determinada por M, no caso em que $M \gg m$. Esta trajetória extrema é chamada *geodésica*. Assim do ponto de vista da Teoria da Gravitação Relativística ou Teoria Geral da Relatividade, a massa m segue uma geodésica na geometria determinada por M. A Figura 1 ilustra a diferença fundamental entre as duas teorias.

Uma das grandezas mais importantes na TRR e na TRG é o *intervalo infinitesimal elevado ao quadrado* ou simplesmente *intervalo*, ds^2, que descreve a separação entre dois eventos no espaço–tempo quadridimensional. Lembremos que um evento é o equivalente de um ponto no espaço ordinário. O intervalo ds^2 é um invariante de Lorentz na TRR, isto é: tem o mesmo valor para dois observadores inerciais conectados por um transformação de Lorentz. Na TGR, o intervalo é um invariante não importa qual o estado de movimento do observador.

O espaço–tempo da TRR – o espaço de Minkowski – é plano e o intervalo ao quadrado infinitesimal invariante entre dois eventos é dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -c^2dt^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\phi^2, \end{aligned}$$

onde na segunda linha escrevemos a parte espacial em coordenadas polares esféricas. Note que o uso de coordenadas curvilíneas não implica necessariamente em espaço–tempo curvo. Por outro lado, o intervalo infinitesimal ao quadrado do espaço–tempo associado uma massa puntiforme isolada, isto é: *a métrica de Schwarzschild*, é dado por [1]:

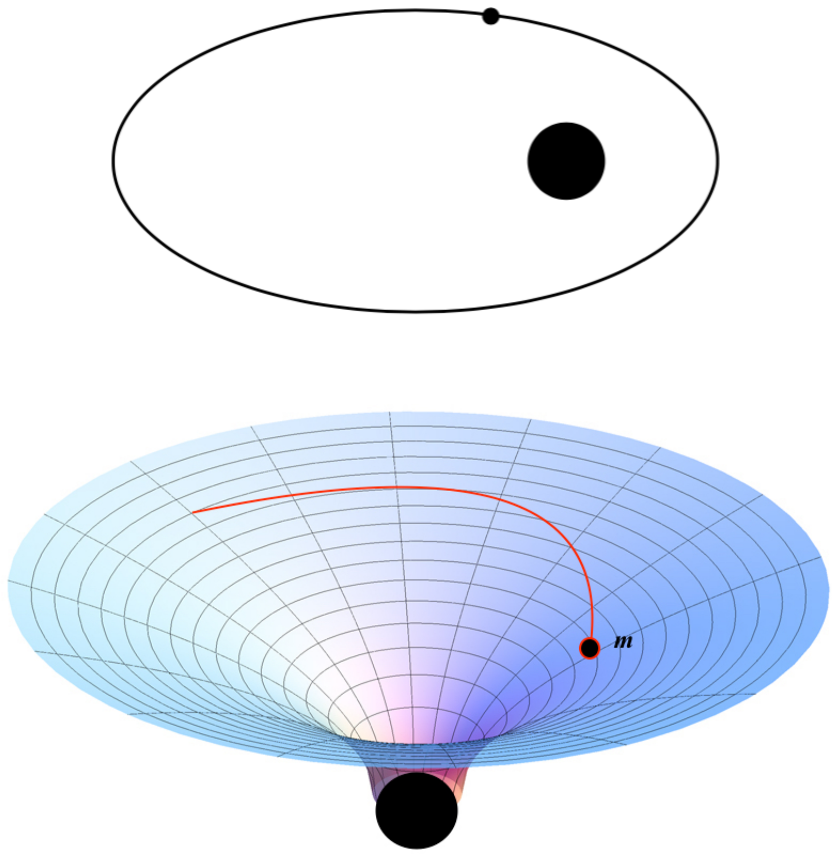

Figura 1: Na gravitação newtoniana m descreve uma órbita em torno de $M \gg m$ determinada pela Lei da Gravitação Universal e pelas condições iniciais. Na gravitação einsteniana, m segue uma geodésica na geometria do espaço–tempo determinada por M. (Ilustração em cores Wikipedia). *Apud* [2].

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r^2}\right)^{-1} + r^2 \, d\Omega^2,$$

onde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\phi^2$$

A obtenção deste resultado requer que resolvamos as equações de Einstein o que está fora do escopo deste trabalho. Entretanto, um argumento heurístico simples que se deve a Blinder [2] permite obter este resultado do seguinte modo: considere uma massa de prova m em queda livre a partir do infinito no campo gravitacional de uma massa $M \gg m$ que apresenta simetria esférica. Em relação ao observador distante, o observador suficientemente afastado para que os efeitos gravitacionais sobre ele sejam desprezíveis, a velocidade radial instantânea da massa de prova é v. Considere um referencial de Lorentz co-móvel com m. Nesse referencial, a massa m está instantaneamente em repouso. e um observador co-móvel com m, isto é, também em queda livre, escreverá a métrica localmente plana

$$ds^2 = -c^2 dt^{*\,2} + dr^{*\,2}.$$

Este é o Princípio da Equivalência. Para o observador distante, as distâncias infinitesimais dr^* medidas pelo observador co-móvel com réguas instantaneamente em repouso sofrem contração de Lorentz, isto é:

$$dr = \frac{dr^*}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dr^*,$$

e os relógios do observador co–móvel que marcam intervalos de tempo infinitesimais dt^* sofrem dilatação temporal:

$$dt = \gamma\, dt^* = \frac{dt^*}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Portanto, o observador distante descreve a métrica local na forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} dr^2.$$

Suponha agora que a massa de prova em queda livre desde o infinito tenha uma energia mecânica E nula. A uma distância radial r de M, para o observador distante sua energia se escreve:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = 0,$$

segue que

$$v^2 = \frac{2GM}{r}.$$

Definindo o *raio de Schwarzschild* por:

$$R_{\mathrm{s}} = \frac{GM}{c^2},$$

e substituindo esta definição na métrica do observador distante temos:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_{\mathrm{s}}}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R_{\mathrm{s}}}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, d\Omega^2,$$

que é a métrica de Schwarzschild nas coordendadas do observador distante. Observe que no final acrescentamos a parte espacial angular. Observe também que no limite $r \to \infty$ recuperamos a métrica de Minkowski.

Naturalmente, a abordagem heurística não substitui a abordagem via TGR, mas seu uso aqui justifica-se pela simplicidade, pelo resultado final, o qual está em concordância com o obtido de modo rigoroso por Schwarzchild em 1916 [3], e pelo público–alvo para o qual este trabalho está voltado.

Referências

[1] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler: *Gravitation* (Freeman; San Francisco) 1970. Ver Capiítulo 7 pp. 177.

[2] S. M. Blinder: *Centennial of General relativity (1915–2015): The Schwrzschild Solution and Black Holes*. araXiv: 1512.02061v1 [physics–pop–ph] 3 Dec 2015.

[3] K. Schwarzschild: *On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory*. arXiv:physics/9905030 [physics] 12 May 1999. (Tradução para o inglês do original em alemão.).