



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Animações dos Ciclos de Carnot e Brayton

Rodrigo Rodrigues Machado
&
Alexandre Carlos Tort

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Rodrigo Rodrigues Machado, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
fevereiro de 2016

Animações dos Ciclos de Carnot e Brayton

Rodrigo Rodrigues Machado

Alexandre Carlos Tort

1 Animações dos ciclos de Carnot e Brayton

Nós apresentaremos aqui uma simulação para os ciclos quânticos de Carnot e Brayton utilizando o programa *Geogebra*. Antes de apresentar a simulação, nós estabeleceremos as variáveis pertinentes para descrever tais sistemas, bem como as relações válidas em cada processo utilizado nas simulações.

Introdução

Os ciclos de Carnot e Brayton são analogias quânticas dos seus respectivos ciclos clássicos. Por meio de um átomo preso em um poço de potencial (poço quadrado infinito) podemos construir nossas analogias. Para construir nossos processos, precisamos definir alguns parâmetros importantes para a descrição desse problema, a saber:

- L - largura do poço;
- $E(L)$ - energia média;
- $F(L)$ - força exercida pelo átomo na parede do poço de potencial.

O termo $E(L)$ representa a energia média e é calculada a partir da seguinte relação

$$E(L) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 E_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2}, \quad (1)$$

onde o termo E_n representa os autoestados de energia da partícula.

Para construir os análogos quânticos dos processos termodinâmicos clássicos é necessário introduzir algumas definições. Podemos diferenciar a equação (1) e obter a seguinte relação

$$dE = \sum_{n=1}^{\infty} d(|a_n|^2) E_n + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 dE_n. \quad (2)$$

Podemos, então, definir a força $F(L)$, que desempenhará o papel de análogo da pressão, como a derivada em relação a L do segundo termo da equação (2), ou seja,

$$F(L) = - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \frac{dE_n}{dL}. \quad (3)$$

Por meio das relações acima, é possível construir processos quânticos análogos aos processos clássicos. A seguir, descreveremos os processos quânticos necessários para o entedimento dos ciclos quânticos mencionados anteriormente.

Processo isotérmico quântico

Para um gás ideal que realiza um processo isotérmico, sabemos que o produto pressão-volume é uma constante. Denotando esta constante por C temos,

$$PV = C. \quad (4)$$

Neste caso, sabemos que a energia interna é somente uma função da temperatura. Assim, um processo à temperatura constante também é um processo à energia constante. Para nosso processo isotérmico quântico, o valor médio da energia será mantido constante. Neste processo, será permitido que a parede do poço em $x = L$ possa se movimentar. Por meio dos resultados obtidos na seção anterior vemos que à medida que a parede do poço se move a energia varia, pois a energia média é uma função de L e cai com o inverso do quadrado da largura do poço, isto é:

$$E(L) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 E_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2}. \quad (5)$$

Mas, por definição, no processo isotérmico a energia média deve ser constante. Assim, devemos fornecer energia para a partícula quântica – a substância de trabalho – de modo a manter o produto $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 E_n$ constante. Esse tipo de energia necessária para manter a energia média constante vem de uma fonte externa e varia unicamente o termo a_n . Definiremos esta interação como calor. Mais adiante mostraremos como calcular esta quantidade. A força $F(L)$, pela relação (3), se escreve

$$F(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2 \pi^2 \hbar^2 n^2}{mL^3}, \quad (6)$$

ou, rescrevendo convenientemente a expressão acima:

$$F(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} |a_n|^2 E_n. \quad (7)$$

Como o produto $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 E_n$ é constante, vemos que

$$F(L)L = C, \quad (8)$$

onde C é uma constante. Esta relação é o análogo quântico da relação pressão \times volume = constante, válida para o gás ideal e é a nossa primeira analogia quântica de um processo termodinâmico.

Processo adiabático quântico

Para um gás ideal que realiza um processo adiabático, sabemos que o produto pressão-volume elevado à razão entre o calor específico a pressão constante c_p e o calor específico a volume constante c_v é também uma constante, isto é:

$$PV^\gamma = C, \quad (9)$$

onde $\gamma = c_p/c_v$, e C é uma constante. Assim, como foi feito anteriormente, permitiremos que a parede do poço movimente-se. No processo adiabático, o valor médio da energia não é mais constante. No entanto, se o processo for realizado lentamente, ou seja, no regime quase-estático, os valores absolutos do coeficiente de expansão $|a_n|$ permanecerão constantes [Bender]. Então, o valor de $E(L)$ vari-

ará de acordo com a variação de E_n . Segue que da equação (6) podemos escrever

$$F(L)L^3 = C, \quad (10)$$

onde C é uma constante.

Processo isobárico quântico

Para um gás ideal que realiza um processo isobárico, sabemos que a razão entre o volume V e a temperatura T é uma constante:

$$\frac{V}{T} = C. \quad (11)$$

Portanto, na analogia quântica, o valor de $F(L)$ deve ser uma constante. Podemos mostrar, procedendo como anteriormente, que a razão $E(L)/L$ deve ser uma constante, isto é:

$$\frac{E(L)}{L} = C. \quad (12)$$

Simulação das máquinas de Carnot e Brayton

Os ciclos de Carnot e Brayton nas suas versões quânticas foram simulados por meio de um programa de geometria dinâmica que permite construir animações. O programa utilizado foi o *Geogebra*, que é gratuito e tem versões compatíveis com os principais sistemas operacionais utilizados hoje em dia (Windows, Linux e Mac). O programa pode ser baixado do endereço *link*: <http://www.geogebra.org/>. Nas Figuras (1) e (2) dois quadros fixos são apresentados. As animações completas podem ser acessadas no *link*: http://www.if.ufrj.br/~pef/producao_academica/dissertacoes/2016_Rodrigo_Machado/.

Ambas as simulações foram feitas utilizando valores arbitrários de energias. Para a utilização das simulações, é necessário a instalação do programa *Geogebra*. Na simulação, existem três botões, a saber: iniciar, pausar e reiniciar. O início da

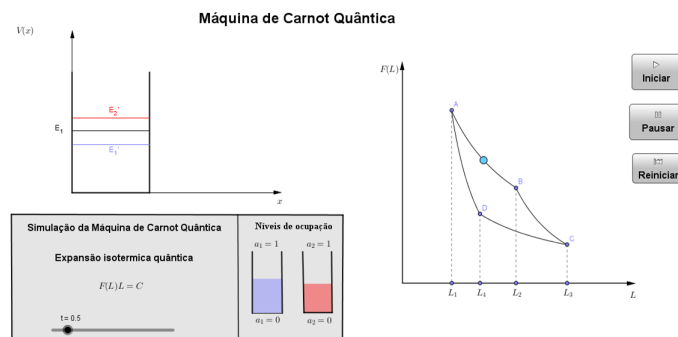


Figura 1: Quadro fixo do ciclo de Carnot.

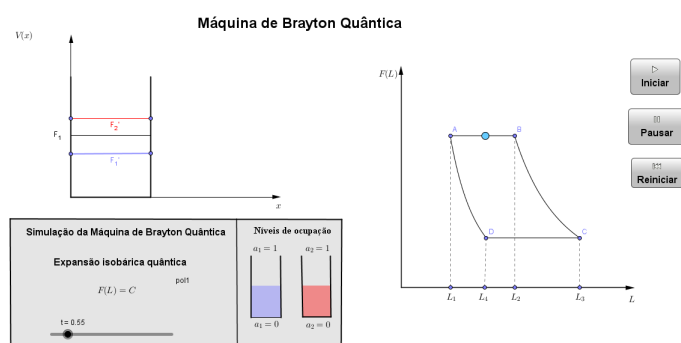


Figura 2: Quadro fixo do ciclo Brayton.

simulação ocorre ao pressionar-se o botão iniciar. A simulação pode ser pausada e, caso o leitor queira recomençar a simulação o botão reiniciar é utilizado. Durante as simulações, em cada processo quântico, são mostradas as expressões análogas quânticas de processos termodinâmicos clássicos. Ao completar o ciclo (término da simulação) o valor da eficiência é calculado. Por fim, notamos que na simulação apresentada, os processos não são realizados de maneira quase-estática como é feito neste capítulo. Entretanto, a simulação é apenas uma maneira visualizar os processos descritos no decorrer do texto.

Referências

- [1] C. M. Bender, D. C. Brody e B. K. Meister, *Quantum mechanical Carnot engine*, J. Phys. A: Math.