



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## **Alguns problemas instigantes de mecânica: das tautócronas à montanha-russa caipira**

Pedro de Paula Terra

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientadores:  
Carlos Farina de Souza  
Reinaldo de Melo e Souza

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2016

# Alguns problemas instigantes de mecânica: das tautócronas à montanha-russa caipira

Pedro de Paula Terra

Orientador: Carlos Farina de Souza  
Reinaldo de Melo e Souza

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Prof. Carlos Farina de Souza (Presidente)

---

Prof. Reinaldo de Melo e Souza

---

Prof. Jorge Simões de Sá Martins

---

Prof. Sérgio Eduardo Silva Duarte

---

Prof. Carlos Augusto Domingues Zarro

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2016

## FICHA CATALOGRÁFICA

T323a Terra, Pedro de Paula

Alguns problemas instigantes de mecânica: das tautócronas à montanha-russa caipira / Pedro de Paula Terra. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2016.

ix, 108 f. : il. ; 30 cm.

Orientadores: Carlos Farina de Souza; Reinaldo de Melo e Souza.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2016.

Referências Bibliográficas: f. 101-102.

1. Ensino de Física. 2. Mecânica clássica. 3. Experimentos didáticos. I. Farina, Carlos. II. de Melo e Souza, Reinaldo. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. IV. Alguns problemas instigantes de mecânica: das tautócronas à montanha-russa caipira.

Ao meu avô, Francisco Terra  
(*in memoriam*).

## Agradecimentos

Aos meus orientadores, Farina e Reinaldo, por generosamente compartilharem comigo, mais que sua inteligência e seu entusiasmo, momentos de agradável e proveitoso convívio durante a feitura deste trabalho;

Aos professores Carlos Zarro, Carlos Aguiar, Ildeu Moreira, Lucia Helena, Marta F. Barroso e Vitorvani Soares, por terem, nos cursos do mestrado, nos estimulado e conduzido a ser professores melhores;

Ao Hercílio Córdova, exímio artesão de experimentos didáticos, pela construção do lançador de projéteis e pelas preciosas dicas em outros experimentos;

À Daniela Szilard, por toda a ajuda com a feitura de gráficos e com o Mathematica;

Aos colegas de mestrado, com quem dividi esta jornada: Alipson Assis, André Faria, Fabiano Pereira, Gilberto Nobre, Hercílio Córdova, Hugo Detoni, João Gabriel de Oliveira, Leandro Fernandes, Márcio Velloso, Márcio Santos, Otávio Fossa, Ricardo Fagundes, Roberta Telles, Rodrigo Rossini;

Aos professores do Colégio Pedro II que me ajudaram e aconselharam para viabilizar diversas etapas deste trabalho: Bruna Leite, Jaqueline Sales, Marcos Moura, Sérgio Lima;

À família Terra, pelo amor incondicional, pelo apoio e pela compreensão;

Aos alunos do Colégio Pedro II – Campus Engenho Novo II que participaram da atividade sobre lançamentos oblíquos;

A todos os meus alunos, passados e presentes, que me dão a cada dia novas razões para a busca do meu desenvolvimento profissional;

Aos meus amigos Alex Cotrim, Eduardo Martins Neto, Eduardo Rizzo, Guilherme Santos, Jéssica Pereira, Maurício Hippert, Mariana Francisquini, Rafael Bérenger e Raphael Montes, cujas companhias embalaram de forma especial esses anos de mestrado e muitos outros.

Aos colegas de profissão que me inspiram desde os tempos de estudante e a quem devo, pelo desejo de imitá-los, minha escolha profissional.

## RESUMO

### **Alguns problemas instigantes de mecânica: das tautócronas à montanha-russa caipira**

Pedro de Paula Terra

Orientadores:

Carlos Farina de Souza  
Reinaldo de Melo e Souza

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Apresentamos uma breve coleção de três problemas de mecânica clássica que têm em comum a característica de ser surpreendentes e de instigar a curiosidade dos estudantes. Primeiramente, apresentamos um resultado inédito para o problema da tautócrona, mostrando que há infinitas soluções além daquela obtida por Huygens no século XVII, a cicloide. Mostramos também que há uma relação geométrica entre as formas de trilhos sobre as quais partículas podem deslizar sem atrito para movimentos isoperiódicos. Em seguida, apresentamos dois problemas que podem ser resolvidos, em maior ou menor extensão, no ensino médio, e sugerimos caminhos para a sua abordagem. Para um desses problemas, descrevemos detalhadamente uma sequência de atividades e relatamos a experiência de sua implementação em uma escola federal de ensino médio.

Palavras chave: Ensino de Física, Mecânica clássica, Experimentos didáticos.

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2016

## ABSTRACT

### **A few titillating problems in Classical Mechanics: from tautochrones to the tractor-tyre rollercoaster**

Pedro de Paula Terra

Supervisors:

Carlos Farina de Souza  
Reinaldo de Melo e Souza

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

We present a small collection of three problems in classical mechanics, which feature surprising effects and stimulate the curiosity of students. First, we present a new result on the tautochrone problem, showing that there is an infinite number of solutions other than the well-known cycloid, which was obtained by Huygens in the 17th century. We also show that there is a geometric relation between tracks on which a particle may slide without friction for isoperiodic motions. We then present two problems which can be solved, to a greater or lesser extent, by high-school students, suggesting a method for teachers to approach them in the classroom. For one of these problems, we describe a sequence of activities, and report its implementation in a brazilian secondary school.

Keywords: Physics education, Classical mechanics, Didactic experiments.

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2016

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Infinitas tautócronas</b>	<b>5</b>
2.1	Problemas diretos e inversos . . . . .	6
2.2	Breve história da tautócrona . . . . .	7
2.3	Potenciais cisalhados . . . . .	9
2.3.1	Lei de potências . . . . .	12
2.3.2	Potenciais Morse e Pöschl-Teller . . . . .	14
2.3.3	Prescrição para cisalhar potenciais . . . . .	17
2.4	Cisalhando trilhos . . . . .	18
2.5	Infinitas tautócronas . . . . .	21
2.5.1	Ramos de cicloides . . . . .	22
2.5.2	Completando tautócronas . . . . .	23
2.6	Revisão e aplicações didáticas . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Parábola de segurança</b>	<b>26</b>
3.1	Duas demonstrações tradicionais . . . . .	28
3.1.1	Demonstração com cálculo diferencial . . . . .	29
3.1.2	Demonstração algébrica . . . . .	31
3.2	Montagem experimental . . . . .	32
3.3	Sequência didática . . . . .	34
3.3.1	Primeira aula . . . . .	35
3.3.2	Segunda aula . . . . .	38
3.3.3	Terceira aula . . . . .	41
3.4	Experiência de implementação . . . . .	44
3.4.1	Primeira aula . . . . .	46
3.4.2	Segunda aula . . . . .	49
3.4.3	Terceira aula . . . . .	51
3.4.4	Avaliação da atividade . . . . .	54

<b>4</b>	<b>A montanha-russa caipira</b>	<b>56</b>
4.1	Introdução . . . . .	56
4.2	Estudo geométrico do movimento . . . . .	59
4.2.1	Raio de curvatura . . . . .	60
4.3	Dinâmica do movimento . . . . .	63
4.3.1	Resolução pelo lagrangiano . . . . .	64
4.3.2	Análise das forças . . . . .	66
4.4	Material experimental . . . . .	68
4.5	Sequência didática . . . . .	70
4.5.1	Disco sobre a rampa: caso estático . . . . .	71
4.5.2	Oscilação sobre o plano horizontal . . . . .	73
4.5.3	Passeio no plano horizontal . . . . .	76
4.5.4	O disco saltante . . . . .	78
4.6	Comentários finais . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>87</b>
<b>A</b>	<b>Distinção entre potenciais e trilhos</b>	<b>90</b>
<b>B</b>	<b>Parametrização da cicloide na coordenada arco de comprimento</b>	<b>92</b>
<b>C</b>	<b>Problemas de cisalhamento para o ensino médio</b>	<b>94</b>
C.1	Potenciais cisalhados . . . . .	94
C.2	Cisalhamento no comprimento . . . . .	96
<b>D</b>	<b>Questionário sobre lançamentos</b>	<b>99</b>
D.1	Questionário — atividade sobre lançamentos . . . . .	99
D.1.1	Lançamentos oblíquos . . . . .	100
D.1.2	Lançamentos oblíquos — parte 2 . . . . .	101
D.1.3	Lançamentos oblíquos — parte 3 . . . . .	104
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>107</b>

# Capítulo 1

## Introdução

No âmbito de um mestrado profissional em Ensino de Física, desejamos produzir, a partir de um conhecimento teórico multidisciplinar, uma aplicação prática que enriqueça a atividade docente. Somos, em primeiro lugar, professores e, por isso, almejamos conceber uma proposta concreta que incorpore novas possibilidades à nossa atividade central. Esperamos, ainda, que nosso trabalho possa alcançar outros colegas de profissão e que com eles gere novos frutos.

Nesse sentido, os trabalhos realizados nesta dissertação são propostas que visam a contribuir para a aprendizagem e a ser realizadas efetivamente em salas de aula. As estratégias didáticas que serão exploradas aqui se apresentam de forma completa, mas não final, podendo e devendo sofrer transformações consonantes com o contexto da sua aplicação. Muito do que vai se desenvolver a partir das propostas aqui presentes depende daquilo que os estudantes com os quais as atividades forem utilizadas vierem a apresentar.

Algumas convicções nortearam as escolhas que adotamos na feitura deste trabalho.

Primeiramente, acreditamos que o aluno terá sempre uma participação ativa na aprendizagem. Entre o ato de ensinar e o de aprender há uma lacuna que só pode ser vencida pela vontade do aluno. Existe, inevitavelmente, uma camada do processo educativo que está fora do controle dos professores, mas que não nos é de todo impenetrável. Cabe-nos buscar meios para induzi-

la a favor da aprendizagem, estimulando o envolvimento e a volição dos estudantes.

Para tanto, acreditamos que as principais forças motrizes do genuíno interesse dos estudantes são a curiosidade, o fascínio e o desafio. Procuramos, por isso, trazer propostas fenômenos que suscitem essas qualidades. Não nos esquivamos de apresentar problemas que podem ser considerados intrincados, mas em cuja complexidade se esconde uma grande riqueza.

Finalmente, apesar de sabermos que nenhuma abordagem será capaz de atingir a todos os alunos, temos a convicção de que, se mobilizados a trabalhar em conjunto, todos poderão dar alguma contribuição significativa à compreensão de um problema, bem como se beneficiar da análise aprofundada de um problema mais complexo.

O caminho ao qual nos lançamos se baseia em propor problemas convenientes de ser analisados por meio uma mistura de método teórico e de método experimental. Limitamo-nos à mecânica clássica, porém abordando todos os seus tópicos centrais. Essa opção se deve ao amplo espaço que esse tema tem nos currículos usuais e ao grande número de conceitos que tem em comum com os demais componentes curriculares. Um bom entendimento da mecânica serve de alicerce para a compreensão de todas as outras partes da Física, porque nela se originaram muitas ideias que são revisitadas em outras áreas.

Buscamos selecionar problemas que reúnem as seguintes características: riqueza conceitual, bom nível de desafio e um grau de surpresa. A riqueza conceitual deve abrir espaço para o tratamento de diversos conceitos em um mesmo problema — da mesma forma como acontecem as situações reais que se pode desejar estudar. Não desejamos apenas nos servir das ideias de que os alunos já terão explorado em sala de aula, mas ampliá-las: estudar novos tipos de movimento que não sejam o uniforme nem o uniformemente variado, entender conceitualmente o torque fora do equilíbrio etc. Isso permite não só expandir os horizontes de conteúdos abordados, mas também reforçar os limites de validade e o poder daquilo que já foi aprendido.

O desafio serve como mote para a busca de soluções criativas, a tentativa de métodos de análise diferenciados e a discussão em grupo. Ele traz a

reboque a necessidade de participação dos estudantes, o que é cada vez mais difícil num contexto educacional permeado por uma profusão de videoaulas e de recursos simplificadores, que nos tentam a acreditar, equivocadamente, que a aprendizagem pode ocorrer com uma atitude passiva.

Além disso, os problemas deveriam ser passíveis de estudo em configurações diversas e por uma ampla gama de estratégias distintas. Medidas, demonstrações, simulações e cálculos terão espaço no processo de solução dos problemas apresentados. Apesar de essa não ser uma de nossas prioridades, acreditamos também que nossos problemas têm a vantagem de não requerer um espaço específico de laboratório nem recursos materiais de grande custo ou complexidade.

Colhemos os problemas com essas características de duas vastas fontes: a história da Física e o cotidiano. Reconhecer os problemas abordados nesse contexto os preenche de significado e de propósito: não são situações arbitrárias que servem apenas para compor um exercício de Física, mas problemas que têm um escopo mais largo.

Para abordar os temas de que trataremos, o professor deverá entender a Física envolvida nesses problemas completamente. Por isso, procuramos descrevê-los da forma mais completa possível em cada capítulo.

De forma geral, delineamos, para a solução dos problemas aqui apresentados, uma estratégia que pode ser aplicada a um extenso rol de problemas de Física mais elaborados e, portanto, ao estudo de situações reais. Desejamos, portanto, contribuir para que o aluno tenha um olhar sobre a ciência como um corpo de conhecimento que não é autocontido, mas que se propõe à compreensão e à resolução de problemas reais. De fato, ainda que muitas vezes as técnicas matemáticas necessárias para a resolução completa de problemas estão além do nível de ensino médio; no entanto, admitir a sua análise experimental e computacional como partes do processo de análise coloca-os ao alcance da compreensão dos estudantes.

Finalmente, realizamos uma das práticas propostas aqui com grupos de alunos do Colégio Pedro II. Faremos, portanto, uma descrição dessa experiência e uma breve avaliação do impacto que teve na aprendizagem dos alunos.

Esta dissertação está organizada como a seguir:

No capítulo 2 tratamos do problema da tautócrona, ou seja, o de encontrar a forma de um trilho sobre a qual uma partícula pode oscilar com período independente da amplitude. Apresentamos desenvolvimentos inéditos no âmbito desse problema. Apesar de esses resultados, devido a requisitos matemáticos, só poderem ser plenamente apreciados no âmbito do ensino superior, a história da tautócrona, sua discussão conceitual e o cisalhamento de trilhos encontram espaço confortavelmente no ensino médio. De mais a mais, a abordagem desse problema se justifica por servir para enriquecer cursos voltados à formação inicial e continuada de professores.

No capítulos 3 e 4, são apresentados problemas experimentais, fazendo primeiro sua análise do ponto de vista de um professor de Física, ou seja, expondo-os com completeza para um leitor experiente no tema. Uma vez bem entendidos os problemas, tratamos propostas detalhadas de abordagem em sala de aula. Descrevemos também o procedimento de montagem dos experimentos para o professor que deseje reproduzi-lo total ou parcialmente.

Os temas e parte do conteúdo desses dois capítulos compõem os produtos que acompanham esta dissertação. Tais produtos constituem-se de uma apresentação independente das atividades aí descritas, voltadas para o professor interessado em aplicá-las, e podem ser consultadas de forma separada da dissertação.

Finalmente, o capítulo 5 encerra o texto com um breve sumário dos trabalhos apresentados e uma análise dos seus possíveis desdobramentos.

## Capítulo 2

### Infinitas tautócronas

Neste capítulo, abordamos um problema de natureza mais técnica que os demais apresentados nesta dissertação e que recentemente publicamos em [1]. Trata-se de um resultado inédito sobre o clássico problema da tautócrona, um marco na história da Mecânica originalmente solucionado por Huygens. Esse problema consiste em encontrar a forma da curva tal que, quando uma partícula se move sobre ela sem atrito e sob gravidade constante, o período de oscilações independe do ponto de partida.

Uma vez que seus aspectos matemáticos só podem ser completamente apreciados com conhecimentos de cálculo diferencial e integral, o tema deste capítulo só pode ser extensamente abordado em cursos universitários de Mecânica Clássica, incluindo aqueles voltados à formação inicial e continuada de professores. Não obstante, muitos aspectos históricos e técnicos do problema podem ser levados sem embaraço para o ensino médio. Além disso, a construção prática de trilhos para o estudo do movimento sob campo gravitacional uniforme, que será discutida adiante, encontra utilidade no âmbito experimental para todos os níveis de ensino.

O resultado que apresentaremos tem duas inspirações, às quais dedicaremos as seções 2.2 e 2.3 deste capítulo: o problema da tautócrona e a teoria dos potenciais cisalhados. Faremos, primeiramente, uma breve revisão histórica da tautócrona, visando à contextualização do problema. Revisitaremos, então, a teoria dos potenciais cisalhados, apresentando também alguns

exemplos inéditos. Em seguida, apresentaremos um novo método, análogo aos potenciais cisalhados, para a construção de trilhos sobre os quais um corpo pode ser posto a deslizar. Aplicaremos esse resultado à solução de Huygens para o problema da tautócrona, mostrando que essa solução não é única e que há, na verdade, infinitas tautócronas para o caso de movimentos periódicos.

## 2.1 Problemas diretos e inversos

Pode-se dizer que em Mecânica Clássica há essencialmente dois tipos de problemas: os diretos e os inversos. Nos primeiros, são conhecidas as forças que atuam sobre um sistema e devem-se determinar, a partir delas, os possíveis movimentos. Já nos problemas inversos, são conhecidos os possíveis movimentos (ou algumas de suas características) e deseja-se caracterizar as forças que os provocaram.

Mais informalmente, em problemas inversos, o objetivo é descobrir as causas a partir da análise dos efeitos<sup>1</sup>.

Os cursos de Física do ensino médio e de Física básica na universidade são dedicados sobretudo à resolução de problemas diretos. No entanto, problemas inversos são extremamente frequentes e estão no cerne de alguns dos maiores avanços na história da Física. Alguns exemplos são a obtenção, por Isaac Newton, da forma matemática da força gravitacional a partir das leis de Kepler, e a descoberta do núcleo atômico por Rutherford a partir do espalhamento de partículas  $\alpha$  por uma folha fina de ouro. Em Física contemporânea, muito da compreensão sobre as interações fundamentais entre partículas elementares advém da observação dos produtos de seu espalhamento.

Mesmo no caso do movimento unidimensional de uma partícula sob efeito de uma força conservativa, podem-se propor problemas inversos com soluções surpreendentes. Considere, por exemplo, os movimentos periódicos de uma

---

<sup>1</sup>Bohren e Huffman [2] expressam essa distinção de forma bem-humorada: “Em problemas diretos, conhecido o dragão devemos ser capazes de determinar como são suas pegadas; em problemas inversos, a partir da simples observação das pegadas, devemos inferir como é o dragão.” (tradução livre)

partícula sujeita a um poço de potencial  $U(x)$ . Conhecido o potencial  $U(x)$  — ou seja, no caso do problema direto —, os períodos de oscilação em função da energia  $\tau(E)$  estão univocamente determinados. Contudo, a recíproca não é verdadeira: como demonstraremos na seção 2.3, uma única função  $\tau(E)$  admite *infinitos* potenciais  $U(x)$ . Esses potenciais estão relacionados entre si por uma operação de cisalhamento, o que foi demonstrado por Landau e Lifshitz [3] de um modo engenhoso que reproduziremos integralmente neste capítulo<sup>2</sup>.

## 2.2 Breve história da tautócrona

Dedicamos esta seção a uma breve revisão histórica do problema da tautócrona, que, além de fascinante, teve um importante papel na história da mecânica clássica do século XVII<sup>3</sup>.

Nessa época, medidas de latitude eram simples de obter a partir da posição dos astros, mas a medida de longitudes — de vital importância para as navegações marítimas —, estava longe de ser uma tarefa fácil, uma vez que requiritava uma medida precisa do tempo. O relógio de pêndulo, construído pelo grande físico, matemático e astrônomo holandês Christiaan Huygens<sup>4</sup> em 1658, aprimorou em pelo menos uma ordem de grandeza a precisão de medidas de tempo [9], mas isso não foi suficiente para garantir uma medida segura da longitude.

Com o propósito de melhorar os cronômetros marítimos, Huygens começou a procurar por um pêndulo *isócrona* — ou seja, um pêndulo que não

---

<sup>2</sup>O resultado sobre os potenciais cisalhados foi também obtido por outros autores usando diferentes abordagens, que recomendamos aos leitores interessados. Sugerimos o livro de Pippard [4] para uma elegante demonstração gráfica dos potenciais cisalhados. O artigo de Osypowski e Olsson [5] traz uma demonstração a partir de transformadas de Laplace. Desdobramentos recentes e casos análogos em mecânica quântica estão presentes em Asorey *et al.* [6].

<sup>3</sup>A dissertação de Diego Uzêda [7] apresenta um relato mais abrangente da história de Christiaan Huygens, bem como da sua contribuição no desenvolvimento dos pêndulos e o estudo geométrico da cicloide. Mais detalhes sobre esses temas são contados no livro de Gindikin [8].

<sup>4</sup>Galileu já tinha tentado construir um relógio de pêndulo, mas nunca finalizou sua execução. A patente desse invento foi, portanto, concedida a Huygens.

muda de período de oscilação com a variação da amplitude —, uma vez que ele sabia que o pêndulo simples só teria essa propriedade para pequenas amplitudes.

Um cronômetro marítimo construído com um pêndulo isócrona não mudaria de período de oscilação mesmo com o balanço provocado pelo mar. Huygens sabia que, para mudar o formato da trajetória, poderia posicionar anteparos laterais de formato apropriado de modo adjacente ao fio de um pêndulo simples<sup>5</sup>. No entanto, ele não conseguiu determinar empiricamente a forma exata desses obstáculos.

Então o destino veio em seu auxílio. Blaise Pascal, o famoso físico, matemático e filósofo francês, que tinha abandonado a ciência após uma epifania religiosa em 1654, teve uma dor de dente insuportável em 1658 que parecia resistir a todo remédio. Em uma tentativa desesperada de esquecer a dor, Pascal decidiu pensar em matemática; em particular, debruçou-se sobre alguns problemas envolvendo a cicloide que lhe foram propostos pelo abade francês Mersenne. Por coincidência ou não, a dor desapareceu completamente, fato que Pascal interpretou como um sinal divino para que ele continuasse se dedicando a problemas que envolviam essa curva.

Pascal veio a solucionar muitos dos problemas propostos por Mersenne, bem como a formular alguns mais. No entanto, em vez de os publicar, ele decidiu montar um concurso composto de seis problemas sobre a cicloide. Muitos cientistas importantes da época se encorajaram em participar desse concurso, incluindo Huygens.

Uma vez se tornando especialista na cicloide, Huygens decidiu experimentar para ver se a curva resolveria o problema do pêndulo isócrona. Felizmente, Huygens descobriu que a cicloide era uma tautócrona — uma curva sobre a qual uma partícula deslizaria sem atrito sob ação exclusiva de uma força peso constante e da força normal, com períodos independentes da altura de onde fosse abandonada.

Contudo, o objetivo era construir um pêndulo, de forma que a partícula

---

<sup>5</sup>A relação entre a forma do *anteparo* e a da *trajetória* constitui um problema fascinante de geometria, sendo o anteparo denominado de *evoluta* da trajetória descrita pela massa do pêndulo, enquanto esta última se diz uma *involuta* do anteparo. Formalmente, a evoluta de uma curva é o lugar geométrico dos seus centros de curvatura.

estaria sujeita à força peso constante e à força de tração exercida por um fio<sup>6</sup>. Era, portanto, necessário ainda descobrir a evoluta da trajetória, que caracterizaria a forma do anteparo lateral a limitar o movimento do pêndulo. Mais uma vez, Huygens experimentou a cicloide como solução do problema e foi bem-sucedido: a evoluta de uma cicloide é a própria cicloide (deslocada e em oposição de fase). Pode-se dizer que foi um golpe de sorte: não é muito comum que uma curva seja a sua própria evoluta.

Huygens se empenhou, dentre outras coisas, no aprimoramento de relógios por quase quatro décadas, mas seu relógio de pêndulo cicloidal, bem como seu relógio de pêndulo cônico isócrono, não tiveram muito êxito como pêndulos marítimos, devido à dissipação provocada pelas forças de atrito com os anteparos. No entanto, seu legado no desenvolvimento de curvas, evolutas e involutas, que teve origem no seu estudo dos relógios, podem ser sentidas até hoje em diferentes áreas, desde a geometria diferencial até os quasicristais [10].

## 2.3 Potenciais cisalhados

Nossa abordagem do problema da tautócrona está baseada na teoria dos potenciais cisalhados<sup>7</sup>. Por isso, faremos aqui uma breve revisão desse resultado em mecânica clássica, seguindo o método apresentado no livro de Landau e Lifshitz [3].

Consideremos uma partícula de massa  $m$  que se move ao longo do eixo  $\mathcal{O}x$  com energia mecânica total  $E$ , sob ação exclusiva de uma força conservativa  $\mathcal{F}(x) = -dU(x)/dx$ , sendo  $U(x)$  um poço de potencial genérico. Por conveniência e sem perda de generalidade, escolhemos a origem do eixo  $\mathcal{O}x$  coincidente com o único mínimo do poço  $U(x)$ , tal que  $U(0) = 0$ . Os pontos de retorno do movimento da partícula são dados pelas raízes da equação algébrica  $E = U(x)$ , que denotaremos por  $x_1$  e  $x_2$ , com  $x_2 > x_1$ . Da conservação

---

<sup>6</sup>A força de tração no fio cumpre papel idêntico ao da força normal no movimento sobre um trilho.

<sup>7</sup>Cometemos aqui um abuso de linguagem que, apesar de comum, preferimos esclarecer ao leitor: por *potencial*, entenda-se *energia potencial*.

da energia mecânica, tem-se que

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x). \quad (2.1)$$

O período das oscilações será simplesmente o dobro do tempo que a partícula leva para ir de  $x_1$  a  $x_2$ . Integrando a equação 2.1, portanto, pode-se encontrar o período de oscilações:

$$\tau(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (2.2)$$

Nota-se dessa equação que, dadas a energia mecânica  $E$  e a função energia potencial  $U(x)$ , fica univocamente determinado o período das oscilações. Em outras palavras, a função  $\tau : E \mapsto \tau(E)$  está univocamente determinada pela função  $U : x \mapsto U(x)$ .

Cabe, aqui, uma pergunta natural: a recíproca também é verdadeira?, ou seja, uma função período  $\tau(E)$  e uma energia mecânica  $E$  também determinam uma única função  $U(x)$ ? Para analisar esse problema inverso, convém tomar a coordenada  $x$  como uma função da energia potencial  $U$ . Uma vez que a função  $U(x)$  não é injetora, é necessário definir  $x(U)$  por partes:  $x_E : U \mapsto x_E(U)$ , para o braço esquerdo de  $U(x)$  ( $x < 0$ ) e  $x_D : U \mapsto x_D(U)$ , para seu braço direito ( $x \geq 0$ ). Por meio de uma mudança de variáveis, reescrevemos a equação (2.2) na forma

$$\begin{aligned} \tau(E) &= \sqrt{2m} \left[ \int_0^E \frac{dx_D}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} + \int_E^0 \frac{dx_E}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} \right] \\ &= \sqrt{2m} \int_0^E \left( \frac{dx_R}{dU} - \frac{dx_L}{dU} \right) \frac{dU}{\sqrt{E-U}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para calcular a integral do lado direito, pode-se introduzir um parâmetro constante  $\alpha$  e multiplicar a equação 2.3 por  $(dE/\sqrt{\alpha - E})$ , integrando-se de 0 até  $\alpha$ . A região de integração está contida no plano E-U e limitada pela linha  $E = U$  (figura 2.1), de modo que  $\int_0^\alpha (\int_0^E dU) dE = \int_0^\alpha (\int_U^\alpha dE) dU$ .

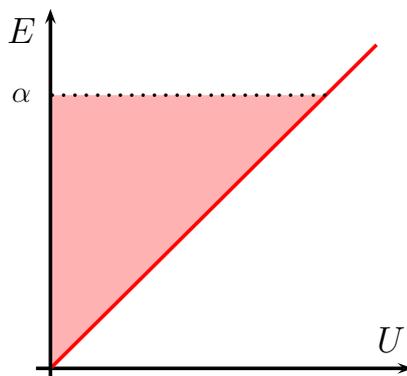


Figura 2.1: Região de integração da equação 2.4.

Dessa forma, ao mudar a ordem de integração, obtemos

$$\int_0^\alpha \frac{\tau(E)dE}{\sqrt{\alpha - E}} = \sqrt{2m} \int_0^\alpha \int_U^\alpha \left\{ \frac{dE}{\sqrt{\alpha - E}\sqrt{E - U}} \right\} \left[ \frac{dx_D}{dU} - \frac{dx_E}{dU} \right] dU. \quad (2.4)$$

Uma vez que  $E$  não depende de  $U$ , a integral em  $E$  pode ser calculada exatamente (p.ex., completando quadrados) e é igual a  $\pi$ . Isso remove a dependência de  $U$  na integral em  $U$ , tornando-a trivial. Finalmente, uma vez que  $\alpha$  é um parâmetro livre com dimensões de energia, podemos reescrever  $\alpha = U$ .

Com isso, concluímos que uma dada função período  $\tau$  não determina um único potencial  $U$ , mas sim uma família de potenciais que satisfazem à relação

$$x_D(U) - x_E(U) = \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{\tau(E)dE}{\sqrt{U - E}}. \quad (2.5)$$

Desse modo, não fica determinada a forma do poço de potencial  $U(x)$ , mas sim a diferença  $x_D(U) - x_E(U)$ . Isso significa que, se dois potenciais  $U(x)$  e  $\tilde{U}(x)$  preservarem a mesma largura  $L(U) = x_D(U) - x_E(U) = \tilde{x}_D(U) - \tilde{x}_E(U)$  para qualquer valor de  $U$ , eles compartilharão a mesma função período  $\tau(E)$ .

Os potenciais que têm iguais larguras para todo  $U$  são ditos *cisalhados*, uma vez que um desses potenciais pode ser obtido do outro por uma deformação horizontal. Sendo assim, potenciais cisalhados produzem oscilações *isoperiódicas*.

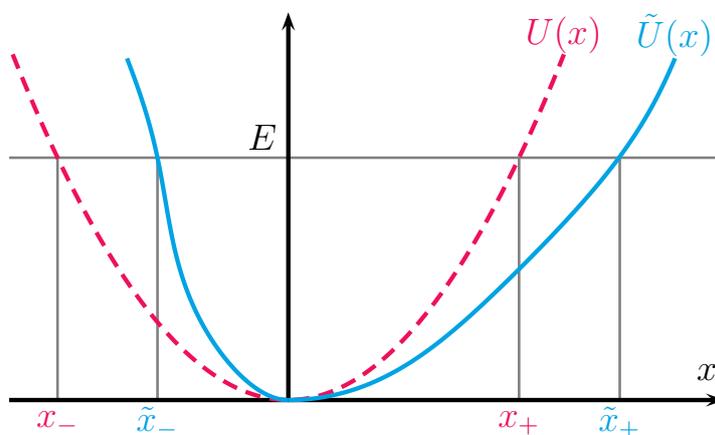


Figura 2.2: Potencial  $\tilde{U}(x)$ , produzido a partir do cisalhamento do potencial quadrático  $U(x)$ .

Se, no entanto, aplicarmos a restrição de que o poço de potencial seja simétrico,  $x_D(U) = -x_E(U)$  à equação 2.5, o potencial estará univocamente determinado pela função período. Dessa forma, pode-se sempre primeiro obter a solução simétrica para uma dada função período  $\tau(E)$  e, em seguida, obter infinitos potenciais isoperiódicos, cisalhando essa primeira solução de maneiras diferentes.

Até aqui, seguimos fielmente o livro de Landau e Lifshitz [3]. A seguir, apresentaremos alguns exemplos inéditos de potenciais cisalhados. Primeiramente, mostraremos um caso de potenciais na forma de lei de potência. Em seguida, mostraremos que o potencial Morse e o Pöschl-Teller são cisalhados um do outro (para todos os valores de energia  $E$  que admitam dois pontos de retorno).

### 2.3.1 Lei de potências

Tomemos como exemplo o caso geral da família de potenciais simétricos que obedecem a uma lei de potência da forma  $U(x) = a|x|^\nu$ , com  $a > 0$  e  $\nu \geq 1$ . Os pontos de retorno serão  $x_\pm = \pm(E/a)^{1/\nu}$  e o período das oscilações pode

ser calculado por meio da equação 2.2:

$$\begin{aligned}\tau(E) &= \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - a|x|^\nu}} \\ &= x_+^{-\nu/2} \sqrt{\frac{8m}{a}} \int_0^{x_+} \left\{ 1 - \left( \frac{x}{x_+} \right)^\nu \right\}^{-1/2} dx,\end{aligned}\quad (2.6)$$

onde lançamos mão do fato de que o potencial é simétrico e de que  $E = ax_+^\nu$ . Fazendo-se uma mudança de variáveis  $u = (x/x_+)^\nu$ , podemos reescrever o período como<sup>8</sup>

$$\tau(E) = E^{(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{2})} \frac{\sqrt{8m} I(\nu)}{a^{1/\nu} \nu}, \quad (2.7)$$

onde  $I(\nu)$  é um fator numérico dado por  $I(\nu) = \int_0^1 u^{1/\nu-1} (1-u)^{1/2} du$ <sup>9</sup>. A equação 2.7 exibe a dependência da energia no período. Vale observar que, escolhendo-se  $\nu = 2$  — e apenas nesse caso —, o expoente em  $E$  torna-se nulo, de forma que o período passa a ser independente da energia. Esse é o caso do oscilador harmônico,  $U(x) \propto x^2$ .

Outros autores analisaram os potenciais cisalhados da parábola, que geram movimentos anarmônicos cujos períodos de oscilação preservam a propriedade de ser independentes da energia [11]. De nossa parte, consideraremos a seguir o caso mais geral de um expoente arbitrário  $\nu$ , para o qual obteremos uma classe particular de potenciais cisalhados.

Partindo de um potencial simétrico conhecido  $U(x) = a|x|^\nu$ , podemos tentar soluções cisalhadas  $\tilde{U}(x)$  que tenham a mesma forma funcional, contudo diferentes coeficientes para os intervalos positivo e negativo do domínio.

$$\tilde{U}(x) = \begin{cases} b|x|^\nu & : x < 0 \\ c|x|^\nu & : x \geq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Definimos a largura  $L$  como a distância entre os pontos de retorno para uma dada energia  $E$ :  $L(E) = x_+(E) - x_-(E)$ , de forma que  $L(E) = 2(E/a)^{1/\nu}$

<sup>8</sup>Uma outra maneira particularmente elegante de se obter a dependência entre o período e a energia é a partir da mecânica da similaridade (vide [3], §10).

<sup>9</sup>Pode-se calcular  $I(\nu)$  exatamente [3, 12], o que consideramos fora do escopo desta dissertação.

para  $U(x)$  e  $\tilde{L}(E) = (E/b)^{1/\nu} + (E/c)^{1/\nu}$  para  $\tilde{U}(x)$ . Impondo a condição de cisalhamento, isto é  $L(E) = \tilde{L}(E)$ , obtemos a relação entre os coeficientes:

$$\frac{1}{a^{1/\nu}} = \frac{1}{2} \frac{1}{b^{1/\nu}} + \frac{1}{2} \frac{1}{c^{1/\nu}}. \quad (2.9)$$

Podemos reobter esse resultado de um modo alternativo, impondo-se diretamente a condição de que os períodos sejam iguais. De fato, tomando-se o análogo da equação 2.7 (multiplicada por  $1/2$ ) para os lados esquerdo e direito da função  $\tilde{U}(x)$ , tem-se:

$$\tilde{\tau}(E) = \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{B^{1/\nu}} + \frac{1}{2} \frac{1}{C^{1/\nu}} \right] E^{(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{2})} \sqrt{8m} \frac{I(\nu)}{\nu}. \quad (2.10)$$

Identificando esse resultado com a expressão para o caso simétrico na equação 2.7, fica claro que a relação sobre os coeficientes é a mesma já obtida na 2.9.

### 2.3.2 Potenciais Morse e Pöschl-Teller

Consideremos agora dois casos menos triviais de potencial: o potencial Morse unidimensional e o potencial Pöschl-Teller, representados na figura 2.3 e denotados respectivamente por  $U_M(x)$  e  $U_{PT}(x)$ :

$$U_M(x) = U_0 \left( e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x} \right) \quad (2.11)$$

$$U_{PT}(x) = - \frac{U_0}{\cosh^2(\alpha x)}, \quad (2.12)$$

A importância desses potenciais se estende além do contexto da mecânica clássica. Por exemplo, o potencial Morse é usado, em Química, como um primeiro modelo para a energia potencial de uma molécula diatômica [13], enquanto o Pöschl-Teller apresenta propriedades inusitadas quando tratado na mecânica quântica. Para citar uma delas, com valores apropriados da constante  $U_0$ , esse potencial apresenta coeficiente de reflexão nulo para todos os valores de energia da partícula [14].

Nosso objetivo é mostrar que esses potenciais são cisalhados entre si, de

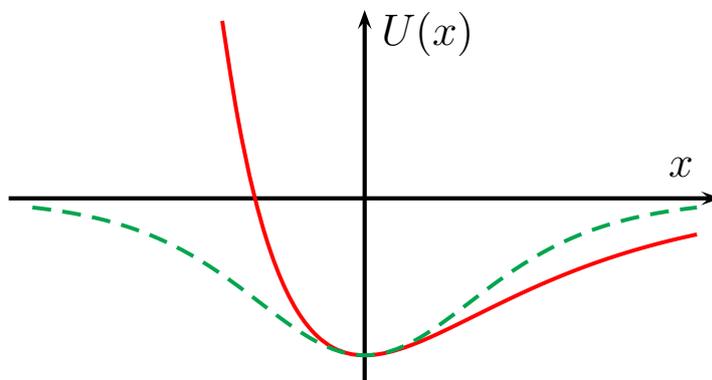


Figura 2.3: Potenciais Morse (linha sólida vermelha) e Pöschl-Teller (linha tracejada verde)

forma que eles fornecem o mesmo período de oscilação para  $E$  negativo, dado que apenas nessa condição as trajetórias são finitas. Inicialmente, determinamos os pontos de retorno de uma partícula se movendo sob o potencial Morse com energia mecânica  $E$ , solucionando a equação  $U_M(x) = E$ . Substituindo  $u = e^{-\alpha x}$ , obtemos:

$$u^2 - 2u - \frac{E}{U_0} = 0, \quad (2.13)$$

cujas raízes são dadas por

$$u_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1 + E/U_0}. \quad (2.14)$$

Retornando à variável  $x$ , temos

$$x_{\pm} = \frac{1}{\alpha} \ln(1 \pm \sqrt{1 + E/U_0}). \quad (2.15)$$

Com isso, a distância entre os pontos de retorno,  $L_M(E) = x_+(E) - x_-(E)$ , para um valor negativo qualquer de energia é dado por

$$L_M(E) = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 + E/U_0}}{1 - \sqrt{1 + E/U_0}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{(1 + \sqrt{1 + E/U_0})^2}{-E/U_0} \right) \\
 &= \frac{2}{\alpha} \ln \left( \sqrt{-\frac{U_0}{E}} + \sqrt{-\frac{U_0}{E} - 1} \right). \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

Vamos realizar agora um procedimento análogo para o potencial Pöschl-Teller. Ao resolver a equação  $U_{PT}(x) = E$ , obtemos os pontos de retorno

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{\alpha} \operatorname{arcosh}(\sqrt{-U_0/E}). \tag{2.17}$$

Portanto, a distância entre esses pontos de retorno é dada por

$$L_{PT}(E) = x_+ - x_- = \frac{2}{\alpha} \operatorname{arcosh}(\sqrt{-U_0/E}). \tag{2.18}$$

À primeira vista, as equações 2.16 e 2.18 não parecem coincidir. No entanto, ao aplicar a identidade matemática  $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$  [15] à expressão para  $L_{PT}(E)$ , fica evidente que  $L_M(E) = L_{PT}(E)$ . Essa igualdade significa que, conforme tínhamos antecipado, esses dois potenciais são cisalhados entre si para  $-U_0 < E < 0$ .

Desse raciocínio, segue que, para obter a função período para qualquer um desses potenciais, podemos escolher aquele que preferirmos — ou o que for mais fácil — para realizar os cálculos, dado que a função será a mesma para ambos. Façamos isso explicitamente para o potencial Morse. Partindo da equação 2.2 e fazendo uso da mesma mudança de variáveis que usamos para obter a equação 2.13, temos

$$\begin{aligned}
 \tau_M(E) &= \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - U_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})}} \\
 &= \sqrt{\frac{2m}{U_0\alpha^2}} \int_{u_-}^{u_+} \frac{du}{\sqrt{\frac{E}{U_0}u^2 + 2u + 1}}. \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

Uma nova mudança de variáveis  $w = (u\sqrt{-E/U_0} + \sqrt{-U_0/E})$  leva ao resul-

tado final:

$$\begin{aligned}\tau_M(E) &= \sqrt{\frac{2m}{U_0\alpha^2}} \int_{w_-}^{w_+} \frac{dw}{\sqrt{w^2 - (\frac{U_0}{E} + 1)}} \\ &= \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{E}}.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Pode-se verificar, por meio de um cálculo análogo, que os períodos associados ao potencial Pöschl-Teller são, de fato, os mesmos que os encontrados para o potencial Morse e dados pela equação 2.20.

Diversos outros exemplos de potenciais cisalhados podem ser encontrados. Gostaríamos de mencionar, ainda, que, apesar de nossos exemplos terem considerado apenas poços de potencial com mínimos coincidentes, pode-se facilmente generalizar a condição de cisalhamento. Dois poços de potencial  $U(x)$  e  $\tilde{U}(x)$  são cisalhados se  $L(E) = \tilde{L}(\tilde{E})$  para  $E - U_{\min} = \tilde{E} - \tilde{U}_{\min}$ , ou seja, se tiverem iguais larguras para iguais valores de energia tomados a partir dos seus respectivos mínimos.

### 2.3.3 Prescrição para cisalhar potenciais

Após esses exemplos, o leitor poderia indagar se haveria um método geral para construir potenciais cisalhados com um dado comportamento periódico  $\tau(E)$ .

Pode-se sempre começar obtendo o único potencial simétrico  $U(x)$  associado a uma certa função período  $\tau(E)$ , de forma que  $x_D(U) = -x_E(U)$ . Então, para cisalhar esse potencial nós simplesmente o deslocamos horizontalmente de valores dados por uma função  $\delta(U)$  para cada valor de  $U$ , de forma a obter novas funções  $\tilde{x}_D(U)$  e  $\tilde{x}_E(U)$ , respectivamente para os lados direito e esquerdo da função:

$$\begin{cases} \tilde{x}_D(U) &= x_D(U) + \delta(U) \\ \tilde{x}_E(U) &= x_E(U) + \delta(U) \end{cases}\tag{2.21}$$

Com isso, a diferença entre os pontos de retorno correspondentes para cada valor de  $U$  estará preservada por construção. Deve-se escolher a função  $\delta(U)$

de tal forma que as funções  $\tilde{x}_D(U)$  e  $\tilde{x}_E(U)$  sejam bijetoras (isto é, que exista a função inversa  $\tilde{U}(x)$ ).

Nessas condições,  $\tilde{U}(x)$  é um novo potencial, cisalhado de  $U(x)$ .

## 2.4 Cisalhando trilhos

Apesar de não ser um resultado tão amplamente difundido, a teoria dos potenciais cisalhados é bem-estabelecida. Inspirados pela surpreendente propriedade exibida por esses poços de potencial, nós agora voltamos nossa atenção para um problema diferente. Em vez de tratar do movimento unidimensional promovido por um dado potencial  $U(x)$ , consideraremos o movimento bidimensional de uma partícula que desliza sobre um trilho sem atrito sob o efeito de um campo gravitacional uniforme. Destacamos as diferenças entre esses dois casos no apêndice A.

Dado que construir tais trilhos é, em geral, mais factível que fornecer experimentalmente as condições que correspondam a um poço de potencial arbitrário, essa técnica pode se mostrar útil para a execução empírica e a visualização de movimentos que se deseje estudar.

Declaramos o problema da seguinte maneira: Uma partícula está submetida a um único campo, gravitacional e uniforme, de forma que a energia potencial é dada por  $U(y) = mgy$ , e está limitada a se mover ao longo de um trilho liso contido no plano  $\mathcal{O}xy$ . Com essa restrição, o seu movimento tem apenas um grau de liberdade, o que simplifica enormemente a sua análise. O formato do trilho é descrito pela função  $f : x \mapsto y = f(x)$  e determina a força resultante que atua sobre a partícula em cada ponto. Por conveniência, escolhemos um sistema de coordenadas em que o ponto mais baixo do trilho coincida com a origem dos eixos.

De forma similar ao que observamos na análise dos potenciais  $U(x)$ , apesar de a forma do trilho  $f(x)$  determinar univocamente os períodos de oscilação em função da energia  $\tau(E)$ , não é óbvio se o conhecimento de  $\tau(E)$  determina univocamente o formato do trilho sobre o qual ocorre o movimento. Em outras palavras, é natural nos perguntarmos quais são os trilhos  $f(x)$  que produzem oscilações com uma dada função período  $\tau : E \mapsto \tau(E)$ .

Como ficará evidente, é conveniente utilizar a coordenada de comprimento de arco  $s$  para parametrizar o trilho, em vez da coordenada cartesiana  $x$ . Por isso, doravante denotaremos a forma da curva pela função  $y : s \mapsto y(s)$ , tomando  $s = 0$  na origem do sistema  $\mathcal{O}xy$ . Por outro lado, a escolha da altura máxima alcançada pela partícula determina a sua energia mecânica  $E = mgH$ , e os pontos de retorno  $s_1$  e  $s_2$  são as soluções da equação  $y(s) = H$ .

Integrando-se a equação de conservação da energia mecânica, a obtenção do período de oscilações para uma altura arbitrária  $H$  decorre de forma direta: é simplesmente o dobro do tempo que a partícula leva para se mover de  $s_1$  a  $s_2$ . Denotando por  $v$  a velocidade da partícula na posição  $s$  do trilho, temos

$$\tau(H) = 2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{2}{g}} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{H - y(s)}}. \quad (2.22)$$

A equação 2.22 tem algumas características oportunas e agradáveis. Note que, como  $s_1$  e  $s_2$  dependem de  $H$ ,  $\tau$  é uma função apenas de  $H$ , determinada univocamente pela forma da curva  $y(s)$ . Além disso, a equação contém apenas variáveis com um significado geométrico claro.

Desejamos agora atacar o problema inverso, que consiste em encontrar a forma do trilho  $y(s)$  que obriga o movimento a um comportamento oscilatório com período dado por  $\tau(H)$ . Aplicamos o mesmo expediente matemático de Landau e Lifshitz para este novo caso. Invertamos a função  $y(s)$  por meio da função definida por partes com expressões para o lado esquerdo ( $s_E(y)$ ) e direito ( $s_D(y)$ ) da curva, utilizando um truque matemático na integral semelhante ao da seção 2.3 para obter:

$$s_D(y) - s_E(y) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{g}{2}} \int_0^y \frac{\tau(H) dH}{\sqrt{y - H}}. \quad (2.23)$$

O leitor deve notar que esse resultado é muito similar à equação 2.5, com  $x \rightarrow s$ ,  $U \rightarrow y$  e  $E \rightarrow H$ . Contudo, gostaríamos de enfatizar sua distinta interpretação e significado.

A equação anterior mostra que o conhecimento da função  $\tau(H)$  não determina univocamente o formato de um trilho, mas sim seu *comprimento*  $\ell(y) = s_D(y) - s_E(y)$  abaixo de cada altura  $y > 0$ . Portanto, dois trilhos di-

ferentes  $y(s)$  e  $\tilde{y}(s)$  darão origem a movimentos com a mesma função período  $\tau(H)$  se  $s_D(y) - s_E(y) = \tilde{s}_D(y) - \tilde{s}_E(y)$  para todo  $y$  positivo. Chamaremos esses trilhos *cisalhados no comprimento*, em analogia com os potenciais cisalhados.

O cisalhamento no comprimento tem consequências imediatas e concretas. Significa, por exemplo, que poderíamos usar como trilho para o movimento de uma bilha a superfície de uma fita métrica disposta contra uma parede listrada na horizontal. Então deslizamos a fita métrica de forma a garantir que seu comprimento total sob cada linha horizontal permaneça a mesma. Essa transformação produzirá um novo trilho, cisalhado no comprimento do primeiro, e as oscilações da bilha terão mesmo período em ambas para cada altura  $H$ . Isso é especialmente notável, porque semelhante procedimento prático não é, em geral, concebível para potenciais cisalhados.

Cabe, aqui, um comentário. Suponha que consideremos apenas movimentos *descendentes* de uma partícula sobre um trilho caracterizado pela função monotônica  $f : x \mapsto y = f(x)$ , denotando, desta vez, por  $\tau(H)$  o tempo gasto pela partícula para passar pela origem em  $y = 0$ , uma vez abandonada de uma altura arbitrária  $y = H$ . Novamente, dada a forma do trilho,  $\tau(H)$  fica univocamente determinada. Por outro lado, a função  $\tau(H)$  também determinaria univocamente a forma do trilho  $f(x)$ .

No entanto, nesse último caso não se trata de movimentos periódicos e, portanto, não se trata do nosso problema de interesse, mas sim de um trecho do problema: o percurso da partícula ao longo de cada ramo do trilho. Daí, podemos concluir que o tempo gasto em cada ramo do trilho univocamente determina a forma desse ramo. A existência de uma família de curvas distintas com mesma função período é possível justamente porque a diferença do tempo que a partícula dispenderá em um ramo será compensada no outro, de forma que o tempo total seja o mesmo.

Esse problema foi originalmente resolvido por Niels Abel em 1826 [16]. Recentemente, Muñoz e Fernández-Anaya discutiram o resultado de Abel para curvas particulares sobre as quais os movimentos tinham períodos proporcionais a uma potência de expoente racional de  $H$  [17]. Os mesmos autores, com colaboradores adicionais, apresentam ainda um conjunto de proble-

mas envolvendo o movimento de contas ao longo de arames rígidos em um artigo de 2011 [18].

## 2.5 Infinitas tautócronas

Analisaremos, nesta seção, um caso de especial interesse. Servindo-nos das técnicas anteriormente exploradas, buscaremos obter os trilhos sobre os quais os períodos independem da energia, ou seja, as soluções para o problema da tautócrona. Como esses trilhos terão ramos ascendentes e descendentes para permitir movimento periódico, chamá-los-emos de *tautócronas de ida e volta*.

Escolhendo uma função energia independente do tempo  $\tau(E) = \sqrt{\kappa}$ , onde  $\kappa$  é uma constante positiva com dimensões de tempo ao quadrado, e exigindo que o trilho seja simétrico, podemos resolver a equação 2.23 exatamente, uma vez que a integral se torna elementar:

$$\begin{aligned} s(y) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g\kappa}{2}} \int_0^y \frac{dH}{\sqrt{y-H}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g\kappa}{2}} (2\sqrt{y}) \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= \frac{2\pi^2}{\kappa g} s^2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

O resultado acima mostra que a tautócrona é análoga ao potencial para o oscilador harmônico, como se poderia esperar.

A pergunta natural que surge da dependência  $y(s)$  na equação 2.24 é a que curva ela corresponde. Trata-se de uma cicloide<sup>10</sup> cujo círculo gerador tem raio  $r = \kappa g / (4\pi)^2$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ ,  $y = (1/8r)s^2$ , como mostraremos no apêndice B. O período de oscilações em termos de  $r$  e  $g$  é imediatamente dado por

$$\tau(r) = 4\pi \sqrt{\frac{r}{g}}. \tag{2.25}$$

---

<sup>10</sup>O resultado de que um trilho cicloidal sem atrito leva a oscilações isócronas pode ser demonstrado de diversas maneiras. Para uma demonstração que explora a geometria da cicloide, vide [19].

A cicloide é, de fato, a única tautócrona de ida e volta simétrica. Podemos, porém, partindo dessa solução simétrica, obter outras infinitas curvas com igual comportamento periódico, cisalhando-a no comprimento. Apresentaremos a seguir soluções não convencionais ao problema da tautócrona, dadas por trilhos assimétricos.

### 2.5.1 Ramos de cicloides

Podemos propor, como uma primeira tentativa de solução assimétrica, um trilho formado por duas cicloides de diferentes raios para cada ramo, que deverá prover oscilações isoperiódicas às de um trilho cicloidal simétrico de raio gerador  $r$ . Usando notação análoga à previamente utilizada neste capítulo, chamaremos os raios das cicloides de  $r_D$  e  $r_E$  para os lados direito e esquerdo, respectivamente, do trilho assimétrico.

Para que ambos os trilhos produzam oscilações de iguais períodos, elas devem ser cisalhadas no comprimento de forma que o comprimento total do trilho seja o mesmo sob cada altura  $y$ . A relação entre os raios segue diretamente da aplicação dessa restrição:

$$s_R(y) - s_L(y) = \tilde{s}_R(y) - \tilde{s}_L(y). \quad (2.26)$$

Da relação  $y = (1/8r)s^2$ , segue imediatamente que

$$2\sqrt{r} = \sqrt{\tilde{r}_R} + \sqrt{\tilde{r}_L}. \quad (2.27)$$

Uma solução desse tipo está apresentada na figura 2.4. Deve-se notar que a altura máxima do movimento deverá estar contida no ramo mais baixo da curva. De modo alternativo, pode-se obter essa curva aplicando a imposição de que os períodos ao longo do trilho simétrico e do trilho assimétrico sejam iguais (em vez de se aplicar a condição geométrica de cisalhamento no comprimento). O leitor interessado pode verificar facilmente, a partir da equação 2.25, que a relação entre os raios será a mesma apresentada em 2.27.

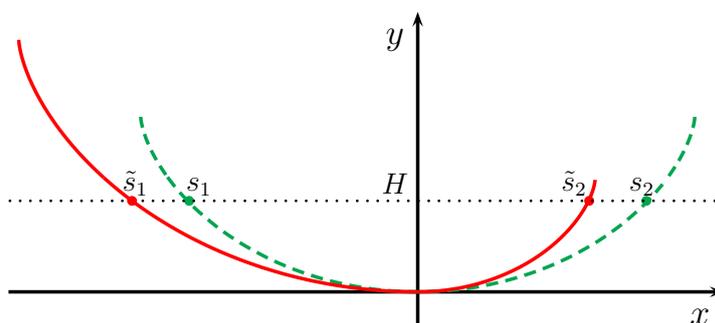


Figura 2.4: A cicloide simétrica (linha verde, tracejada) e uma tautócrona assimétrica isoperiódica a ela (linha vermelha, sólida), formada por ramos de cicloides de raios diferentes.

## 2.5.2 Completando tautócronas

A equação 2.23 permite uma vasta gama de soluções para o problema da tautócrona, as quais não se restringem a ramos de cicloides. Podemos obter, de forma geral, um trilho com essas características aplicando uma prescrição similar à da seção 2.3.3, ou seja, aplicando-se à cicloide simétrica original equações similares àsquelas em 2.21, mas com uma função de cisalhamento no comprimento  $\delta(y)$  no lugar da função de cisalhamento  $\delta(U)$ , desde que  $y(s)$  continue sendo uma função.

Com isso em mente, se escolhermos uma função arbitrária  $\tilde{y}_E(s)$  para o ramo esquerdo do trilho, podemos determinar a função de cisalhamento  $\delta(y)$  em relação à cicloide original. Com isso, obtém-se a função  $\tilde{y}_D(s)$  correspondente para o seu ramo direito de forma a *completar a tautócrona*.

Uma vez que qualquer trilho obtido por esse método será cisalhado no comprimento da cicloide original — a única tautócrona simétrica —, vemos que esse procedimento pode gerar quantas tautócronas quisermos. Todos os trilhos assim construídos produzirão oscilações isócronas, isto é, movimentos cujos períodos são independentes da altura máxima.

Demonstraremos a seguir um exemplo explícito. Tomemos para o ramo esquerdo do trilho a forma de uma parábola semicúbica  $\tilde{y}_L = \alpha(-x)^{\frac{3}{2}}$ . Cal-

cularemos o comprimento de arco para parametrizá-la convenientemente:

$$\tilde{s}_L(y) = \frac{8}{27\alpha^2} \left[ \left( \frac{9\alpha^{\frac{4}{3}}}{4} y^{\frac{2}{3}} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]. \quad (2.28)$$

Definimos o período de oscilações ao ajustar o raio  $r$  da cicloide correspondente  $8ry = s^2$ . Então, impondo que o novo trilho seja cisalhado no comprimento dessa cicloide, o seu ramo direito será dado pela equação:

$$\tilde{s}_R(y) = 2\sqrt{8ry} + \tilde{s}_L(y). \quad (2.29)$$

Esse exemplo, com  $r = 1/8$  e  $\alpha = 2$ , está ilustrado na figura 2.5.

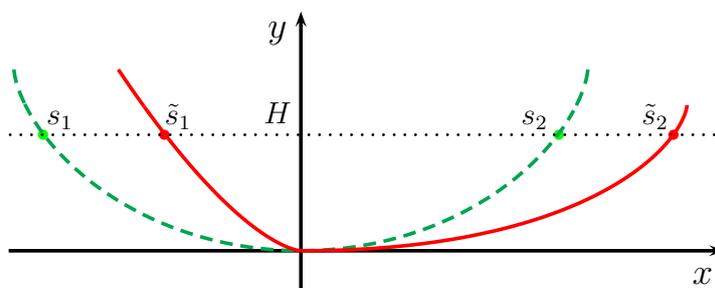


Figura 2.5: A cicloide (linha verde, tracejada) e uma tautócrona assimétrica isoperiódica a ela (linha vermelha, sólida). O ramo esquerdo da curva assimétrica é uma parábola semicúbica. Note que o ramo direito da curva termina em uma altura mais baixa que a cicloide original; isso ocorre porque essa curva só é computada enquanto  $y(s)$  é uma função.

## 2.6 Revisão e aplicações didáticas

Neste capítulo, revisamos, para sistemas unidimensionais em mecânica clássica, o resultado de que, dado o período como função da energia, pode-se obter não apenas um, mas uma família infinita de poços de potencial. Os potenciais dessa família satisfazem à relação geométrica de cisalhamento.

Estendemos esse resultado para partículas que se movem sobre trilhos lisos contidos em planos verticais e submetidos a uma força gravitacional

constante. Mostramos que uma nova condição, o cisalhamento no comprimento, pode ser imposta aos trilhos para que os períodos de oscilação sejam os mesmos para uma dada altura máxima do movimento. Aplicando essa condição à cicloide, a tautócrona original descoberta por Huygens, mostramos que existe um número infinito de tautócronas.

Se desejarmos observar um movimento com um dado comportamento periódico  $\tau(E)$  arbitrário, é possível, em princípio, prover as condições para que ocorra uma função energia potencial  $U(x)$  correspondente a ele. Contudo, na prática, esse procedimento não é fácil. Por outro lado, a construção de trilhos de formato adequado (que pode ser feita utilizando-se uma impressora 3-D, por exemplo) pode ser realizada experimentalmente de forma muito mais simples. Esse problema exhibe a relevância da análise dos movimentos a partir das formas das suas trajetórias, bem como da relação de cisalhamento no comprimento.

Sendo todas as informações aqui apresentadas acessíveis a alunos de graduação, é natural sugerir que as este conteúdo possa enriquecer cursos universitários tanto teóricos quanto experimentais de mecânica clássica.

Podemos também apontar algumas aplicações didáticas do tema deste capítulo para o ensino médio:

- A abordagem histórica do problema da tautócrona exemplifica como o estudo de movimentos tratados no ensino médio, tais como o pêndulo simples, teve importância na soluções de grandes problemas da humanidade, como as navegações;
- Igualmente, esse problema nos chama a atenção para as relações entre a geometria da trajetória e a dinâmica do movimento. Esse aspecto está presente em diversos problemas típicos, como o plano inclinado, apesar de ser pouco discutido. Voltaremos a analisar um outros movimento sob esse aspecto no capítulo 4.

No apêndice C sugerimos ainda dois problemas simples que ilustram as relações de cisalhamento e que podem ser levados para o ensino médio.

## Capítulo 3

# Parábola de segurança

Os lançamentos oblíquos de projéteis fazem parte de um tópico bastante rico abordado no Ensino Médio. Seu estudo surge usualmente como um dos poucos casos de movimento bidimensional e com dois graus de liberdade abordados nesse nível de ensino, uma vez desfeitas as necessárias amarras dos movimentos unidimensionais e retilíneos. Nesse quadro, surgem pela primeira vez a decomposição das grandezas da cinemática, a independência dos movimentos sobre cada coordenada ortogonal<sup>1</sup>, o estudo matemático da trajetória e o tratamento eminentemente vetorial dos movimentos, generalizando-os a partir do caso unidimensional.

Em geral, esses lançamentos estão contextualizados em situações-problema nas quais partículas são atiradas por um lançador. O trabalho mecânico que esse lançador consegue desenvolver ao ser disparado se converte na energia cinética da partícula e, portanto, determina apenas o *módulo* de sua velocidade. Em outras palavras, esse agente — um canhão, um estilingue, uma arma, a ponta de um chafariz, o bico de um bebedouro — consegue imprimir uma velocidade com um determinado módulo fixo à partícula, mas pode tipicamente apontá-la em direções variadas. Cada direção de lançamento determinará uma trajetória distinta para a partícula.

Uma vez que diferentes pontos podem ser atingidos pela partícula ao se apontar o lançador em direções variadas, é natural perguntar *que região*

---

<sup>1</sup>Vale lembrar que nem sempre tais movimentos são independentes. Um exemplo são os lançamentos com resistência do ar da forma  $-b|\vec{v}^2|\hat{v}$ .

do espaço está acessível à partícula por meio de um lançamento com uma dada velocidade inicial. Fora dessa região, os pontos só seriam acessíveis aumentando-se o trabalho do lançador (ou trasladando-o), ou seja, mudando o módulo da velocidade inicial (ou a posição inicial). A região estará delimitada por uma superfície, chamada superfície de segurança. No caso dos movimentos sem dissipação de projéteis próximos à Terra<sup>2</sup>, a superfície de segurança tem a forma de um paraboloide de revolução; um corte simétrico nessa superfície determinará a parábola de segurança.

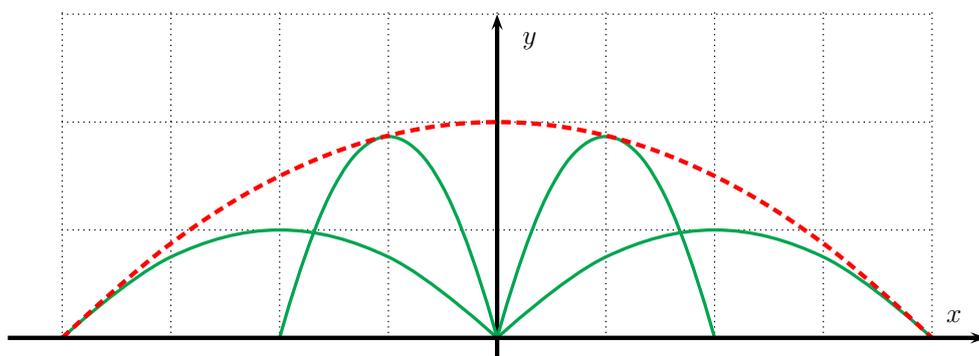


Figura 3.1: Em verde e em linhas contínuas estão representadas algumas trajetórias descritas por projéteis disparados com velocidades iniciais de mesmo módulo, mas ângulos de lançamento diferentes. Em vermelho, a parábola de segurança, que envolve todas as possíveis trajetórias.

Esse problema, quando abordado em livros-texto de Ensino Médio, é desenvolvido de forma apenas teórica, trazendo uma sofisticação algébrica pouco usual para esses alunos. Nossa proposta visa a abordá-lo por um viés experimental, sem prejuízo ao rigor conceitual e formando uma intuição sobre esses movimentos.

Neste capítulo, temos como objetivo propor um conjunto de atividades experimentais que sirvam de eixo para o ensino dos lançamentos oblíquos e para explorar a parábola de segurança. Faremos, em primeiro lugar, o tratamento matemático usual dessa curva. Em seguida, procederemos à descrição de um aparato experimental e de um roteiro didático para o ensino desse

<sup>2</sup>Para um estudo da curva de segurança com resistência do ar, vide [20].

tema. Finalmente, daremos um relato da nossa aplicação desse roteiro em sala de aula, bem como das conclusões que pudemos tirar dessa experiência.

### 3.1 Duas demonstrações tradicionais

Apresentamos aqui duas demonstrações já conhecidas da equação da parábola de segurança. A primeira, de construção mais direta, utiliza-se do cálculo diferencial e está aqui apresentada por completeza e porque tem relação imediata com alguns pontos do roteiro didático, de forma que é útil que o instrutor a compreenda por inteiro. A segunda é puramente algébrica e, portanto, acessível ao Ensino Médio.

**Declaração do problema:** Seja uma partícula lançada do solo com velocidade  $\vec{v}_0$  que faz um ângulo  $\theta$  com o plano horizontal, num local onde a aceleração da gravidade é  $\vec{g} = -g\hat{y}$ . O ângulo de lançamento  $\theta$  poderá assumir diferentes valores no intervalo  $(0, \pi/2]$ , mas o módulo de  $\vec{v}_0$  será fixo. Tomamos nosso sistema de coordenadas  $\mathcal{O}xy$  tal que  $\mathcal{O}x$  é horizontal,  $\mathcal{O}y$  é vertical e a origem coincide com o ponto de lançamento da partícula. A região que compreende todos os pontos do plano  $\mathcal{O}xy$  que podem ser atingidos pela partícula, variando-se apenas o ângulo de lançamento, é delimitada por uma curva cuja forma desejamos determinar.

De início, escrevemos as equações relevantes desse movimento. As coordenadas da posição são dadas, como função do tempo e para um dado ângulo de lançamento, por:

$$x_\theta(t) = v_0 \cos \theta t \tag{3.1}$$

$$y_\theta(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{3.2}$$

Eliminando o tempo nas equações acima, pode-se encontrar a equação cartesiana da trajetória, isto é  $y_\theta(x)$ :

$$y_\theta(x) = (\tan \theta)x - \frac{g}{2v_0^2}(\sec^2 \theta)x^2. \tag{3.3}$$

Dessa forma, determinar a curva de segurança equivale a determinar os pontos da envoltória do conjunto constituído por todas as trajetórias  $y_\theta(x)$  descritas pela equação 3.3.

### 3.1.1 Demonstração com cálculo diferencial

Talvez o procedimento mais natural de se determinar esses pontos seja considerar, para cada direção no plano  $\mathcal{O}xy$ , qual o ponto mais distante da origem alcançado pela partícula.

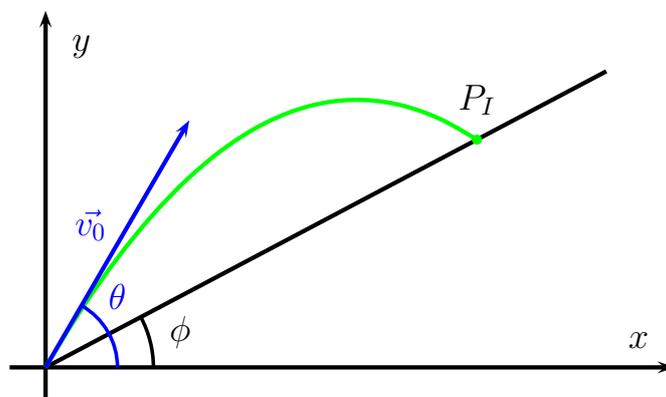


Figura 3.2: Trajetória de um lançamento que intercepta uma rampa inclinada de  $\phi$  no ponto  $P_I$ .

Em outras palavras, varremos o plano  $\mathcal{O}xy$  com o ângulo polar  $\phi$ , determinando, para cada  $\phi$ , qual o ponto mais distante atingido ao variarmos  $\theta$ . Imaginemos, então, uma reta  $y = \tan \phi x$ , que irá interceptar a trajetória de lançamento no ponto  $P_I(x_I, y_I)$ . Inicialmente, determinamos o valor de  $x_I$ ,

$$\tan \phi x_I = \tan \theta x_I - \frac{g}{2v_0^2} \sec^2 \theta x_I^2. \quad (3.4)$$

Rearrmando os termos e desprezando a solução trivial com  $x_I = 0$ , obtemos a coordenada  $x_I$  do ponto de interseção:

$$\frac{g}{2v_0^2} x_I = (\tan \theta - \tan \phi) \cos^2 \theta. \quad (3.5)$$

A distância  $d_I$  de  $P_I$  ao ponto de lançamento é proporcional a  $x_I$  ( $d_I = x_I \sec \phi$ ), de forma que tornar essa distância máxima corresponde a tornar  $x_I$  máxima, ou seja, devemos encontrar o valor de  $\theta$ , denotado por  $\theta_m$ , para o qual  $dx_I/d\theta = 0$ . Esse procedimento nos leva a

$$\frac{2v_0^2}{g} [\sin(2\theta_m) \tan \phi + \cos(2\theta_m)] = 0,$$

que implica a seguinte relação entre  $\theta$  e  $\phi$ :

$$\tan \phi = -\cot(2\theta_m) \quad (3.6)$$

de onde imediatamente obtemos

$$2\theta_m - \phi = \pi/2. \quad (3.7)$$

Procedemos a escrever a equação 3.5 em função de  $\phi$ . De 3.7, é imediato que

$$\cos(2\theta_m) = -\sin \phi \quad (3.8)$$

e, aplicando-se a identidade  $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ , obtemos

$$\cos^2 \theta = \frac{1 - \sin \phi}{2}. \quad (3.9)$$

Além disso, aplicando a identidade

$$\cot 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} \quad (3.10)$$

à equação 3.6, obtemos uma nova equação que pode ser resolvida para  $\tan \theta$ , de forma que:

$$\tan \theta = \tan \phi \pm \sqrt{\tan^2 \phi + 1}. \quad (3.11)$$

Então, de 3.9 e 3.11 em 3.5:

$$\frac{g}{v_0^2} x_I = \pm \sqrt{\tan^2 \phi + 1} (1 - \sin \phi) \quad (3.12)$$

Finalmente, lembramos que  $\tan \phi = y_I/x_I$  e, portanto, que  $\sin \phi = \pm y_I/\sqrt{x_I^2 + y_I^2}$ , para escrever o conjunto de pontos  $(x_I, y_I)$  que formam a parábola de segurança, denotados por  $(X, Y)$ :

$$Y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} X^2. \quad (3.13)$$

### 3.1.2 Demonstração algébrica

Uma forma alternativa e puramente algébrica para determinar a curva de segurança inicia-se ao calcular o ângulo de lançamento para que a trajetória passe pelo ponto  $P$  de par ordenado  $(X, Y)$ . Podemos reescrever a equação 3.3 usando  $\tan \theta$  como variável:

$$Y = X \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2} - \frac{g}{2v_0^2} X^2 \tan^2 \theta, \quad (3.14)$$

que, após um rearranjo dos termos, assume a forma

$$\tan^2 \theta - \frac{2v_0^2}{gX} \tan \theta + \left( \frac{2v_0^2 Y}{gX^2} + 1 \right) = 0. \quad (3.15)$$

A equação 3.15 é quadrática em  $\tan \theta$ . Seu discriminante  $\Delta$  depende do ponto  $P = (X, Y)$ .

No caso em que  $\Delta < 0$ , não existe raiz real, indicando que nenhum ângulo  $\theta$  é capaz de fazer a partícula atingir o ponto dado. Com  $\Delta > 0$ , ficam determinados 2 ângulos que para os quais as trajetória da partícula contém  $P$ <sup>3</sup>. Já o caso em que  $\Delta = 0$  determina os pontos para os quais há um único ângulo  $\theta$  que faz o projétil ser capaz de atingi-los.

Os pontos que só podem ser atingidos de uma única maneira determinam um comportamento limítrofe e, desse modo, o conjunto desses pontos corresponde à curva de segurança.

---

<sup>3</sup>Os pontos que podem ser atingidos em lançamentos dados por 2 ângulos distintos determinam, ainda, diferentes regiões: uma para a qual o  $P$  é atingido na descida para um ângulo e na descida para outro, e outra para a qual  $P$  é atingido na descida em ambos os casos. Uma fronteira formada pelos pontos de altura máxima separa essas regiões.

Aplicando, portanto, a condição  $\Delta = 0$  à equação 3.15, obtemos

$$Y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} X^2, \quad (3.16)$$

de forma que os pontos  $P = (X, Y)$  assim determinados pertencem à curva de segurança.

## 3.2 Montagem experimental

Devido ao valor da aceleração da gravidade, um experimento de lançamento no ambiente de sala de aula ocorreria num intervalo de tempo muito curto e, portanto, seria de difícil análise. Considerando a altura máxima de lançamento igual ao pé-direito típico de uma sala, de 3,0 m, por exemplo, o tempo de voo de um projétil seria de aproximadamente 1,5 s.

A fim de facilitar a análise do movimento, podemos fazer com que o projétil se desloque sobre um plano inclinado de um ângulo fixo  $\alpha$  em relação à horizontal, de forma análoga à usada por Galileu para o estudo das propriedades do movimento de queda livre vertical. Nesse sistema, supondo todos os atritos desprezíveis, o módulo da aceleração será  $a = g \sen \alpha$ . Escolhendo-se os eixos  $\mathcal{O}x$  e  $\mathcal{O}y$  contidos no plano inclinado, as equações de movimento ficam preservadas, com a mudança  $g \mapsto g \sen \alpha$ . Utilizamos como plano um quadro branco.

O elemento mais importante do aparato experimental é um lançador de mola, construído de tal forma que seu eixo de rotação seja o mais próximo possível do ponto de partida e que a deformação máxima da mola possa ser controlada. Ele deve ser dotado de um mecanismo disparador, de forma que fatores externos não influenciem apreciavelmente a energia cinética inicial, preservando a consistência do experimento. Dadas essas características, a posição inicial do movimento não variará apreciavelmente e a energia cinética inicial do projétil poderá ser controlada para adaptar o lançador ao uso com projéteis de diferentes massas. O lançador é afixado à borda do quadro. Deve-se dispor, ainda, de bilhas metálicas ou de bolinhas de gude para servir

de projéteis<sup>4</sup>. Na figura 3.3 apresentamos o lançador utilizado por nós.

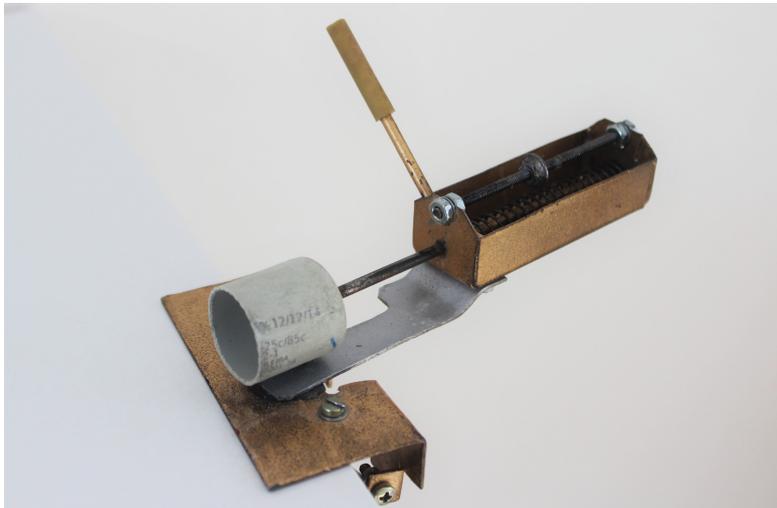


Figura 3.3: Nosso modelo de lançador de mola, construído por Hercílio Córdova. O parafuso da articulação fica abaixo do copo de onde o projétil será lançado. O lançador dispõe de um eixo disposto paralelamente à mola, com arruela que serve de trava ajustável para a alavanca/o gatilho do lançador.

Realizamos nossa montagem com um quadro branco plano de  $120\text{ cm} \times 90\text{ cm}$ , como na figura 3.4. Uma vez que o alcance máximo de lançamento é o dobro da altura máxima para um dado  $v_0$ , o melhor aproveitamento da superfície do quadro sugere dispor o seu lado maior como base inferior e afixar o lançador a um dos vértices dessa base. Pode-se inclinar o quadro utilizando-se apoios nos seus dois lados maiores, com o cuidado de que o quadro esteja bem fixo. A fim de garantir o adequado posicionamento do quadro, afixamos um nível de bolha próximo à sua borda superior.

Sugerimos um ângulo de inclinação do quadro de aproximadamente  $20^\circ$  para facilitar o manuseio do equipamento e a visualização do experimento. Como instrumentos de medida, deve-se utilizar uma trena ou fita métrica de pelo menos  $100\text{ cm}$  e um transferidor comum para avaliar os ângulos de

<sup>4</sup>Devido às diferentes combinações entre massas dos projéteis e compressão da mola, a determinação das melhores condições iniciais ideais ocorre por tentativa e erro, de acordo com os materiais disponíveis.

lançamento. Pode-se também traçar linhas inclinadas a diferentes ângulos, a partir do ponto de lançamento em uma folha de cartolina sobre o quadro.

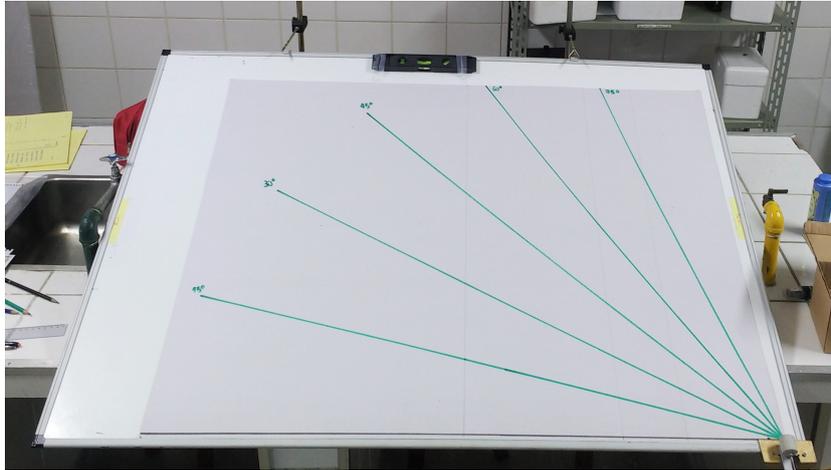


Figura 3.4: Montagem do experimento, com o quadro inclinado sobre uma bancada do laboratório.

Vale alertar o leitor sobre um problema prático encontrado nessa montagem: depois de seu uso extensivo, a parte central do quadro, distante da moldura, sofreu um pequeno afundamento, que prejudicou a qualidade de algumas medidas. Deve-se, portanto, cuidar que toda a extensão do quadro esteja amparada por uma estrutura rígida, preservando sua forma.

Esse tipo de montagem serve para o estudo experimental de todos os movimentos de queda livre e pode ser facilmente transportado entre diferentes espaços de uma escola. Além disso, o material utilizado admite, mas não requer, qualquer recurso computacional para tomada ou análise de dados, de forma que pode ser utilizado mesmo em contextos onde eles não estejam facilmente disponíveis.

### 3.3 Sequência didática

O equipamento experimental descrito na seção anterior pode ser aplicado em sala de aula de formas variadas e para o ensino de diversos conteúdos. Sua utilização pode ser amplamente adaptada de acordo com os objetivos do

professor, abrangendo tanto uma forma puramente demonstrativa, quanto uma tomada de dados extensiva feita pelos alunos, e pode ser útil desde o início do ensino dos movimentos acelerados até a aplicação das leis de Newton e da conservação da energia.

Traçamos, a seguir, uma proposta de utilização desse equipamento em uma sequência de 3 aulas de 1h30min de duração, voltada para turmas nas quais que já se tenham abordado a cinemática escalar nos casos de velocidade constante e de aceleração constante, bem como a decomposição do movimento uniforme (e.g.: um barco atravessando um rio), mas não os lançamentos horizontal e oblíquo. Dessa forma, atenderemos às sequências curriculares mais usuais no Ensino Médio.

Do ponto de vista do método de condução das aulas, acreditamos que os alunos devam ser separados em grupos, de tal forma que a discussão e a colaboração entre eles seja também uma forma de progredir na aprendizagem do tema.

Com essa finalidade, uma das estratégias que utilizamos reiteradamente durante estas aulas é propor de perguntas que devem ser respondidas pelo grupo, seja por meio do raciocínio dedutivo, seja por meio da formulação de hipóteses que servirão como ponto de partida para a verificação experimental.

As aulas foram montadas de tal modo que, em cada uma, sejam introduzidas ou lembradas gradualmente ideias que reaparecerão nas aulas seguintes. Dessa forma, quando certos conceitos assumirem papel central na compreensão de algum aspecto do problema abordado, eles já terão surgido nas aulas anteriores. O instrutor deve, portanto, concatenar cuidadosamente os conceitos na sequência de aulas. De resto, o professor que deseje aplicar essa atividade poderá adaptá-la livremente à sua realidade escolar.

### 3.3.1 Primeira aula

Os principais objetivos desta aula são:

- Revisar a cinemática da queda livre vertical, de acordo com a necessidade;
- Apresentar o problema dos lançamentos horizontal e oblíquo;

- Apresentar o aparato experimental e habituar os alunos ao seu manuseio;
- Demonstrar que o movimento sobre o plano inclinado é perfeitamente análogo ao movimento de queda livre no vácuo.

Pode-se, opcionalmente, iniciar a atividade caracterizando a queda livre vertical na proximidade da superfície da Terra como um movimento sob aceleração constante, revisando algumas das características principais desse tipo de movimento. Vale a pena se certificar de que os alunos lembram que: *(i)* há simetria entre o movimento de subida e o movimento de descida; *(ii)* a velocidade no ponto de altura máxima é nula; *(iii)* as distâncias percorridas em intervalos de tempo iguais e sucessivos obedecem à sequência descrita por Galileu, sendo proporcionais à sequência dos números ímpares. Essas propriedades são úteis porque de fácil observação e porque serão novamente aferidas no movimento sobre o plano, em uma etapa posterior.

Na verificação empírica das propriedades, torna-se extremamente conveniente utilizar um metrônomo (ou um aplicativo de *smartphone* correspondente) para realizar medidas de tempo. Os intervalos regulares entre as batidas do metrônomo permitem reduzir o tempo de reação, de forma a favorecer uma marcação mais precisa do instante de lançamento. A partir disso, é possível avaliar o número de batidas que o metrônomo dá até que o projétil colida com alguma superfície, comparando o som da colisão com o som do metrônomo. Essas medidas podem ser imediatamente constatadas pelos alunos em uma demonstração feita pelo professor, já que se baseiam em uma percepção auditiva. Na nossa experiência, esse método se mostrou extremamente convincente para os estudantes.

Apresenta-se no quadro-negro o problema do lançamento oblíquo, de forma correspondente ao descrito na seção 3.1. Deve-se mostrar que a decomposição das grandezas cinemáticas ao longo do eixo horizontal e do eixo vertical refletem que, no eixo horizontal, a componente da velocidade deve ser constante, enquanto no eixo vertical a aceleração é constante e não nula.

Passa-se, então, a abordar as propriedades desse novo movimento, bidimensional, a partir de uma discussão participativa com os alunos. Pode-se

propor a eles algumas perguntas sobre esse movimento que tenham relação imediata com as propriedades já verificadas, como: “Neste movimento, o tempo de subida é igual ao tempo de descida?”; “Em um lançamento horizontal, variando-se a velocidade inicial, o que ocorre com o tempo de queda?”. Proceda-se à verificação experimental utilizando-se o metrônomo, testando as hipóteses levantadas pelos alunos.

Nessa verificação, deve-se destacar ainda o fato de que esses movimentos ocorrem em um intervalo de tempo muito curto, o que dificultaria, por exemplo, a análise de um lançamento oblíquo ocorrendo no espaço da sala de aula.

Uma vez bem sedimentadas as propriedades corretas e problematizada a dificuldade de medida do experimento feito no ar, apresentamos como alternativa o uso do plano inclinado para estudar um movimento mais duradouro e fácil de visualizar. Para verificar que a comparação entre esses dois movimentos é válida, devemos, porém, demonstrar cuidadosamente, de forma empírica, que as mesmas propriedades dos lançamentos no ar se observam no movimento sobre o plano.

Aqui, é indicado já se servir do lançador. Apresenta-se o aparelho, ensinando os alunos a fazer os ajustes adequados. Acoplando o lançador à base do quadro e utilizando o metrônomo, será fácil mostrar que o tempo de subida é igual ao tempo de descida. Igualmente, abandonando-se uma bilha do repouso no topo do quadro, pode-se perceber a propriedade de Galileu, tomando medidas com crescente número de batidas do metrônomo. Esta etapa também serve para a discussão da aceleração do movimento sobre o plano. Com algumas medidas da distância percorrida pela bilha em um tempo marcado pelo metrônomo, e escolhendo-se um valor de  $g \approx 9,8\text{m/s}^2$ , pode-se mostrar que a relação  $a = g \sin \alpha$  está correta, com todas as equações do movimento sendo preservadas.

Finalmente, coloca-se a bilha para rolar sobre uma régua horizontal, disposta transversalmente ao plano, de forma que se observará um movimento uniforme. Essa observação termina por caracterizar o presente movimento como perfeitamente análogo ao lançamento no ar.

Na etapa final desta aula, propomos uma atividade com o objetivo de

habitua-los a manusear o equipamento, o que será necessário nas aulas seguintes. Para tanto, pede-se aos alunos para fazer sucessivos lançamentos sobre o plano, com ângulos de lançamento diferentes. Então, pede-se para cada grupo desenhar com o pincel, sobre o quadro, a trajetória de um desses lançamentos, da forma mais precisa possível. Após um primeiro esboço, deve-se reproduzir o lançamento com mesmas condições iniciais, de maneira que possam fazer ajustes sobre o desenho. Dessa forma, terão aprendido a operar o experimento e a realizar aproximações sucessivas, também verificando a forma parabólica da trajetória, de maneira empírica. Sobretudo, esta etapa tem por finalidade dar aos alunos uma noção intuitiva sobre o movimento estudado.

### 3.3.2 Segunda aula

Objetivos:

- Estabelecer a relação entre o ângulo de lançamento  $\theta$  e o alcance horizontal;
- Estabelecer a condição de alcance máximo;
- Verificar algebricamente os resultados anteriores;

Nesta aula, faz-se necessário um esforço de unificar a linguagem, facilitando as discussões em sala. É importante que o instrutor distinga claramente alguns conceitos, como alcance e altura; ângulo de lançamento ( $\theta$ ) e ângulo de inclinação do plano ( $\alpha$ ). Essas grandezas devem ser definidas sem ambiguidade, enfatizando que, no experimento,  $\alpha$  é fixo, mas  $\theta$  é variável e medido em relação à base do plano.

Deve-se também destacar que os diferentes lançamentos estudados ocorrerão para um mesmo módulo de velocidade inicial, utilizando-se, portanto, projéteis iguais e mesmas configurações do lançador em todas as iterações, de forma que todos os resultados possam ser comparados, inclusive entre grupos diferentes.

Propõe-se, então, aos alunos as seguintes perguntas:

- Quando o ângulo  $\theta$  aumenta, o que ocorre com o alcance  $A$ ?
- Quando o ângulo  $\theta$  aumenta, o que ocorre com a altura máxima  $H$ ?

Em primeiro lugar, os alunos deverão discutir em grupo para propor hipóteses às perguntas feitas, que devem ser registradas por escrito. Apresentadas as hipóteses, eles devem elaborar um método de verificá-las experimentalmente. O professor deve intervir para que as hipóteses estejam bem definidas e para que o procedimento experimental seja correto e eficiente, de forma que todos os grupos tenham tempo de realizar suas medidas.

O procedimento que consideramos mais adequado consiste em realizar sucessivos lançamentos com ângulos  $\theta$  crescentes. Um dos alunos deve disparar o lançador, enquanto outros verificam o ponto onde a bilha atinge a base do quadro, que deve ser marcado. Isso pode ser feito com um pincel ou mesmo com um pouco de talco espalhado na base do quadro. Enquanto isso, um outro aluno marca o ponto mais alto atingido. Uma vez que esse método se baseia na percepção sensorial e na memória imediata dos experimentadores para marcação dos pontos, devem-se fazer repetições do lançamento com o mesmo ângulo, de forma a realizar correções, aprimorando a marcação dos pontos. Feita a indicação dos pontos considerados satisfatórios pelo grupo, toma-se nota dos valores de alcance e de altura máxima. Um dos alunos deverá tomar nota desses valores, registrando-os em uma tabela junto ao ângulo de lançamento correspondente.

Ao final do processo de medição, cada grupo se reúne para analisar os dados e, a partir disso, responder às perguntas, apresentando, então, suas respostas finais para a classe. Deve-se cuidar para que todos os grupos atinjam as respostas adequadas, isto é, observem o comportamento monotônico de crescimento de  $H$  com  $\theta$  e o comportamento de crescimento e decréscimo de  $A$ .

Caso algum grupo não tenha atingido as respostas esperadas, o professor deve se basear nos dados experimentais dos outros grupos para argumentar que houve algum erro procedimental na tomada daqueles dados, apontando, se possível, a provável razão do problema. Pode-se, então, sugerir ao grupo usar dados obtidos por outros alunos ou fazer uma nova tomada de dados,

de forma que todos participem igualmente das demais etapas da aula.

Uma vez que cada grupo consiga chegar às respostas adequadas, se lhes apresenta um novo conjunto de perguntas, que são uma sequência natural das observações feitas:

- Existem ângulos de lançamento distintos que possuem a mesma altura máxima? Se sim, em que casos?
- Existem ângulos de lançamento distintos que possuem o mesmo alcance? Se sim, em que casos?
- Qual o ângulo de lançamento para que a altura máxima seja a maior possível?
- Qual o ângulo de lançamento para que o alcance seja o maior possível?

Mais uma vez, os alunos devem ser levados a, primeiramente, produzir hipóteses, e só em seguida recorrer aos dados de forma a verificá-las. Uma das razões para isso é que os alunos tipicamente apresentam dificuldade em lidar com os erros dos dados originados nos experimentos, apresentando dificuldade em observar padrões pela mera observação dos valores.

Uma vez que todos tenham atingido os resultados desejados, passa-se à etapa final da aula, que consiste em obter uma equação para o alcance, utilizando os dados medidos e análise dimensional. Sugerimos que esta etapa seja conduzida pelo professor, de forma a apresentar o método de determinação por análise dimensional que será utilizado na aula seguinte.

Sugerimos que o professor, de início, pergunte aos alunos quais são as grandezas que determinam a evolução do problema e componha uma lista delas no quadro. É importante que se distingam as grandezas condicionantes do movimento, como  $v_0$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $g$ ,  $a$ , e até mesmo outras como a massa e o raio da bilha das *variáveis* do movimento, como a posição e a velocidade. Em outras palavras, as grandezas que nos interessam podem ser medidas no instante inicial e determinam toda a descrição posterior do movimento.

Deve-se perguntar aos alunos de quais desses dados do problema pode depender o alcance  $A$ : “Se quisermos escrever uma equação para o alcance, quais dessas grandezas devem aparecer nessa equação?”.

Argumenta-se que a equação do alcance deve depender exclusivamente de  $a$ ,  $v_0$  e  $\theta$ , dado que as outras grandezas que podem ser propostas já têm sua dependência circunscrita a essas, enquanto as outras ou não surtem efeito na cinemática da bilha (*e.g.*, massa) ou têm efeito desprezível (*e.g.*, raio da bilha). Devido a o alcance ter dimensões de comprimento, deve-se usar uma combinação de  $a$  e  $v_0$  com dimensão de comprimento ( $L$ ), de forma que a única solução possível é  $v_0^2/a$ .

Esse procedimento admite ainda uma constante adimensional  $k$ , de forma que  $A \propto kv_0^2/a$ . Como nosso primeiro interesse é demonstrar a dependência de  $A$  com  $\theta$ , afirmaremos, por simplicidade, que  $k = 1$ , deixando a demonstração para a aula posterior, em que nos serviremos novamente da análise dimensional para obter os coeficientes da parábola de segurança.

A equação para o alcance será, portanto, da forma  $A = \frac{v_0^2}{a} f(\theta)$ . É razoável supor que  $f(\theta)$  seja uma função trigonométrica. Tomando os casos dos lançamentos horizontal e vertical a partir do solo, sabemos que  $f(0) = f(\pi/2) = 0$ . Igualmente, sabe-se, das medidas feitas, que  $f(\theta) = f(\pi/2 - \theta)$  e que  $f(\pi/4)$  é máximo. Essas características são compatíveis com a forma  $f(\theta) = \sin(2\theta)$ . A partir dessas informações, pode-se pedir aos grupos para determinar o valor de  $v_0$  a partir dos dados obtidos anteriormente. Se os valores dos diferentes grupos concordarem (concedida uma margem de erro experimental), aí teremos boa evidência de que nossa equação é adequada.

### 3.3.3 Terceira aula

A terceira aula tem como objetivos:

- Contextualizar a utilidade da curva de segurança.
- Verificar a forma da curva de segurança;
- Obter empiricamente a forma matemática da curva de segurança;

No início da aula, deve-se colocar para os alunos uma situação-problema que conduza à curva de segurança do projétil. Pode-se perguntar, por exemplo, como é a região em torno de um chafariz que esguiche água com ângulos de lançamento variados em que uma pessoa pode passar sem se molhar.

Em uma formulação mais tradicional, podemos imaginar um helicóptero que precise atravessar uma região onde existe um canhão fixo ao solo. Se o helicóptero estiver muito perto do canhão, ele ficará vulnerável a ser atingido por um projétil; por outro lado, se ele ficar sempre muito distante do canhão, este não o poderá atingir; no entanto, o helicóptero pode perder muito tempo em um trajeto desnecessariamente longo. Convém, para otimizar o caminho a ser feito pelo helicóptero, conhecer a fronteira que delimita a região “segura” da região “de perigo”, que chamaremos de superfície de segurança. Dado que esse sistema apresenta simetria de rotação em torno de um eixo vertical que passa pelo canhão, basta determinar a interseção dessa superfície com um plano vertical que contenha o eixo, chamada de curva de segurança.

Dessa forma, propomos como principal objetivo da aula *caracterizar* a curva de segurança, ou seja, verificar qual o tipo da curva e quais as suas dimensões, tão bem quanto possível. Propomos, então, aos alunos, primeiramente discutir hipóteses sobre a forma da curva e, em seguida, discutir um método para verificá-la experimentalmente, de forma semelhante ao que foi feito na aula anterior.

O método que sugerimos consiste em proceder de forma análoga ao que se fez para determinar o alcance horizontal. Naquele caso, por meio de aproximações sucessivas, verificava-se em que ponto a trajetória do projétil interceptava a reta horizontal que continha o ponto de lançamento. Desta vez, tomamos uma reta que passa pelo ponto de lançamento, mas fazendo um ângulo  $\phi$  com a horizontal, para determinar o “alcance” do projétil ao longo dessa direção. Esse método é inspirado na demonstração da seção 3.1.1.

Pode-se dispor de uma cartolina já marcada com retas a diferentes ângulos de inclinação  $\phi$  como na figura 3.4, colocada sobre o plano. A partir daí, fazem-se lançamentos sucessivos na tentativa de que o projétil atravesse a reta no ponto mais distante possível. Os pontos de interseção vão sendo marcados a lápis até se encontrar o mais distante. Fazendo isso para vários ângulos de inclinação  $\phi$  da reta, teremos um conjunto de pontos mais distantes atingíveis em cada direção.

Uma vez indicados os pontos, deve-se ligá-los por meio de uma curva suave para argumentar que a curva é uma parábola. Vale enfatizar para os

alunos que esta parábola *não* representa uma trajetória e que esse resultado não é uma consequência imediata da forma parabólica da trajetória. Para determinar que a curva foi desenhada corretamente, devem-se fazer lançamentos com ângulos  $\theta$  diversos, demonstrando que, em todos os casos, o projétil não consegue atravessar a curva de segurança.

A seguir, deve-se caracterizar a parábola da melhor forma possível. Podemos conduzir a discussão da seguinte forma: Se a curva fosse uma reta, poderíamos determinar sua inclinação; se fosse uma circunferência, poderíamos determinar seu raio. A maneira equivalente de se caracterizar tão bem quanto possível uma parábola, considerando a forma mais familiar para os alunos  $y = \mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}x + \mathcal{C}$ , é a determinação dos coeficientes  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ .

Para tanto, será necessário primeiramente obter as coordenadas cartesianas dos pontos marcados, realizando-se medidas com a trena. A simetria do problema impõe que  $\mathcal{B} = 0$ , de forma que restam 2 coeficientes a se obter, tornando-se suficiente tomar 2 pontos distintos pertencentes à parábola. Pede-se aos alunos que façam esses cálculos para obter os coeficientes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$ .

Por fim, a análise dimensional mostra que os coeficientes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$  devem ter dimensões de  $L^{-1}$  e  $L$ , respectivamente. Um dos resultados explorados na aula anterior é que esses valores só podem depender de  $v_0$  e  $a$ , de forma que todo termo com dimensão de comprimento deve ser proporcional a  $v_0^2/a$ , ou seja,

$$\mathcal{A} = k_1 \frac{a}{v_0^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = k_2 \frac{v_0^2}{a} \quad (3.17)$$

A maior altura máxima ocorre no lançamento vertical; portanto, corresponde ao coeficiente  $\mathcal{C}$ , que corresponde à interseção da parábola de segurança com o eixo vertical. Dessa forma, o coeficiente  $\mathcal{C}$  pode ser obtido diretamente pela equação de Torricelli com o lançamento vertical e será dado por:

$$\mathcal{C} = \frac{v_0^2}{2a}, \quad (3.18)$$

de forma que  $k_2 = 1/2$  e é verificada a dependência esperada em  $v_0$  e  $a$ . Deve-se pedir para que os alunos determinem os valores de  $\mathcal{A}$  e de  $\mathcal{C}$  a partir

das medidas feitas. Feito isso, pode-se fazer a operação  $\mathcal{A} \times \mathcal{C}$  para que se observe a relação entre os coeficientes; esse valor deve dar próximo de  $-0,25$ , o que garante  $k_1 = -1/2$  e a forma final da parábola de segurança, conforme a equação 3.16.

Calculados os coeficientes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$  é possível, então, determinar  $v_0$ , o que também deve ser feito pelos alunos. Ao comparar esse valor com o obtido na aula anterior a partir do alcance, o argumento de que a constante adimensional  $k$  teria valor 1 naquele caso, fica bem fundamentado<sup>5</sup>.

Com isso, é possível determinar a parábola de segurança utilizando uma abordagem mista, que combina medidas experimentais com análise dimensional.

### 3.4 Experiência de implementação

Aplicamos uma versão preliminar da sequência didática com alunos do 2º ano do *campus* Engenho Novo II do Colégio Pedro II. Essa aplicação nos permitiu verificar problemas e imperfeições no aparato experimental, bem como aprimorar e avaliar a nossa proposta. Por isso, há diferenças sutis entre o material instrucional e o que relataremos a seguir. A leitura deste relato pode servir de subsídio ao professor que deseje implementar uma atividade semelhante com seus alunos, uma vez que sinaliza as eventuais dificuldades que podem surgir.

Limitamos a participação nas aulas a aproximadamente 15 alunos de cada vez. Para tanto, os alunos que participaram da atividade foram selecionados dentre aqueles que se disponibilizaram voluntariamente, compondo 3 turmas distintas que a realizaram em horários separados. Os professores regentes de todas as turmas já tinham abordado o tópico dos lançamentos, porém muito abreviadamente, de forma que as turmas correspondiam, em termos curriculares, ao que seria esperado para a atividade. Desse modo, os tópicos de *equação do alcance*, *condição para alcance máximo*, *equação da trajetória* e

---

<sup>5</sup>De modo alternativo, pode-se comparar o valor obtido pela equação do alcance para o alcance máximo,  $A_{MÁX} = v_0^2/a$  com a distância entre a origem e ponto de interseção da parábola de segurança com o solo.

*curva de segurança* eram totalmente novos para esses alunos. Por outro lado, os alunos não estavam previamente familiarizados com análise dimensional, o que teria sido favorável ao andamento da atividade.

Em cada turma, os alunos foram divididos em grupos de 4 ou 5 integrantes, que fizeram medidas e tiraram resultados independentemente. Em diversos momentos eles foram incentivados a discutir dentro dos grupos e, depois, a compartilhar e discutir os seus resultados com toda a classe, mediados pelo professor. Isso contribuiu para que a pequena parte dos grupos que não obtiveram medidas de boa qualidade ou conclusões adequadas pudessem compartilhar o resultado dos demais colegas, beneficiando-se de um aprendizado coletivo em sala.

Além disso, dentro dos grupos cada integrante cumpriu um papel conforme suas aptidões, tais como formular hipóteses, disparar o lançador, realizar e registrar medidas, e fazer cálculos. Na maioria dos casos, observamos que os componentes dos grupos se alternavam em assumir uma posição de destaque em cada etapa da atividade e ajudavam a corrigir os demais quando necessário.

A atividade foi utilizada para avaliação e os critérios foram apresentados previamente aos alunos. Atribuímos 50% da nota por participação e assiduidade e 50% por resultados quantitativos obtidos nas aulas. Com relação à atribuição de pontos, foram relevados muitos erros por levarmos em conta o caráter incipiente da atividade, bem como a falta de costume dos estudantes a uma avaliação desse tipo em Física.

Uma grande dificuldade no entendimento dos alunos sobre a natureza da atividade foi a contínua busca de uma resposta comum, como se houvesse um gabarito a ser perseguido. Foi necessário esclarecer repetidas vezes que, do ponto de vista dos critérios de avaliação, o mais importante era que os resultados verificados decorressem das medidas feitas, exibindo uma estrutura lógica coerente. Igualmente, apesar de estarem habituados a atividades de laboratório os alunos, tiveram dificuldades em lidar com os erros nas medidas, procurando respostas precisas e acreditando ser ‘inválidos’ ou errados valores que desviassem poucos centímetros daqueles esperados.

### 3.4.1 Primeira aula

Iniciamos a primeira aula revisando brevemente e de forma expositiva as ideias da cinemática unidimensional já conhecida dos estudantes. Foram abordados: os sistemas de coordenadas, o movimento uniformemente variado, suas equações horárias e suas propriedades, com ênfase no caso da queda livre vertical. Em particular, recordamos as seguintes propriedades da queda livre, para que elas pudessem ser reconhecidas pelos alunos nos lançamentos.

1. A velocidade no ponto de altura máxima é nula;
2. Há simetria nos movimentos de subida e de descida, de forma que os tempos de subida e de descida são iguais, bem como são iguais os módulos da velocidade na subida e na descida em cada ponto;
3. A massa não interfere no tempo de queda ou na velocidade terminal da queda;
4. As distâncias percorridas por um corpo que parte do repouso, em sucessivos intervalos de tempo iguais, obedecem a uma proporção segundo os números ímpares: 1d, 3d, 5d... (Proporção de Galileu)

Procedemos, então, à definição do problema que se tornaria o cerne de nosso estudo: os lançamentos horizontais e oblíquos, conforme enunciado na seção 3.1. Mostramos que a decomposição do movimento exige que a componente horizontal da velocidade seja constante, enquanto sua componente vertical varia com aceleração constante e não nula. Enfatizamos que o movimento se daria, portanto, como uma composição de casos já conhecidos por eles, de movimento uniforme e uniformemente acelerado.

Em seguida, propusemos perguntas como forma de discutir as propriedades dos lançamentos, engajando os alunos a propor hipóteses e expô-las abertamente para toda a turma. Os estudantes apresentaram desenvoltura com as propriedades da queda livre vertical, manifestando-se corretamente mesmo quando não perguntados. No entanto, a extensão das mesmas ideias para o caso bidimensional não se mostrou óbvia para eles. Verificamos isso

ao fazer perguntas sobre lançamentos cujas respostas corretas seriam análogas aos itens acima, mas que deram origem a respostas conflitantes entre diferentes alunos. Dessa forma, nos lançamos a verificar experimentalmente algumas das respostas.

Fizemos duas demonstrações, servindo-nos do metrônomo para realizar medidas de tempo. Primeiro, realizando lançamentos sucessivos no ar com as mãos, mostramos que o tempo de subida e o tempo de descida são iguais. Em seguida, realizamos lançamentos horizontais sucessivos com velocidades diferentes, a partir de uma mesma altura. Isso pode ser feito, por exemplo, com o lançador de projéteis, ajustado para diferentes distensões da mola. No nosso caso, utilizamos uma pista semicicloidal (figura 3.5) que estava disponível no laboratório: uma vez que o tempo de percurso a partir do repouso até a base de uma cicloide é sempre o mesmo, pudemos simplesmente comparar os tempos entre o instante de lançamento e a colisão com o piso.

Essas verificações podem parecer repetitivas ante o que já foi abordado, mas ajudaram a reforçar a independência entre as projeções horizontal e vertical do movimento. Aproveitamos este momento também para introduzir a noção de alcance, já que a diferença de alcances foi perceptível nos lançamentos horizontais. Aqui, chamamos a atenção dos alunos para o fato de que

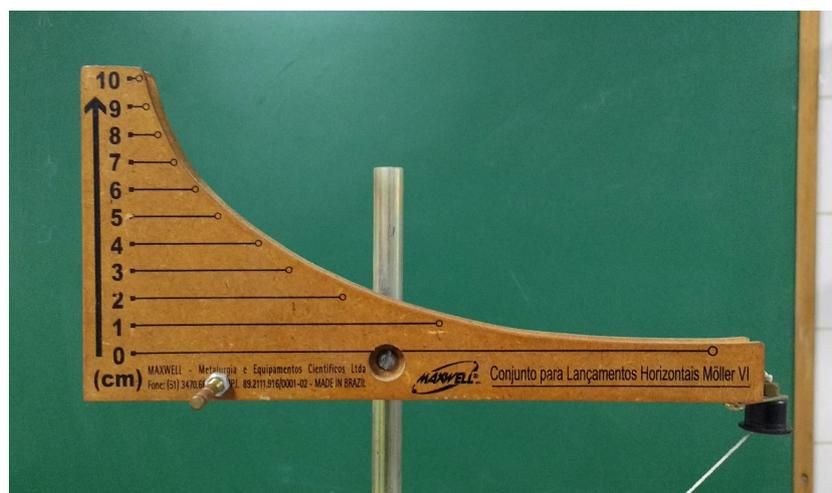


Figura 3.5: Pista semicicloidal utilizada para demonstrar a independência entre o tempo de queda e a velocidade de lançamento horizontal.

continuar o estudo experimental dos lançamentos no ar seria extremamente difícil, devido aos curtos intervalos de tempo envolvidos. Apresentamos, então, o plano inclinado como estratégia para se realizarem lançamentos com aceleração menor.

Uma vez que os alunos não tinham suficientes conhecimentos das leis de Newton, mostramos experimentalmente (ainda usando o metrônomo) que as propriedades observadas no lançamento no ar se repetiam no plano inclinado.

Com o auxílio de uma régua, foi possível observar a proporção de Galileu no caso de velocidade inicial nula, caracterizando o movimento uniformemente variado ao longo do lado mais curto do quadro. Fizemos isso abandonando a bolinha por três vezes sobre o plano e registrando a distância ao ponto de partida com o pincel após 1, 2 e 3 batidas do metrônomo.

Para que a aceleração fosse nula ao longo do lado mais longo do quadro, deveríamos garantir que esse lado estivesse na horizontal: apresentamos o nível de bolha como forma de assegurar essa condição e como ferramenta para que os alunos pudessem conferir se a montagem do experimento tinha sido perturbada ao longo da sua execução.

O último ponto de discussão foi a intensidade da aceleração ao longo do plano. Perguntamos à turma se a aceleração seria maior ou menor quanto mais inclinado fosse o quadro. Eles identificaram corretamente que, “quanto mais vertical o quadro, maior seria a aceleração”. Dessa forma, houve o entendimento comum de que a aceleração cresce monotonicamente com o ângulo  $\alpha$  entre o quadro e a horizontal. Também identificaram que a aceleração máxima seria  $g$ , com o quadro na vertical; e a mínima seria 0, com o quadro na horizontal. A forma  $a = g \sin \alpha$  foi apresentada para os alunos sem mais explicações.

Ao se pedir para eles determinarem  $\sin \alpha$ , a reação da maioria foi de medir o ângulo  $\alpha$  do quadro com um transferidor para então calcular o seno. Mostramos a eles que seria mais fácil obter o seno diretamente ao se tomar medidas, com uma trena, do comprimento e da altura máxima.

Encerramos a aula ensinando os alunos a manusear o lançador. Pedimos para cada grupo realizar um lançamento e, em seguida, tentar desenhar a trajetória. Os alunos realizaram essa tarefa com surpreendente entusiasmo:

um grupo, por exemplo se empenhou em, após esboçar a trajetória, tentar reproduzir um lançamento em condições iguais, de forma que a bolinha se movesse exatamente por cima da linha traçada. A cada novo lançamento, refinavam o esboço feito.

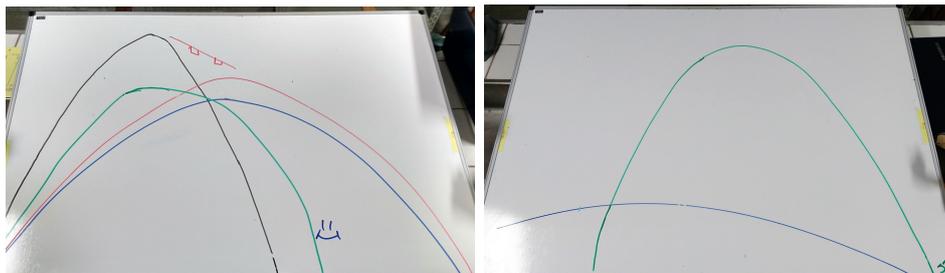


Figura 3.6: Trajetórias desenhadas por alunos de diferentes grupos sobre o plano.

### 3.4.2 Segunda aula

Na segunda aula, preparamos o quadro com algumas perguntas que, ao final, deveriam ser respondidas pelos estudantes por escrito:

1. Qual a relação entre  $\theta$  e o alcance horizontal ( $A$ )?
2. Qual a relação entre  $\theta$  e a altura máxima alcançada ( $H$ )?
3. É possível dois valores de  $\theta$  distintos fornecerem o mesmo  $A$ ?
4. Qual o valor de  $\theta$  para que  $A$  seja máximo?

Oralmente reformulamos as duas primeiras da seguinte forma: “Quando  $\theta$  aumenta, o alcance/a altura máxima aumenta, diminui, ou permanece o/a mesmo/a?”. Pedimos aos alunos para discutirem as hipóteses dentro dos seus grupos; a seguir, cada grupo se alternava em fazer o experimento para verificá-las. Os próprios alunos levantaram variados procedimentos para se realizar as medidas, bem como sugeriram fazer cálculos para comparação. Em uma discussão com a turma, escolhemos qual dos procedimentos seria adotado.

Realizamos medidas de alcance utilizando uma régua colocada horizontalmente no nível do lançador. Enquanto um aluno atirava a bolinha com um ângulo  $\theta$  determinado, outro ficava a postos para ler a posição em que a bolinha atingiria a régua. Sugerimos aos alunos fazer medidas para ângulos diferentes, de  $10^\circ$  em  $10^\circ$  ou  $15^\circ$  em  $15^\circ$ , registrando os dados. Já a avaliação da altura máxima foi feita sem medidas.

A maioria dos grupos verificou corretamente que “o alcance aumenta, depois diminui” com o aumento de  $\theta$ , sendo esses dois comportamentos (nas suas palavras) separados por um “limite” ou por um “meio”. A maioria verificou também que o alcance máximo ocorreria com o ângulo de  $45^\circ$ . Os que não chegaram às respostas adequadas apresentaram problemas na execução experimental: ou esbarraram no quadro, afetando sua inclinação, ou não tomaram os devidos cuidados na medida do ângulo de lançamento. Compartilhamos os resultados de cada grupo com a turma inteira, de forma que os grupos que não chegaram às mesmas conclusões reconheceram suas falhas procedimentais e foram convencidos pelas evidências trazidas pelos demais. Dessa forma, decidiram passar a usar dados dos outros grupos para análise.



Figura 3.7: Diferentes grupos durante a atividade, na 2ª aula. Enquanto dois grupos discutem hipóteses e planejam o procedimentos de tomada de dados, um terceiro realiza as medidas visando a responder às perguntas propostas.

Na terceira pergunta, a maioria respondeu afirmativamente, baseando-se

no comportamento não monotônico do alcance. Alguns grupos perceberam ainda que ângulos complementares terão mesmo alcance. Muitos grupos não chegaram a essa conclusão por entenderem como diferentes os valores de alcance que divergiam apenas em alguns centímetros para ângulos complementares, mesmo quando estimulados a justificar melhor a resposta.

Alguns alunos levantaram ainda hipóteses interessantes sobre a altura máxima ao buscar uma relação entre diferentes ângulos de lançamento. Um aluno propôs que ângulos de lançamento complementares forneceriam alturas máximas que, somadas, seriam a altura máxima no lançamento vertical. Outro conjecturou que o lançamento a  $45^\circ$  teria metade da altura máxima do lançamento vertical. Essas relações, apesar de pouco exploradas e pouco familiares até mesmo para nós, professores, estão corretas.

Finalmente, propusemos a comparação com valores teóricos. Perguntamos aos alunos quais fatores poderiam influenciar o valor do alcance máximo. Após uma discussão com a turma, chegou-se à conclusão de que esses fatores eram  $v_0$  e  $a$ . Por falta de tempo, simplesmente fornecemos a fórmula para o alcance máximo  $A_{MÁX} = (v_0^2/a)$ . O valor da aceleração foi calculado considerando-se  $g = 9,8\text{m/s}^2$  e o seno do ângulo de inclinação da rampa  $\alpha$ . A partir desses dados e das medidas feitas, pedimos que os estudantes calculassem a velocidade de lançamento. Os valores obtidos por eles foram compatíveis com medidas previamente realizadas.

Durante a atividade, um dos grupos decidiu se lançar a fazer o desenvolvimento teórico. Um dos alunos obteve corretamente a equação do alcance  $A = (v_0^2/a)2\text{sen}\theta\text{cos}\theta$ , realizando cálculos com vários valores de ângulos para verificar as razões entre o alcance e o alcance máximo em cada caso e compará-las com as medidas obtidas.

### 3.4.3 Terceira aula

A terceira aula versou sobre a parábola de segurança propriamente.

Em primeiro lugar, contextualizamos o problema, apresentando situações em que lançadores sempre imprimem a mesma velocidade, em módulo, ao projétil, mas podendo ser apontados em ângulos diferentes. Tomamos o

exemplo de um canhão: apontando-se o lançador adequadamente, há pontos que podem ser atingidos pelo projétil e pontos que estão inacessíveis a ele, independentemente de como o lançador seja apontado. Definimos como superfície de segurança aquela que separa essas regiões, ou seja, a que nos permite determinar se estamos ou não “a salvo” de um dado canhão, por exemplo.

Pedimos aos alunos para responder qual seria a forma da superfície que separa essas duas regiões. Os próprios alunos inferiram corretamente que a superfície de segurança deve determinar um círculo ao nível do solo, cujo raio será o alcance máximo, mostrando, portanto, compreensão da simetria de revolução do problema. No entanto, deram por encerrada a solução aí, não considerando os pontos fora do plano do solo.

Explicamos a eles, portanto, que nosso maior interesse seria determinar outra projeção, menos óbvia, dessa superfície, ou seja, a forma da curva obtida por meio de um corte vertical simétrico. Propusemos, então, os problemas que eles deveriam responder nessa aula:

1. Qual é a forma da curva de segurança?
2. Qual a equação da curva de segurança?

Várias hipóteses surgiram para a forma da curva de segurança: a reta, semicírculo, parábola, a forma de uma letra “M” arredondada. Novamente, pedimos aos alunos para resolver o problema experimentalmente.

Discutimos com a turma um procedimento para essas verificações. Alguns alunos sugeriram fazer lançamentos com diferentes ângulos e marcar os pontos de altura máxima. Recordamos o resultado obtido por eles na primeira aula, com o desenho sucessivo de trajetórias com mesma velocidade inicial, para mostrar que a abordagem não seria adequada: os pontos de altura máxima para ângulos de lançamento decrescentes vão se reaproximando da origem.

A linha de pensamento por trás da sugestão, porém, estava correta: marcar os pontos mais distantes que o projétil poderia atingir. No entanto, deveríamos rever a direção em que essa distância seria verificada. Apresentamos a maneira de fazer isso de forma similar à segunda aula, para o alcance.

No entanto, em vez de manter a régua na horizontal, a régua seguiria ângulos de diferentes direções, dadas por  $\phi$ . Como seria difícil afixar a régua em diferentes ângulos, desenhamos retas a ângulos específicos em uma cartolina sobre o quadro (vide figura 3.8), e marcamos as posições de interseção a lápis.

Durante a tomada de dados, alguns alunos se fixaram em tentar descobrir uma relação entre os ângulos de lançamento análoga à que observaram para o alcance horizontal, ou seja, a relação entre os ângulos cujos lançamentos atinjam o mesmo ponto sobre a régua, presente na equação 3.7. Infelizmente, não houve tempo para que a verificassem empiricamente.



Figura 3.8: Grupo de estudantes realizando o experimento na 3ª aula. Enquanto um manuseia o lançador, outros observam para marcar o ponto de interseção com a reta inclinada (desenhada sobre a cartolina). Ao fundo, uma aluna anota os dados.

A tomada de dados dessa aula tomou um tempo muito superior ao esperado dos alunos. Dessa forma, optamos por deixar as duas primeiras turmas fazerem a tomada de dados e responder à primeira pergunta, enquanto a terceira turma deu continuidade a partir disso, realizando a análise dos dados obtidos pelas anteriores e respondendo à segunda pergunta.

Aos alunos da terceira turma, cedemos os dados previamente medidos e propusemos calcular os coeficientes da parábola  $Y = \mathcal{A}X^2 + \mathcal{C}$ , utilizando-se de dois pontos. Antecipamos para eles que o coeficiente  $\mathcal{A}$  calculado deveria

ser negativo, devido à concavidade da curva. Nesta etapa, mostraram uma certa dificuldade com os cálculos ao resolver o sistema de equações, o que tomou um tempo grande, mesmo com o uso de calculadora. Pedimos que eles calculassem o produto entre os coeficientes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$  obtidos. Cada grupo usou um conjunto de pontos diferente para obter seu resultado, sendo que, para apenas um deles, o produto  $\mathcal{AC}$  divergiu do valor esperado  $-1/4$  por mais de 10%. Argumentamos que os valores obtidos por eles eram todos ligeiramente diferentes, o que era normal em procedimentos experimentais, e havia tanto valores superiores quanto inferiores a  $-1/4$ , de forma que, admitido um arredondamento, poderíamos tomar  $-1/4$  como valor mais provável do produto  $\mathcal{AC}$ .

Realizamos, então, a análise dimensional dos coeficientes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{C}$  com os alunos, reproduzindo o argumento de que a equação da parábola de segurança indicava que as suas dimensões são respectivamente de  $L^{-1}$  e de  $L$ . Como os alunos não estavam familiarizados com análise dimensional e não tínhamos aplicado essa estratégia na aula anterior da nossa implementação, percebemos grandes dificuldades em entender esse argumento, que tinha uma natureza nova para eles. Repetimos a discussão utilizando as unidades no lugar da dimensão, com melhores resultados. Argumentando que a parábola deveria estar determinada por  $v_0$  e  $a$ , pedimos que eles obtivessem, com essas grandezas, uma relação que tivesse a unidade do metro. Apesar de eles terem tido sucesso, o tempo empreendido nesta impossibilitou a obtenção de mais resultados. Isso nos levou a rever a sequência de aulas, antecipando para a segunda aula e para o caso mais simples do alcance a discussão sobre análise dimensional.

### 3.4.4 Avaliação da atividade

Ao concluir a atividade, avaliamos que ela teve um saldo extremamente positivo. Apesar de algumas dificuldades experimentais, presentes nos procedimentos para tomada de dados e nos problemas de robustez do experimento (que seguramente podem ser aprimoradas), percebemos um ganho significativo na compreensão matemática e intuitiva dos alunos em relação aos lan-

çamentos oblíquos em geral e, em particular, da curva de segurança. Além disso, acreditamos que ela possa ser aplicada até mesmo em turmas de tamanho regular, com 30 a 35 alunos, feitas adaptações no número de componentes de cada grupo.

A atividade foi bem-sucedida em provocar o engajamento e o entusiasmo dos alunos de maneira mais expressiva do que tipicamente observamos em sala de aula. Pudemos perceber isso na maneira como eles se mobilizaram para formular hipóteses, discutir procedimentos experimentais e até mesmo para tentar responder a novas perguntas, que surgiram da sua própria curiosidade. Não só eles criaram novas perguntas, mas procuraram avidamente respondê-las.

Ouvimos dos estudantes que eles gostariam de realizar outras atividades semelhantes. Ao pedir que explicassem o porquê de terem gostado da atividade, eles apontaram que se sentiam mais providos de recursos para resolver um problema, dado que dispunham da possibilidade de discutir com os colegas e poderiam executar os testes experimentais para verificar as soluções propostas, não usando apenas cálculos e equações matemáticas. Dessa forma, a resolução dos problemas aqui apresentados, apesar de mais sofisticados que os usualmente feitos no quadro negro, lhes pareceu mais acessível devido ao caráter coletivo e experimental dos métodos adotados na atividade.

Alguns meses após a execução da atividade, pedimos aos alunos para participar, facultativamente, de um questionário digital no Google Drive para avaliar o impacto que essas aulas tiveram na aprendizagem do tema. Infelizmente, devido a dificuldades de horário e à ocorrência de greve, não foi possível aplicá-lo presencialmente. Nós pedimos aos alunos para responder em casa, mas houve uma adesão pequena demais para que o resultado fosse estatisticamente significativo. Apresentamos o questionário integralmente no apêndice D.

# Capítulo 4

## A montanha-russa caipira

### 4.1 Introdução

Um disco que desce rolando sem deslizar um plano inclinado pode ter um movimento bem mais complicado do que parece à primeira vista. Esse problema clássico e corriqueiramente abordado em todos os níveis de ensino de Física, produz comportamentos surpreendentes se admitida apenas uma pequena alteração: fazer com que o centro de massa do disco seja *excêntrico*, ou seja, que não coincida com o seu centro geométrico.

Sabe-se que um corpo que possua simetria axial, ao ser abandonado sobre um plano inclinado de  $\alpha$  em relação à horizontal e com atrito suficientemente grande, desce o plano rolando sem deslizar com aceleração constante de módulo  $a \propto g \sin \alpha$ , que depende da sua distribuição de massa. No entanto, um segundo corpo, de mesma massa e que aparente ser idêntico ao primeiro, mas cujo centro de massa seja excêntrico, terá um movimento diferente ao ser posto em um plano inclinado. Dependendo das condições iniciais e da inclinação da rampa, ele poderá ficar em repouso, oscilar em torno de sua posição de equilíbrio, descer com aceleração variável ou até, misteriosamente, saltar do plano.

Esse fato tem estreita relação com uma brincadeira conhecida como *montanha-russa caipira*. Nela, crianças se encaixam no interior de um pneu de trator para descer uma ladeira. Se apenas uma criança se coloca no pneu, o centro

de massa do sistema pneu-criança passa a se situar em um ponto localizado entre os centros de massa das partes, ou seja, a uma certa distância do centro geométrico do pneu.

A amplitude da variação da aceleração do centro de massa poderá ser grande a ponto de o pneu ser lançado do plano. A experiência ensina ao participante (talvez dolorosamente) que a melhor maneira de fazer a brincadeira é com a participação de uma outra criança ocupando o lado diametralmente oposto do pneu. Nessa condição, o centro de massa do sistema ficará próximo ao centro geométrico do pneu, que não mais saltará da rampa, possuindo comportamento similar ao que teria sem seus ocupantes.

Como veremos adiante, a compreensão do movimento do disco com centro de massa excêntrico envolve vários conceitos físicos. É necessário entender e utilizar as ideias de trajetória, centro de massa, referencial inercial, raio de curvatura, aceleração centrípeta, o comportamento das forças normal e de atrito, a dinâmica do corpo extenso, lançamentos oblíquos e as leis de Newton. Esse problema sozinho constitui, portanto, um rico laboratório para a exploração de diferentes tópicos.

A seguir listamos e comentamos alguns dos conceitos envolvidos e o porquê de aprendê-los.

- **Trajétória.** A observação da forma da trajetória fornece informações preciosas sobre os correspondentes movimentos<sup>1</sup>. Existe, portanto, um grande ganho no estudo das trajetórias para além dos casos de forma retilínea, circular e parabólica.
- **Raio de curvatura e força centrípeta.** A noção generalizada de raio de curvatura se aplica à análise de movimentos que ocorrem com trajetórias curvas, porém não circulares, expandindo o escopo da resultante centrípeta para além do movimento circular em que ela é usualmente abordada no ensino médio.
- **Referencial inercial.** Deve-se destacar para os alunos que todo problema será resolvido utilizando-se um determinado conjunto de coorde-

---

<sup>1</sup>Um dos exemplos mais claros e historicamente relevantes disso é a equação de Binet, que permite determinar uma força central a partir do conhecimento da forma da órbita.

nadas e adotando-se um determinado referencial. A escolha do referencial deve ser consciente e, preferencialmente, o referencial usado deve ser inercial, de forma a não haver forças fictícias. Além disso, mudanças de referencial são ferramentas poderosas para a resolução de diversos problemas, desde a ultrapassagem de dois carros em uma estrada até casos mais elaborados, como o que analisaremos neste capítulo.

- **Força normal e força de atrito.** Analisar essas forças em uma situação intrincada permite reforçar várias características dessas interações, ao mesmo tempo que afastar concepções equivocadas sobre as mesmas. Os alunos poderão percebê-las como as forças que caracterizam o contato. O problema ilustrará claramente alguns fatos contrários a percepções usuais, como o de que a força normal não é uma reação da força peso, e de que a força de atrito não se opõe ao movimento.
- **Centro de massa.** Pouco se costuma falar, no ensino médio, sobre o centro de massa. Quando ocorre, isso é feito em situações de equilíbrio ou em colisões. O estudo do centro de massa em um caso dinâmico permite estender a aplicação de toda a dinâmica de partículas ao caso dos corpos extensos. É importante se destacar a relação entre as forças e o movimento desse ponto específico do sistema.
- **Energia mecânica.** A conservação da energia mecânica permite, de maneira simples, prever as características mais gerais dos movimentos, como determinar se serão ou não periódicos.
- **Torques.** Os torques são fundamentais para entender a estática e a dinâmica das rotações e deixam clara a importância de se observar não apenas o módulos e as direções das forças, mas também os pontos onde são aplicadas.

Prosseguiremos com a análise matemática e física do problema. Primeiramente, faremos um estudo geométrico da trajetória descrita pelo centro de massa do sistema. Por conveniência, obteremos as correspondentes equações de movimento por meio da mecânica lagrangiana. Em seguida identi-

ficaremos as equações envolvendo as forças para fundamentar uma análise semiquantitativa do sistema.

## 4.2 Estudo geométrico do movimento

Considere, inicialmente, um disco de raio  $R$  rolando sem deslizar sobre uma superfície horizontal, de tal forma que o disco esteja sempre contido no mesmo plano  $\mathcal{O}xy$ .

Considere um ponto  $P$  do disco, localizado a uma distância  $r$  do seu centro  $C$ , tal que  $0 < r < R$ . Os sucessivos pontos de contato entre o disco e a superfície estão contidos no eixo  $\mathcal{O}x$ , e o eixo  $\mathcal{O}y$  é vertical. O ângulo  $\theta$  que descreve a rotação do disco é medido entre o segmento  $\overline{PC}$  e a direção vertical. A condição de não deslizamento fica garantida ao se impor que a abscissa da posição do centro  $C$  do disco seja dada por  $x_C = R\theta$ . Para  $\theta = 0$ , as coordenadas de  $P$  são  $(0, R - r)$  e as de  $C$  são  $(0, R)$ .

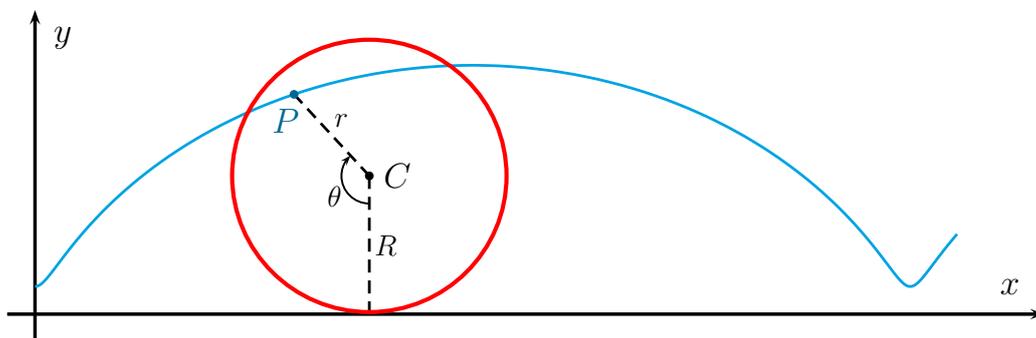


Figura 4.1: Disco que gira sem deslizar sobre o eixo  $\mathcal{O}x$ . Em azul está representada a trajetória do ponto  $P$ .

A trajetória de  $P$  é chamada *trocoide*, e suas equações paramétricas para as coordenadas  $x$  e  $y$  são

$$\begin{cases} x &= R\theta - r \operatorname{sen} \theta; \\ y &= R - r \cos \theta. \end{cases} \quad (4.1)$$

As componentes cartesianas da velocidade de  $P$  são

$$\begin{cases} v_x &= R\dot{\theta} - r\dot{\theta} \cos \theta; \\ v_y &= r\dot{\theta} \sin \theta \end{cases} \quad (4.2)$$

e, conseqüentemente, as componentes cartesianas da aceleração são

$$\begin{cases} a_x &= R\ddot{\theta} - r\ddot{\theta} \cos \theta + r\dot{\theta}^2 \sin \theta; \\ a_y &= r\ddot{\theta} \sin \theta + r\dot{\theta}^2 \cos \theta. \end{cases} \quad (4.3)$$

Desse modo, o quadrado da velocidade de  $P$  será dado por

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\theta}^2(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta). \quad (4.4)$$

Definindo  $b$  por

$$b(\theta) = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}, \quad (4.5)$$

é fácil concluir a partir da figura que  $b$  é o comprimento do segmento que liga  $P$  ao ponto de contato entre o disco e o plano, de modo que reescrevemos a equação 4.4 como

$$v^2 = \dot{\theta}^2 b^2. \quad (4.6)$$

### 4.2.1 Raio de curvatura

Tomemos uma curva arbitrária no plano  $\mathcal{O}xy$ , que contenha os pontos  $M$  e  $M'$ . O arco  $MM'$  tem comprimento  $\Delta s$  e as retas tangentes à curva nos pontos  $M$  e  $M'$  determinam um ângulo  $\Delta\phi$ , como mostra a figura 4.2. Definimos a *curvatura média*  $\kappa$  para o arco  $MM'$  como

$$\kappa(M, M') = \frac{\Delta\phi(M, M')}{\Delta s(M, M')}. \quad (4.7)$$

Se tomarmos, porém, a vizinhança do ponto  $M$ , ou seja — para pontos da curva infinitesimalmente próximos a  $M$  — a curva pode ser aproximada por

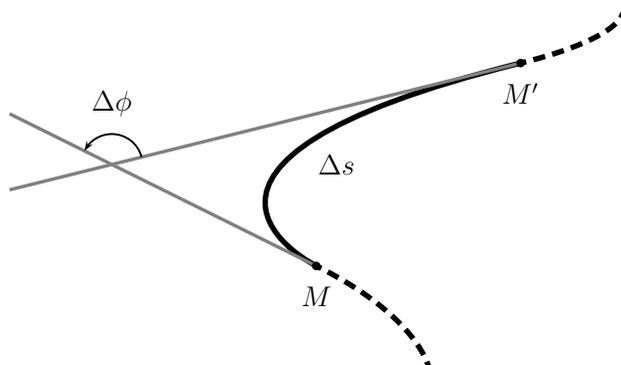


Figura 4.2: Curva arbitrária e duas retas tangentes a ela nos pontos  $M$  e  $M'$ .

um arco de círculo de raio  $\rho(M)$  e centro  $N$ ;  $N$  será chamado de *centro de curvatura* e  $\rho(M)$ , de *raio de curvatura* da curva em consideração no ponto  $M$ . Para analisar essa vizinhança tomamos o limite da curvatura  $\kappa$  quando  $M'$  se aproxima infinitamente de  $M$ , ou seja,

$$\kappa(M) = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds} \quad (4.8)$$

e o raio de curvatura correspondente é dado por

$$\rho(M) = \frac{1}{\kappa(M)}, \quad (4.9)$$

de forma que

$$ds = \rho d\phi. \quad (4.10)$$

Usando-se essa definição, pode-se mostrar [22] que o raio de curvatura de uma curva qualquer, parametrizada por  $x(\theta)$  e  $y(\theta)$  em um ponto arbitrário é dado por

$$\rho = \frac{\left( \left( \frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right)^{3/2}}{\left\| \frac{dx}{d\theta} \frac{d^2x}{d\theta^2} - \frac{dy}{d\theta} \frac{d^2y}{d\theta^2} \right\|}. \quad (4.11)$$

A fim de aplicar a equação 4.11 à trocoide, calculamos as derivadas 1ª e

2ª da equação 4.1 em relação a  $\theta$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = R - r \cos \theta \\ \frac{dy}{d\theta} = r \sin \theta \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{d^2x}{d\theta^2} = r \sin \theta \\ \frac{d^2y}{d\theta^2} = r \cos \theta \end{cases} \quad (4.12)$$

Substituindo os resultados anteriores em 4.11, obtemos

$$\rho(\theta) = \frac{[R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2]^{3/2}}{|Rr \cos \theta - r^2|} = \frac{b^3}{r^2 \left| \frac{R}{r} \cos \theta - 1 \right|}. \quad (4.13)$$

Vale mencionar dois casos particulares desse resultado:

- Se tomarmos  $P$  na periferia do disco, sua trajetória será uma cicloide. Dessa forma,  $R/r = 1$ , então  $b^2(\theta) = 2R^2(1 - \cos \theta)$  e, para um ponto qualquer da trajetória, tem-se

$$\rho_{cicl.}(\theta) = \frac{b^3(\theta)}{R^2 |\cos \theta - 1|} = \frac{b^3(\theta)}{b^2(\theta)/2} = 2b(\theta). \quad (4.14)$$

- Para os ângulos  $\theta = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ),  $\cos \theta = \pm 1 \implies b = R \mp r$ . Logo,

$$\rho(\theta = n\pi) = \frac{b^2}{r}. \quad (4.15)$$

De forma alternativa, podemos calcular o raio de curvatura  $\rho$  usando argumentos físicos. Supomos que o movimento do disco seja tal que a sua velocidade angular seja constante ( $\dot{\theta} = cte$ ). Dessa forma, o seu centro  $C$  terá velocidade linear, cujo módulo é dado pela expressão  $v_C = \dot{\theta}R$ , também constante<sup>2</sup>. Então podemos escolher um referencial inercial  $\mathcal{S}$ , fixo ao plano, e outro referencial inercial  $\tilde{\mathcal{S}}$  solidário ao centro do disco e com eixos paralelos aos de  $\mathcal{S}$ . Com relação a  $\tilde{\mathcal{S}}$ , o movimento de  $P$  será circular e uniforme de raio  $r$ , e a aceleração será sempre centrípeta, ortogonal a  $\vec{v}$ .

Nos pontos mais alto e mais baixo da trajetória, a velocidade de  $P$  será horizontal tanto em  $\mathcal{S}$  quanto em  $\tilde{\mathcal{S}}$ . Uma vez que a aceleração não difere

<sup>2</sup>Uma vez que o raio de curvatura depende exclusivamente da geometria da trajetória, a condição imposta sobre o movimento de  $P$  não implica perda de generalidade.

entre referenciais inerciais ( $\vec{a} = \vec{\tilde{a}}$ ), fica claro que a aceleração nesses dois pontos será ortogonal à velocidade  $\vec{v}$  medida em  $\mathcal{S}$ , sendo interpretada, portanto, como uma aceleração centrípeta também nesse referencial. Portanto, usando o fato de que  $\tilde{\theta} = \theta$ , podemos escrever :

$$\frac{v^2}{\rho} = \dot{\theta}^2 r, \quad (4.16)$$

donde, aplicando a equação 4.6, recuperamos a 4.15:

$$\rho(n\pi) = \frac{b^2(n\pi)}{r}.$$

Apesar de esse resultado refletir um caso particular, ele se mostrará útil ao permitir resolver exatamente o problema nos pontos com  $\theta = n\pi$  e, por extensão, realizar estimativas para os ângulos próximos a esses.

### 4.3 Dinâmica do movimento

Tomemos um disco oco de raio  $R$  e centro  $C$ . Afixa-se a ele uma massa adicional, de forma que seu centro de massa fique localizado a uma distância  $r < R$  do seu centro, sua massa total passe a ser  $M$  e seu momento de inércia em relação a um eixo perpendicular ao disco e que passe pelo centro de massa seja  $I$ .

Coloca-se esse corpo sobre um plano inclinado de  $\alpha$  em relação à horizontal. Definiremos o eixo  $\mathcal{O}x$  paralelo ao plano e o eixo  $\mathcal{O}y$  perpendicular a ele, de tal forma que a origem do sistema de coordenadas seja a posição inicial do centro geométrico do disco e que o eixo  $\mathcal{O}x$  aponte no sentido de descida do plano. O ângulo de rotação  $\theta$  é tomado em relação à direção da normal. Aplica-se a condição de não deslizamento  $x_C = R\theta$  (para o centro do disco)<sup>3</sup>. Nessas condições, o seu centro de massa descreverá uma trajetória como a do ponto  $P$  da seção anterior e todas as equações já obtidas para a trocoide

<sup>3</sup>Vale mencionar que a aplicação da equação empírica para a força de atrito, associada ao relaxamento da condição de não deslizamento do disco, pode gerar violações do determinismo newtoniano, admitindo múltiplas soluções para as mesmas condições iniciais. Para uma descrição detalhada de tais dificuldades sutis, veja [21].

se aplicam ao movimento de  $P$ .

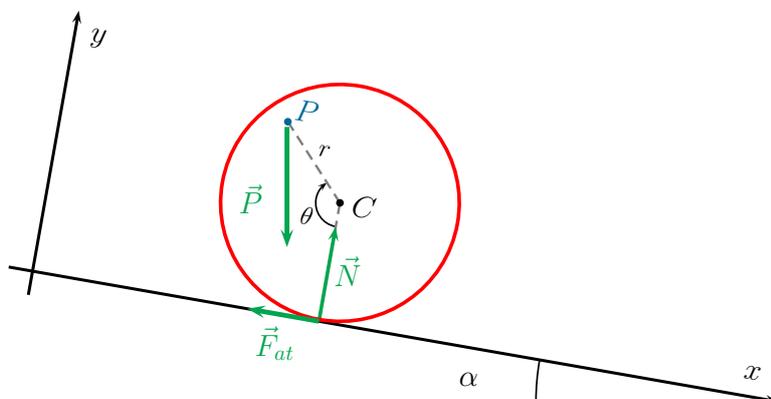


Figura 4.3: Representação do movimento do disco sobre plano inclinado de  $\alpha$  com respeito à horizontal.

Há apenas 3 forças agindo sobre o disco: o peso  $\vec{P}$ , a força normal  $\vec{N}$  e a força de atrito  $\vec{f}_{at}$  (figura 4.3). Estas duas últimas terão módulos variáveis e evoluções temporais não triviais. Vale ressaltar que a condição de rolamento sem deslizamento faz com que a força de atrito não realize trabalho, sendo o sistema conservativo<sup>4</sup>.

### 4.3.1 Resolução pelo lagrangiano

A fim de obtermos as expressões para as energias cinética e potencial, utilizaremos um novo sistema de coordenadas  $\mathcal{O}x'y'$  obtido a partir de uma rotação de  $\alpha$  do sistema anterior, de forma que  $\mathcal{O}y'$  seja vertical.

Desse modo, a relação entre as coordenadas fica:

$$\begin{cases} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha . \end{cases} \quad (4.17)$$

<sup>4</sup>O fato de o centro de massa do disco permanecer equidistante de suas bases simplifica o problema, porque preserva a simetria na direção perpendicular ao plano  $\mathcal{O}xy$ , de forma que se pode considerar que a força normal é aplicada em um único ponto. Esse cuidado deve se refletir na construção do experimento.

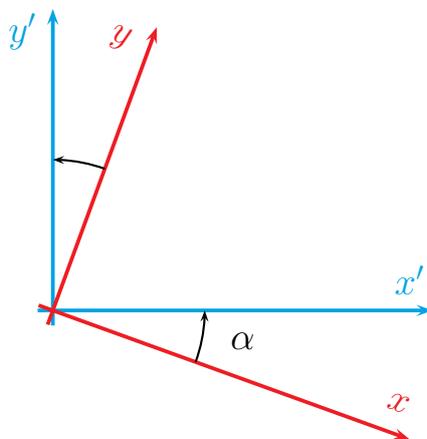


Figura 4.4: Rotação do sistema cartesiano  $\mathcal{O}xy$  para um sistema  $\mathcal{O}x'y'$  por um ângulo  $\alpha$ .

Escolhendo  $\theta$  como coordenada generalizada, escrevemos a energia potencial  $U$  e a energia cinética  $K$  como

$$U = Mgy' = Mg(-R\theta \operatorname{sen} \alpha + R \cos \alpha - r \cos(\alpha + \theta)), \quad (4.18)$$

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{\theta}^2(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta), \quad (4.19)$$

de forma que é imediato obter o lagrangiano  $\mathcal{L} = K - U$ . Aplicaremos, portanto, a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0. \quad (4.20)$$

No nosso caso, os termos que aparecem na equação de Euler-Lagrange ficam expressos como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= M\dot{\theta}^2 Rr \operatorname{sen} \theta + MgR \operatorname{sen} \alpha - Mgr \operatorname{sen}(\theta + \alpha), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= I\dot{\theta} + M\dot{\theta}(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= I\ddot{\theta} + M\ddot{\theta}(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta) + M\dot{\theta}^2(2Rr \operatorname{sen} \theta). \end{aligned}$$

Dessa forma, a equação de movimento é dada por

$$Rg \sin \alpha - rg \sin(\theta + \alpha) - Rr\dot{\theta}^2 \sin \theta - \frac{I}{M}\ddot{\theta} - M\ddot{\theta}(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta) = 0. \quad (4.21)$$

Integrando-se numericamente a equação 4.21 obtém-se  $\theta(t)$ . Vale reforçar que ela só será válida enquanto o disco estiver em contato com o plano e girar sem deslizar, apesar de esse sistema, de fato, admitir outros tipos de movimento.

### 4.3.2 Análise das forças

Realizamos agora a análise do problema a partir das forças, servindo-nos da segunda lei de Newton. As forças que atuam no disco são: a força peso ( $\vec{P}$ ), a força normal ( $\vec{N}$ ) e a força de atrito ( $\vec{f}_{at}$ ).

#### Estática

A condição de equilíbrio para um corpo extenso requer que  $\sum \vec{F} = \vec{0}$  e  $\sum \vec{\tau} = \vec{0}$  simultaneamente. A condição sobre o torque externo é satisfeita se a direção da força peso  $\vec{P}$  passar pelo ponto de contato entre o disco e o plano (figura 4.5). Com efeito, se calcularmos os torques em relação ao ponto de contato, é imediato ver que  $\vec{N}$  e  $\vec{f}_{at}$  produzem torques nulos.

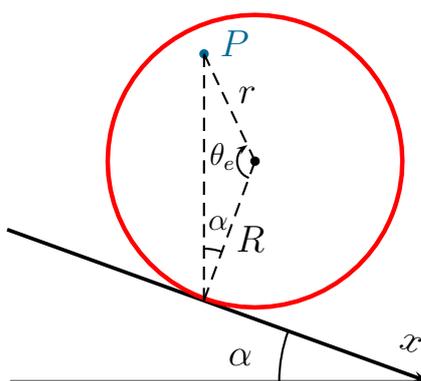


Figura 4.5: Condição de equilíbrio.

Nesse caso, da lei dos senos:

$$\text{sen}(\alpha + \theta_e) = \frac{R}{r} \text{sen} \alpha. \quad (4.22)$$

Só há solução para a equação 4.22 se  $r \geq R \text{sen} \alpha$ , de forma que podemos considerar dois casos:

- Se  $r = R \text{sen} \alpha$ , então a única posição de equilíbrio  $\theta_e = \pi/2 - \alpha$  corresponde a um equilíbrio indiferente;
- Se  $r > R \text{sen} \alpha$ , então há duas posições de equilíbrio dadas por

$$\theta_{e-} = \arcsen\left(\frac{R}{r} \text{sen} \alpha\right) - \alpha \quad \text{e} \quad (4.23)$$

$$\theta_{e+} = \pi - \arcsen\left(\frac{R}{r} \text{sen} \alpha\right) - \alpha, \quad (4.24)$$

de tal forma que  $\theta_-$  corresponde a um equilíbrio estável e  $\theta_+$ , a um equilíbrio instável.

## Dinâmica

Primeiramente, escrevemos os torques em relação ao CM, localizado em P:

$$-Nr \text{sen} \theta + f_{at}(R - r \cos \theta) = I\ddot{\theta}. \quad (4.25)$$

E as forças:

$$\begin{cases} Mg \text{sen} \alpha - f_{at} = M\ddot{x} = R\ddot{\theta} - r\ddot{\theta} \cos \theta + r\dot{\theta}^2 \text{sen} \theta \\ N - Mg \cos \alpha = M\ddot{y} = M(r\ddot{\theta} \text{sen} \theta + r\dot{\theta}^2 \cos \theta). \end{cases} \quad (4.26)$$

Nota-se que o conhecimento de  $\theta(t)$  determina todas as demais variáveis do movimento ( $N, f_{at}, x, y$ ). Uma vez que o sistema possui 1 grau de liberdade, é possível reobter a equação de movimento 4.21.

## 4.4 Material experimental

Apesar da riqueza do problema, a montagem experimental do disco com centro de massa excêntrico requer apenas materiais fáceis de obter, admitindo diversas possibilidades. O professor que desejar executar esse experimento poderá fazê-lo usando um corpo de formato cilíndrico e um pequeno peso adicional para deslocar o centro de massa. Uma rampa completa o material necessário; para que ocorra o salto do disco, é desejável ter uma rampa de pelo menos 1,5m de comprimento.

No entanto, a interpretação da solução do problema, feita nas seções anteriores, sugere alguns cuidados:

- a superfície do disco deve ser de material aderente, garantindo a condição de não deslizamento;
- deve ser preservada a simetria da distribuição de massa na direção do eixo de simetria do disco<sup>5</sup> ;
- o disco deve ser montado de tal forma que se possa marcar a posição do centro de massa e a direção de  $\overline{CP}$  para adequada visualização dos movimentos.
- O centro de massa do disco deve ser bastante excêntrico para que se observem todos os possíveis movimentos. Tomando por referência um ângulo máximo de  $20^\circ$  para a inclinação da rampa, a Eq. 4.22 pede que  $r > 0,342 R$ , o que só é conseguido com uma massa adicional da ordem da metade da massa do disco.

A inclinação ideal da rampa para que se observem os diferentes movimentos pode ser obtida por tentativa e erro, de acordo com as características dos materiais disponíveis.

Para a correspondente modelagem do experimento, feita por meio da integração numérica da equação 4.21, convém conhecer os valores de  $M$ ,  $R$ ,

---

<sup>5</sup>Na prática, isso significa que, se usarmos uma lata de alumínio, por exemplo, deve-se usar apenas a superfície lateral, removendo o fundo da lata.

$r$  e  $I$ . Os dois primeiros são facilmente mensuráveis com régua e balança; os dois outros devem ser calculados.

Em geral, é difícil medir o momento de inércia diretamente, de forma que convém obtê-lo em função do raio do disco ( $R$ ) e de sua massa  $M$ . Façamos isso primeiramente para o disco. Conhecidas a sua massa  $m_D$  e o seu momento de inércia em relação ao eixo de simetria  $I_C = \int r^2 dm$ , pode-se obter o momento de inércia em relação a um eixo paralelo que passa pelo ponto  $P$  — que eventualmente será ocupado pelo centro de massa do sistema — utilizando o teorema de Steiner:

$$I_P = I_C + m_D r^2. \quad (4.27)$$

O valor de  $r$ , que descreve a distância do centro de massa ao eixo de simetria do disco, será determinado pela anexação da massa adicional  $m_A$ , cujas dimensões são pequenas se comparadas às do disco, colocada a uma distância  $d$  do centro do disco:

$$r = \frac{m_A d}{m_A + m_D}. \quad (4.28)$$

Essa massa contribuirá também com um momento de inércia adicional relativo ao eixo que passa pelo centro de massa  $I_A = m_A (d - r)^2$ . Finalmente, somam-se os momentos de inércia devido a cada corpo para obter o momento de inércia total

$$I = I_{P(\text{disco})} + I_A = I_C + \frac{m_D m_A d^2}{(m_A + m_D)}. \quad (4.29)$$

No nosso caso, utilizamos um corpo de borracha no formato de “pneu” vendido em *pet shops*. Modelamos o pneu como uma superfície cilíndrica de raio  $r^2$  e altura  $h$ , com duas “tampas” na forma de coroas circulares de raio interno  $r_1$  e raio externo  $r_2$ . Atribuímos a ele uma densidade superficial  $\sigma$ , suposta uniforme, dada por

$$\sigma = \frac{m_D}{A} = \frac{m_D/2\pi}{(r_2^2 - r_1^2) + r_2 h}. \quad (4.30)$$

O seu momento de inércia em relação ao eixo de simetria,  $I_C$ , será dado então

por:

$$\begin{aligned}
 I_C &= I_{bases} + I_{lateral} \\
 &= 2\sigma \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r dr + \sigma(2\pi r_2 h)r_2^2 \\
 &= \pi\sigma[r_2^4 - r_1^4 + 2hr_2^3] \\
 &= \frac{m_D}{2} \frac{r_2^4 - r_1^4 + 2hr_2^3}{(r_2^2 - r_1^2 + r_2 h)}. \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

Com o nosso material experimental, obtivemos os seguintes valores, que usamos na obtenção das soluções numéricas e que podem servir como referência para um experimento com dimensões similares:  $M = 0,15 \text{ kg}$ ,  $R = 0,10 \text{ m}$ ,  $I = 0,002 \text{ kgm}^2$ ,  $r = 0,06 \text{ m}$ .

## 4.5 Sequência didática

Como ficou claro nas seções 4.2 e 4.3, a solução completa deste problema é bastante complicada. Certamente não nos interessará determinar essa solução integralmente, tal como a apresentamos aqui, no Ensino Médio. Isso não impossibilita, no entanto, a tentativa de obter alguns aspectos dessa solução, em resultados quantitativos e qualitativos, a partir de estimativas e de cálculos. Iremos compará-los, posteriormente, com a solução numérica.

Com esse objetivo, proporemos aqui a abordagem didática do problema a partir de algumas perguntas sobre pontos particulares da trajetória e para determinadas condições iniciais. Convém começar por casos mais simples, de forma que ocorra uma evolução gradual da compreensão do problema, para finalmente chegar ao caso mais sofisticado em que o disco desce a rampa e, eventualmente, salta dela.

Nesse aspecto, é fundamental que se disponha do experimento para a visualização do movimento e para fazer testes e estimativas. Como o movimento desse sistema em geral não é o que se espera intuitivamente, a surpresa que ocorre ao se demonstrar um desses movimentos da partícula serve como excelente ponto de partida para a discussão das soluções e para motivar a

busca das respostas através do estímulo à curiosidade. Acreditamos que essa surpresa deva ser explorada pelo professor na hora de apresentar os problemas. Isso pode se refletir na montagem do experimento, escondendo-se a massa adicional sobre o disco, de maneira que a sua assimetria não fique aparente.

Com isso em mente, adotaremos como estratégia geral:

- (i) observar empiricamente o movimento do disco em uma determinada configuração,
- (ii) tentar responder a um conjunto de perguntas sobre esse movimento,
- (iii) recorrer à solução numérica para verificar as respostas anteriores, bem como extrair novos dados sobre o movimento.

Iniciaremos pelo caso mais simples, que é o do disco em repouso sobre o plano inclinado. Depois, analisaremos casos do disco em movimento sobre um plano horizontal, para então nos debruçarmos sobre o caso do disco em movimento sobre o plano inclinado.

Da mesma forma que no capítulo 3, sugerimos a realização das propostas a seguir como atividades em grupo; no entanto, por se tratar de uma abordagem majoritariamente qualitativa, não haverá coleta de dados, de forma que não é necessário ser uma atividade de laboratório. As aulas foram pensadas para alunos que já tenham concluído os tópicos de leis de Newton, trabalho e energia e estática do corpo extenso.

### 4.5.1 Disco sobre a rampa: caso estático

Nesta aula, serão discutidos:

- Momento de inércia;
- Estática e dinâmica do corpo extenso;
- Equilíbrio estável e instável;

O professor pode iniciar a análise do problema fazendo demonstrações com uma rampa longa. Ele coloca corpos diferentes, um de cada vez, para

rolar sem deslizar sobre ela, tais como um cilindro oco, uma bolinha de tênis e uma bolinha de pingue-pongue.

Durante essa demonstração, são lembradas algumas propriedades do movimento, em especial que ele é uniformemente acelerado. Valerá a pena destacar que a força de atrito, nesse caso, não realiza trabalho, de forma que não provoca dissipação de energia.

Feito isso, o professor pode colocar esses corpos para rolar simultaneamente, observando que os tempos de queda serão distintos. Pede-se aos alunos para explicar esse acontecimento. Nesse ponto, como a razão se deve às diferenças entre os momentos de inércia (que não surgem usualmente no Ensino Médio), provavelmente seus conhecimentos prévios não serão suficientes para explicar esse acontecimento. Não obstante, uma discussão em torno dessas respostas serve para refutar algumas das hipóteses que venham a ser apresentadas por eles, tais como utilizar as diferenças de massas e dos coeficientes de atrito para explicar os diferentes tempos de queda.

O professor mostrará, então, que a resposta está na geometria da distribuição de massa dos corpos. Pode-se explorar o exemplo de um pêndulo físico, a partir da oscilação de uma régua com furos. Colocando-se a régua para oscilar em torno de pontos diferentes ao longo do seu comprimento, os períodos serão diferentes, devido às diferentes distribuições de massa em cada caso. O mesmo ocorre nos discos com diferentes geometrias ao rolar sobre o plano.

Nesse momento, o professor coloca sobre o plano o seu disco com o centro de massa (inconspicuamente) excêntrico, como se fizesse simplesmente mais um exemplo de rolamento. Vale a pena realizar uma marcação prévia no disco de forma que se saiba como o dispor próximo à posição de equilíbrio estável. A quebra da expectativa dos alunos ao observar o disco em repouso será o ponto de partida para que o professor os motive a entender por que isso acontece.

O professor pode desenhar o corpo no quadro, como na figura 4.3, destacando as forças que atuam, mas sem representar o peso. Na condição de equilíbrio, a força resultante e o torque resultante deverão ser nulos. Como a posição de aplicação da força normal e da força de atrito é obrigatoriamente

no ponto de contato, resta determinar o ponto de aplicação da força peso, o *centro de massa*, que denotaremos por  $P$ . Ficará claro que deveremos sempre atentar para a posição desse ponto, que terá mais importância que a posição do centro geométrico do disco (que, intuitivamente, tendemos a observar com mais atenção) na determinação do movimento do sistema.

Pede-se aos alunos para obter as relações entre  $\alpha$ ,  $R$  e  $r$  na condição de equilíbrio. Esse problema poderá ser resolvido exatamente para obter o resultado já exibido em 4.3.

Obtida a equação 4.22, as medidas do raio do disco e do ângulo entre  $\overline{PC}$  e a normal no ponto de equilíbrio determinarão, de maneira simples, o valor de  $r$ . Esse resultado pode ser guardado para aulas posteriores.

Finalmente, o professor poderá mostrar que há 2 posições de equilíbrio<sup>6</sup>. Posicionando o disco adequadamente, verifica-se que comportamento o disco terá em cada caso, quando perturbado. Dessa forma, poderá mostrar qualitativamente as condições de equilíbrio estável e instável, diferenciando-os como situações em que o corpo, ao ser perturbado (*i*) sofre uma força resultante no sentido de trazê-lo de volta à posição inicial e (*ii*) sofre uma força resultante no sentido de se afastar da posição inicial.

A observação dos movimentos que o disco terá em cada caso deve ser feita repetidas vezes. A partir da posição de equilíbrio estável, o disco oscilará; já na posição de equilíbrio instável, se perturbado no sentido de descida do plano, surgirá, aqui, uma nova surpresa: em um determinado instante do seu movimento, o disco saltará do plano. A discussão sobre os movimentos a partir das diferentes condições de equilíbrio motivará os dois casos seguintes.

### 4.5.2 Oscilação sobre o plano horizontal

No fim da aula anterior, verificaram-se os movimentos a partir das diferentes posições de equilíbrio. Ficou claro também que existe um ponto de interesse, que é o centro de massa, que convém observar com especial cuidado. Nesta aula, vamos entender o movimento de oscilação do disco em torno do

---

<sup>6</sup>Por hipótese, o sistema será construído de tal forma a admitir essa condição, com  $r > R \sin \alpha$ .

ângulo de equilíbrio estável; por simplicidade, faremos isso sobre um plano horizontal.

Considere, primeiramente, que o disco se mova sobre um plano horizontal (i.e.,  $\alpha = 0$ ). Ao se girar o disco até uma posição na qual  $\theta = \theta_0$ , com  $0 < \theta < \pi$ , mas deixando-o inicialmente em repouso, ele passará a bascular em torno da posição de equilíbrio estável em  $\theta = 0$ . Na figura 4.6 mostramos esse caso.

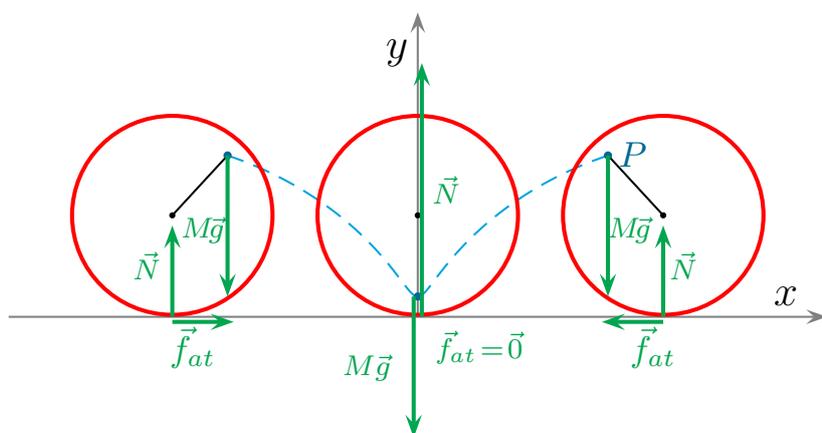


Figura 4.6: Movimento do disco ao bascular em torno da posição de equilíbrio em  $x_C = x = 0$ . Os comprimentos dos vetores não estão em proporção com seus módulos, mas estão ordenados da mesma forma que os módulos.

No instante  $t = 0$ , o disco encontra-se na posição mais à direita da figura. Observa-se então o movimento subsequente do disco: verifica-se que ele gira no sentido anti-horário. Por conservação de energia, o centro de massa  $P$  desce e atinge o ponto mais baixo da trajetória com velocidade máxima. A partir daí, a trajetória de  $P$  terá um ponto de retorno ao atingir a mesma altura inicial.

Façamos as seguintes perguntas acerca desse movimento para orientar nossa observação das suas características:

- Como é a trajetória do ponto  $P$ ?
- Como se comporta a força normal nesse movimento?

- Como se comporta a força de atrito nesse movimento?

Repete-se várias vezes o experimento, pedindo para os alunos observarem com atenção o ponto  $P$ . A partir das observações, eles devem construir hipóteses para responder às perguntas acima. O professor pode sugerir que a decomposição do movimento nos eixos  $\mathcal{O}x$  e  $\mathcal{O}y$  ajuda a análise desses movimentos, de forma que deve-se tentar observar, separadamente, as projeções ortogonais da posição de  $P$ .

Deve-se pedir aos estudantes que apresentem as hipóteses formuladas para a turma.

No eixo horizontal, a única força é a  $\vec{f}_{at}$ , de forma que ela é responsável por qualquer aceleração horizontal de  $P$ . Dessa forma, a oscilação de  $P$  mostra que a força de atrito muda de sentido, apontando sempre para o eixo de simetria da trajetória<sup>7</sup>.

No eixo vertical, há as forças  $\vec{N}$  e  $\vec{P}$ , que são, portanto, as responsáveis pela aceleração vertical. A força  $\vec{P} = M\vec{g}$ , porém, é constante, de forma que a variação na componente vertical da resultante indicada pela oscilação de  $P$  nesse eixo deve ser associada a uma força normal variável.

Esses dois resultados podem surpreender os alunos, que estão mais acostumados a tratar problemas com uma força normal de intensidade constante e nos quais a força de atrito se opõe à velocidade.

Para entender melhor o comportamento de  $\vec{N}$ , podem-se tomar o ponto de partida e o ponto médio da trajetória. Pede-se aos alunos para determinar as forças no ponto de partida. Como o ponto  $P$  descera a partir desse ponto, tem-se que  $Mg > N$ . Por outro lado, o ponto médio da trajetória se assemelha ao fundo de uma pista; a partir dali, o ponto  $P$  deverá subir. Fica caracterizado, portanto, que a força normal terá “picos” quando  $P$  se aproxima do solo, e será menor quando  $P$  está distante do solo.

Finalmente, confrontamos a discussão com resultados numéricos mostrados na figura 4.7. Com isso, a interpretação do problema fica completa e

<sup>7</sup>Outra maneira de observar isso é considerar o caso em que não houvesse força de atrito. Dessa forma, o ponto  $P$  oscilaria ao longo da direção vertical, de forma a promover um movimento do ponto de contato com um plano para a direita. Como o atrito é contrário à tendência de deslizamento, ele deverá, nesse ponto, apontar para a esquerda.

poderá ser feita mesmo sem que todas as demais respostas tenham sido anteriormente obtidas.

Dispondo dos gráficos adequados, deve-se destacar, além das relações já mencionadas, a observação mais precisa da trajetória. Apesar de ela ter uma forma complicada, deve-se mostrar, para os alunos, que sempre é possível imaginar o círculo que melhor se aproxime da trajetória em um dado ponto, de maneira a aproximar o problema como um movimento circular naquela vizinhança.

No ponto mais baixo da trajetória, pode-se observar que esse círculo terá um raio mínimo e estará acima da trajetória, enquanto no ponto mais alto, terá um raio máximo e estará abaixo. Deve-se resumir a discussão anterior destacando que a intensidade da normal será maior que a do peso quando a concavidade da trajetória for para cima, enquanto será pequena quando a concavidade for para baixo. Isso está em conformidade com o que é esperado da resultante centrípeta.

### 4.5.3 Passeio no plano horizontal

Analisaremos, agora, o movimento no plano, mas de forma que o disco não oscile, mas tenha energia cinética para se mover sempre em um mesmo sentido. Todas as características das forças ao longo do movimento serão similares ao caso anterior.

Deve-se, primeiramente, refletir com os alunos que condições deve se dar para que esse tipo de movimento ocorra. Pode-se propor, à semelhança do que foi posto nas aulas anteriores, que, ao se abandonar o disco a partir de uma posição qualquer, ele terá energia para, no máximo, o ponto  $P$  retornar à mesma altura. Logo, tomando-se como referência a posição de equilíbrio *instável* verificada na primeira aula<sup>8</sup>, deve-se dar uma energia adicional ao disco para que o ponto  $P$  seja capaz de atravessar esse ponto de altura máxima. Pode-se deixar os alunos manipularem o experimento para entender essas condições.

Faz-se uma demonstração do movimento de rolamento sob essas condições

---

<sup>8</sup>A rigor, a solução com  $\theta(0) = \pi$  e  $\dot{\theta}(0) = 0$  leva a tempos de percurso infinitos.

e procede-se, então, a declarar algumas perguntas que podem ser respondidas. Podemos nos centrar, aqui, a analisar questões além das que respondemos para o caso da oscilação.

- Como é a trajetória do ponto  $P$ ?
- Como é a evolução temporal de  $\theta$  para esse movimento?
- Como é a evolução temporal de  $x_P$  para esse movimento?

Pedimos aos alunos que esbocem a trajetória de  $P$ . É importante que eles sejam capazes de identificar o que se repete do movimento de oscilação anteriormente observado; neste caso, aquilo que mais aproxima os dois casos é a *trajetória*, que é uma propriedade geométrica do movimento, não dependendo de valores atribuídos as condições iniciais (desde que o disco não salte). Dessa forma, destacaremos que a trajetória, no movimento de oscilação, é limitada; enquanto no passeio, é infinita. Pediremos a eles, portanto, para estender a figura fornecida na aula anterior para esse novo movimento. Devemos ter o cuidado para que notem que a trajetória tem concavidade para baixo quando  $P$  está próximo do topo e para cima quando  $P$  está próximo à base da trajetória.

Primeiramente, sugerimos aos alunos pensar no caso em que o disco *não* é excêntrico, esboçando o gráfico das coordenadas  $\theta(t)$ ,  $x_P(t)$  e  $y_P(t)$ . Dado que, nessas condições, o movimento é uniforme, todos os gráficos são linhas retas, sendo  $y_P(t)$  uma função constante, enquanto  $x_P(t)$  e  $\theta(t)$  são monotônicas e crescentes. A partir desses gráficos e conhecidos também aqueles do movimento de oscilação (figura 4.7), pode-se construir a evolução das coordenadas de  $P$  para o disco com centro de massa excêntrico. Deve-se pedir para eles apontarem, também, que grandezas têm comportamento periódico, nesse caso.

Observando a trajetória, sabemos que  $x_P$  deverá ser monotônica, enquanto  $y_P$  deve ser periódica. Da mesma forma, para que não haja ponto de retorno,  $\theta(t)$  deve ser monotônica. Uma vez que o sistema é conservativo, para cada período de  $y_P$ , os valores médios da velocidade angular  $\omega$  e da velocidade linear  $v_P$  devem ser os mesmos.

Confrontamos as hipóteses com a solução numérica do problema, dada pelas figuras 4.8 e 4.9, feitas de forma que as velocidades iniciais fossem diferentes. Note que o comportamento de  $\theta(t)$  e de  $x(t)$  é, em média, linear, com ondulações periódicas devido às oscilações verticais desse movimento de  $P$ .

Observe o comportamento da força normal. Além dos picos que ocorrem periodicamente, percebemos que existem intervalos em que ela passa a ser menor que a força peso. Esse resultado será importante para entender o salto da bolinha.

#### 4.5.4 O disco saltante

Para completar a compreensão qualitativa desse sistema, resta entender o seu movimento mais curioso: o salto do disco sobre o plano. Para tanto, vamos nos perguntar quais são as condições para que isso ocorra. Apesar de essa pergunta ser difícil de responder exatamente, devido à grande quantidade de variáveis e de condições iniciais dos quais dependerá o instante do salto, vamos ao menos tentar dar os passos no sentido de identificar, da forma mais simples possível, a região do salto.

Os casos anteriormente analisados servirão de subsídio para a compreensão desta nova situação. Antes de tratar do movimento sobre a rampa, vamos analisar o salto sobre o plano horizontal. Nesse caso, o comportamento periódico de  $x_P$ ,  $y_P$ ,  $N$  e  $f_{at}$ , já exibido para o passeio no plano, significa que, se o salto ocorrer, será antes da primeira volta completa do disco.

Balizaremos nossa análise pelas seguintes perguntas:

- Sob que condições o disco será capaz de saltar?
- Em que trecho da trajetória de  $P$  deve ocorrer o salto?

Devemos discutir com os alunos como identificar, a partir dos gráficos obtidos pelo cálculo da solução, o instante do salto.<sup>9</sup> A variável que vai nos

---

<sup>9</sup>Como a equação de movimento tem por hipótese a trajetória em forma de trocoide do centro de massa do disco, não basta integrá-la e observar a evolução das coordenadas  $x_P$  e  $y_P$ . A solução numérica da equação admite, inclusive, uma força normal negativa. Isso

permitir identificar que o disco saltou é a intensidade da força normal: no instante em que ela for *zero*, o disco perderá o contato com o plano.

Havendo perda de contato, consideraremos que a força de atrito também é nula, de forma que apenas a força peso atua sobre o disco. Podemos perguntar: o que isso indica sobre a trajetória do ponto  $P$  na região do salto?

A bolinha só poderá saltar em um ponto onde a força resultante seja o peso e, portanto, aponte para baixo. Uma vez que essa resultante terá uma componente centrípeta, o salto seguramente ocorrerá em um trecho onde a curvatura da trajetória estiver voltada para baixo. Isso delimita um intervalo de valores de  $\theta$  onde o salto pode ocorrer.

Deve-se permitir aos alunos manipular o disco experimentalmente, para que se deem conta de o salto só ocorrerá se fornecida uma velocidade inicial adequada. Realizando sucessivos movimentos desse tipo com energias cada vez maiores, argumentamos que, apenas a partir de um determinado valor de energia observaremos um movimento que produzirá o salto do disco.

Analisando os casos do passeio no plano, representados nas figuras 4.8 e 4.9, observamos que a normal tem, além dos picos na região do ponto mais baixo da trajetória, pontos de mínimo. Comparando as figuras, podemos ver também que quanto maior a energia do disco, menor será o valor mínimo atingido pela normal. Esses dados confirmam o que inferimos das observações: a partir de um determinado valor de energia do disco, a normal poderá atingir o valor *zero*.

Dada uma energia inicial e uma posição descrita pelo ângulo  $\theta$ , fica determinada a força normal. Portanto, é possível construir o gráfico de  $N(\theta)$ , o que fazemos na figura 4.10 para diferentes energias, sintetizando o que discutimos anteriormente.

Finalmente, vamos estender nossa análise para o movimento sobre o plano. Podemos entender que o plano inclinado terá papel de aumentar gradualmente a energia cinética (média, para cada rotação) do disco. Com isso,

---

poderia ser modelado por uma barra paralela ao plano e que toca o disco em um ponto diametralmente oposto àquele onde o disco toca o plano; a força normal seria, nesse caso, interpretada como a resultante das normais exercida pelo plano e exercida pela barra.

colocar o disco sobre o plano é análogo a observar sucessivos lançamentos que partiram com energias crescentes. Uma dessas soluções está representada em 4.11.

Percebemos que, desta vez, o movimento é acelerado, o que aparece nos gráficos de  $x_P$  e  $\theta(t)$ . Em média, o comportamento dessas grandezas é o esperado para um movimento uniformemente acelerado, possuindo formas aproximadamente parabólicas. Conforme o disco acelera, os tempos para cada revolução passam a ficar menores, como revela o gráfico de  $y_P$ . Uma vez que os padrões de crescimento e decrescimento da normal e de força de atrito estão correlacionados com  $y_P$ , também aumenta a frequência dos picos da normal. Como exibido na figura 4.11, em um determinado instante, a normal será nula e o disco salta.

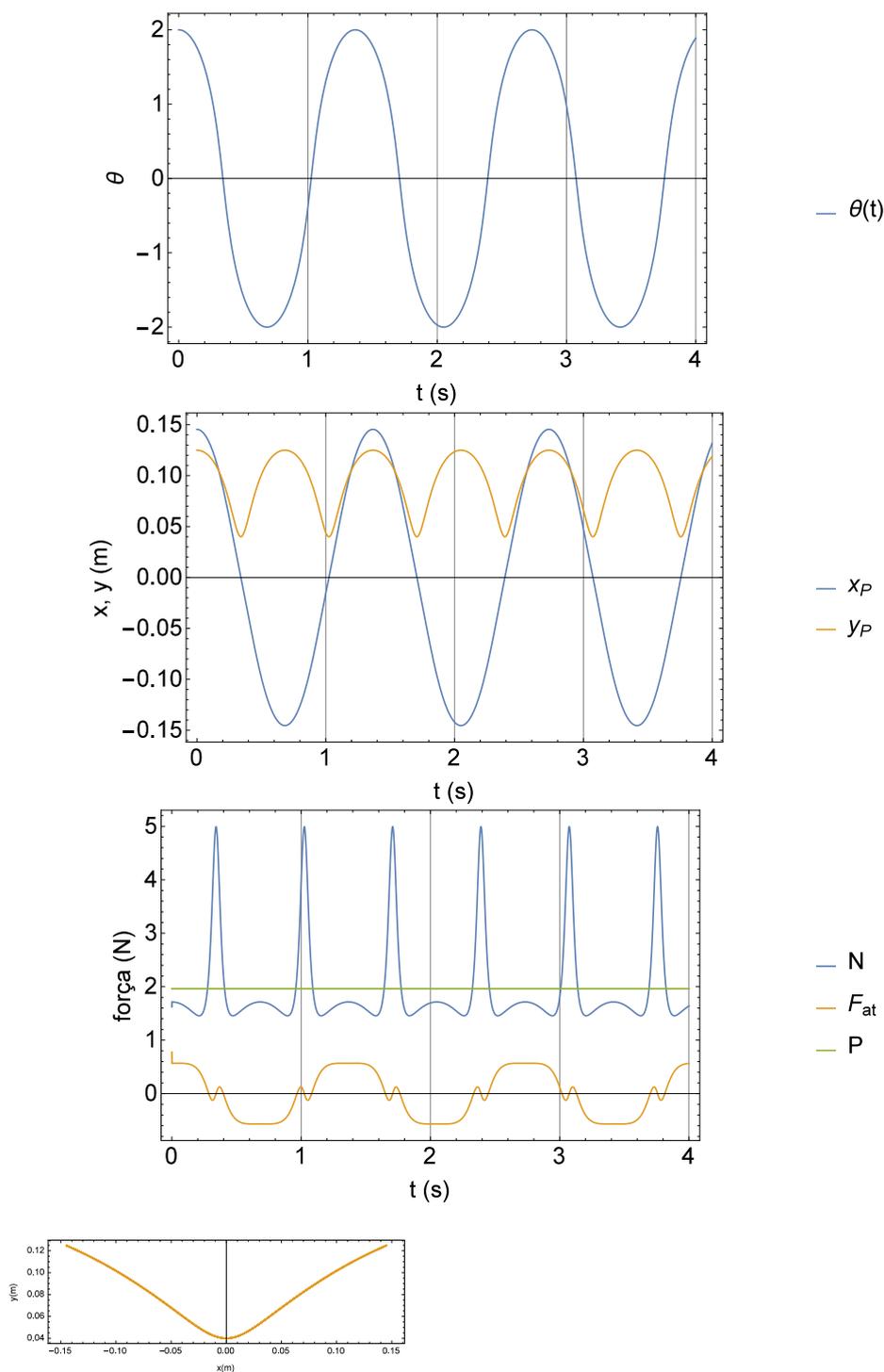


Figura 4.7: Gráficos das coordenadas e das forças para o disco oscilante. O último gráfico representa a trajetória.

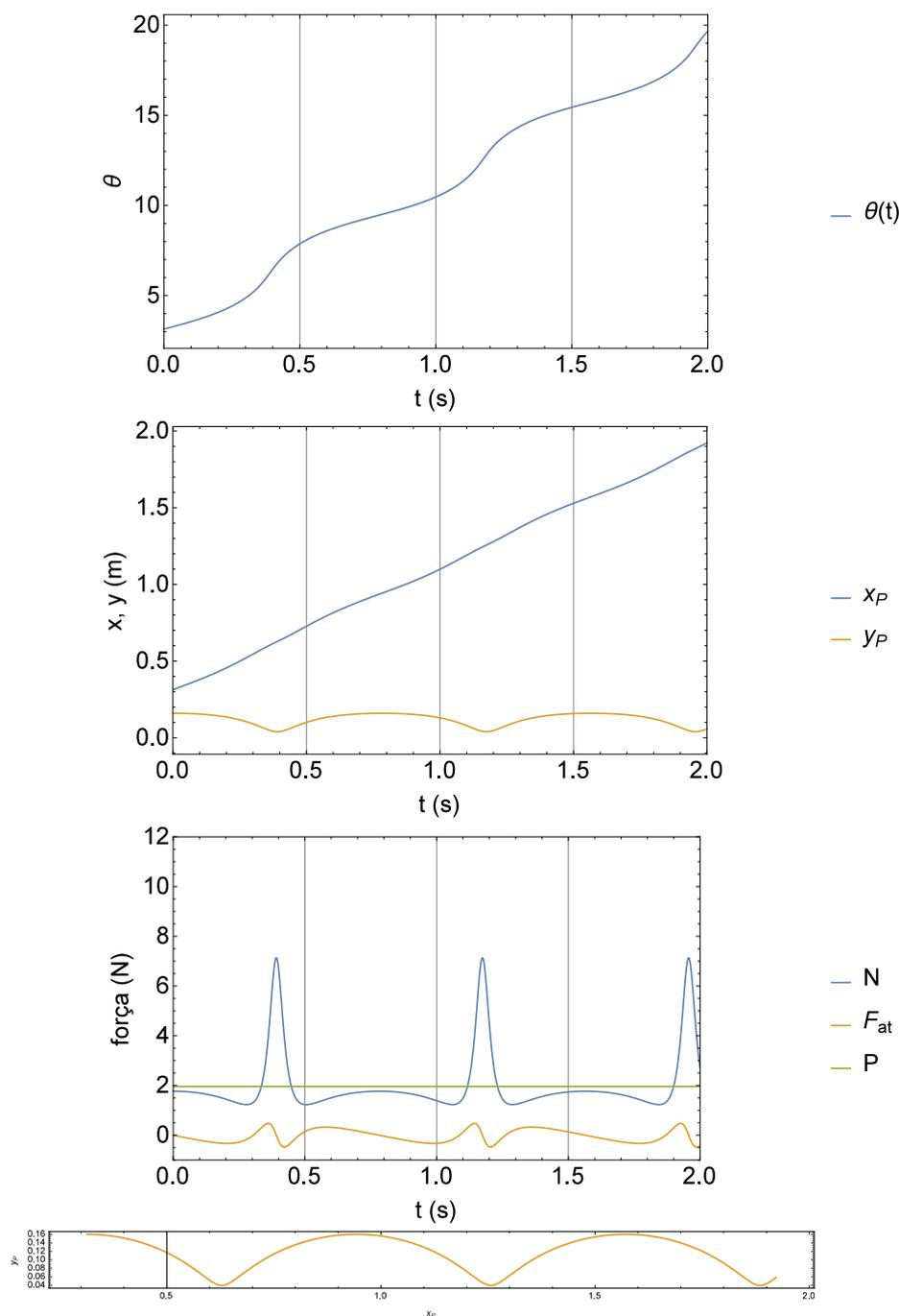


Figura 4.8: Gráficos das coordenadas e das forças para o disco, para o caso do passeio no plano. O último gráfico representa a trajetória.

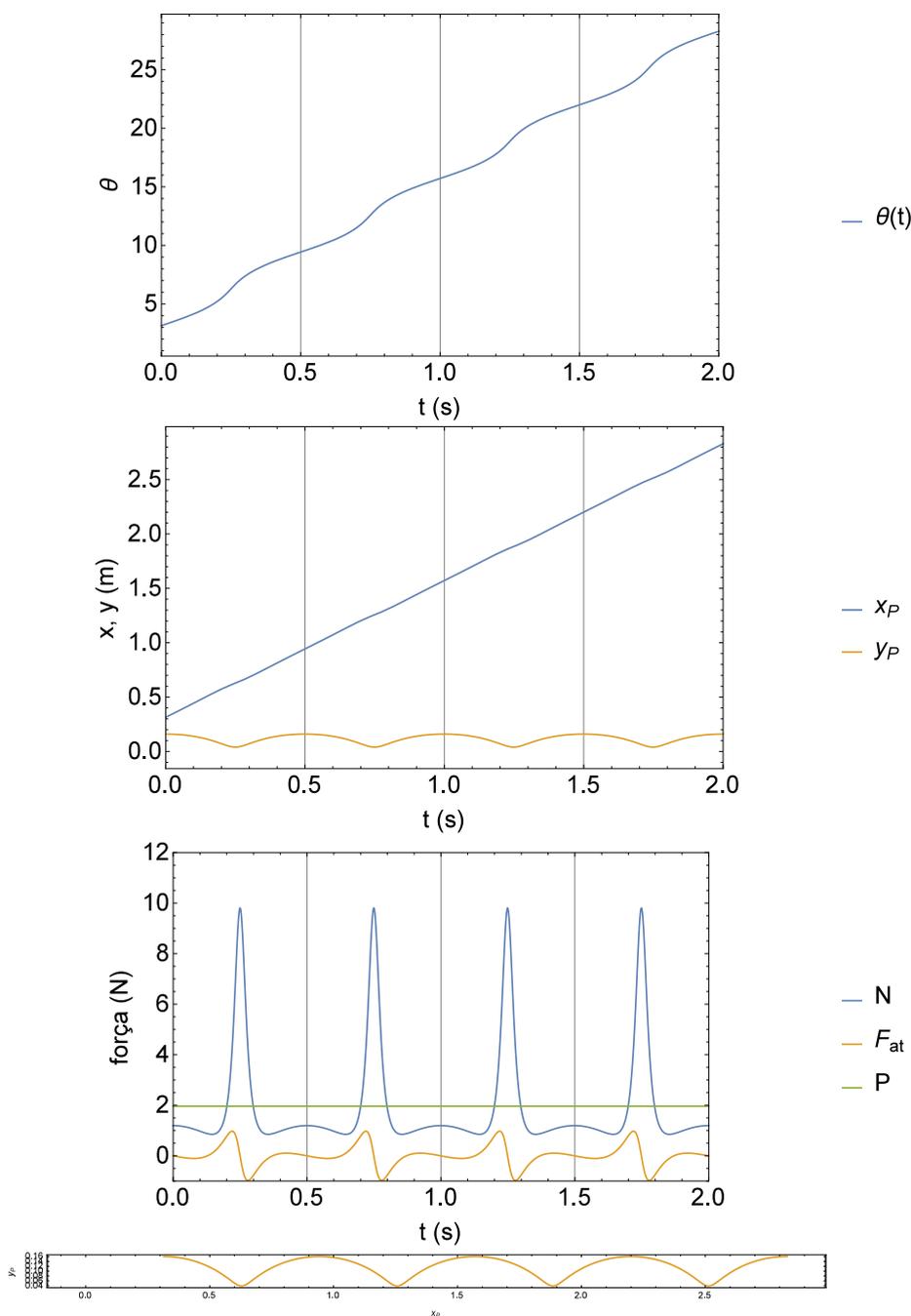


Figura 4.9: Gráficos das coordenadas e das forças para o disco, para o caso do passeio no plano, com uma energia maior do que na figura 4.8. O último gráfico representa a trajetória.

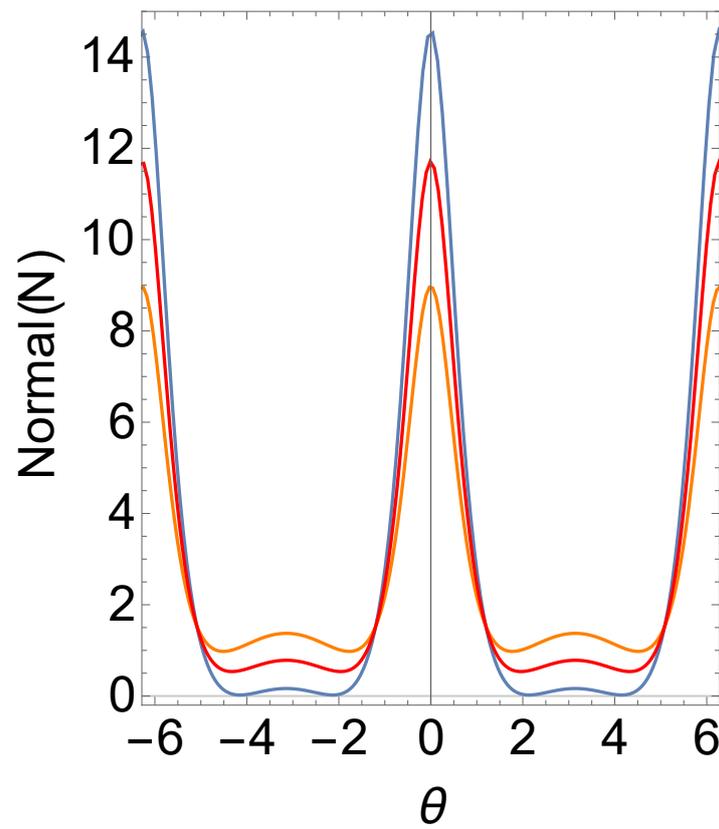


Figura 4.10: Gráficos de  $N$  como função de  $\theta$  para o disco sobre o plano horizontal, para diferentes energias.

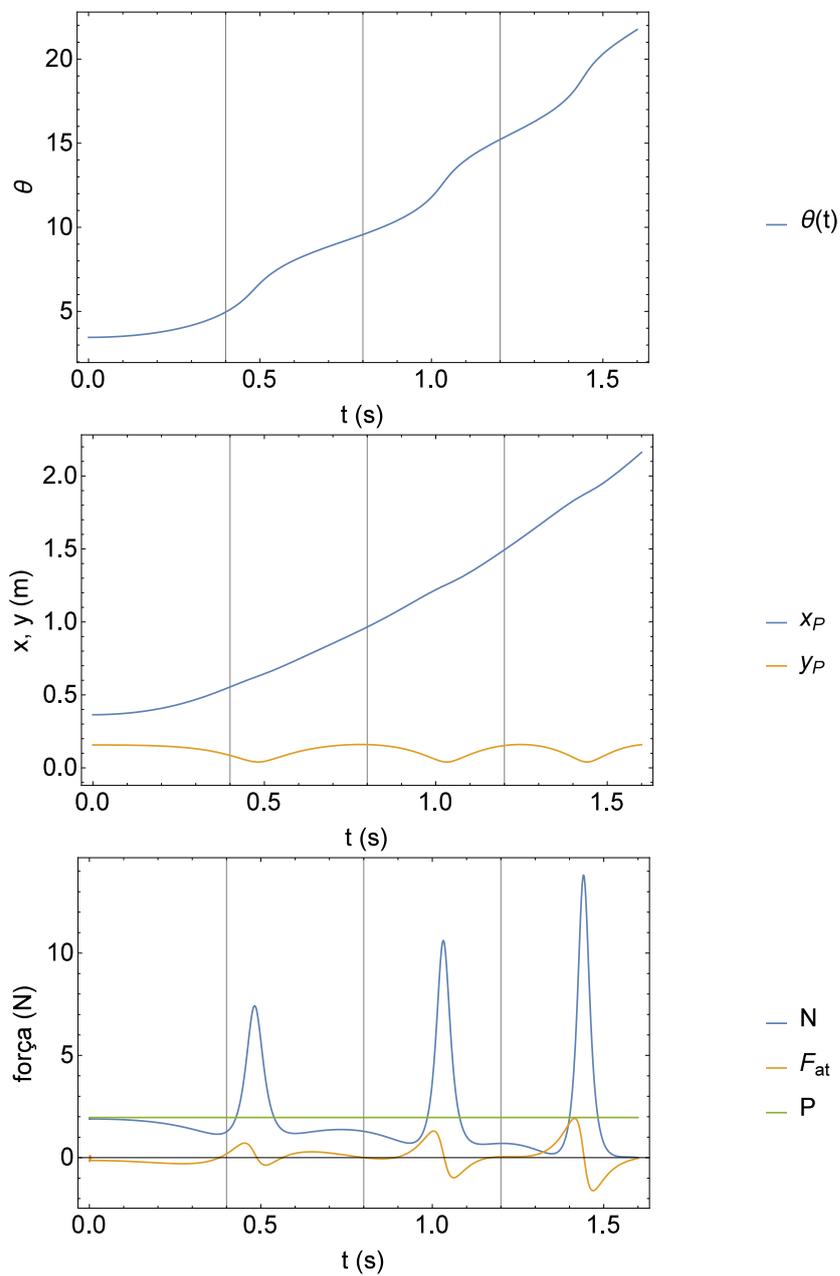


Figura 4.11: Gráficos das coordenadas e das forças para o disco sobre plano inclinado, com inclinação de  $10^\circ$ .

## 4.6 Comentários finais

Neste capítulo, estudamos o movimento da montanha-russa caipira motivados pelas surpresas que encontramos em sua observação. Apesar de a sua solução completa ser sofisticada, pudemos tirar conclusões qualitativas da observação desse movimento e da análise das forças, dos torques e das energias. A observação dos gráficos obtidos numericamente para essas grandezas nos levou a estabelecer correlações entre as suas intensidades e a geometria do problema. Também pudemos usar o problema para ilustrar conceitos da dinâmica do corpo extenso.

Nesse sentido, ressaltamos dois aspectos: Em primeiro lugar, a evolução de determinados sistemas nem sempre corresponde ao que intuitivamente é esperado. Acreditamos que o estudo de problemas como o apresentado aqui deve ser sempre tentado em salas de aula. Mesmo sem dispor do ferramental matemático para resolvê-lo completamente, é possível tirar conclusões valiosas a partir de soluções parciais. Há um grande ganho em aprender a “treinar o olhar” para identificar os dados mais relevantes de um problema com muitos fatores, como o que apresentamos aqui.

# Capítulo 5

## Conclusão

Reunimos neste trabalho um conjunto de problemas e atividades em temas variados de mecânica clássica que apresentam novas possibilidades educacionais. Nosso objetivo principal foi ampliar o repertório de oportunidades de ensino para professores de Ensino Médio que desejem, reproduzindo, adaptando ou desenvolvendo os conteúdos e as práticas que foram apresentados nos capítulos 2, 3 e 4, arejar os caminhos de aprendizagem que oferecem aos seus alunos.

Buscamos problemas e atividades que enriqueçam nossas formas usuais de ensinar, seja na forma, seja no conteúdo. Aprofundamos, com isso, o escopo dos conteúdos que comumente abordamos e expandimos os métodos de análise teóricos e experimentais para a solução de problemas. Dessa forma, as soluções serão alcançadas ao se “atacar” o problema por diversas frentes, que constroem juntas a compreensão dos fenômenos observados.

Os 3 problemas de que tratamos contém uma boa dose de desafio e de surpresa. Convidamos os professores leitores deste trabalho e dos seus produtos a utilizar esse desafio para incentivar a curiosidade e o desejo de aprender dos seus alunos. O desafio traz a reboque também a busca por diferentes métodos de solução — algébrico, experimental, computacional — e incita a discussão e a colaboração dos estudantes para uma aprendizagem construída coletivamente.

No capítulo 2, contextualizamos historicamente o problema da marcação

do tempo, da construção de pêndulos e das tautócronas, que podem ser mencionados ao se trabalharem os movimentos oscilatórios, preenchendo-os de significado para uma abordagem em sala de aula. Revisamos a teoria dos potenciais cisalhados e apresentamos uma técnica para cisalhamento de trilhos que pode ser usada na construção de experimentos. Esses conteúdos podem, ainda, enriquecer a formação de professores no ensino superior, em uma abordagem matematicamente completa.

No capítulo 3 fazemos uma revisão dos lançamentos oblíquos com ênfase na parábola de segurança. Trazemos um conjunto de aulas em que os alunos devem trabalhar em grupo e realizar medidas experimentais para compreender esse problema desde os seus fundamentos até a obtenção da curva de segurança, com uma componente de análise dimensional. Exploramos, portanto, um conteúdo usual, sem nos esquivar do desafio de fazê-lo de forma abrangente e detalhada, utilizando o trabalho experimental e em grupo como facilitador da aprendizagem.

No capítulo 4, trazemos o problema da montanha-russa caipira, em que um disco com centro de massa excêntrico rola por um plano inclinado. Esse sistema apresenta comportamentos inesperados, como poder ficar em repouso sobre o plano e até mesmo saltar dele. De forma similar ao que fizemos no capítulo 3, utilizando demonstrações experimentais e simulações computacionais, propomos trabalhar temas como o torque fora do equilíbrio e raios de curvatura da trajetória, ao mesmo tempo expandindo a validade e demonstrando os limites das ideias já usualmente abordadas no Ensino Médio.

O estudo desses casos nos mostra como podemos propor um novo tipo de problema para os alunos, cuja proposta de solução não seja a usual, teórica e breve, mas o trabalho extensivo e colaborativo. Problemas cuja solução seja mais extensa, mas que ofereça mais oportunidades de aprender tanto novos conteúdos quanto novas habilidades.

Além disso, percebemos que é possível aprofundar temas, abordando tópicos que podem ser considerados difíceis com os estudantes e produzindo uma aprendizagem efetiva. De fato, o sucesso da implementação da atividade no capítulo 3 sinaliza que melhor que evitar os tópicos mais complexos é procurar maneiras de ensiná-los que envolvam a manipulação experimental,

a discussão e o uso de outros recursos.

Finalmente, reiteramos nosso desejo de que os trabalhos aqui apresentados cheguem às salas de aula, total ou parcialmente, seja na forma como foram apresentados aqui, seja transformados pela vivência e pelo contexto dos docentes. Esperamos, ainda, que os princípios norteadores deste trabalho sirvam de inspiração para a elaboração de novos problemas e atividades que alcancem as salas de aula.

Que outros professores se sintam estimulados a somar esses desafios aos desafios já inerentes à educação.

# Apêndice A

## Distinção entre potenciais e trilhos

Discussões que tivemos em torno dos resultados apresentados no capítulo 2 nos levam a crer que convém destacar a distinção entre (i) os movimentos sob efeito de potenciais  $U(x)$  e (ii) os movimentos sujeitos a uma aceleração gravitacional uniforme sobre trilhos lisos da forma  $y(x)$ .

Alguma confusão pode surgir do fato de que, se escrevermos a energia potencial para o caso (ii), a proporcionalidade expressa pela função  $U(y(x)) = mgy(x)$  sugere, ingenuamente, que os dois casos são idênticos. Considere, então, uma função  $\Lambda(x)$  que seja usada para representar um potencial  $U(x)$ :  $U(x) = \Lambda(x)$ . Tomemos a mesma função para representar a forma de um dado trilho  $y(x) = \Lambda(x)/mg$ . De fato, do ponto de vista da conservação de energia, tem-se, para ambos os casos

$$\frac{1}{2}mv^2 + \Lambda(x) = E. \quad (\text{A.1})$$

No entanto, devemos tomar cuidado com a extensão da analogia entre essas situações, o que se deve à bidimensionalidade do movimento sobre trilhos.

Seja  $\phi = \phi(x)$  a inclinação da curva  $\Lambda(x)$  em relação ao eixo  $x$  em um ponto qualquer, de forma que  $\tan \phi = d\Lambda(x)/dx$ . Para o potencial, a força resultante será dada por  $\mathcal{F}(x) = -d\Lambda(x)/dx$ , de forma que a aceleração será proporcional à  $\tan \phi = d\Lambda(x)/dx$ . No entanto, para o trilho, a força

resultante será a resultante vetorial da força peso e da força normal e dada por  $\mathcal{F}(x) = -mg \sen \phi$ .

Essa diferença fica evidente se tomarmos, por exemplo,  $\Lambda(x)$  com uma assíntota vertical em  $x = a$ :  $\lim_{x \rightarrow a^-} \Lambda(x) = +\infty$ . Se a função corresponder a um potencial,  $\Lambda(x) \equiv U(x)$ , então  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{dv}{dt} = -\infty$ . Por outro lado, se corresponder à forma de um trilho,  $\Lambda(x) \equiv mgy(x)$ , então  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{dv}{dt} = -g$ .

De fato, se quisermos verificar a relação entre um trilho  $y(x)$  e um potencial  $U(x)$  que produzam iguais acelerações em cada valor da coordenada  $x$ , deveremos resolver a equação

$$mg \sen \left( \arctan \left( \frac{dy(x)}{dx} \right) \right) = \frac{dU}{dx} \quad (\text{A.2})$$

Da mesma forma, uma dada energia mecânica  $E$  determinará iguais velocidades da partícula em ambos os casos. No entanto, no caso (i), essa velocidade aponta na direção  $\hat{x}$ , enquanto no caso (ii) ela aponta na direção tangencial à trajetória,  $\hat{s}$ .

De fato, reside aí a razão da conveniência de parametrizarmos a curva  $\Lambda(x)$  pelo arco de comprimento  $s$ , como fizemos no capítulo 2. Tomando  $s$  (e não  $x$ ) como variável independente para o trilho a equação A.2 se torna, simplesmente,

$$mg \frac{dy(s)}{ds} = \frac{dU}{dx}. \quad (\text{A.3})$$

## Apêndice B

# Parametrização da cicloide na coordenada arco de comprimento

Demonstraremos a seguir que a curva  $y = (1/8r)s^2$ , contida no plano cartesiano  $\mathcal{O}xy$  e onde  $s$  é a coordenada arco de comprimento, é uma cicloide. Esse resultado foi evocado na seção 2.5.

Consideremos a curva traçada por um ponto na periferia de um disco de raio  $r$  que gira sem deslizar apoiado sob a reta  $y = 2r$ , de forma que sua trajetória seja uma cicloide com cúspides sobre essa reta e concavidade para baixo. Escolhemos a origem dos eixos de tal forma que coincida com o ponto mais baixo dessa cicloide, no qual a coordenada  $\theta$ , que descreve a rotação, tem o valor  $\theta = 0$ . Com tais características, essa cicloide satisfaz as condições para ser um de nossos trilhos de interesse da seção 2.4.

$$\begin{cases} x &= r(\theta + \operatorname{sen} \theta); \\ y &= r(1 - \cos \theta), \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

onde consideramos apenas uma revolução, de forma que  $-\pi < \theta < \pi$ . Introduzimos a coordenada  $s$  tal que  $s = 0$  na origem. Para tanto, calculamos as

derivadas

$$\begin{cases} dx/d\theta = r(1 + \cos \theta); \\ dy/d\theta = r \operatorname{sen} \theta. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

É imediato obter a expressão para o elemento de linha  $ds$ :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= 2r^2(1 + \cos \theta). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Integramos, então, essa expressão para obter  $s$ :

$$\int_0^s ds' = r\sqrt{2} \int_0^\theta \sqrt{1 + \cos \theta'} d\theta'. \quad (\text{B.4})$$

A integral do lado direito na equação B.4 é resolvida pela multiplicação do numerador e do denominador pelo conjugado  $\sqrt{1 - \cos \theta'}$  e pela posterior substituição  $u = 1 - \cos \theta$ , resultando em

$$s = 2\sqrt{2} r \sqrt{1 - \cos \theta}. \quad (\text{B.5})$$

Identificando-se a expressão para  $y$  em B.1, recuperamos, finalmente

$$s^2 = 8ry. \quad (\text{B.6})$$

# Apêndice C

## Problemas de cisalhamento para o ensino médio

Destacamos, aqui, dois problemas simples que ilustram os tópicos abordados no capítulo 2 e podem ser levados para o ensino médio. São dois casos particulares dos resultados sobre os potenciais cisalhados e o cisalhamento no comprimento, explorando as condições para movimentos isoperiódicos.

Dado que a apresentação destes exemplos não demonstra, por si só, as propriedades discutidas no capítulo 2, eles podem ser apresentados como exemplos de casos mais gerais.

### C.1 Potenciais cisalhados

Considere um bloco de massa  $m$  colocado inicialmente na posição  $x = 0$  do eixo horizontal  $\mathcal{O}x$ . À sua esquerda e à sua direita estão dispostas duas molas ideais idênticas, de constante elástica  $k$ , tais que, quando o bloco está na posição  $x = 0$ , as molas estão relaxadas, mas na iminência de tocá-lo (figura C.1). O bloco, durante seu movimento, comprime as molas, mas não está preso a nenhuma delas, de forma que apenas uma das molas exerce força sobre ela de cada vez. Todos os atritos podem ser desprezados<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Este é um caso particular do que foi apresentado na seção 2.3.1.

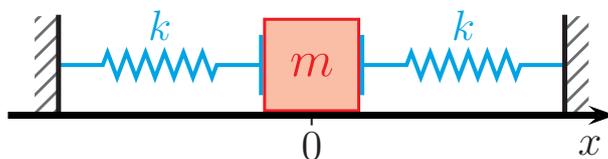


Figura C.1: Bloco de massa  $m$  com uma mola em cada lado.

A energia potencial elástica é dada pela expressão

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{C.1})$$

e o período de oscilações é conhecido e dado por

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (\text{C.2})$$

sendo a força exercida por cada mola responsável por mover o bloco durante meio período de oscilação.

Suponhamos, agora, que se deseja substituir as molas por outras duas, distintas, de constantes elásticas  $k_1$  e  $k_2$ .

$$\tilde{U}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}k_1x^2, & x < 0 \\ \frac{1}{2}k_2x^2, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Queremos escolher as novas molas de tal forma que o novo movimento tenham período de oscilação  $\tilde{\tau}$  igual ao caso das molas idênticas. Uma vez que cada mola contribui com metade de uma oscilação, podemos escrever, em analogia com a equação C.2,

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \tau \\ \pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

o que conduz à relação que deve ser obedecida entre  $k$ ,  $k_1$  e  $k_2$ :

$$\frac{2}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}}. \quad (\text{C.5})$$

Há uma outra maneira de obter essa relação entre as constantes elásticas. Primeiro, calculemos a largura dos potenciais em cada caso, dados pelas equações C.1 e C.3 para cada energia  $E$ :

$$L(E) = 2\sqrt{\frac{2E}{k}} \quad , \quad \tilde{L}(E) = \sqrt{\frac{2E}{k_1}} + \sqrt{\frac{2E}{k_2}}. \quad (\text{C.6})$$

Se obrigarmos essas larguras a serem iguais para todos os valores de  $E$ , o potencial  $\tilde{U}(x)$  será cisalhado de  $U(x)$ , ou seja, se pensarmos no gráfico de  $U(x)$  como formado por uma pilha de varetas com largura  $L(E)$  empilhadas, o gráfico de  $\tilde{U}(x)$  pode ser obtido com a mesma pilha de varetas, lateralmente deslocadas — basta que esse deslocamento não faça com que o gráfico deixe de representar uma função. Essa condição leva à mesma expressada em C.5. Isso não é coincidência, tendo em vista os resultados que apresentamos no capítulo 2.

Esse método é extremamente geral: pode-se demonstrar que dois potenciais cisalhados sempre produzem movimentos isoperiódicos.

## C.2 Cisalhamento no comprimento

Considere uma partícula de massa  $m$  que se move sobre uma rampa formada pela associação de planos lisos inclinados de  $\alpha$  em relação à horizontal, de tal forma que os planos coincidem nos seus pontos mais baixos. A aceleração da gravidade é uniforme e dada por  $g$ . Abandona-se a partícula a partir do repouso de uma altura  $H$  de um dos ramos da rampa.

Feita a análise de forças, a aceleração da partícula terá módulo  $g \sin \alpha$ . Por geometria, o comprimento da trajetória em cada ramo será dado por

$$s = \frac{H}{\sin \alpha}. \quad (\text{C.7})$$

Da equação horária para o movimento uniformemente acelerado ( $s = s_0 + v_0t + at^2/2$ ), pode-se obter o tempo de descida  $t_D$ . Com isso, o período de oscilações da partícula nesse sistema é

$$\tau(H) = 2t_D = 2\sqrt{\frac{2H}{g \operatorname{sen}^2 \alpha}}. \quad (\text{C.8})$$

Proponhamos agora um problema análogo, porém sobre uma rampa assimétrica, de inclinações  $\beta$  para o ramo esquerdo e  $\gamma$  para o ramo direito. Neste caso os tempos de descida em cada ramo serão diferentes, de forma que o período de oscilações é dado por:

$$\tilde{\tau}(H) = t_{D1} + t_{D2} = \sqrt{\frac{2H}{g \operatorname{sen}^2 \beta}} + \sqrt{\frac{2H}{g \operatorname{sen}^2 \gamma}}. \quad (\text{C.9})$$

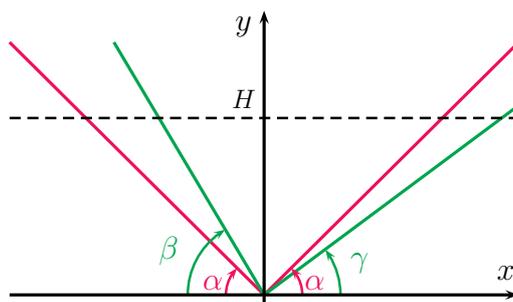


Figura C.2: Trilhos côncavos formado por planos inclinados. O trilho em vermelho é simétrico, com inclinação  $\alpha$  em ambos os ramos, enquanto o trilho em verde possui inclinações  $\beta$  e  $\gamma$ .

Se desejarmos que o período seja igual nas rampas simétrica e assimétrica, teremos

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(H) &= \tau(H) \\ 2\sqrt{\frac{2H}{g \operatorname{sen}^2 \alpha}} &= \sqrt{\frac{2H}{g \operatorname{sen}^2 \beta}} + \sqrt{\frac{2H}{g \operatorname{sen}^2 \gamma}} \\ \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha} &= \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} + \frac{1}{\operatorname{sen} \gamma}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Uma vez que a equação anterior independe de  $H$ , sempre é possível ci-

salhar no comprimento o plano inclinado simétrico por dois planos de inclinações diferentes. Podemos também obter a relação entre os trilhos por um caminho distinto, igualando-se os comprimentos totais das trajetórias:

$$\begin{aligned} 2s(H) &= \tilde{s}_1(H) + \tilde{s}_2(H) \\ 2\frac{H}{\operatorname{sen} \alpha} &= \frac{H}{\operatorname{sen} \beta} + \frac{H}{\operatorname{sen} \gamma} \\ \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha} &= \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} + \frac{1}{\operatorname{sen} \gamma}. \end{aligned} \tag{C.11}$$

Esse caso ilustra uma propriedade mais geral das trajetórias limitadas que possuem iguais comprimentos para qualquer altura: elas produzirão oscilações isoperiódicas.

# Apêndice D

## Questionário sobre lançamentos

Na seção 3.4.4 analisamos o resultado da atividade sobre lançamentos oblíquos e parábola de segurança do capítulo 3 a partir de nossas impressões em sala de aula. Fizemos também um questionário eletrônico, para avaliar de forma mais apurada o impacto da atividade na aprendizagem dos lançamentos oblíquos.

Antes das perguntas, o questionário pede a identificação dos entrevistados, de forma a diferenciar os alunos participantes e os não participantes da atividade. Apesar de o índice de acerto dos alunos participantes ter sido maior que o dos não participantes em quase todas as questões, o resultado foi estatisticamente insignificante para uma avaliação mais apurada, devido a apenas 17 alunos, no total terem respondido ao questionário.

Reproduzimos aqui o conteúdo do questionário, que pode ser acessado em <https://goo.gl/forms/1jiYSSj8on1lhF8J3>. As alternativas corretas estão sublinhadas.

### D.1 Questionário — atividade sobre lançamentos

Este questionário visa a avaliar a atividade didática aplicada por nós no Campus Engenho Novo II em junho e julho de 2016. Para isso, vamos comparar as respostas dos alunos que participaram e que não participaram da

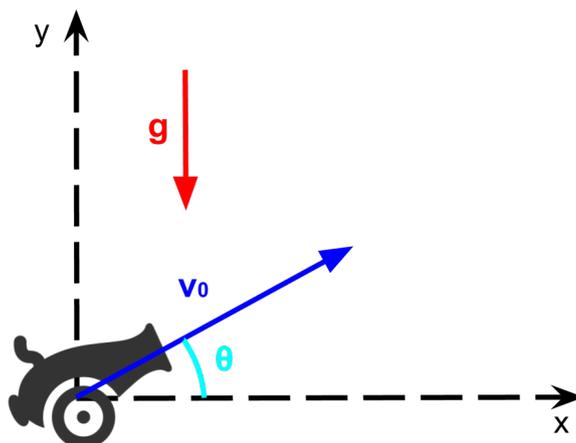
atividade. São apenas 12 perguntas objetivas, que não requerem cálculos. Por favor, responda a todas cuidadosamente.

### D.1.1 Lançamentos oblíquos

Considere uma bolinha sujeita exclusivamente à aceleração da gravidade, vertical e de módulo  $g$ . A bolinha é impelida por um disparador que sempre lhe confere velocidade de mesmo valor, similar a um canhão.

Esse disparador é articulado, de modo que o ângulo do lançamento, medido em relação à horizontal, vale  $\theta$ . Os atritos são desprezíveis e o disparador aponta sempre no mesmo plano vertical.

Fazemos cinco lançamentos sucessivos, com ângulos de lançamento de  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $75^\circ$  em relação à horizontal.



Qual desses lançamentos atingirá a maior altura máxima?

- (a)  $15^\circ$
- (b)  $30^\circ$
- (c)  $45^\circ$
- (d)  $60^\circ$
- (e)  $75^\circ$

**Qual desses lançamentos terá o maior alcance horizontal?**

- (a)  $15^\circ$
- (b)  $30^\circ$
- (c)  $45^\circ$
- (d)  $60^\circ$
- (e)  $75^\circ$

**Quais desses lançamentos atingirão a mesma altura máxima?**

- (a)  $15^\circ$  e  $45^\circ$
- (b)  $30^\circ$  e  $75^\circ$
- (c)  $45^\circ$  e  $75^\circ$
- (d)  $15^\circ$  e  $75^\circ$
- (e) nenhum dos lançamentos

**Quais desses lançamentos terão o mesmo alcance horizontal?**

- (a)  $15^\circ$  e  $45^\circ$
- (b)  $30^\circ$  e  $75^\circ$
- (c)  $45^\circ$  e  $75^\circ$
- (d)  $15^\circ$  e  $75^\circ$
- (e) nenhum dos lançamentos

### **D.1.2 Lançamentos oblíquos — parte 2**

Considere os lançamentos feitos na seção anterior.

Sabe-se que cada ângulo de lançamento  $\theta$  diferente determinará uma trajetória distinta, ou seja, um diferente conjunto de pontos que serão atingidos pelo projétil durante o percurso.

Considere que se deseja atingir, com o projétil, um determinado ponto P qualquer no plano do lançamento. Para isso, pode-se apontar o canhão com

o ângulo  $\theta$  adequado, de forma que a trajetória descrita pelo projétil passe pelo ponto  $P$ .

Pontos  $P$  muito próximos do disparador sempre podem ser atingidos pelo projétil, desde que o disparador seja apontado adequadamente. Em contrapartida, pontos  $P$  muito distantes não podem ser atingidos, independentemente de como esteja orientado o disparador. A fronteira entre os pontos que podem ser atingidos e os que não podem ser atingidos pelo projétil chama-se curva de segurança.

Em outras palavras, pontos  $P$  na região externa a essa curva estão seguros, nunca podendo ser atingidos pelo projétil. Para pontos  $P$  na região interior da curva, sempre é possível apontar o canhão de forma a atingi-los.

**Considerando a situação acima, reflita: um ponto  $P$  no interior da curva de segurança pode ser atingido com quantos valores de  $\theta$  diferentes?**

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3
- (e) mais de 3

**Considerando a situação acima, reflita: um ponto  $P$  sobre a curva de segurança pode ser atingido com quantos valores de  $\theta$  diferentes?**

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3
- (e) mais de 3

Qual das opções a seguir melhor representa a curva de segurança?

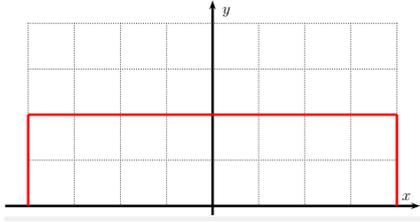


Figura D.1: (a) Opção 1

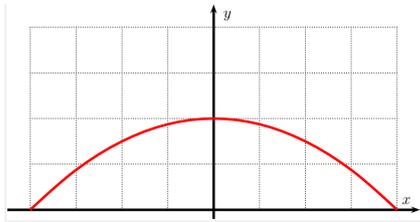


Figura D.2: (b) Opção 2

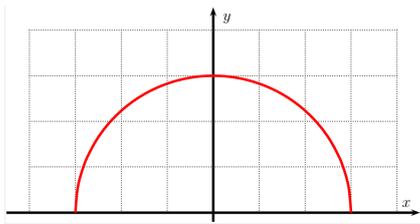


Figura D.3: (c) Opção 3

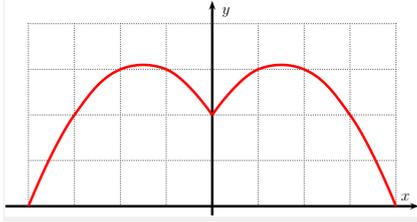


Figura D.4: (d) Opção 4

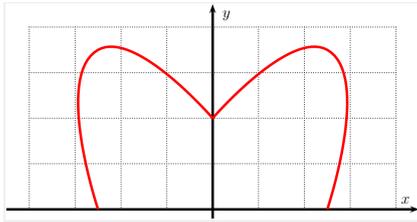


Figura D.5: (e) Opção 5

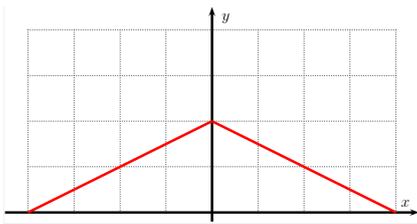


Figura D.6: (f) Opção 6

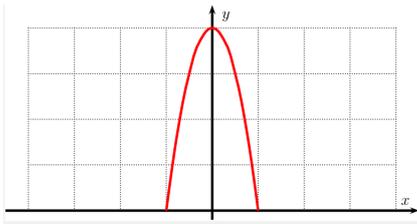


Figura D.7: (g) Opção 7

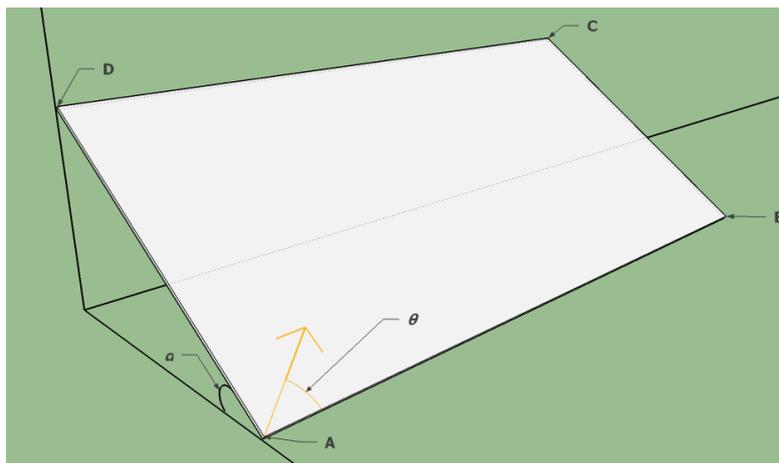
### D.1.3 Lançamentos oblíquos — parte 3

Considere agora lançamentos realizados sobre um plano inclinado fixo ABCD, como na figura, inclinado de um ângulo  $\alpha$  em relação à horizontal. Todo o movimento, em vez de acontecer no ar, acontece sobre o plano.

Acopla-se o mesmo disparador utilizado antes à base AB do plano, a

partir do qual são lançados projéteis que permanecem sempre em contato com ele.

O ângulo de lançamento entre a velocidade inicial do projétil e a base AB é  $\theta$ . Desprezam-se todos os atritos.



Avalie a afirmativa: “A forma da trajetória deixará de ser parabólica devido à inclinação do plano.”

(a) Verdadeira

(b) Falsa

Avalie a afirmativa: “A velocidade impressa pelo disparador ao projétil sobre o plano será diferente da velocidade que ele fornecia ao projétil que se movimentava no ar.”

(a) Verdadeira

(b) Falsa

Alterando-se a inclinação do plano,  $\alpha$ , indique, se houver, qual(is) das grandezas a seguir irá(irão) variar:

(a) O tempo de voo

- (b) A altura máxima que o projétil é capaz de atingir
- (c) O ângulo de lançamento  $\theta$  para o qual o alcance é máximo

**Qual é a direção da aceleração do projétil?**

- (a) vertical, devido à gravidade
- (b) perpendicularmente ao plano ABCD
- (c) na mesma direção da velocidade, mas de sentido oposto
- (d) paralela às arestas AD e BC

**Qual o módulo da aceleração do projétil?**

- (a)  $g$
- (b)  $g \sin(\alpha)$
- (c)  $g \cos(\alpha)$
- (d)  $g \tan(\alpha)$

# Referências Bibliográficas

- [1] P. Terra, R. de Melo e Souza, C. Farina, “Is the tautochrone curve unique?,” *Am. J. Phys.* **84** (12), 917-923 (2016).
- [2] Craig F. Bohren and Donald R. Huffman, *Absorption and scattering of light by small particles*, (John Wiley and Sons, New York, 1983).
- [3] L. Landau and E. Lifshitz, *Mechanics*, 2nd edition (Pergamon Press, New York, 1969).
- [4] A.B. Pippard, *The physics of vibration*, 1st edition (Cambridge University Press, New York, 1979).
- [5] E.T. Osypowsky, M.G. Olsson, “Isochronous motion in classical mechanics,” *Am. J. Phys.* **55** (8), 720-725 (1987).
- [6] M. Asorey, J. F. Cariñena, G. Marmo, A. Perelomov, “Isoperiodic classical systems and their quantum counterparts,” *Annals Phys.* **322** (6), 1444-1465 (2007). arXiv:0707.4465 [hep-th]
- [7] Uzêda, Diego Dias, *Tópicos em mecânica clássica*, Dissertação de mestrado. (Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2011).
- [8] Simon Gindikin, *Tales of physicists and mathematicians*, 2nd edition (Springer, 2007, New York).
- [9] Dava Sobel, *Longitude: The True Story of a Lone Genius Who Solved the Greatest Scientific Problem of His Time*, Reprint edition (Walker, London, 2007).
- [10] V.I. Arnold, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke: Pioneers in mathematical analysis and catastrophe theory from evolvents to quasi-crystals*, 1st edition (Birkhäuser, Basel, 1990).
- [11] C. Antón, J.L. Brun, “Isochronous oscillations: Potentials derived from a parabola by shearing,” *Am. J. Phys.* **76** (6), 537-540 (2008).

- [12] J.F. Cariñena, C. Farina, C. Sigaud, “Scale invariance and the Bohr-Wilson-Sommerfeld quantization for power law one-dimensional potential wells,” *Am. J. Phys.* **61** (8), 712-717 (1993).
- [13] Linus Pauling, *The nature of the chemical bond*, 3rd edition, (Cornell University Press, New York, 1960)
- [14] J. Lekner, “ Reflectionless eigenstates of the  $\text{sech}^2$  potential”, *Am. J. Phys.* **75**, 1151-1157 (2007).
- [15] I.N. Bronshtein, K.A. Semendyayev, Gerhard Musiol, Heiner Mühlig, *Handbook of mathematics*, 5th edition (Springer, Berlin, 2007).
- [16] N.H. Abel, “Auflösung einer mechanischen Aufgabe,” *J. Reine Angew. Math.* **1**, 153-157 (1826).
- [17] R. Muñoz, G. Fernandez-Anaya, “On a tautochrone-related family of paths,” *Rev. Mex. de Fís. E.* **56** (2), 227-233 (2010).
- [18] R. Muñoz, G. González-García, E. Izquierdo-De La Cruz, G. Fernandez-Anaya, “Scleronomic holonomic constraints and conservative nonlinear oscillators,” *Eur. J. Phys.* **32** (3), 803-818 (2011).
- [19] M. Burrowes, C. Farina, “Sobre o pêndulo isócrono de Christiaan Huygens,” *Ref. Bras. Ens. Fís.* **27** (2), 175–179 (2005).
- [20] F. Pascoal, E.A. y Castro, F.S.S. Rosa. “The influence of the drag force on the safety domain,” *Rev. Bras. Ens. Fís.* **33** (2), 2301 (2011).
- [21] Dias, Jorge Luiz Gomes, *Idealizações em mecânica newtoniana e violações do determinismo*, Dissertação de mestrado. (Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2011).
- [22] Nikolai Piskunov, *Differential and integral calculus*, (MIR, 1969, Moscow).