



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

**CONTEXTUALIZAÇÃO E O USO DE SIMULAÇÕES NO ENSINO MÉDIO:  
FACILITANDO A COMPREENSÃO DE PROBLEMAS EM FÍSICA**

Vanderlan Rodrigues dos Anjos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador:  
Alexandre Carlos Tort

Rio de Janeiro  
Maio de 2015

CONTEXTUALIZAÇÃO E O USO DE SIMULAÇÕES NO ENSINO MÉDIO:  
FACILITANDO A COMPREENSÃO DE PROBLEMAS EM FÍSICA

Vanderlan Rodrigues dos Anjos

Orientador:  
Alexandre Carlos Tort

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Prof. Dr. Alexandre Carlos Tort (Presidente)

---

Prof. Dr. Vitorvani Soares

---

Prof. Dr. Sérgio Eduardo Silva Duarte

Rio de Janeiro  
Maio de 2015

## FICHA CATALOGRÁFICA

A599c

Anjos, Vanderlan Rodrigues dos  
CONTEXTUALIZAÇÃO E O USO DE SIMULAÇÕES NO  
ENSINO MÉDIO: FACILITANDO A COMPREENSÃO DE  
PROBLEMAS EM FÍSICA / Vanderlan Rodrigues dos  
Anjos. -- Rio de Janeiro, 2015.  
76 f.

Orientador: Alexandre Carlos Tort.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal  
do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa  
de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2015.

1. Ensino de Física. 2. Problemas de Física. 3.  
Contextualização. 4. Modellus. I. Tort, Alexandre  
Carlos , orient. II. Título.

Dedico esta dissertação à minha amada esposa Elisângela, incansável e sempre presente na minha vida.

## **Agradecimentos**

Ao meu amado Pai, Antônio Rodrigues dos Anjos, quero deixar registrado o meu eterno agradecimento. Ele que durante este curso nos deixou, mas cuja presença em nossa memória jamais deixará de existir! Sua alegria e dedicação à família norteiam a minha vida.

Sou muito grato a DEUS! Te agradeço!

À minha mãe e meus irmãos e irmãos de fé, cujo amor e carinho recebo em todos os momentos da vida. Aos meus filhos Fernando Lucas, Sara e Josué, motivos que me fazem perseverar! Amo vocês incondicionalmente!

Ao grande amigo que fiz durante este curso, meu orientador, Alexandre Tort! Obrigado por tudo! Você foi meu ponto de equilíbrio. Quando eu estava eufórico me colocava os pés no chão, quando desanimado me erguia e me apontava o alvo!

Aos professores que me transmitiram o melhor que tinham! Em especial quero agradecer ao Carlos Eduardo Aguiar, cujas aulas de Quântica foram momentos de satisfação experimentados apenas pelos que tem prazer em apreciar as sutilezas da natureza.

À Professora Marta, que por diversas vezes demonstrou seu interesse pelo sucesso dos alunos, inclusive o meu.

Ao Professor Vitorvani, obrigado por ter se mostrado sempre à disposição para ajudar, mesmo não tendo sido meu Professor aprendi muito contigo. O seu sorriso e demonstração de atenção, além das conversas e sugestões, fizeram diferença no meu curso.

À Dilma, funcionária que discretamente faz o que tem que ser feito! Obrigado pelas diversas vezes em que me ajudou.

Aos meus colegas de curso, cuja companhia durante o período em que tivemos aulas foi de muita importância para eu perseverar.

À Escola Preparatória de Cadetes do Ar e às pessoas que a formam, pelo apoio constante para a realização deste curso.

## RESUMO

### CONTEXTUALIZAÇÃO E O USO DE SIMULAÇÕES NO ENSINO MÉDIO: FACILITANDO A COMPREENSÃO DE PROBLEMAS EM FÍSICA

Vanderlan Rodrigues dos Anjos

Orientador:  
Prof. Dr. Alexandre Carlos Tort

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

A prática docente tem sido questionada em vários aspectos na atualidade. Uma das maiores críticas repousa sobre o fato da escola não ter acompanhado o desenvolvimento da ciência e da tecnologia ao longo dessas últimas três décadas. Baseado num ensino bastante formal, a Física, na maioria das vezes, tem sido apresentada aos alunos do ensino médio como uma disciplina distante das experiências cotidianas, por eles vividas, e que exige uma memorização de fórmulas excessiva, para a resolução de problemas que não fazem sentido algum para o aluno, e assim, as aulas monótonas e cansativas. Esta dissertação se utiliza de situações pouco exploradas tradicionalmente, por apresentarem um grau de dificuldade maior, mas que fazem parte das experiências diárias dos alunos e que, por esse fato, podem despertá-los para a Física. Além desse aspecto de contextualização, está proposto, nesse trabalho, a utilização do software *Modellus*, software gratuito e de linguagem próxima à da sala de aula, para tornar a resolução dos problemas propostos mais simples. Dessa forma, essa dissertação apresenta alguns problemas que podem ser usados pelo professor com o propósito de estimular os seus alunos a gostarem de Física e tornar o seu aprendizado mais significativo e menos mecânico.

Palavras-chave: Ensino de Física, Contextualização, Problemas em Física, Modellus.

Rio de Janeiro  
Maio de 2015

## **ABSTRACT**

### **CONTEXTUALIZATION AND THE USE OF SIMULATIONS IN HIGH SCHOOL: FACILITATING THE UNDERSTANDING OF PROBLEMS IN PHYSICS**

Vanderlan Rodrigues dos Anjos

Supervisor(s):  
Prof. Dr. Alexandre Carlos Tort

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

The teaching practice has been questioned in many ways today. One of the biggest criticism rests on the fact that the school did not follow the development of science and technology over these past three decades. Based on a rather formal education, Physics, for the most part, has been presented to high school students as a distant discipline of everyday experiences, for they lived, and that requires memorization of excessive formulas to solve problems that do not make any sense to the student, thus making the monotonous and tiresome lessons. This paper attempts to use the unexplored situations traditionally for presenting a greater degree of difficulty, but that are part of the daily experiences of students and by that fact may awaken them to physics. In addition to this aspect of contextualization, is proposed in this work, the use of Modellus software, free software and language close to the classroom, to make the resolution of the simplest proposed problems.

Thus, this thesis seeks to offer some issues that may be used by the teacher in order to encourage their students to like physics and make its most significant and less rote learning.

Keywords: Physical education, contextualization, problems in Physics, Modellus.

Rio de Janeiro  
May 2015

# Sumário

1	Introdução.....	1
1.1	Considerações a Respeito do Cenário Atual do Ensino de Física .....	3
1.2	Contextualização e Computador - Caminhos e Propostas para o Ensino de Física 5	
2	Metodologia.....	7
2.1	O Software Modellus .....	9
3	Problemas Físicos .....	11
3.1	Lei de Resfriamento de Newton .....	11
3.1.1	Problema Contextualizado: “CSI-RIO!” .....	11
3.1.2	Configuração do Modellus para Resolução do Problema: “CSI-RIO!” ...	13
3.1.3	Roteiro de Aplicação para o Professor .....	14
3.1.4	Janelas do Modellus .....	15
3.2	Datação de Tempos Longos – Radioatividade.....	18
3.2.1	Problema Contextualizado: “Datação do Carbono 14.” .....	18
3.2.2	Configuração do Modellus para Resolução do Problema: “Datação do Carbono 14.” .....	20
3.2.3	Roteiro de Aplicação para o Professor .....	21
3.2.4	Janelas do Modellus .....	22
3.3	Movimento: Velocidade e aceleração.....	25
3.3.1	Problema Contextualizado: “Performance de Usain Bolt.” .....	25
3.3.2	Configuração do Modellus para Resolução do Problema: “Performance de Usain Bolt.” .....	30
3.3.3	Roteiro de Aplicação para o Professor .....	31
3.3.4	Janelas do Modellus .....	34
3.4	Movimento de Entrada de Meteoros na Atmosfera Terrestre.....	39
3.4.1	Problema Contextualizado: “Meteoro à vista!” .....	42
3.4.2	Configuração do Modellus para Resolução do Problema: “Meteoro à vista!”	45
3.4.3	Roteiro de Aplicação para o Professor .....	46
3.4.4	Janelas do Modellus .....	50
3.5	Oscilador Cúbico .....	65
3.5.1	Problema Contextualizado: “Laboratório Virtual” .....	67
3.5.2	Configuração do Modellus para Resolução do Problema: .....	70
3.5.3	Roteiro de Aplicação para o Professor .....	71
3.5.4	Janelas do Modellus .....	73
4	Conclusão .....	77
5	Referências Bibliográficas.....	79



# 1 Introdução

Essa dissertação nasce do desejo constante de aprender e ensinar! Característica marcante de professores que não se acomodam com o que já passou, mas que se preparam constantemente com os conhecimentos atuais para desvendar e enfrentar problemas futuros, a fim de promover um ininterrupto desenvolvimento, não só da educação, do ensino, mas também da própria ciência e tecnologia, perpassando pelo social e da cidadania.

O cotidiano dos professores parece, porém, funcionar como uma correnteza, que flui no sentido contrário aos desejos ideais e às suas características profissionais mais nobres. Para Ricardo et al. (2007), a sociedade atual vive uma realidade em que a escola e o professor são sempre questionados pelos alunos com perguntas do tipo: “Para que serve isso que estou aprendendo?”. Respostas triviais, como “porque cai no vestibular!” já não fazem mais sentido e, portanto, não satisfazem!

Responder a esse tipo de questionamento requer uma compreensão de que a escola de hoje não pode se comportar mais como um depósito de saberes, como discute Camargo (2010), mas deve promover uma triagem da massa crescente e informe de dados que bombardeiam a mente dos jovens alunos, em particular do ensino médio, através dos meios de comunicação e das tecnologias da informação, e produzir um estímulo ao pensamento e à crítica consciente.

Assim, essa dissertação se propõe a apresentar uma forma de o professor, especificamente de Física, aproveitar, problematizando muitos desses dados, situações cotidianas, que cercam os alunos, mas que muitas vezes são ignorados, e transformar a solução desses problemas em algo que possa engajar e fazer sentido para estes estudantes.

Em termos práticos e objetivos, serão trabalhados exemplos de situações do cotidiano, que muitas vezes são ignoradas em sala de aula por não constarem do conteúdo programático da disciplina, por apresentarem um nível de dificuldade ou abstração além do que o método tradicional admitiria e/ou por exigirem conhecimentos matemáticos além dos possuídos pelos alunos do ensino médio. Dessa forma, esses problemas seriam chamados de complexos para esse nível de instrução.

Deseja-se aqui mostrar uma possibilidade de trabalhar tais problemas complexos, acreditando ser essa uma oportunidade de associar recursos de informática, contextos e ciência com o fim de tornar as aulas de Física mais atraentes, dinâmicas e

próxima da realidade vivenciada pelos alunos, desfazendo os questionamentos do gênero “para quê serve?”.

Não será proposto aqui nenhum critério ou procedimento específico para o processo de seleção ou triagem de situações. Tendo em vista, que esse processo deve resguardar as características da turma e do professor, envolvidos em determinado contexto. Assim, o mais importante dos assuntos a ser escolhido e trabalhado é aquele que faz sentido para os que o estudam.

A possibilidade de transformar uma determinada situação em um problema, que possa ser resolvido pelos alunos, irá exigir do professor certa reflexão e dedicação inicial, mas, esse investimento poderá trazer benefícios capazes de alterar, para melhor, o ambiente da sala de aula, bem como, produzir um aprendizado significativo de novos conceitos.

## **1.1 Considerações a Respeito do Cenário Atual do Ensino de Física**

Como diz Feynman et al. (2008),

Você pode perguntar por que não podemos ensinar física apenas escrevendo as leis básicas em uma página e então mostrando como elas funcionam em todas as possíveis circunstâncias ... Não, não é possível fazê-lo dessa forma. Só podemos fazê-lo passo a passo.” (FEYNMAN et al., 2008, p. 1-1).

Infelizmente, parece que muitos professores não só fazem a pergunta sugerida por Feynman, como a respondem afirmativamente e tentam ensinar física como se fosse um conjunto de axiomas que mereçam apenas demonstrações matemáticas.

Essa prática de ensino de física constitui uma realidade, que se arrasta ao longo do tempo, e está relatada nos PCN (1999, p. 229), quando diz que:

O ensino de Física tem-se realizado frequentemente mediante a apresentação de conceitos, leis e fórmulas, de forma desarticulada, distanciados do mundo vivido pelos alunos e professores e não só, mas também por isso, vazios de significado... Insiste na solução de exercícios repetitivos, pretendendo que o aprendizado ocorra pela automatização ou memorização e não pela construção do conhecimento...(PCN, 1999, p. 229).

Realidade que é, constantemente, ratificada por diversos trabalhos, que em suas introduções comentam:

Observando o panorama atual do ensino de Física no Brasil, o que vemos não é muito animador: uma preocupação excessiva com a memorização e aplicação de fórmulas, as quais, normalmente, não fazem o menor sentido, um deslocamento dos conceitos ensinados com a realidade,..., entre outros males que afligem em maior ou menor grau boa parte das escolas públicas e particulares no país. (BIASOTO, 2011, p. 9).

O ensino da Física, baseado na exposição de teoria e resolução de problemas, denota uma metodologia pouco relacionada com a realidade do aluno, onde este convencido pelas teorias científicas sem compreendê-las, recebe-as como uma espécie de crença. (SANTOS et al., 2006, p. 58).

E essa realidade se repete em outros países, como se pode ver pelos trechos dos trabalhos abaixo:

O elevado número de reprovações a Física, nos vários níveis de ensino e em vários países, mostra bem as dificuldades que os alunos encontram na aprendizagem dessa ciência....Contudo, entre as razões do insucesso na

aprendizagem em Física, são em geral apontados aos professores métodos de ensino desajustados das teorias de aprendizagem mais recentes e não utilização dos meios mais modernos, enquanto aos alunos são apontados insuficiente desenvolvimento cognitivo, deficiente preparação matemática e pré-existência de concepções relacionadas com o senso comum e não com a lógica científica. (FIOLHAIS; TRINDADE, 2003, p. 259-260).

A física na sala de aula do ensino médio no século 21 tem falhado em preparar os alunos para seus estudos de graduação e para o mercado de trabalho. Isso ocorre porque, em parte, a sala de aula no ensino médio não tem como foco ensinar práticas científicas (como computação, modelagem, comunicação, etc.) e, em vez disso, prioriza a aquisição de conteúdos e "aprendizagem de fatos". (AIKEN, 2013, p. 1, tradução nossa).

Na sua dissertação Aiken (2013) ainda apresenta um quadro comparativo, onde mostra o quão distante estão as realidades vividas por estudante de física e um Físico profissional. Ali se vê que enquanto o estudante preocupa-se em resolver questões rápidas, de problemas pré-definidos sem o menor interesse pessoal, o Físico está a resolver problemas amplos, abertos e muitas vezes autodescobertos; Enquanto o estudante trabalha com as leis como apresentadas por especialistas, sem descobrir nada e sem saber por que acredita neles, sem vê-las como hipóteses a serem testadas, o Físico, por outro lado, trabalha com modelos a serem testados e modificados. Sabe que as "leis" são construções; Enquanto o aluno raramente usa um computador, pois utiliza ferramentas analíticas para obter respostas "exatas" para modelos inexatos, o Físico usa o computador sempre, pois além das ferramentas analíticas utiliza também as numéricas para obter respostas aproximadas para modelos inexatos.

## **1.2 Contextualização e Computador - Caminhos e Propostas para o Ensino de Física**

Diante desse quadro crítico que se estabelece em nível mundial, o que todos buscam é produzir soluções. Os próprios PCN (1999) apontam o caminho da discussão sobre qual Física ensinar para possibilitar uma melhor compreensão do mundo e uma formação para a cidadania mais adequada. Afirmam que “isso significa promover um conhecimento contextualizado e integrado à vida de cada jovem.” E, portanto, “é imprescindível considerar o mundo vivencial dos alunos, ... os problemas e indagações que movem sua curiosidade. Esse deve ser o ponto de partida e, de certa forma, também o ponto de chegada.”

Aguiar et al. (2005) discute que conhecer os princípios fundamentais da Física, saber como se chega a eles e aprender a aplicá-los são três fatores que seriam suficientes para justificar o estudo da Física no nível médio de ensino, sendo que, ao final deste, o aluno deveria ter desenvolvido diversas capacidades e competências, e, que para tanto, o professor deve ter em mente alguns princípios a orientar a sua prática docente, dentre eles, que:

- O ensino de Física deve enfatizar a compreensão de conceitos e a aplicação destes a situações concretas, e desestimular práticas como a memorização de fórmulas e sua utilização repetitiva em exercícios numéricos artificiais.
- A introdução de conceitos abstratos deve partir da análise de situações concretas, de preferência ligadas à experiência cotidiana dos alunos. Isto não apenas facilita a aprendizagem desses conceitos, mas principalmente estabelece uma ponte entre o mundo da teoria e aquele vivenciado pelos estudantes.
- Simulações em computador podem ajudar os estudantes a formar modelos mentais de conceitos abstratos ou de fenômenos de difícil visualização. Mais importante ainda, o computador permite que os estudantes tenham acesso a instrumentos de modelagem matemática poderosos e fáceis de usar. Com isso eles podem desenvolver e explorar seus próprios modelos de fenômenos físicos, tornando-se participantes mais ativos na construção de seu conhecimento...(Aguiar et al., 2005, p. 165).

Assim, em conformidade com esse caminho de contextualização, preconizado pelos PCN (1999) e dado por Aguiar et al. (2005) como orientação à prática docente, deve-se também entender que não é possível ignorar que no mundo atual a tecnologia faz parte do cotidiano de todos e parece haver uma necessidade de se tratar tal tecnologia “como referência dos saberes a serem ensinados na escola”. No entanto, não

é desejo dessa dissertação discutir tecnologia nos termos colocados por Ricardo et al. (2007), mas sim, de restringir, a tal tecnologia, ao uso de computadores, tão presentes e importantes na vida dos alunos, como destaca Araujo, Ives Solano et al. (2004). Como uma das diversas opções que o professor pode utilizar em sala, com o intuito de tornar sua aula mais dinâmica, participativa e que produza a aprendizagem desejada. Dessa forma, esta dissertação se enquadraria muito bem, de acordo com a classificação proposta por Araujo, Ives Solano et al. (2004), em um trabalho de Ensino de Física que usa computadores para Modelagem e Simulação.

Muitas vantagens e desvantagens podem ser analisadas e citadas com relação ao uso das simulações e modelagens computacionais, como fez Medeiros; Medeiros (2002), mas, como concluem os autores desse artigo, “o ato educativo é por demais complexo para que o profissional da educação em Física possa optar por um único recurso pedagógico”. Assim, tendo em vista que “um objetivo do ensino de Física é proporcionar aos estudantes as condições favoráveis para adquirir um conjunto de conceitos necessários para interpretar fenômenos naturais e resolver problemas” (Arruda, 2003, p. 87, tradução nossa), a proposta dessa dissertação é oferecer uma maneira de o professor de Física do ensino médio trabalhar situações-problemas não tão comuns nos livros didáticos e de difíceis execuções experimentais, mas que de alguma forma fazem parte do mundo vivencial dos alunos, e que com a ajuda do computador e do software Modellus poderá levar o nível da aula a outro patamar. Pois, como aponta Collins apud Teodoro (2002), o uso de computadores pode fornecer um relevante auxílio em possíveis mudanças na educação, como, por exemplo:

- De um ensino voltado para turma com número exagerado de alunos para um ensino voltado para pequenos grupos.
- De um ensino centrado no professor, basicamente fundamentado em uma exposição de conteúdo, para um ensino onde o professor passar a prestar uma assistência ao desenvolvimento do conhecimento do aluno.

## 2 Metodologia

O tema desse trabalho se desenvolve em torno da possibilidade de resolução de problemas contextualizados de Física e que poderiam ser inviáveis de se estudar no ensino médio, caso não fosse possível a utilização de computadores para auxiliar o professor em sala. Dessa forma, problemas que a priori seriam tratados apenas como mais uma informação, muitas vezes fornecidas pela mídia, outras de origem profissional, passam a constituir matéria prima, nas mãos dos professores e alunos, para um ensino e uma aprendizagem mais concreta, próxima da sua realidade e, por expectativa, mais prazerosa.

De acordo com Ausubel, a aprendizagem significativa pressupõe que:

- a) O material a ser aprendido seja potencialmente significativo para o aprendiz, i.e., relacionável à sua estrutura de conhecimento de forma não-arbitrária e não-literal (substantiva);
- b) O aprendiz manifeste uma disposição de relacionar o novo material de maneira substantiva e não-arbitrária à sua estrutura cognitiva. (Ausubel apud MOREIRA; MASINI, 1982, p. 14).

Logo, para o desenvolvimento desse trabalho o primeiro passo é encontrar material que seja pertinente ao conteúdo que se deseja trabalhar e que este seja de alguma forma presente no cotidiano do aluno, para assim problematizá-lo. E, em segundo lugar, através do uso do software *Modellus* deseja-se tornar a resolução do problema algo que o aluno tenha uma predisposição de fazê-lo.

Através de buscas simples em livros, internet, canais de tv, revistas e outros meios de informações, algumas situações cotidianas foram selecionadas. Essas situações foram escolhidas considerando que seria possível aplicar algum conceito físico e dessa forma essas situações poderiam ser tratadas como problemas de física em sala de aula.

Para todos os problemas aqui apresentados como sugestão será fornecida uma introdução teórica, sem muito aprofundamento, pois isso fugiria ao propósito desse trabalho e caso seja necessário acredita-se que o próprio professor pode buscar tal aprofundamento de maneira autônoma. Portanto, a intenção nesse caso é suprir o professor com alguma informação básica sobre o assunto. Em alguns casos, essa introdução envolverá elementos da matemática, não acessíveis aos alunos do ensino médio. De qualquer forma o professor poderá avaliar e adaptar, conforme necessário essa introdução teórica para trabalhar com seus alunos.

Na sequência será fornecido um exemplo, de aplicação, contextualizado para que o aluno consiga enxergar a necessidade do modelo físico, do assunto que está sendo abordado. É claro que o professor tem a prerrogativa de usar outros exemplos, bem como adaptar o sugerido, para atender a realidade de seus alunos. O que não se pode perder de vista é a necessidade de um exemplo que faça parte da dinâmica cotidiana do aluno.

Uma vez apresentado o exemplo segue um script a ser utilizado no Modellus. O professor pode reescrever esse script diretamente na janela *Modelo Matemático*. É importante que antes de utilizar esses scripts em sala de aula com seus alunos, o professor examine cada linha, identificando o papel de cada comando e assim se preparando para orientar adequadamente os seus alunos quando estes forem executar tais scripts.

Após a inserção do script no Modellus serão apresentadas as telas que fornecem as informações relevantes para a resolução do exemplo que está sendo tratado.



## 2.1 O Software Modellus

Como comenta Araujo, Ives S. et al. (2004) a modelagem computacional como possibilidade de uso da informática no ensino de Física é interessante por se tratar de uma opção que possibilita a interação entre os estudantes e a construção e análise do conhecimento científico, permitindo que compreendam melhor os modelos físicos, bem como tenham condições de discutir o contexto de validade dos mesmos.

O software Modellus é um dos vários programas computacionais voltados para a educação, disponíveis no mercado como já descrito na dissertação de Oliveira Júnior (2011), mas que apresenta características que o distingue e o torna muito interessante para o desenvolvimento da proposta dessa dissertação, a saber: utiliza uma linguagem simples e muito próxima daquela utilizada pelo professor e aluno quando estão escrevendo o modelo matemático do fenômeno físico estudado; além disso, trata-se de um software gratuito, disponível em página dedicada da Universidade Nova de Lisboa por Teodoro (2014).

Abaixo segue uma descrição dos ícones e janelas que compõem o software, com suas funcionalidades, além do procedimento básico para implementação e execução de situações-problemas na sua janela principal.

- 1) Ao iniciar o Modellus aparecerá a seguinte tela de inicialização:

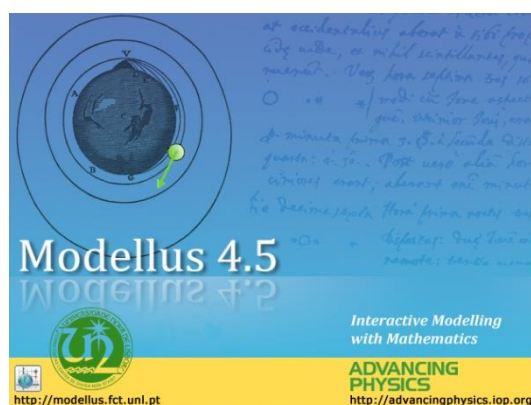


Figura 2.1.1. Tela de inicialização indicativa da versão do *Modellus* utilizada nessa dissertação.

Uma vez inicializado o *Modellus* aparecerá a tela da Figura 2.1.2, onde são mostradas as janelas do Modelo Matemático, Gráfico, Tabela e Notas.

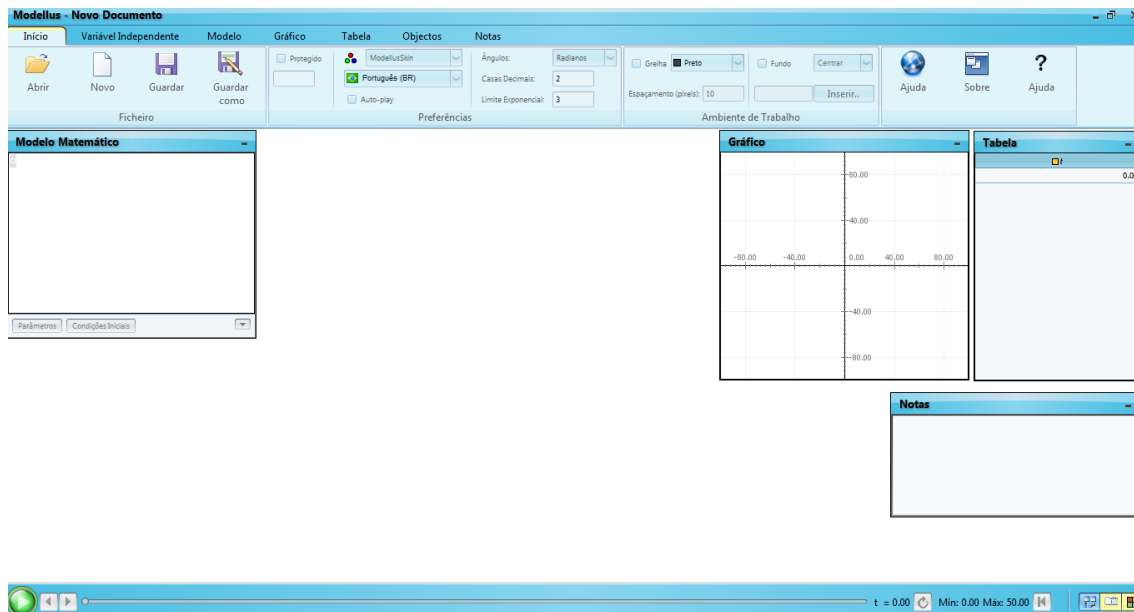


Figura 2.1.2. Tela inicial do *Modellus*.

Neste ambiente o professor pode orientar seu aluno e com ele construir os modelos, modificar parâmetros e testar suas hipóteses. É um ambiente amigável e de fácil manuseio. O aluno escreve as equações dos modelos matemáticos da mesma forma que o professor escreve no quadro.

Nessa dissertação os gráficos e tabelas gerados pelo Modellus serão os principais recursos utilizados. No entanto, outros recursos existentes no Modellus são abordados em diversos outros trabalhos Santos et al. (2006), Araujo, Ives S. et al. (2004), Oliveira Júnior (2011), Mendes et al. (2012) e Araujo (2002), por exemplo.

### 3 Problemas Físicos

Este capítulo é destinado à seleção, apresentação, aplicação e resolução, com o uso do Modellus, de problemas físicos não comumente trabalhados em sala de aula. Os problemas apresentados na sequência servem de exemplos de como o professor poderia encontrar e tratar algumas situações da vida cotidiana, transformando-as em problemas capazes de estimular os alunos e quiçá produzir ou facilitar a compreensão e o aprendizado significativo de conceitos em Física.

#### 3.1 Lei de Resfriamento de Newton

A despeito de não ser tratada pelos livros didáticos, comumente utilizados no ensino médio, a Lei de Resfriamento de Newton pode ser considerada pelo professor como um assunto interessante a ser abordado, uma vez que os conceitos básicos de temperatura e calor, que fundamentam essa lei, são vistos pelos seus alunos.

Para fundamentar a proposta, seja um corpo com temperatura  $\theta(t)$  imerso em um meio ambiente de temperatura constante  $T$ . A lei de resfriamento de Newton afirma que, na busca pelo equilíbrio térmico, esse corpo sofrerá uma variação na sua temperatura dada pela taxa:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\kappa(\theta - T), \quad (3.1.1)$$

onde  $\kappa$  é chamada de constante de resfriamento e depende de condições específicas ao meio e ao corpo. A solução geral da equação (3.1.1), que pode ser obtida pelo método do fator integrante, fornece que:

$$\theta(t) = T + C \exp(-\kappa t).$$

A constante de integração  $C$  acima pode ser determinada, desde que se conheça a temperatura do corpo em um determinado instante  $t_0$ , ou seja, se  $\theta_{(t_0)} = \theta_0$ . Fazendo dessa forma segue que a temperatura do corpo irá variar conforme a equação abaixo:

$$\theta(t) = T + (\theta_0 - T) \exp[-\kappa(t - t_0)] \quad (3.1.2)$$

##### 3.1.1 Problema Contextualizado: “CSI-RIO!”

Nessa atividade será apresentada uma situação que faz parte da vivência profissional de um perito criminal (Associação dos Peritos Oficiais do Estado do Rio de Janeiro, 2014), onde a Lei de Resfriamento de Newton pode ser usada. Dessa forma o

aluno perceberá a importância e também uma possível utilidade dessa Lei Física, podendo, inclusive, contemplar suas limitações.

**Exemplo:**

Suponha que um cadáver seja encontrado, no instante  $t_0 = 0$ , em condições que levantam suspeitas de um assassinato. A temperatura do corpo é medida imediatamente pelo perito e o valor obtido é  $\theta_0 = 29^\circ\text{C}$ . O corpo é retirado da cena do suposto crime e duas horas depois sua temperatura é novamente medida e o valor encontrado é  $\theta_1 = 23^\circ\text{C}$ . O crime parece ter ocorrido durante a madrugada e o corpo foi encontrado pela manhã bem cedo. A perícia então faz a suposição adicional de que a temperatura do meio ambiente entre a hora da morte ( $t_m$ ) e a hora em que o cadáver foi encontrado ( $t_0$ ) tenha se mantido mais ou menos constante, em torno de  $20^\circ\text{C}$  ( $T \approx 20^\circ\text{C}$ ). A perícia sabe também que a temperatura normal de um ser humano vivo é de  $37^\circ\text{C}$ . Com esses dados, como a perícia pode determinar a hora em que a pessoa morreu?

**Solução Analítica:**

Para facilitar, pode-se tomar o instante inicial  $t_0 = 0$  e com os dados fornecidos pelo problema tem-se:  $\theta_0 = 29^\circ\text{C}$ ,  $t_1 = 2\text{h}$ ,  $\theta_1 = 23^\circ\text{C}$  e  $T = 20^\circ\text{C}$ . Agora, utilizando a solução (3.1.2) é possível determinar a constante de resfriamento  $\kappa$ :

$$\theta_1 - T = (\theta_0 - T)\exp(-\kappa t_1)$$

Aplicando logaritmos e substituindo os dados acima fornecidos

$$\kappa = -\frac{1}{t_1} \ln\left(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T}\right) \Rightarrow \kappa = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{23 - 20}{29 - 20}\right) \Rightarrow \kappa = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore \kappa \approx 0.55 \text{ h}^{-1}$$

Usando a solução (3.1.2) novamente, pode-se estimar a hora da morte ( $t_m$ ):

$$\theta(t) = T + (\theta_0 - T)\exp[-\kappa(t - t_0)]$$

$$\theta_m = T + (\theta_0 - T)\exp(-0.55 t_m) \Rightarrow \frac{\theta_m - T}{\theta_0 - T} = \exp(-0.55 t_m) \Rightarrow \ln\left(\frac{\theta_m - T}{\theta_0 - T}\right) = -0.55 t_m$$

$$\Rightarrow t_m(\theta_0) = -\frac{1}{0.55} \ln\left(\frac{\theta_m - T}{\theta_0 - T}\right) \Rightarrow t_m(\theta_0) = -\frac{1}{0.55} \ln\left(\frac{37 - 20}{29 - 20}\right) \Rightarrow t_m(\theta_0) = -\frac{1}{0.55} \ln\left(\frac{17}{9}\right)$$

$$\therefore t_m(\theta_0) = -1.16 \text{ h}$$

Esse resultado indica que a pessoa faleceu pouco mais de 1 h antes de ter sido encontrada.

### 3.1.2 Configuração do Modellus para Resolução do Problema: “CSI-RIO!”

Após iniciar o Modellus, deve-se:

- i. na aba *Início*, menu *Preferências*, definir:
  - a. *Casas Decimais*: **2**;
  - b. *Limite Exponencial*: **3**;
- ii. na aba *Modelo*:
  - a. janela *Modelo Matemático*: inserir o script apresentado no Modelo 3.1.1 abaixo;
  - b. menu *Modelo* acionar o botão *Interpretar*.
- iii. na aba e menu *Variável Independente*, definir:
  - a. *Variável Independente*: **Theta0**;
  - b. *Passo ( $\Delta t$ )*: **0.1**;
  - c. *Mín*: **15.0**;
  - d. *Máx*: **40.0**;
- iv. na aba *Gráfico* e menu *Gráfico*:
  - a. definir *Eixo Horizontal*: **Theta0 – caso1**;
  - b. definir *Eixo Vertical*: **tm – preto – caso1**;
  - c. marcar as caixas: **Projeções, Valores e Valores nos eixos**;
  - d. selecionar *Espessura*: **2**;
- v. na aba *Tabela*:
  - a. menu *Opções*, definir *Tabelar cada 1 passos*;
  - b. menu *Tabela*, definir a *primeira coluna* como **Theta0** e a *segunda coluna* como **tm**;

Observe que, no script apresentado no Modelo 3.1.1, inicialmente foi escrito o significado ou a descrição de cada variável. São as informações que se encontram em cinza. Isso não será feito em todos os scripts, pois apesar de útil em algumas situações, não é necessário para que o Modellus interprete o seu modelo matemático corretamente e nem tampouco é obrigatório o uso das mesmas letras que foram usadas nesse trabalho para denotarem as grandezas que estão envolvidas nos problemas.

### 3.1.3 Roteiro de Aplicação para o Professor

Abaixo segue uma sugestão de roteiro, que o professor poderá usar, para aplicação do exemplo e seu possível tratamento no Modellus.

O professor poderá:

- i. apresentar o exemplo e pedir aos alunos que deem sugestões de como resolver o problema;
- ii. trazer ao conhecimento dos alunos a Lei de Resfriamento de Newton apresentando-a através da equação (3.1.2) e discutindo todos os parâmetros desta; (caso os alunos não estejam familiarizados com funções exponenciais seria interessante que o professor definisse e apresentasse alguns exemplos de aplicação dessa função!)
- iii. resolver ou pedir aos alunos para que resolvam o problema com os parâmetros sugeridos no exemplo;
- iv. questionar: “em que instante,  $t_m$ , teria morrido o cadáver, caso os parâmetros fossem outros?”
- v. dividir a turma em pequenos grupos, conforme disponibilidade de computadores, e pedir que tentem escrever no Modellus as equações utilizadas para o cálculo do coeficiente de resfriamento e do instante da morte, lembrando-os de fornecerem os parâmetros adequados do problema (Figura 3.1.1), conforme a resolução feita no item iii.,
- vi. mostrar o *script* do Modelo 3.1.1 e pedir aos alunos que comparem com os escritos por eles;
- vii. pedir para que executem o modelo, apertando o botão play do Modellus;
- viii. observar e discutir com os alunos a curva exponencial negativa que se apresenta, conforme o Gráfico 3.1.1;
- ix. observar a Tabela 3.1.1, pedindo que verifiquem qual o valor de  $t_m$  correspondente ao  $\theta_0 = 29^\circ\text{C}$ ;
- x. destacar que nesse modelo foi considerado uma temperatura ambiente constante e igual a  $20^\circ\text{C}$  e, que para esse parâmetro assim definido, a tabela fornece os tempos de morte em função das possíveis temperaturas com que foi encontrado o cadáver.

### 3.1.4 Janelas do Modellus

**Modelo Matemático**

$T$ =temperatura ambiente, considerada constante;  
 $\Theta_0$ =temperatura do cadaver quando encontrado;  
 $t_0$ =instante em que o cadaver foi encontrado, tomado igual a 0 por simplicidade;  
 $\Theta_1$ =temperatura do cadaver medida algum tempo depois de encontrado;  
 $t_1$ =instante, posterior a  $t_0$ , em que foi feita a medida de  $\Theta_1$ ;  
 $k$ =constante de resfriamento;  
 $\Theta_{tm}$ =temperatura da pessoa no momento de sua morte, tomada como 37 °C.  
 $t_m$ =instante em que ocorreu a morte da pessoa, obviamente anterior a  $t_0$ .

$T$   
 $\Theta_0$   
 $t_1$   
 $\Theta_1$

$$k = \begin{cases} \text{NaN} & \Theta_0 < \Theta_1 \\ -\left(\frac{1}{t_1}\right) \times \ln\left(\frac{(\Theta_1 - T)}{(\Theta_0 - T)}\right) \end{cases}$$

$\Theta_{tm}$

$$t_m = \begin{cases} 0 & \Theta_0 \geq \Theta_{tm} \\ -\left(\frac{1}{k}\right) \times \ln\left(\frac{(\Theta_{tm} - T)}{(\Theta_0 - T)}\right) \end{cases}$$

Modelo 3.1.1. Script do Problema “CSI-RIO!”

Parâmetros		Condições Iniciais	
<input type="checkbox"/> Casol			
Iguais	$T =$		20.00
Iguais	$t_1 =$		2.00
Iguais	$\Theta_1 =$		23.00
Iguais	$\Theta_{tm} =$		37.00

Figura 3.1.1. Parâmetros do Problema “CSI-RIO!”

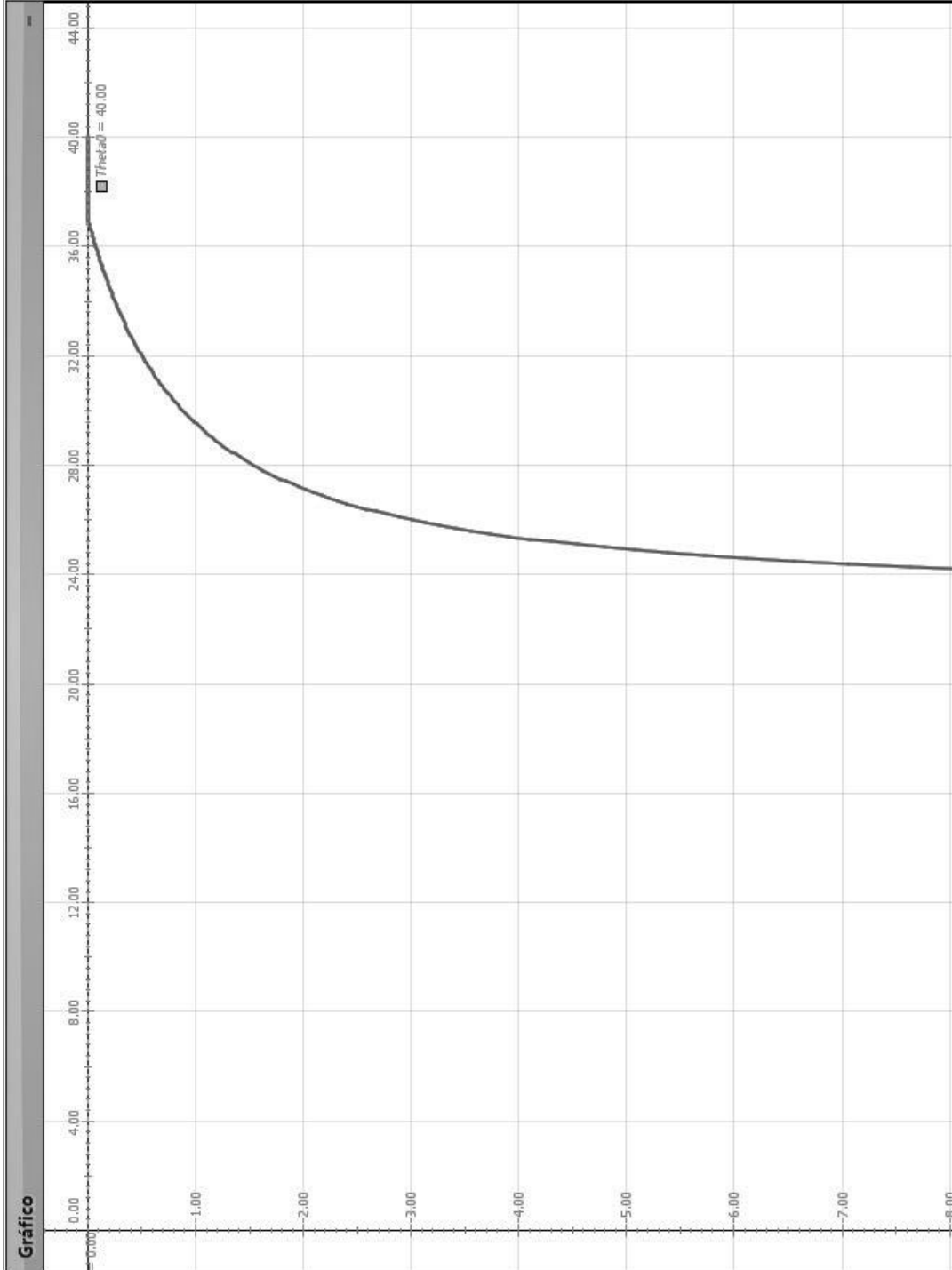


Gráfico 3.1.1.1. Instante da morte em função da temperatura do corpo ao ser encontrado



Tabela	
$\square t_m$	$\square \theta_{\text{Theta}0}$
-1.41	28.30
-1.37	28.40
-1.33	28.50
-1.29	28.60
-1.26	28.70
-1.22	28.80
-1.19	28.90
-1.16	29.00
-1.13	29.10
-1.10	29.20
-1.07	29.30
-1.04	29.40
-1.01	29.50
-0.98	29.60
-0.96	29.70
-0.93	29.80
-0.91	29.90
-0.88	30.00
-0.86	30.10

Tabela 3.1.1. Instante da morte em função da temperatura do corpo ao ser encontrado

## 3.2 Datação de Tempos Longos – Radioatividade

Como afirma Feynman et al. (2008):

O que realmente importa não é como definimos o tempo, mas como nós o medimos. (FEYNMAN et al., 2008, p. 5-1).

Quando é necessário medir intervalos de tempo longos, onde não é possível ter alguém por perto contando esse tempo, nem usar as marcas deixadas pela natureza em troncos de árvores ou em sedimentos no fundo de rios, um método bastante utilizado tem sido considerar os materiais radioativos como “relógios”. Tal procedimento é possível porque um material radioativo diminui sua radioatividade para a metade em um intervalo de tempo característico  $T_{1/2}$ , que é chamado de tempo de “meia-vida”. Ou seja, após outro intervalo de tempo  $T_{1/2}$  a quantidade de material radioativo será de um quarto da inicial e assim sucessivamente.

### 3.2.1 Problema Contextualizado: “Datação do Carbono 14.”

Esse problema é uma boa e oportuna maneira do professor explorar mais o conceito de tempo, rompendo um pouco com a tradicional e quase exclusiva associação de tempo com a medida de distância, que aparece no cálculo da velocidade de um móvel e que o aluno do ensino médio estuda. Além disso, pode ser também uma boa oportunidade de trabalhar interdisciplinarmente com os professores de Química, Biologia e quiçá de Geografia e História.

O exercício proposto a seguir aborda um assunto presente em livros didáticos como, por exemplo, em Doca et al. (2012) e também em diversas revistas de circulação nacional como Ciência Hoje (Kellner, 2008), Nova Escola (Santomauro, 2009) e Revista Mundo Estranho (2015), todas de fácil acesso aos estudantes, portanto é algo presente no cotidiano de qualquer aluno.

#### **Exemplo:**

*Na atmosfera terrestre, a razão entre as quantidades de carbono radioativo  ${}_6\text{C}^{14}$  e carbono comum  ${}_6\text{C}^{12}$  é constante. Isto também é válido para os organismos vivos. Porém, quando um organismo vivo morre a absorção de  ${}_6\text{C}^{14}$  cessa. A idade de um fóssil pode ser determinada pela comparação entre a razão, das quantidades de carbono radioativo  ${}_6\text{C}^{14}$  e carbono comum  ${}_6\text{C}^{12}$ , medida em uma amostra do fóssil e a medida na atmosfera.*

Considerando que a meia-vida do  ${}^6\text{C}^{14}$  é de 5.730 anos, qual é a idade de um osso fossilizado que contém apenas 25% da quantidade original de  ${}^6\text{C}^{14}$ ?

**Solução Analítica:**

O decaimento radioativo é governado pela Equação Diferencial Ordinária:

$$\frac{dM}{dt} = -kM,$$

onde  $M(t)$  é a quantidade da substância radioativa no instante  $t$ , e  $k$  é a constante de decaimento peculiar à substância em questão. A solução dessa equação é dada por:

$$M(t) = M_0 e^{-kt}, \quad (3.2.1)$$

onde  $M_0$  é a quantidade inicial de  ${}^6\text{C}^{14}$ . A constante  $k$  pode ser determinada a partir da meia-vida do  ${}^6\text{C}^{14}$ :

$$M(T_{1/2}) = \frac{M_0}{2} = M_0 e^{-5730k}.$$

Calculando logaritmos:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -5730k,$$

ou ainda:

$$k = \frac{\ln(2)}{5730} = 0.000121.$$

No instante atual  $t$  (em anos!) temos apenas 25% da quantidade original de  ${}^6\text{C}^{14}$ , logo:

$$\frac{M_0}{4} = M_0 e^{-0.000121t},$$

ou

$$t = \frac{\ln(4)}{0.000121} = 11460 \text{ anos.}$$

É importante salientar que este resultado vale se a razão, entre as quantidades de carbono radioativo  ${}^6\text{C}^{14}$  e o carbono comum  ${}^6\text{C}^{12}$ , se mantiver constante ao longo do tempo. Esta hipótese pode não ser correta. Além disso, é preciso levar em conta possíveis erros experimentais na determinação da constante  $k$ .

### 3.2.2 Configuração do Modellus para Resolução do Problema: “Datação do Carbono 14.”

Após iniciar o Modellus, deve-se:

- i. na aba *Início*, menu *Preferências*, definir:
  - a. *Casas Decimais*: **3**;
  - b. *Limite Exponencial*: **7**;
- ii. na aba e menu *Variável Independente*, definir:
  - a. *Variável Independente*: **t**;
  - b. *Passo ( $\Delta t$ )*: **10** (que nesse caso corresponderá a 10 anos);
  - c. *Mín*: **0**;
  - d. *Máx*: **40**;
- iii. na aba *Modelo*:
  - a. janela *Modelo Matemático*: inserir o *script* apresentado no Modelo 3.2.1 a seguir;
  - b. menu *Modelo* acionar o botão *Interpretar*.
- iv. na aba *Gráfico* e menu *Gráfico*:
  - a. definir *Eixo Horizontal*: **t – caso1**;
  - b. definir *Eixo Vertical*: **M – preto – caso1**;
  - c. marcar as caixas: **Projeções, Valores e Valores nos eixos**;
  - d. selecionar *Espessura*: **2**;
- v. na aba *Tabela*:
  - a. menu *Opções*, definir *Tabelar cada 1 passos*;
  - b. menu *Tabela*, definir a *primeira coluna* como **M** e a *segunda coluna* como **t**;

### 3.2.3 Roteiro de Aplicação para o Professor

Abaixo segue uma sugestão de roteiro, que o professor poderá usar, para aplicação do exemplo e seu possível tratamento no Modellus.

O professor poderá:

- i. apresentar o exemplo e perguntar se algum aluno tem sugestões de como resolver o problema;
- ii. trazer ao conhecimento dos alunos a ideia da datação de longos intervalos de tempo baseada no decaimento radioativo de elementos químicos;
- iii. apresentar a equação (3.2.1), discutindo todos os parâmetros desta; (caso os alunos não estejam familiarizados com funções exponenciais seria interessante que o professor definisse e apresentasse alguns exemplos de aplicação dessa função!)
- iv. resolver ou pedir aos alunos para que resolvam o problema com os parâmetros sugeridos no exemplo;
- v. dividir a turma em pequenos grupos, conforme disponibilidade de computadores, e pedir para escreverem no Modellus a equação (3.2.1), não esquecendo de inserir o parâmetro do problema  $M_0$ , substituindo adequadamente o valor de  $k$ ;
- vi. mostrar o *script* da Modelo 3.2.1 e pedir aos alunos que comparem com os escritos por eles;
- vii. pedir para que executem o modelo, apertando o botão play do Modellus;
- viii. observar e discutir com os alunos a curva exponencial que se apresenta no Gráfico 3.2.1;
- ix. observar a Tabela 3.2.1, pedindo que verifiquem qual o valor de a idade ( $t$ ), em anos, correspondente a quantidade de material radioativo ainda restante no osso, no caso 25%, ( $M$ );
- x. destacar que é preciso levar em conta o erro experimental na determinação da constante  $k$ , em torno de 40 anos.

### 3.2.4 Janelas do Modellus



Modelo 3.2.1. *Script* do Problema Datação de Tempos Longos.

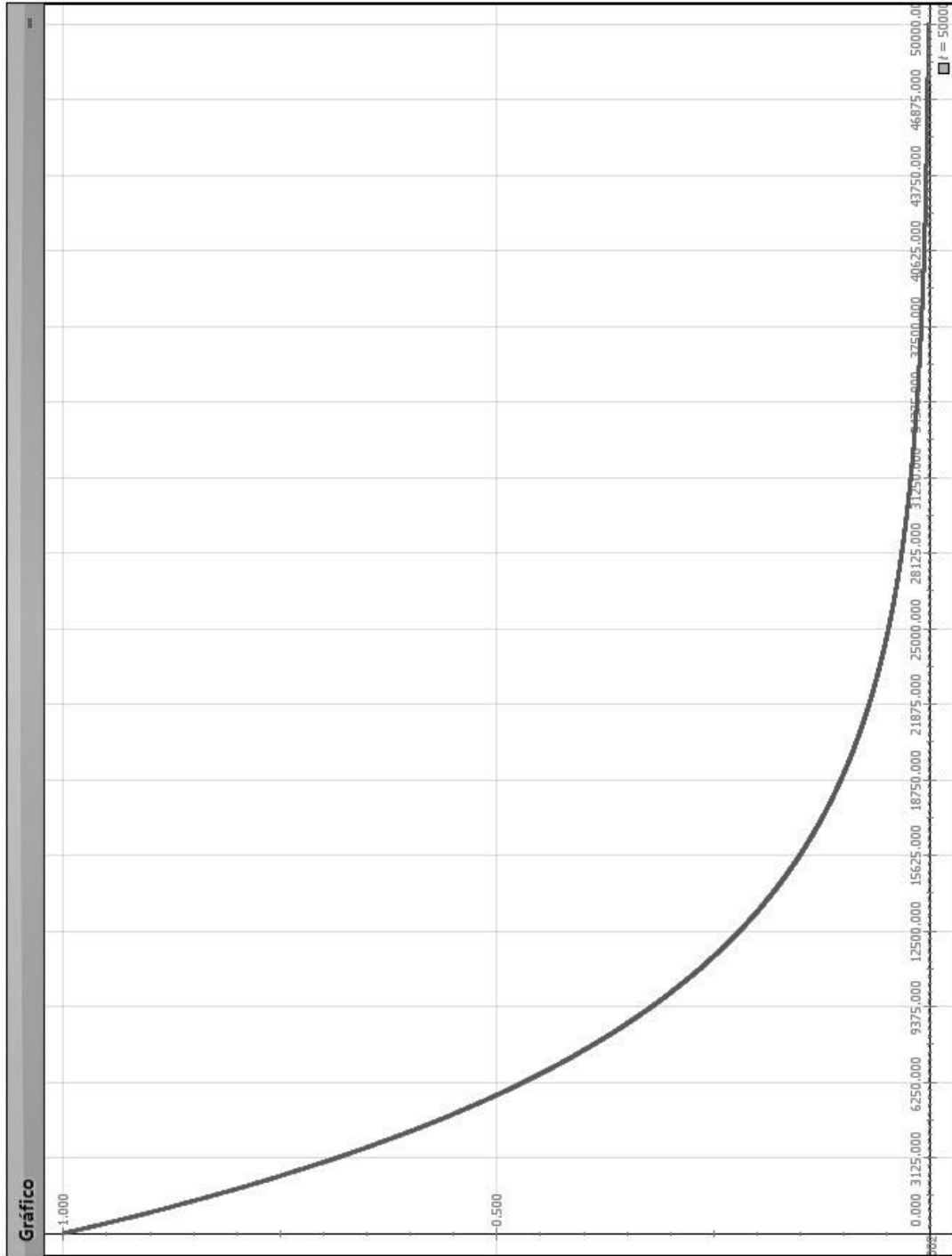


Gráfico 3.2.1. Gráfico do Problema Datação de Tempos Longos.

Tabela	
$\square M$	$\square t$
0.251	11430.000
0.251	11440.000
0.250	11450.000
0.250	11460.000
0.250	11470.000
0.249	11480.000
0.249	11490.000
0.249	11500.000
0.248	11510.000
0.248	11520.000
0.248	11530.000
0.248	11540.000
0.247	11550.000
0.247	11560.000

Tabela 3.2.1. Quantidade de material radioativo ( $M$ ) em função do tempo idade ( $t$ )



### 3.3 Movimento: Velocidade e aceleração

O movimento dos corpos, não sem razão, talvez seja o assunto inicial de quase todos os cursos de Física de ensino médio. É que a base de toda observação física está justamente em se verificar a mudança de posição ao longo do tempo, seja de um corpo ou de um sistema de corpos. Mas, o fato de ser fundamental e introdutório não implica em ser considerado como trivial, antes, como afirma Feynman et al. (2008), a descrição dos movimentos e as definições de velocidade e aceleração guardam sutilezas, muitas vezes tão profundas, que podem levar a discussão para o campo filosófico.

#### 3.3.1 Problema Contextualizado: “Performance de Usain Bolt.”

Sem querer trilhar o caminho teórico apontado por Feynman et al. (2008), mas, antes, despertar no aluno um interesse sobre o movimento dos corpos, é que segue a sugestão de analisar o desempenho do atleta Usain Bolt nos 100 m rasos. Pois, ao tratar de um evento do mundo dos esportes é quase certo de que se está trabalhando um assunto presente nas conversas e discussões diárias entre os alunos. E, além disso, a performance desse atleta é de notório interesse físico, pois este tem atingido acelerações e velocidades nunca antes alcançadas por nenhum outro ser humano.

Utilizando o modelo proposto por Gómez et al. (2013), o professor poderá trabalhar uma situação raramente explorada no ensino médio, a do movimento sob ação de uma força de resistência oferecida pelo ar. A partir das medidas obtidas no vídeo “Usain Bolt: Berlin 100 m World Record Analysis” (2013) e confirmadas pela International Association of Athletics Federations (IAAF), através de equipamentos de alta precisão, para as competições de atletismo, pode-se trabalhar as adequadas equações de movimento. Nesse modelo é suposto que Usain Bolt seja capaz de desenvolver uma força horizontal constante,  $F_0$ , durante toda a prova dos 100 metros. Além dessa força, ele experimenta a ação contínua de uma força de resistência, oferecida pelo ar, ao seu movimento. Essa força de resistência,  $D(v)$ , varia conforme a sua velocidade. Para simplificar, outros fatores, como a velocidade do vento, a umidade relativa do ar e movimentos corporais, como o da cabeça, que o atleta faz ao dar uma olhada para trás com o fim de observar os adversários, devem ser desprezados. Então, pela Segunda Lei de Newton, tem-se que

$$ma = F_0 - D(v) = F_0 - \gamma v - \delta v^2 \quad (3.3.1)$$

O processo de solução da equação (3.3.1), que está descrito no artigo de Gómez et al. (2013), fornece a equação horária da velocidade (3.3.2), onde  $A$ ,  $B$  e  $k$  são parâmetros que foram obtidos a partir de dados experimentais e ajustados pelo método dos mínimos quadrados.

Integrando e derivando, em  $t$ , a equação (3.3.2) é possível obter as equações (3.3.3) e (3.3.4).

Além dessas equações de movimento acima apresentadas, pode-se ainda encontrar a potência instantânea desenvolvida pelo atleta, usando a equação (3.3.5). Sabendo que na ocasião da corrida a massa corporal de Usain Bolt era de 86 kg.

A seguir, é apresentada uma sugestão de problema que poderia ser abordado pelo professor em sala de aula.

**Exemplo:**

*Usain Bolt, o atual recordista mundial dos 100 metros rasos realizou a façanha de se tornar o homem mais rápido de todos os tempos, correndo essa distância em apenas 9,58 segundos. Esse recorde foi estabelecido no 12º Campeonato Mundial de Atletismo, realizado em Berlim, Alemanha, em 2009. Nessa ocasião possuía 86 kg de massa. Através dos dados empíricos extraídos a partir do vídeo “Usain Bolt: Berlin 100 m World Record Analysis” (2013), em que se pode assistir a posição e a velocidade de Bolt ao longo do tempo, foi possível estabelecer as equações de movimento para Usain Bolt nessa prova. A saber:*

$$v(t) = \frac{AB(1 - e^{-kt})}{A + Be^{-kt}} \quad (3.3.2)$$

$$x(t) = \frac{A}{k} \ln\left(\frac{A + Be^{-kt}}{A + B}\right) + \frac{B}{k} \ln\left(\frac{Ae^{kt} + B}{A + B}\right) \quad (3.3.3)$$

$$a(t) = ABk(A + B) \frac{e^{-kt}}{(A + Be^{-kt})^2} \quad (3.3.4)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $k$  são parâmetros que foram obtidos a partir desses dados experimentais e ajustados, sendo seus valores, respectivamente, iguais a 110,031, 12,163 e 0,866.

Assim, com o objetivo de analisar o movimento e a performance desse atleta responda:

1. Qual a máxima aceleração experimentada pelo atleta? Compare-a com a aceleração gravitacional.

2. *Em que condições de forças a aceleração se torna nula? Qual seria o valor da aceleração em  $t = 10,0\text{ s}$ ? Em que instante a aceleração seria nula e qual seria o valor da velocidade em tal momento?*
3. *Qual a velocidade máxima atingida por Usain Bolt? Como é comumente chamada essa velocidade?*
4. *Qual a máxima potência desenvolvida por Usain Bolt? E, em que instante ele dá esse máximo de potência na corrida?*

**Solução Analítica:**

As respostas às questões 1, 2 e 3 do exemplo podem ser dadas usando diretamente as equações de movimento (3.3.2), (3.3.3) e (3.3.4).

1. *Qual a máxima aceleração experimentada pelo atleta? Compare-a com a aceleração gravitacional.*

R. Para responder a essa questão deve-se observar que a maior aceleração experimentada pelo atleta será exatamente na partida, quando sai de uma velocidade nula para a máxima possível, enquanto a força de resistência do ar ainda é nula, ou seja, em  $t = 0$ . Assim, da equação (3.3.4)

$$a(0) = ABk(A+B) \frac{e^{-k \cdot 0}}{(A + Be^{-k \cdot 0})^2} \Rightarrow a_{\text{máx}} = ABk(A+B) \frac{1}{(A+B)^2}$$

$$\Rightarrow a_{\text{máx}} = \frac{ABk}{(A+B)}$$

Substituindo os valores de  $A$ ,  $B$  e  $k$ , fornecidos no enunciado do problema tem-se que

$$a_{\text{máx}} = \frac{(110,031) \cdot (12,163) \cdot (0,866)}{(110,031 + 12,163)}$$

$$\therefore a_{\text{máx}} = 9,48 \text{ m/s}^2$$

Vê-se aqui que a aceleração inicial do atleta é muito alta, da ordem da própria aceleração gravitacional.

2. *Em que condições de forças a aceleração se torna nula? Qual seria o valor da aceleração em  $t = 10,0\text{ s}$ ? Em que instante a aceleração seria nula e qual seria o valor da velocidade em tal momento?*

R. A aceleração se tornará nula quando houver um equilíbrio entre a força motriz produzida pelo atleta e a força de resistência ao movimento oferecida pelo ar.

Em  $t = 10,0 \text{ s}$  a equação (3.3.3) fornece

$$a(t) = ABk(A + B) \frac{e^{-kt}}{(A + Be^{-kt})^2}$$

$$\Rightarrow a(10) = 110,031 \cdot 12,163 \cdot 0,866 \cdot (110,031 + 12,163) \cdot \frac{e^{-8,66}}{(110,031 + 12,163e^{-8,66})^2}$$

$$\Rightarrow a(10) = 1158,974 \cdot (122,194) \cdot \frac{0,00017}{12107,285}$$

$$\therefore a(10) = 0,002 \text{ m/s}^2$$

A aceleração só será nula no limite com  $t \rightarrow \infty$ , ou seja, com  $e^{-kt} \rightarrow 0$ , nesse caso a velocidade teria o valor dado pela equação (3.3.2),

$$v(t) = \frac{AB(1 - e^{-kt})}{A + Be^{-kt}}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{AB(1 - 0)}{A + B \cdot 0} \Rightarrow v(t) = \frac{AB}{A}$$

$$\therefore v(t) = B$$

3. *Qual a velocidade máxima atingida por Usain Bolt? Como é comumente chamada essa velocidade?*

R. A velocidade será máxima quando a aceleração se tornar nula. O seu valor pode ser calculado através da equação (3.3.2). Conforme foi resolvido na questão anterior, tem-se que

$$v(t) = B$$

$$\therefore v(t) = 12,163 \text{ m/s}$$

Essa velocidade máxima é chamada de velocidade terminal.

4. *Qual a máxima potência desenvolvida por Usain Bolt? E, em que instante ele dá esse máximo de potência na corrida?*

R. Para responder a essa questão deve-se saber que a potência instantânea pode ser calculada através do produto entre a força resultante, que age sobre o corpo, e a velocidade dele naquele instante. Ou seja,

$$\begin{aligned}P(t) &= F \cdot v \\ \therefore P(t) &= m \cdot a \cdot v\end{aligned}\tag{3.3.5}$$

Substituindo (3.3.2) e (3.3.4) em (3.3.5),

$$P(t) = m \cdot ABk(A+B) \frac{e^{-kt}}{(A+Be^{-kt})^2} \cdot \frac{AB(1-e^{-kt})}{A+Be^{-kt}}$$

No entanto, como os alunos não conhecem o cálculo diferencial, não será possível determinar o valor máximo da potência desenvolvida pelo Usain Bolt, tampouco, o instante da máxima potência.

### 3.3.2 Configuração do Modellus para Resolução do Problema:

#### “Performance de Usain Bolt.”

Após iniciar o Modellus, deve-se:

- i. na aba *Início*, menu *Preferências*, definir:
  - a. *Casas Decimais*: **3**;
- ii. na aba *Variável Independente*, definir:
  - a. *Variável Independente*: **t**;
  - b. *Passo ( $\Delta t$ )*: **0.01**;
  - c. *Mín*: **0**;
  - d. *Máx*: **10**, uma vez que para Usain Bolt a corrida durou menos de 10 s;
- iii. na aba *Modelo*:
  - a. janela *Modelo Matemático*: inserir o *script* apresentado no Modelo 3.3.1 abaixo;
  - b. menu *Modelo* acionar o botão *Interpretar*.
- iv. na aba *Gráfico* e menu *Gráfico*:
  - a. definir *Eixo Horizontal*: **t – caso1**;
  - b. definir *Eixo Vertical*: **x – laranja – caso1, v – rosa – caso 1, a – amarelo – caso 1 e p – vermelho – caso1**;
  - c. marcar as caixas: **Projeções, Valores e Valores nos eixos**;
  - d. selecionar *Espessura*: **2**;
- v. na aba *Tabela*:
  - a. menu *Opções*, definir *Tabelar cada 1 passos*;
  - b. menu *Tabela*, definir a *primeira coluna* como **t**, a *segunda coluna* **x**, a *terceira coluna* **v**, a *quarta coluna* **a** e a *quinta coluna* como **p**;

### 3.3.3 Roteiro de Aplicação para o Professor

Abaixo segue uma sugestão de roteiro, que o professor poderá usar, para aplicação do exemplo e seu possível tratamento no Modellus.

O professor poderá:

- i. Mostrar aos alunos os vídeos “Usain Bolt New World Record 100m In 9.58 Seconds In Berlin.Gold medal in Beijing 9.68 sec” (2013) e “Usain Bolt: Berlin 100 m World Record Analysis” (2013) com Usain Bolt batendo o recorde mundial dos 100 metros rasos. Observando, para eles, que no vídeo “Usain Bolt: Berlin 100 m World Record Analysis” (2013) tudo está passando em câmera lenta para que sejam anotados os dados referentes à posição e velocidade do atleta ao longo da prova;
- ii. apresentar o exemplo e perguntar se algum aluno tem sugestões de como resolver o problema, respondendo às questões levantadas;
- iii. discutir com os alunos o conceitos de força constante e força variável, explorando a variação de uma força em função do tempo, da posição e da velocidade;
- iv. apontar que a força de resistência do ar varia com a velocidade, questionando quais seriam as consequências disso;
- v. discutir a questão do equilíbrio de forças, observando o que aconteceria no movimento do atleta caso esse equilíbrio fosse atingido;
- vi. apontar outras situações em que é possível observar o alcance de uma velocidade terminal, como por exemplo, um salto de paraquedas, a queda de uma gota de chuva ou o movimento de um automóvel;
- vii. comentar ou explicar aos alunos como é possível, a partir de dados experimentais, chegar nas equações de movimento (3.3.2), (3.3.3) e (3.3.4); discuti-las, e, caso os alunos não estejam familiarizados com funções logarítmicas e exponenciais seria interessante que o professor definisse e apresentasse alguns exemplos de aplicação dessas funções;
- viii. apresentar a equação (3.3.5) da potência instantânea, discutindo os conceitos de potência média e instantânea; caso os alunos ainda não tenham estudado esse assunto, o professor pode trabalhar a questão 4, desse exemplo, em outro momento;

- ix. resolver ou pedir aos alunos para que resolvam o problema analiticamente, com os parâmetros sugeridos no exemplo;
- x. dividir a turma em pequenos grupos, conforme disponibilidade de computadores, e pedir para escreverem as equações (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4) e (3.3.5) no Modellus, não se esquecendo de preencher os parâmetros fornecidos pelo problema, conforme mostrado na janela Modelo 3.3.1;
- xi. pedir para que executem o modelo, apertando o botão play do Modellus;
- xii. solicitar aos alunos que respondam às questões:

1. *Qual a máxima aceleração experimentada pelo atleta? Compare-a com a aceleração gravitacional.*

R. A máxima aceleração experimentada pelo atleta acontece evidentemente no momento de sua partida, quando a força de resistência do ar é nula. O seu valor é de aproximadamente  $9,5 \text{ m/s}^2$ , que é um valor muito próximo ao da aceleração da gravidade, e pode ser observado na Tabela 3.3.1.

2. *Em que condições de forças a aceleração se torna nula? Qual seria o valor da aceleração em  $t = 10,0 \text{ s}$ ? Em que instante a aceleração seria nula e qual seria o valor da velocidade em tal momento?*

R. Analisando a Tabela 3.3.2, construída alterando o intervalo de tempo para 0,1 s e admitindo apenas 1 casa decimal, observa-se que a aceleração se torna nula no instante 6,6 s. Nesse momento, Usain Bolt, já percorreu 64,7 metros, mais da metade da distância total da prova. A partir desse instante há um equilíbrio entre a força motriz do atleta e a força de resistência do ar. Observa-se que a velocidade do atleta não aumenta mais.

3. *Qual a velocidade máxima atingida por Usain Bolt? Como é comumente chamada essa velocidade?*

R. Como mencionado na questão anterior, a partir de 6,6 s de prova a velocidade não aumenta mais, ou seja, atingiu sua velocidade máxima, que é de, aproximadamente, 12,1 m/s, como pode ser observado tanto no Figura 3.3.1 como na Tabela 3.3.2.



4. *Qual a máxima potência desenvolvida por Usain Bolt? E, em que instante e com que velocidade ele dá esse máximo de potência na corrida?*

R. O perfil da potência desenvolvida pelo atleta ao longo da corrida pode ser vista através do Figura 3.3.2 e o pico de sua potência foi algo em torno de 2.619 W, como pode ser observado na Tabela 3.3.3. Também por essa Tabela 3.3.3 é possível observar que esse pico de potência se deu com apenas 0,89 s de corrida, e que nesse instante sua velocidade era de aproximadamente 6,2 m/s, ou seja, com 0,89 s de corrida ele já havia atingido metade da sua velocidade máxima.

### 3.3.4 Janelas do Modellus

**Modelo Matemático**

$$x = \frac{A}{k} \times \ln \left( \frac{(A + B \times e^{-k \times t})}{(A + B)} \right) + \frac{B}{k} \times \ln \left( \frac{(A \times e^{k \times t} + B)}{(A + B)} \right)$$

$$v = \frac{(A \times B \times (1 - e^{-k \times t}))}{(A + B \times e^{-k \times t})}$$

$$a = A \times B \times k \times (A + B) \times \frac{(e^{-k \times t})}{(A + B \times e^{-k \times t})^2}$$

$$P = m \times a \times v$$

Parâmetros    Condições Iniciais

Caso1    Caso2    Caso3    Caso4    Caso5

Iguais    A =    1.100E2    0.000    0.000    0.000    0.000

Iguais    k =    0.866    0.000    0.000    0.000    0.000

Iguais    B =    1.216E1    0.000    0.000    0.000    0.000

Iguais    m =    8.600E1    0.000    0.000    0.000    0.000

Modelo 3.3.1. Script do Problema “Movimento: Velocidade e Aceleração”.

**Tabela**

<input type="checkbox"/> t	<input type="checkbox"/> x	<input type="checkbox"/> v	<input type="checkbox"/> a	<input type="checkbox"/> P
0.00	0.00	0.00	9.48	0.00
0.01	4.73E-4	0.09	9.42	76.56
0.02	0.00	0.19	9.35	151.54
0.03	0.00	0.28	9.29	224.95
0.04	0.01	0.37	9.22	296.81
0.05	0.01	0.47	9.16	367.16
0.06	0.02	0.56	9.10	435.99
0.07	0.02	0.65	9.03	503.35
0.08	0.03	0.74	8.97	569.25
0.09	0.04	0.83	8.91	633.70
0.10	0.05	0.92	8.84	696.74
0.11	0.06	1.00	8.78	758.37
0.12	0.07	1.09	8.72	818.63
0.13	0.08	1.18	8.66	877.53
0.14	0.09	1.26	8.60	935.09
0.15	0.10	1.35	8.54	991.32

Tabela 3.3.1. Tabela com os valores da posição, velocidade, aceleração e potência nos instantes iniciais, feita com intervalos de tempo de 0.01s.

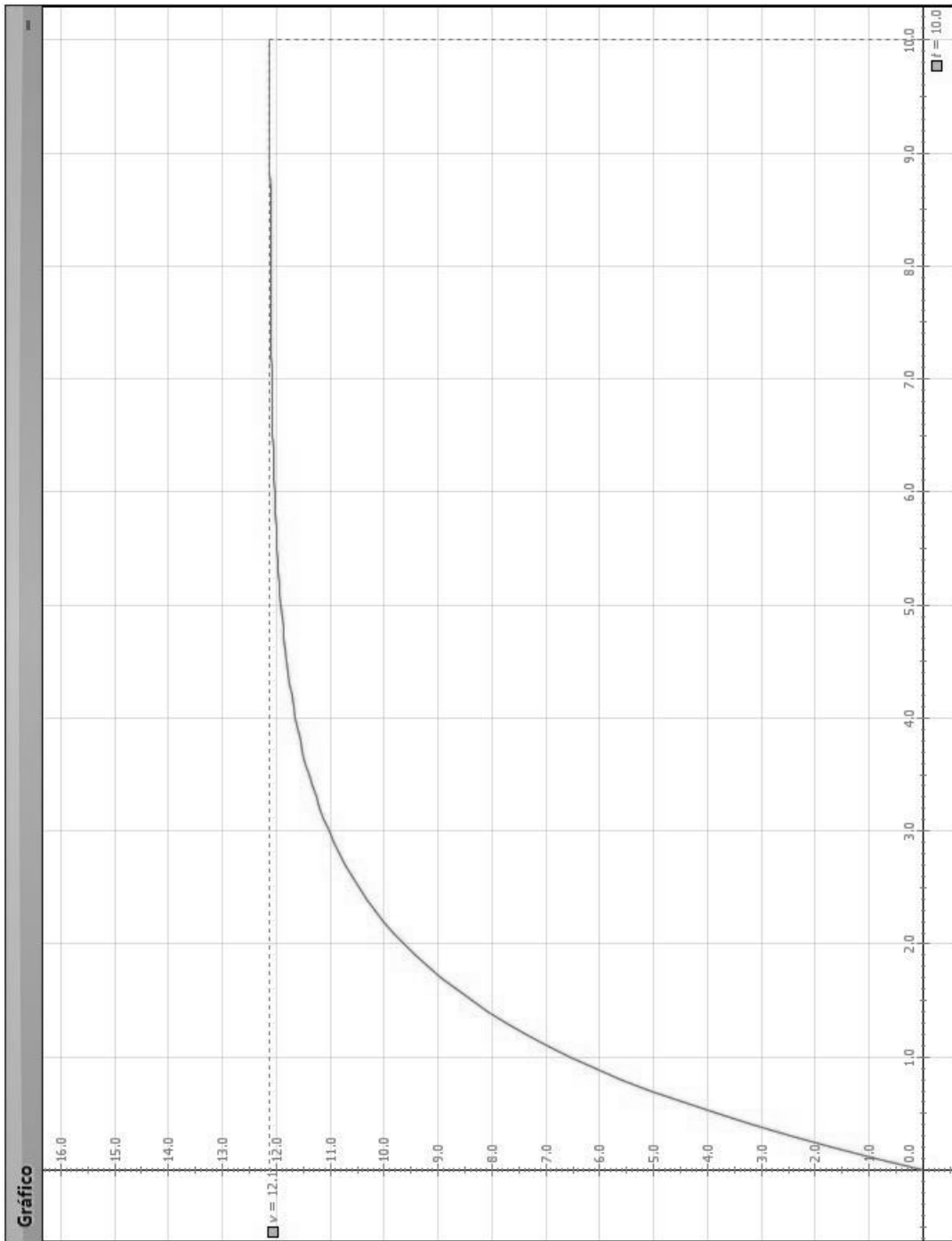


Figura 3.3.1. Gráfico da velocidade onde pode-se observar a velocidade terminal sendo atingida, por Usain Bolt.

Tabela				
$t$	$x$	$v$	$a$	$P$
5.0	45.5	11.9	0.2	178.5
5.1	46.7	11.9	0.2	164.5
5.2	47.9	11.9	0.1	151.6
5.3	49.1	12.0	0.1	139.7
5.4	50.3	12.0	0.1	128.7
5.5	51.5	12.0	0.1	118.6
5.6	52.7	12.0	0.1	109.3
5.7	53.9	12.0	0.1	100.6
5.8	55.1	12.0	0.1	92.7
5.9	56.3	12.0	0.1	85.4
6.0	57.5	12.0	0.1	78.6
6.1	58.7	12.0	0.1	72.4
6.2	59.9	12.0	0.1	66.7
6.3	61.1	12.1	0.1	61.4
6.4	62.3	12.1	0.1	56.5
6.5	63.5	12.1	0.1	52.0
6.6	64.7	12.1	0.0	47.9
6.7	66.0	12.1	0.0	44.1
6.8	67.2	12.1	0.0	40.6
6.9	68.4	12.1	0.0	37.4
7.0	69.6	12.1	0.0	34.4
7.1	70.8	12.1	0.0	31.6
7.2	72.0	12.1	0.0	29.1
7.3	73.2	12.1	0.0	26.8
7.4	74.4	12.1	0.0	24.7
7.5	75.6	12.1	0.0	22.7

Tabela 3.3.2. Tabela com os valores da posição, velocidade, aceleração e potência nos instantes iniciais, feita com intervalos de tempo de 0.1s.

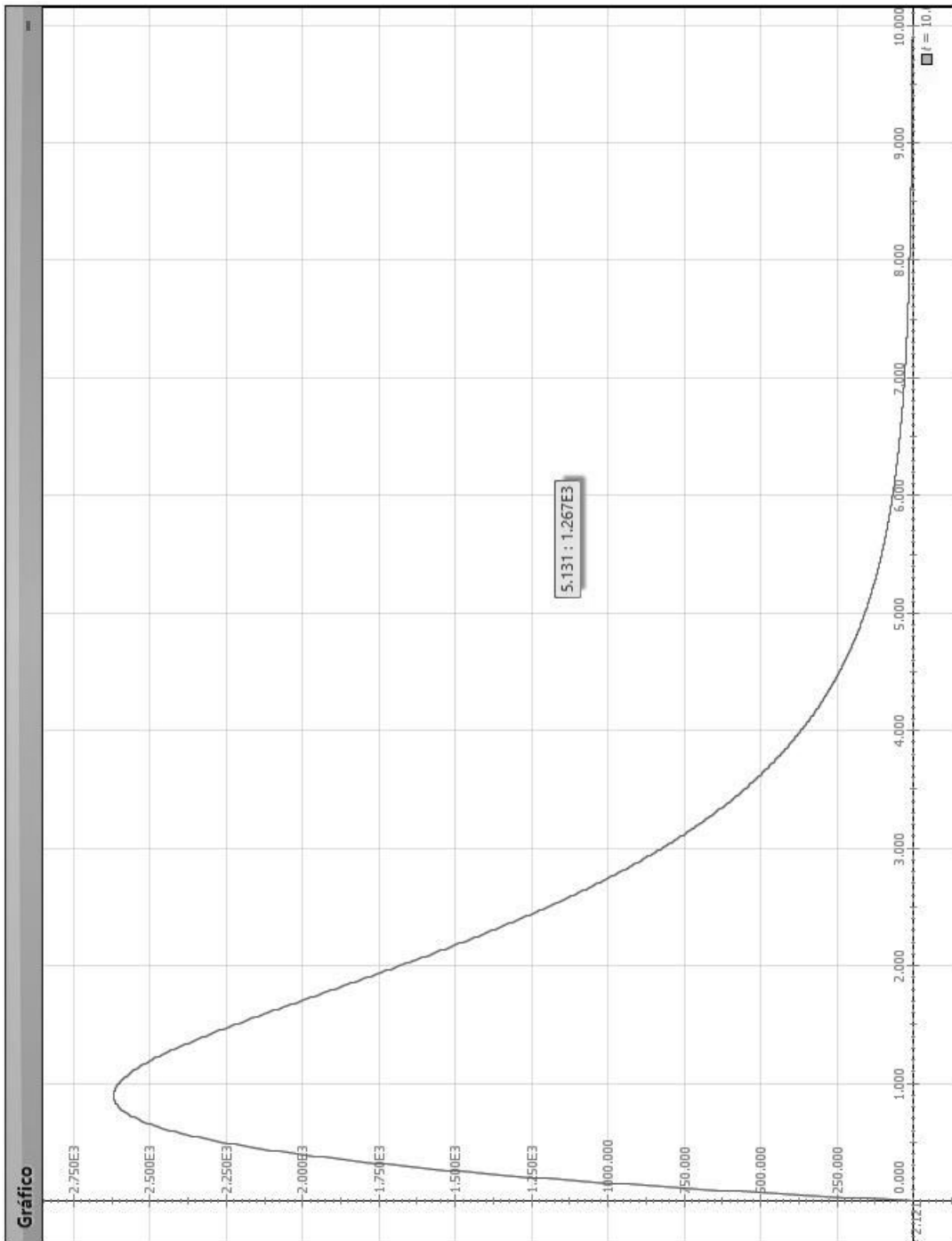


Figura 3.3.2. Gráfico mostrando a potência desenvolvida, por Usain Bolt, ao longo da corrida.

Tabela			
$t$	$x$	$v$	$P$
0.700	1.981	5.215	2.545E3
0.710	2.033	5.271	2.553E3
0.720	2.086	5.327	2.560E3
0.730	2.140	5.383	2.567E3
0.740	2.194	5.438	2.574E3
0.750	2.248	5.493	2.580E3
0.760	2.303	5.547	2.585E3
0.770	2.359	5.601	2.590E3
0.780	2.416	5.655	2.595E3
0.790	2.472	5.708	2.599E3
0.800	2.530	5.761	2.603E3
0.810	2.588	5.813	2.606E3
0.820	2.646	5.865	2.609E3
0.830	2.705	5.917	2.612E3
0.840	2.764	5.968	2.614E3
0.850	2.824	6.019	2.616E3
0.860	2.885	6.069	2.617E3
0.870	2.946	6.119	2.618E3
0.880	3.007	6.168	2.619E3
0.890	3.069	6.218	2.619E3
0.900	3.131	6.266	2.619E3
0.910	3.194	6.315	2.619E3
0.920	3.258	6.363	2.618E3
0.930	3.322	6.410	2.617E3
0.940	3.386	6.458	2.616E3
0.950	3.451	6.505	2.614E3
0.960	3.516	6.551	2.612E3
0.970	3.582	6.597	2.610E3
0.980	3.648	6.643	2.608E3
0.990	3.715	6.689	2.605E3
1.000	3.782	6.734	2.602E3

Tabela 3.3.3. Tabela com os valores da posição, velocidade e potência nos instantes próximos aos de potência máxima.

### 3.4 Movimento de Entrada de Meteoros na Atmosfera Terrestre

Muitas lendas, que formam o arcabouço folclórico, em muitos países, tem suas origens provavelmente no fenômeno de entrada de meteoros na atmosfera terrestre, que o homem já observa desde o seu surgimento sobre a superfície da Terra. Como exemplo da cultura cristã, pode-se citar o texto encontrado no capítulo 13, versículo 25, do livro de Marcos da Bíblia Sagrada (2012), onde está escrito “As estrelas cairão do céu, e os poderes do espaço serão abalados”. Sabe-se, de fato, que as chamadas estrelas cadentes não passam de meteoros, que ao entrarem na atmosfera terrestre deixam rastros luminosos no céu, dando a impressão de serem estrelas caindo. Logo, por se tratar de um fenômeno da natureza, fora do controle humano, que sempre impressionou a muitas culturas e que pode trazer consequências diversas para a vida, deveria ser sempre muito bem estudado. No entanto, os poucos livros que discutem esse tema, como o Curso de Física de Berkeley, de Knight et al. (1970), na página 182-183, normalmente o fazem em um “TÓPICO AVANÇADO”, o que pode assustar até certos estudantes de graduação!

Na tentativa de levar à discussão o problema da entrada dos meteoros na atmosfera terrestre de maneira mais simples, para um aluno de ensino médio, será usado aqui o trabalho escrito por Rodrigues (2013).

De acordo com seu artigo, quando um meteoro entra na atmosfera terrestre, além da ação da gravidade, os principais processos físicos que operam em tais corpos hipersônicos são a força de arrasto, exercida pelo atrito com o ar, a ablação (ou abrasão), que é o processo de redução de massa causado por evaporação do material devido ao aquecimento do projétil, e a deformação.

As três equações seguintes descrevem a dinâmica do movimento dos meteoros na atmosfera,

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \rho_a C_D A v^2 + mg \sin \theta, \quad (3.4.1)$$

$$m \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2} \rho_a C_L A v - \frac{mv \cos \theta}{R_T + z} + \frac{mg \cos \theta}{v}, \quad (3.4.2)$$

$$Q \frac{dm}{dt} = -C_H \rho_a A v^3, \quad (3.4.3)$$

sendo que o primeiro termo do lado direito da equação (3.4.1) representa a força de arrasto exercida pela atmosfera, enquanto que o segundo termo é a componente da força gravitacional na direção da velocidade do projétil. A equação (3.4.2) contém três termos

no lado direito. O primeiro termo é de uma força ascensional produzida pela atmosfera, chamada força de sustentação, que tende a tornar a direção da trajetória do projétil mais horizontal. O segundo termo vem da esfericidade da aceleração gravitacional da Terra. Este efeito é pequeno e pode ser desprezado em muitos casos. Finalmente, o último termo é a componente da força de gravidade ortogonal à velocidade do projétil.

Nas equações (3.4.1) e (3.4.2),  $v = v(t)$  representa a velocidade do projétil,  $m = m(t)$ , e  $A = A(t)$  são massa e área, da seção reta, do meteoro, normal ao sentido do movimento, respectivamente.  $\theta(t)$  é o ângulo entre a trajetória do meteoro e a horizontal.  $C_D$  e  $C_L$  são os coeficientes de arrasto que dependem da forma do corpo,  $z$  corresponde a altura do meteoro a partir da superfície da Terra,  $g = g(z)$  e  $\rho = \rho(z)$  são a aceleração da gravidade e a densidade da atmosfera, respectivamente. Elas são obtidas de forma explícita pelas fórmulas

$$g(z) = g_0 \left( 1 - \frac{z}{R_T} \right)^2, \quad (3.4.4)$$

onde  $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$  é o valor da aceleração gravitacional sobre a superfície da Terra e  $R_T = 6,371 \times 10^6 \text{ m}$  o raio da Terra, e

$$\rho_a(z) = \rho_0 e^{-z/H}, \quad (3.4.5)$$

onde  $\rho_0 = 1,22 \text{ kg/m}^3$  é a densidade atmosférica ao nível do mar, com a constante  $H = 8,1 \times 10^3 \text{ m}$ .

A equação (3.4.3), por sua vez, descreve bem a redução da massa do projétil, devido ao processo de ablação. Em função do atrito, a atmosfera próxima ao projétil pode alcançar temperaturas de cerca de  $6,0 \times 10^3 \text{ }^\circ\text{C}$ , mais elevadas do que a temperatura da superfície do sol, causando a evaporação da superfície do projétil. Como resultado, a ablação também afeta a força de arrasto, uma vez que esta depende da área da seção transversal do projétil, que é reduzida pelo processo de ablação. Nessa equação,  $Q$  é o calor de ablação (calor latente), e  $C_H$  é o coeficiente de transferência de calor. Os valores típicos de  $Q$  para diversos tipos de asteroides e cometas são dadas na Tabela 3.4.1. A partir da observação fotográfica de meteoros, sabe-se que  $C_H = 0,1$ .



Composição	$\rho_m (10^3 \text{ kg/m}^3)$	$v (\text{ km/s})$	$Q (10^6 \text{ J/kg})$
Ferro	7,9	15	8,0
Rocha	3,5	15	8,0
Carbonífera	2,2	15	5,0
Cometas	1,0	25	2,5

Tabela 3.4.1. Tabela contendo a composição, densidade, velocidade e calor de ablação de alguns asteroides e de cometas. Retirada de Rodrigues (2013).

Com o propósito de descrever a deformação na forma do projétil, causada pela ablação, é habitual tratá-lo como um cilindro homogêneo, com altura igual ao diâmetro da base ( $2r$ ) e o eixo de simetria do cilindro orientado na mesma direção do movimento do projétil Figura 3.4.2. Naturalmente, meteoritos cilíndricos não existem na natureza, mas este modelo geométrico torna mais fácil o cálculo da deformação provocada pela ablação.

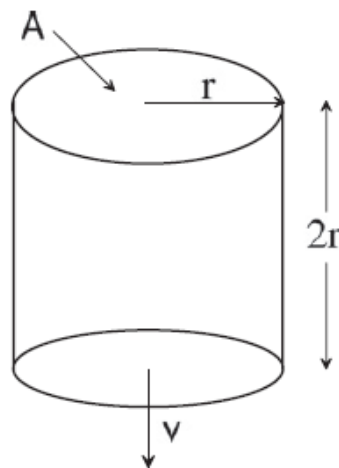


Figura 3.4.2. Cilindro representativo de um meteoro, usado para levar em consideração a deformação provocada pela ablação. Retirada de Rodrigues (2013).

Assim, seguindo este modelo, a massa do projétil é dada por

$$m = \rho_m V = (\pi r^2)(2r)\rho_m \quad (3.4.6)$$

onde  $\rho_m$  é a densidade de massa do projétil. Assim, dessa equação (3.4.6) tem-se que

$$r = \left( \frac{m}{2\pi\rho_m} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.4.7)$$

logo,

$$A = \pi \left( \frac{m}{2\pi\rho_m} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.4.8)$$

Dessa forma, as equações (3.4.1), (3.4.2) e (3.4.3) formam um conjunto de três equações diferenciais de primeira ordem acopladas. A primeira equação diferencial descreve a variação da intensidade da velocidade do meteoro,  $v$ . A segunda equação diferencial dá a mudança da direção do movimento do meteoro, o ângulo  $\theta$ . A terceira equação diferencial descreve a redução da massa do projétil devido ao processo de ablação. Como afirma Rodrigues (2013), essas equações de movimento não possuem soluções analíticas conhecidas e, portanto, em seu trabalho ele recorreu a métodos numéricos para obter soluções aproximadas.

A proposta apresentada abaixo oferece uma alternativa, ao professor de Física do ensino médio, de como trabalhar o assunto sem ser necessário escrever os algoritmos no Excel, conforme é feito por Rodrigues (2013) em seu artigo, bastando apenas conhecer as equações do movimento e as demais fórmulas relacionadas a estas equações e já descritas acima.

### 3.4.1 Problema Contextualizado: “Meteoro à vista!”

A superfície terrestre é constantemente bombardeada, principalmente por meteoros vindos de um cinturão de asteroides, situado entre Marte e Júpiter, como afirma Rodrigues (2013). Estes, ao colidirem com a atmosfera terrestre, desaceleram devido à transmissão de momento linear às moléculas de ar com as quais colidem, conforme Knight et al. (1970).

Muitos eventos dessa natureza tem sido documentados e amplamente divulgados pela mídia, e, portanto, este tem permanecido um assunto atual e que pode ser explorado como exemplo da aplicação das leis de Newton, como aponta Rodrigues (2013), que em seu artigo fornece um conjunto de equações capazes de descrever o movimento de entrada de meteoros na atmosfera terrestre, e já apresentadas acima.

Abaixo segue uma proposta de como trabalhar este assunto em sala de aula.

#### **Exemplo:**

*Em 15 de fevereiro de 2013, um asteroide explodiu sobre a cidade russa de Chelyabinsk, perto dos Montes Urais do sul. Acredita-se que a sua velocidade de entrada na atmosfera era de pelo menos 54.000 km/h (15.000 m/s), o que é típico de uma velocidade de asteroides, e que tenha se despedaçado cerca de 30 a 50 km acima*

do solo, provocando um banho de meteoritos que causaram danos sobre uma área ampla. Esse evento foi filmado por várias pessoas e é possível assistir a muitos vídeos na internet, como, por exemplo, o vídeo disponível no youtube intitulado A explosão do meteoro na Rússia em 2013-02-15 (2013).

O movimento dos meteoros na atmosfera terrestre é descrito pelo conjunto de equações abaixo.

$$a = -\frac{1}{2} \frac{\rho C_D A v^2}{m} + g \sin \theta$$

$$\omega = -\frac{1}{2} \frac{\rho C_L A v}{m} - \frac{v \cos \theta}{R+z} + \frac{g \cos \theta}{v}$$

$$v = v_0 + a \cdot \Delta t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega \cdot \Delta t$$

$$g = g_0 \left(1 - \frac{z}{R}\right)^2$$

$$\rho = \rho_0 e^{-z/H}$$

$$x = x_0 + v \cdot \cos \theta \cdot \Delta t$$

$$z = z_0 - v \cdot \sin \theta \cdot \Delta t$$

$$m = m_0 - C_H \cdot \rho \cdot A \cdot \frac{v^3}{2Q} \cdot \Delta t$$

$$A = \pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi\rho_m}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Escreva essas equações no software Modellus e considere o movimento de um meteoro, sob a ação da força de resistência do ar, da força gravitacional e do processo de ablação. Adote os seguintes valores de parâmetros:  $C_D = 1,7$  para o coeficiente de arrasto válido para um objeto cilíndrico, e  $Q = 8,0 \times 10^6 \text{ J/kg}$  para o calor de ablação. As observações detalhadas da entrada na atmosfera de meteoritos indicam o valor  $C_L = 10^{-3}$ . Também considere os valores iniciais  $z_0 = 100 \text{ km}$  e  $v_0 = 15 \text{ km/s}$  como os de entrada na atmosfera, bem como  $\rho_0 = 1,22 \text{ kg/m}^3$  a densidade atmosférica. Seja esse asteroide rochoso com  $\rho_m = 3,5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , com base de raio  $r = 10 \text{ m}$  entrando na atmosfera em três situações diferentes, com ângulos iniciais de  $45^\circ$  (0,79 rad),  $20^\circ$  (0,35 rad) e  $15^\circ$  (0,26 rad), em relação à superfície da Terra.

*De acordo com essas informações responda às seguintes questões:*

- 1. Com qual ângulo de entrada o asteroide chegaria mais rápido ao chão?(Sugestão: analisar o gráfico  $z \times t$ , observando que nesse caso é possível visualizar as três situações de entrada no mesmo quadro).*
- 2. Considerando que o meteoro chegue ao solo, nas três situações de entrada, qual a distância horizontal ele percorreria, aproximadamente?(Sugestão: observar o gráfico  $z \times x$ , sendo nesse caso necessário visualizar um gráfico de cada vez, alterando o eixo  $x$  para o caso 1, caso 2 e caso 3, para os ângulos de  $45^\circ$ ,  $20^\circ$  e  $15^\circ$ , respectivamente).*
- 3. Compare, para as três situações de entrada na atmosfera, a partir de que altura, aproximadamente, o meteoro começa a sofrer uma maior redução na sua velocidade. (Sugestão: observar o gráfico  $z \times v$ , sendo nesse caso necessário visualizar um gráfico de cada vez, alterando o eixo  $v$  para o caso 1, caso 2 e caso 3, para os ângulos de  $45^\circ$ ,  $20^\circ$  e  $15^\circ$ , respectivamente).*
- 4. Através do gráfico  $v \times t$  determine para qual o ângulo de entrada a velocidade começa a reduzir mais rapidamente.*
- 5. Através do gráfico  $z \times \theta$  responda em que situação o meteoro sofre maior desvio na sua trajetória, desde a entrada na atmosfera até a sua queda. (Observação: nesse caso será necessário visualizar um gráfico de cada vez, alterando o eixo  $\theta$  para o caso 1, caso 2 e caso 3, para os ângulos de  $45^\circ$ ,  $20^\circ$  e  $15^\circ$ , respectivamente).*
- 6. Determine a massa do meteoro, no momento de sua entrada na atmosfera, a partir dos dados fornecidos no enunciado, e considerando que o seu formato nesse momento possa ser aproximado por um cilindro de altura  $h = 2r$ .*
- 7. Usando o gráfico  $z \times m$  calcule e compare os percentuais de redução de massa, produzida pela ablação sobre o meteoro até este chegar ao chão, para  $\theta_0 = 45^\circ$  e  $\theta_0 = 15^\circ$ .*

### 3.4.2 Configuração do Modellus para Resolução do Problema: “Meteoro à vista!”

Após iniciar o Modellus, deve-se:

- i. na aba *Início*, menu *Preferências*, definir:
  - a. *Casas Decimais*: **2**;
- ii. na aba *Variável Independente*, definir:
  - a. *Variável Independente*: **t**;
  - b. *Passo ( $\Delta t$ )*: **0.01**;
  - c. *Mín*: **0**;
  - d. *Máx*: **30**, uma vez que será este o maior tempo gasto pelo meteoro, em função do seu ângulo de entrada na atmosfera, para atingir o solo;
- iii. na aba *Modelo*:
  - a. janela *Modelo Matemático*: inserir o *script* apresentado no Modelo 3.4.1 abaixo;
  - b. menu *Modelo* acionar o botão *Interpretar*.
- iv. na aba *Gráfico* e menu *Gráfico*, definir inicialmente:
  - a. *Eixo Horizontal*: **t – caso1**;
  - b. *Eixo Vertical*: **z – azul – caso1, z – vermelho – caso 2 e z – verde – caso 3**;
  - c. marcar as caixas: **Projeções, Valores e Valores nos eixos** e
  - d. *Espessura*: **1** ou **2**;
- v. na aba *Tabela*: **nessa sugestão de problema não será usada tabela, por uma questão de opção. Caso o professor deseje é possível utilizar a tabela**;

### 3.4.3 Roteiro de Aplicação para o Professor

Abaixo segue uma sugestão de roteiro, que o professor poderá usar, para aplicação do exemplo e seu possível tratamento no Modellus.

O professor poderá:

- i. Mostrar aos alunos o vídeo A explosão do meteoro na Rússia em 2013-02-15 (2013), publicado no *youtube*, que traz uma reportagem com informações e imagens do asteroide que explodiu sobre a cidade russa de Chelyabinsk, em fevereiro de 2013 e citado no artigo de Rodrigues (2013); e, daí, iniciar uma discussão sobre a importância de se conhecer mais sobre esses objetos, quais as possíveis influências culturais produzidas por esses eventos, etc.;
- ii. apresentar o exemplo e discutir com os alunos as equações que foram dadas, destacando que as equações de movimento foram obtidas a partir das Leis de Newton e que por isso são bem familiares; e, além disso, estão escritas em função das variáveis velocidade e ângulo;
- iii. explicar aos alunos o processo de ablação (ou abrasão – as duas formas são corretas), responsável pela redução de massa do projétil durante sua entrada na atmosfera terrestre; sua influência na força de atrito com o ar (força de arrasto), já que a ablação acaba alterando a área de secção transversal do projétil;
- iv. dividir a turma em pequenos grupos, conforme disponibilidade de computadores, e pedir para que escrevam todas as equações fornecidas no enunciado do problema no Modellus, conforme mostrado na janela Modelo 3.4.1;
- v. solicitar aos grupos que insiram os parâmetros e as condições iniciais do problema, fornecidos no enunciado, conforme a Figura 3.4.3 e a Figura 3.4.4, respectivamente; Observando que os ângulos devem ser inseridos em radianos;
- vi. pedir para executarem o modelo, apertando o botão play do Modellus;
- vii. solicitar aos alunos que respondam às questões levantadas no problema:

1. *Com qual ângulo de entrada o asteroide chegaria mais rápido ao chão?*

R. Para responder a esta questão os alunos deverão obter o Figura 3.4.1 da altitude  $z$  pelo tempo  $t$ , através da simulação feita no Modellus. Fazendo a leitura direta desse gráfico vê-se que, quando o meteoro penetra a atmosfera terrestre, fazendo o ângulo de  $15^\circ$ , ele acaba permanecendo mais tempo no ar, próximo de 30 segundos. Por outro lado, quando o ângulo é de  $45^\circ$  esse tempo é de aproximadamente 9,6 segundos.

**Logo, o ângulo para o qual o asteroide chegaria mais rápido ao solo é o de  $45^\circ$ .**

Deve-se observar que na simulação, não faz sentido físico a curva em  $z$  negativo.

2. *Considerando que o meteoro chegue ao solo, nas três situações de entrada, qual a distância horizontal ele percorreria, aproximadamente?*

R. Para responder a esta questão os alunos poderão observar os três gráficos da altitude  $z$  pela distância horizontal  $x$ . Ou seja, nesse caso deve-se visualizar um gráfico de cada vez, alterando o eixo  $x$  para o caso 1 ( $45^\circ$ ), caso 2 ( $20^\circ$ ) e caso 3 ( $15^\circ$ ). Assim, deverão obter os gráficos da Figura 3.4.2, Figura 3.4.3 e Figura 3.4.4, respectivamente.

**Dessa forma, tem-se:**

**para  $\theta_0 = 45^\circ$   $x \cong 100$  km;**

**para  $\theta_0 = 20^\circ$   $x \cong 290$  km;**

**para  $\theta_0 = 15^\circ$   $x \cong 420$  km;**

3. *Compare, para as três situações de entrada na atmosfera, a partir de que altura, aproximadamente, o meteoro começa a sofrer uma maior redução na sua velocidade.*

R. Para responder a esta questão, os alunos poderão observar os três gráficos da altitude  $z$  pela velocidade  $v$ , sendo nesse caso necessário visualizar um gráfico de cada vez no Modellus, alterando o eixo  $v$  para o caso 1 ( $45^\circ$ ), caso 2 ( $20^\circ$ ) e caso 3 ( $15^\circ$ ). Dessa forma, deverão obter a Figura 3.4.5, a Figura 3.4.6 e a Figura 3.4.7, respectivamente.

**Ao compará-los será possível perceber que, nos três casos, a velocidade começa a sofrer uma alteração significativa entre 30 e 40 quilômetros de altitude.**

4. *Através do gráfico  $v \times t$  determine para qual o ângulo de entrada a velocidade começa a se reduzir mais rapidamente.*

R. Para responder a esta questão, os alunos poderão observar, através de um único gráfico, o comportamento da velocidade  $v$  do asteroide ao longo do tempo  $t$ , para os três ângulos de entrada. Observe que isso é possível porque o tempo é a variável independente do problema.

Assim, deverão obter a Figura 3.4.8.

**Através desse gráfico percebe-se facilmente que a velocidade se reduz mais rapidamente para o meteoro que tem sua entrada a um ângulo de  $\theta_0 = 45^\circ$ .**

5. *Através do gráfico  $z \times \theta$  responda em que situação o meteoro sofre maior desvio na sua trajetória, desde a entrada na atmosfera até a sua queda.*

R. Para responder a esta questão, os alunos poderão observar os três gráficos da altitude  $z$  pela inclinação do movimento em relação a horizontal  $\theta$ , sendo nesse caso necessário visualizar um gráfico de cada vez, alterando o eixo  $\theta$  para o caso 1 ( $45^\circ$ ), caso 2 ( $20^\circ$ ) e caso 3 ( $15^\circ$ ). Dessa forma, deverão obter, respectivamente, os gráficos da Figura 3.4.9, Figura 3.4.10 e Figura 3.4.11.

**Ao comparar os três gráficos é fácil observar que o maior desvio  $\Delta\theta$  é experimentado pelo meteoro que possui o ângulo de entrada  $\theta_0 = 15^\circ$ .**

6. *Determine a massa do meteoro, no momento de sua entrada na atmosfera, a partir dos dados fornecidos no enunciado, e considerando que o seu formato nesse momento possa ser aproximado por um cilindro de altura  $h = 2r$ .*

R. **A densidade do meteoro é dada por**

$$\rho_m = \frac{m}{V_{cilindro}} \Rightarrow \rho_m = \frac{m}{A \cdot h} \Rightarrow \rho_m = \frac{m}{\pi r^2 2r} \Rightarrow \rho_m = \frac{m}{2\pi r^3}$$

**Logo,**

$$m = \rho_m 2\pi r^3$$



Com os dados fornecidos no enunciado do problema tem-se que a massa inicial do meteoro vale

$$m_0 = 3,5 \times 10^3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot (10)^3$$

$$\therefore m_0 \cong 2,2 \times 10^7 \text{ kg}$$

7. Usando o gráfico  $z \times m$  calcule e compare os percentuais de redução de massa, produzida pela ablação sobre o meteoro até este chegar ao chão, para  $\theta_0 = 45^\circ$  e  $\theta_0 = 15^\circ$ .

R. Para resolver esta questão os alunos deverão obter os gráficos da altitude  $z$  pela massa  $m$ , para os ângulos  $\theta_0 = 45^\circ$  e  $\theta_0 = 15^\circ$ , através do Modellus.

Estes podem ser observados abaixo nos gráficos da Figura 3.4.12 e Figura 3.4.13.

A massa inicial do meteoro, ou seja, quando entrou na atmosfera, foi calculada na questão anterior.

Através dos gráficos encontrados neste problema tem-se que a massa final do meteoro vale:

a) para  $\theta_0 = 45^\circ$ :  $m_f \cong 1,7 \times 10^7 \text{ kg}$

Logo, a redução de massa produzida pela ablação, nesse caso, foi de

$$\Delta m_{\%} = \frac{m_0 - m_f}{m_0} \times 100\% = \frac{(2,2 - 1,7) \times 10^7}{2,2 \times 10^7} \times 100\% = \frac{0,5}{2,2} \times 100\%$$

$$\therefore \Delta m_{\%} \cong 23\%$$

b) para  $\theta_0 = 15^\circ$ :  $m_f \cong 1,2 \times 10^7 \text{ kg}$

Logo, a redução de massa produzida pela ablação, nesse caso, foi de

$$\Delta m_{\%} = \frac{m_0 - m_f}{m_0} \times 100\% = \frac{(2,2 - 1,2) \times 10^7}{2,2 \times 10^7} \times 100\% = \frac{1,0}{2,2} \times 100\%$$

$$\therefore \Delta m_{\%} \cong 45\%$$

### 3.4.4 Janelas do Modells

**Modelo Matemático**

$$a = -\frac{1}{2} \times \frac{\rho}{m} \times C_d \times A \times v^2 + g \times \sin(\theta)$$

$$w = -\frac{1}{2} \times \frac{\rho}{m} \times C_d \times A \times v - v \times \frac{\cos(\theta)}{(R+z)} + g \times \frac{\cos(\theta)}{v}$$

$$g = g_0 \times \left(1 - \frac{z}{R}\right)^2$$

$$\rho = \rho_0 \times e^{\left(\frac{-z}{H}\right)}$$

$$v = \text{last}(v) + a \times \Delta t$$

$$\theta = \text{last}(\theta) + w \times \Delta t$$

$$x = \text{last}(x) + v \times \cos(\theta) \times \Delta t$$

$$z = \text{last}(z) - v \times \sin(\theta) \times \Delta t$$

$$m = \text{last}(m) - C_h \times \rho \times A \times \frac{v^3}{(2 \times Q)} \times \Delta t$$

$$A = \pi \times \left(\frac{m}{(2 \times \pi \times \rho m)}\right)^{\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Modelo 3.4.1. Script do Problema “Meteoro à vista!”

Parâmetros      Condições Iniciais

Caso1    Caso2    Caso3

Iguais	$m =$	2.199100E	2.199100E	2.199100E
Iguais	$v =$	1.500000E	1.500000E	1.500000E
Iguais	$\theta =$	0.785398	0.349065	0.261799
Iguais	$z =$	1.000000E	1.000000E	1.000000E
Iguais	$x =$	0.000000	0.000000	0.000000

Figura 3.4.3. Parâmetros do Problema “Meteoro à vista!”

Parâmetros		Condições Iniciais		
		<input type="checkbox"/> Caso1	<input type="checkbox"/> Caso2	<input type="checkbox"/> Caso3
<input type="button" value="Iguais"/>	$Cd =$	1.700000	1.700000	1.700000
<input type="button" value="Iguais"/>	$Cl =$	1.000000E	1.000000E	1.000000E
<input type="button" value="Iguais"/>	$R =$	6.371000E	6.371000E	6.371000E
<input type="button" value="Iguais"/>	$g0 =$	9.810000	9.810000	9.810000
<input type="button" value="Iguais"/>	$p0 =$	1.220000	1.220000	1.220000
<input type="button" value="Iguais"/>	$H =$	8.100000E	8.100000E	8.100000E
<input type="button" value="Iguais"/>	$Ch =$	0.100000	0.100000	0.100000
<input type="button" value="Iguais"/>	$Q =$	8.000000E	8.000000E	8.000000E
<input type="button" value="Iguais"/>	$pm =$	3.500000E	3.500000E	3.500000E

Figura 3.4.4. Condições Iniciais do Problema “Meteoro à vista!”

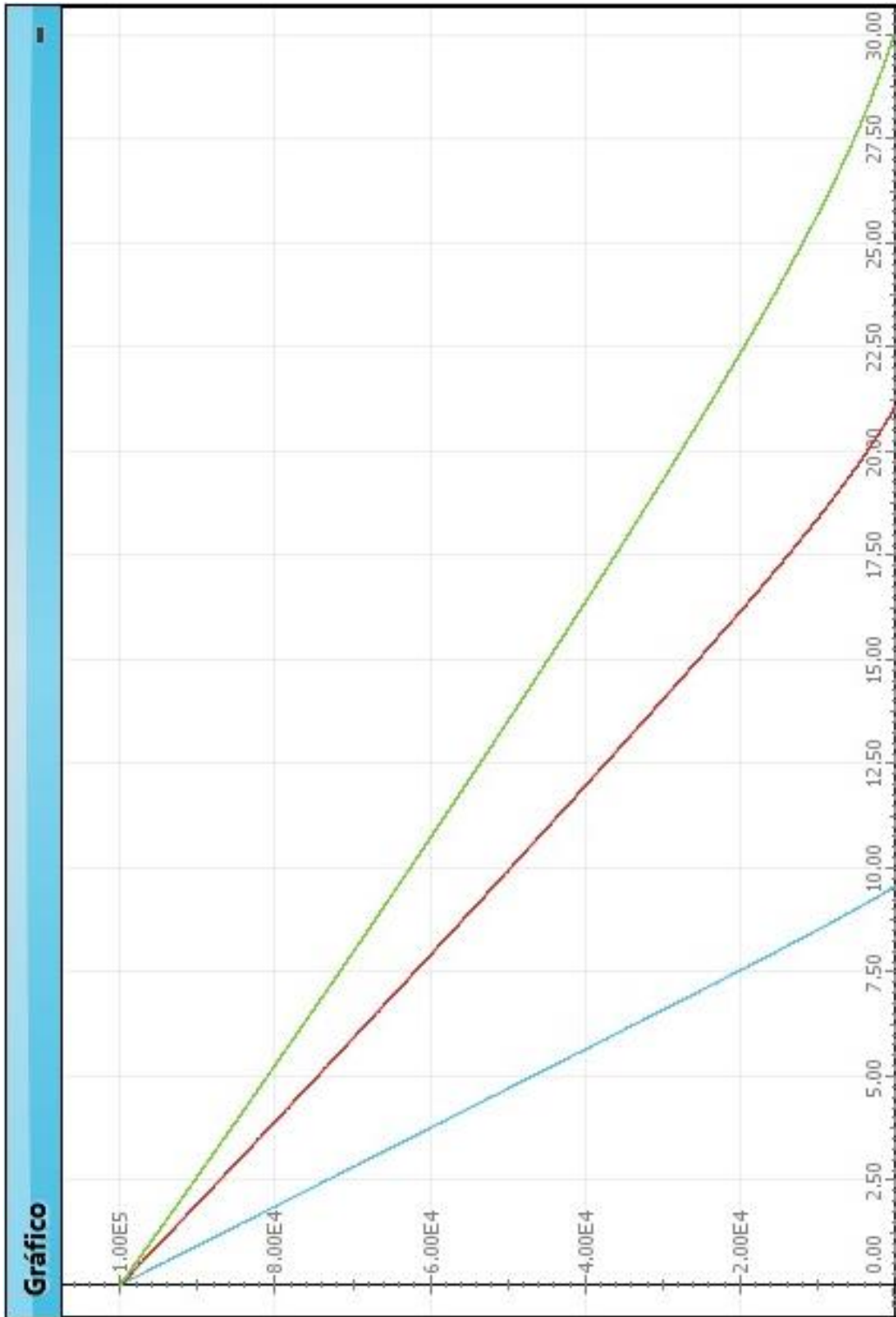


Figura 3.4.1. Mostra a altitude  $z$  em função do tempo  $t$ , para os três ângulos diferentes de entrada do meteoro na atmosfera terrestre. Sendo a curva azul para  $\theta_0 = 45^\circ$ , a vermelha para  $\theta_0 = 20^\circ$  e a verde para  $\theta_0 = 15^\circ$ .

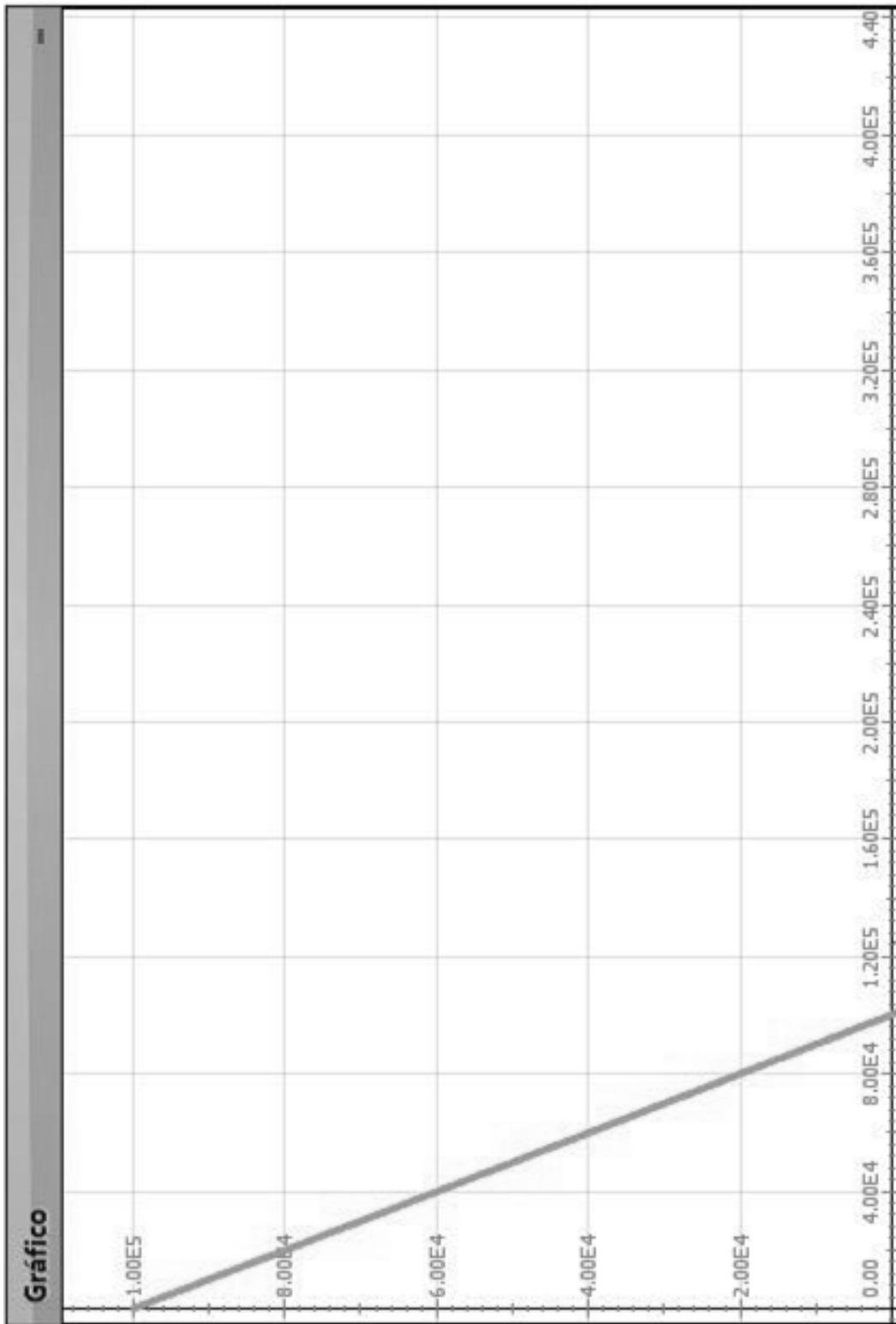


Figura 3.4.2. Mostra a altitude  $z$  em função da distância horizontal  $x$ , para  $\theta_0 = 45^\circ$ .

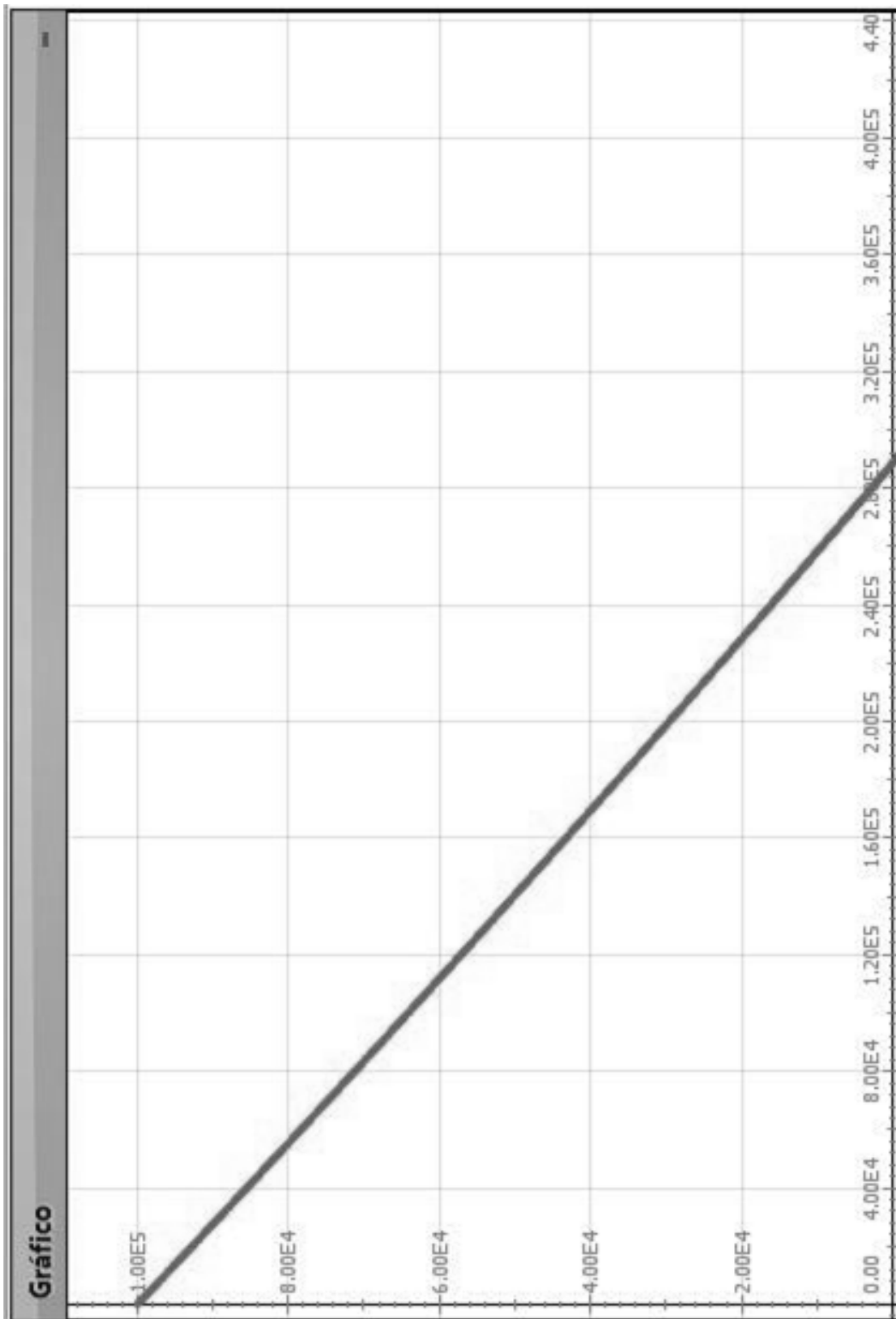


Figura 3.4.3. Mostra a altitude  $z$  em função da distância horizontal  $x$ , para  $\theta_0 = 20^\circ$ .

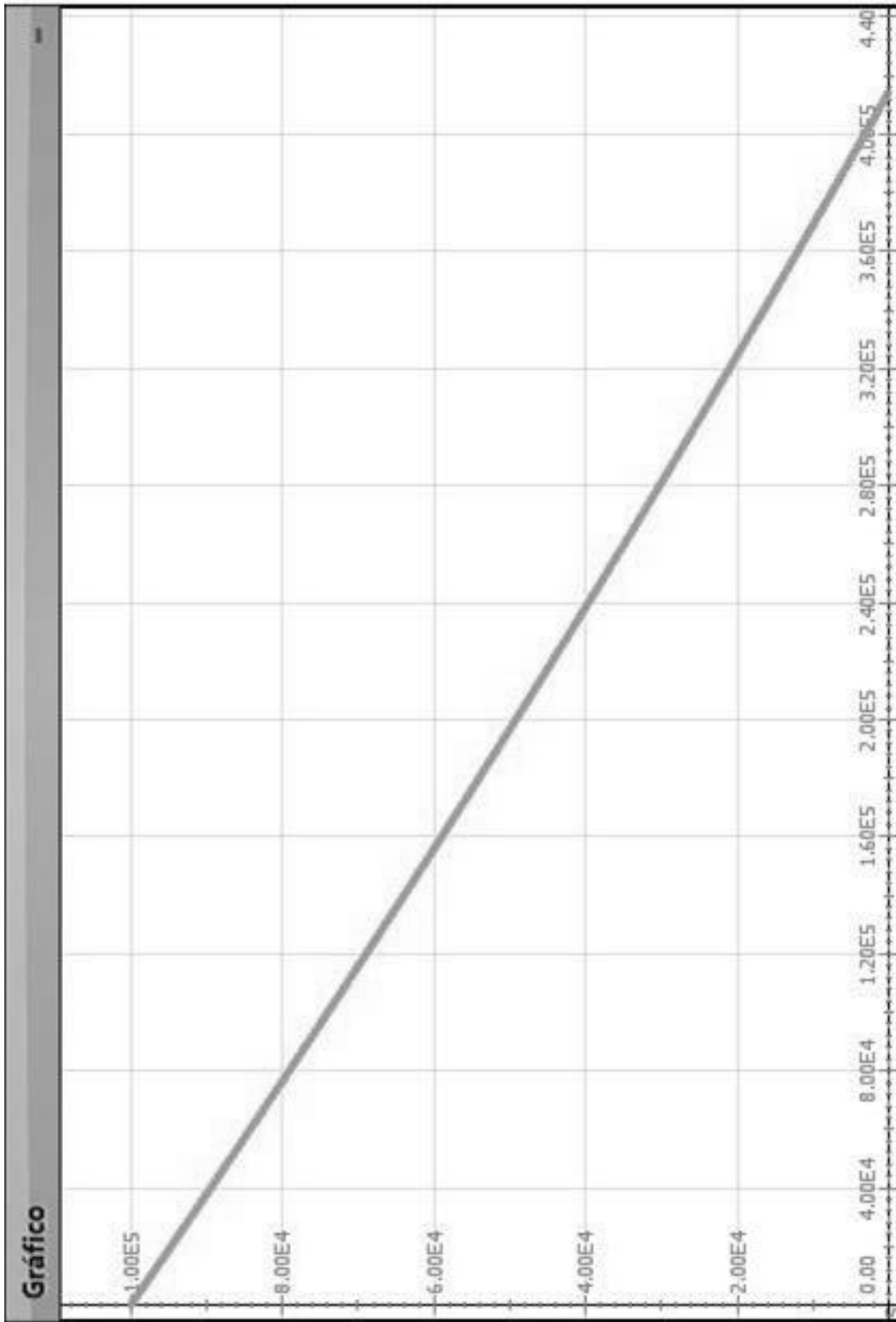


Figura 3.4.4. Mostra a altitude  $z$  em função da distância horizontal  $x$ , para  $\theta_0 = 15^\circ$ .

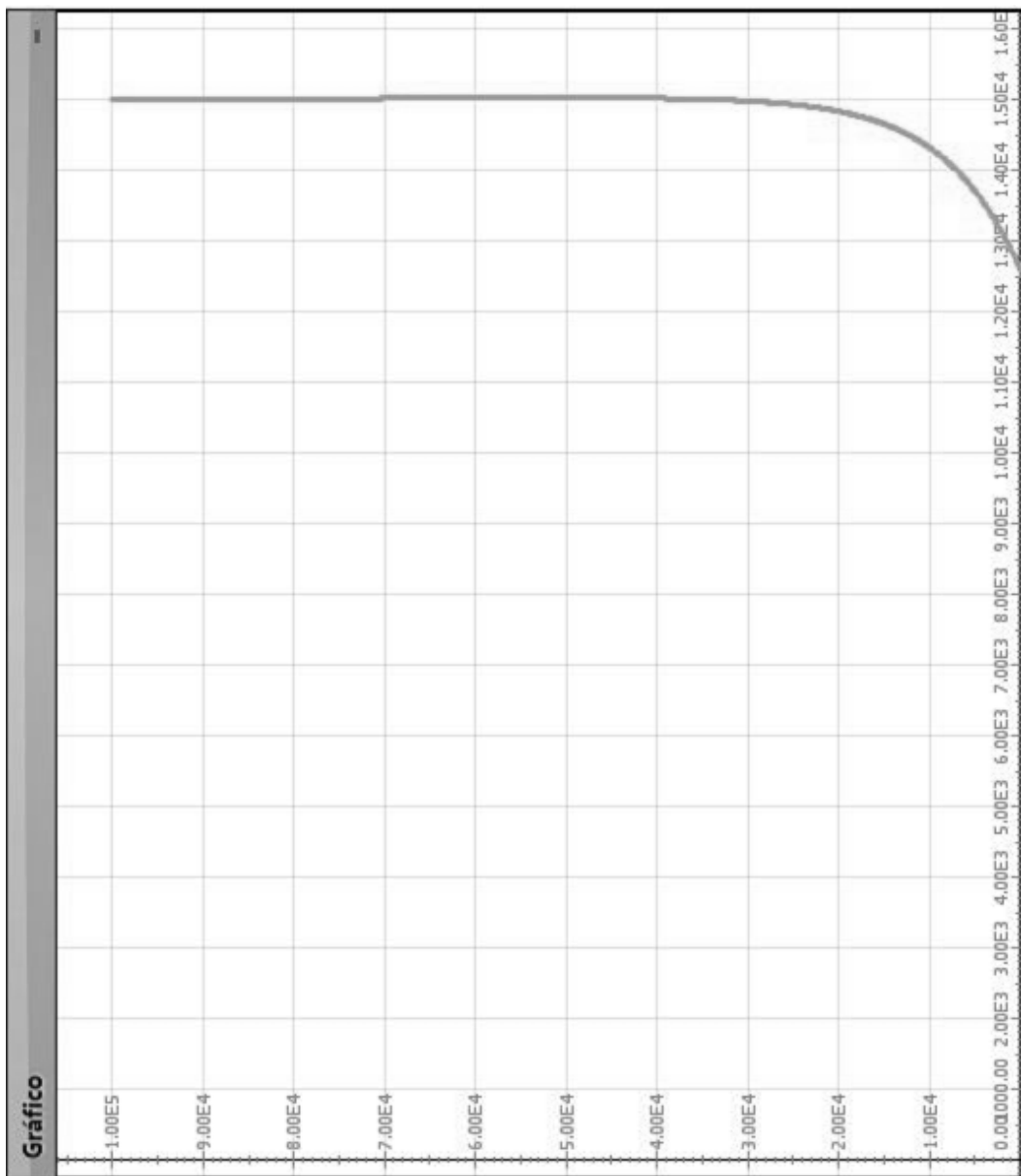


Figura 3.4.5. Mostra a altitude  $z$  em função da velocidade  $v$ , para  $\theta_0 = 45^\circ$ .



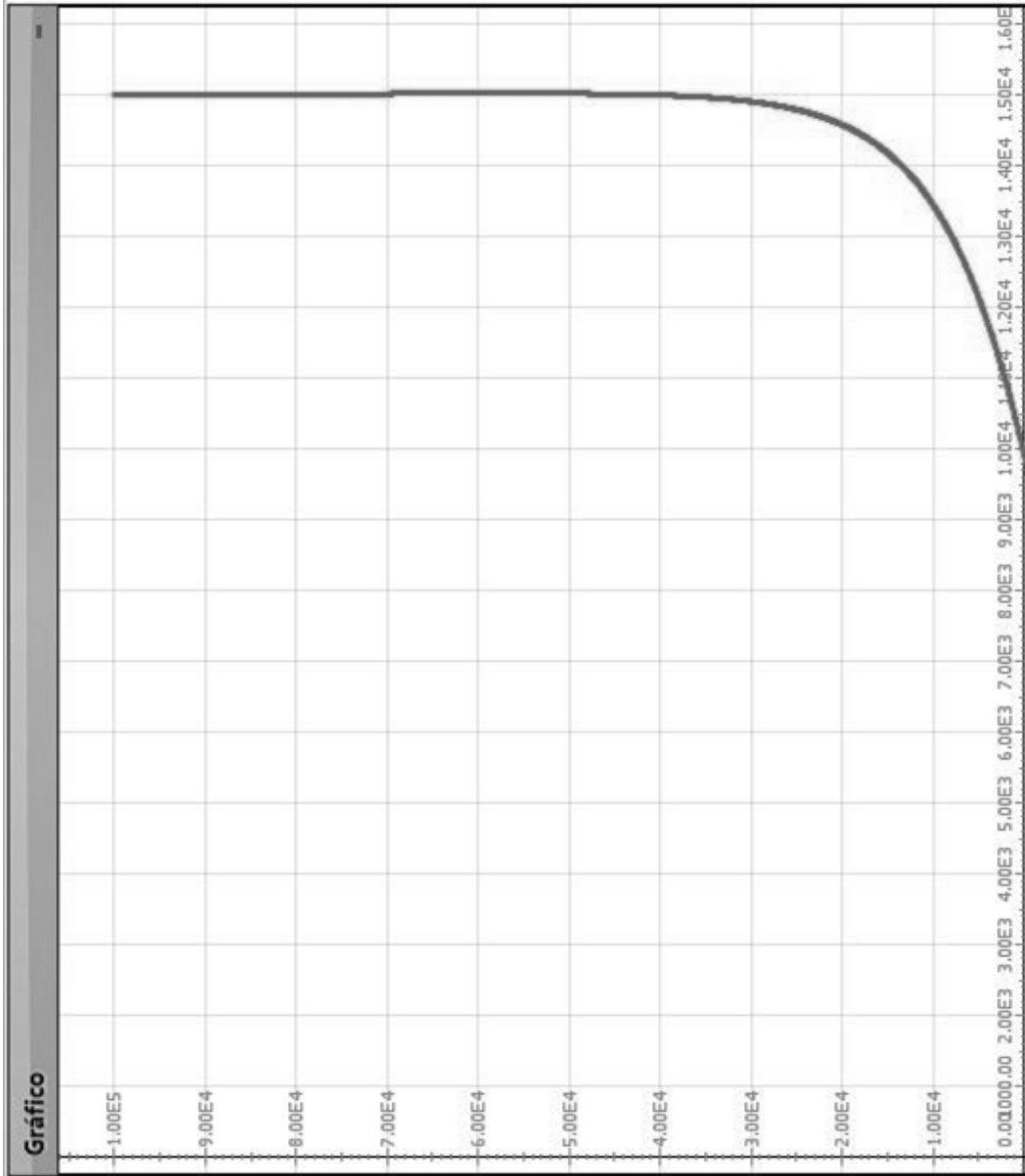


Figura 3.4.6. Mostra a altitude  $z$  em função da velocidade  $v$ , para  $\theta_0 = 20^\circ$ .

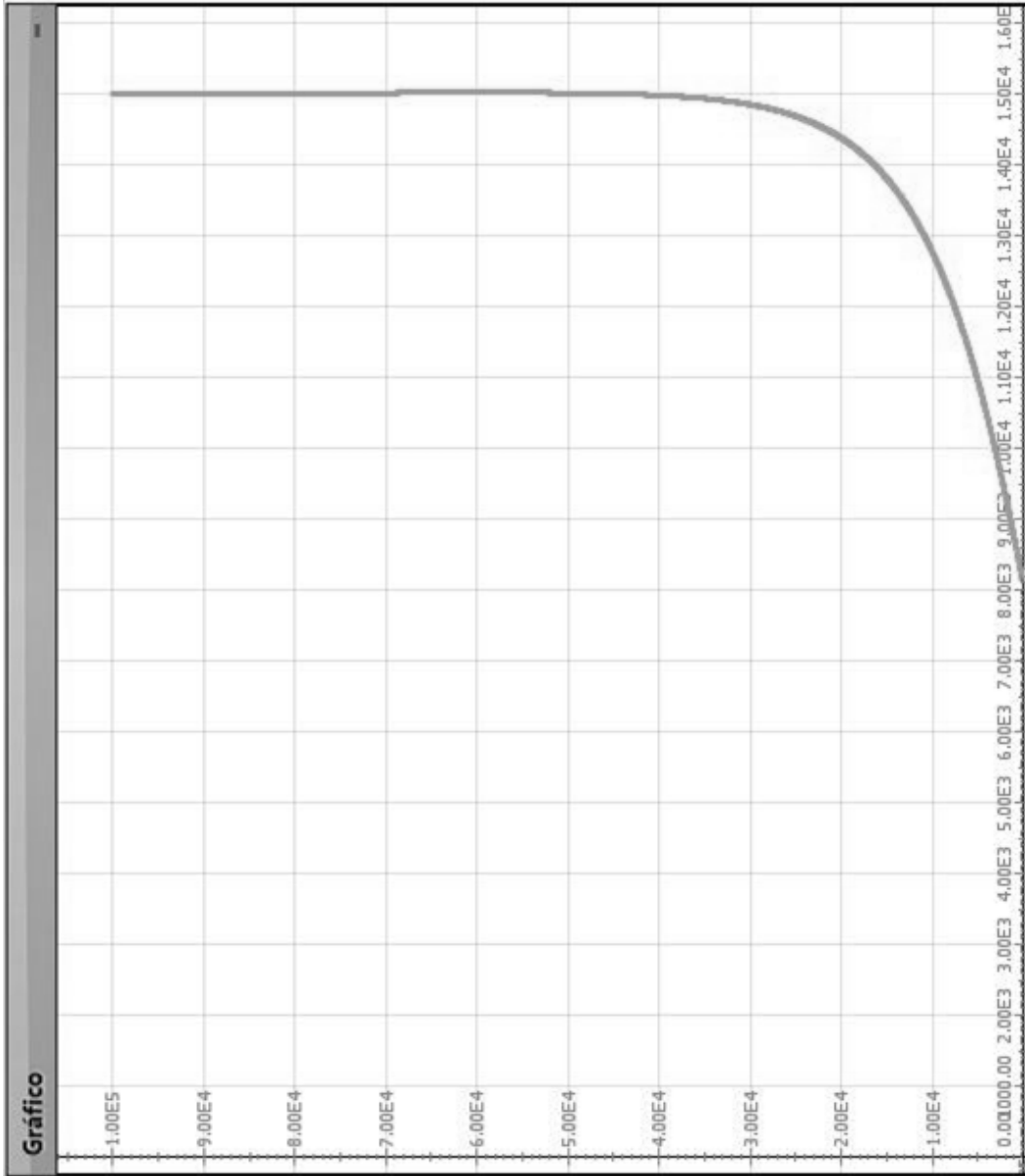


Figura 3.4.7. Mostra a altitude  $z$  em função da velocidade  $v$ , para  $\theta_0 = 15^\circ$ .

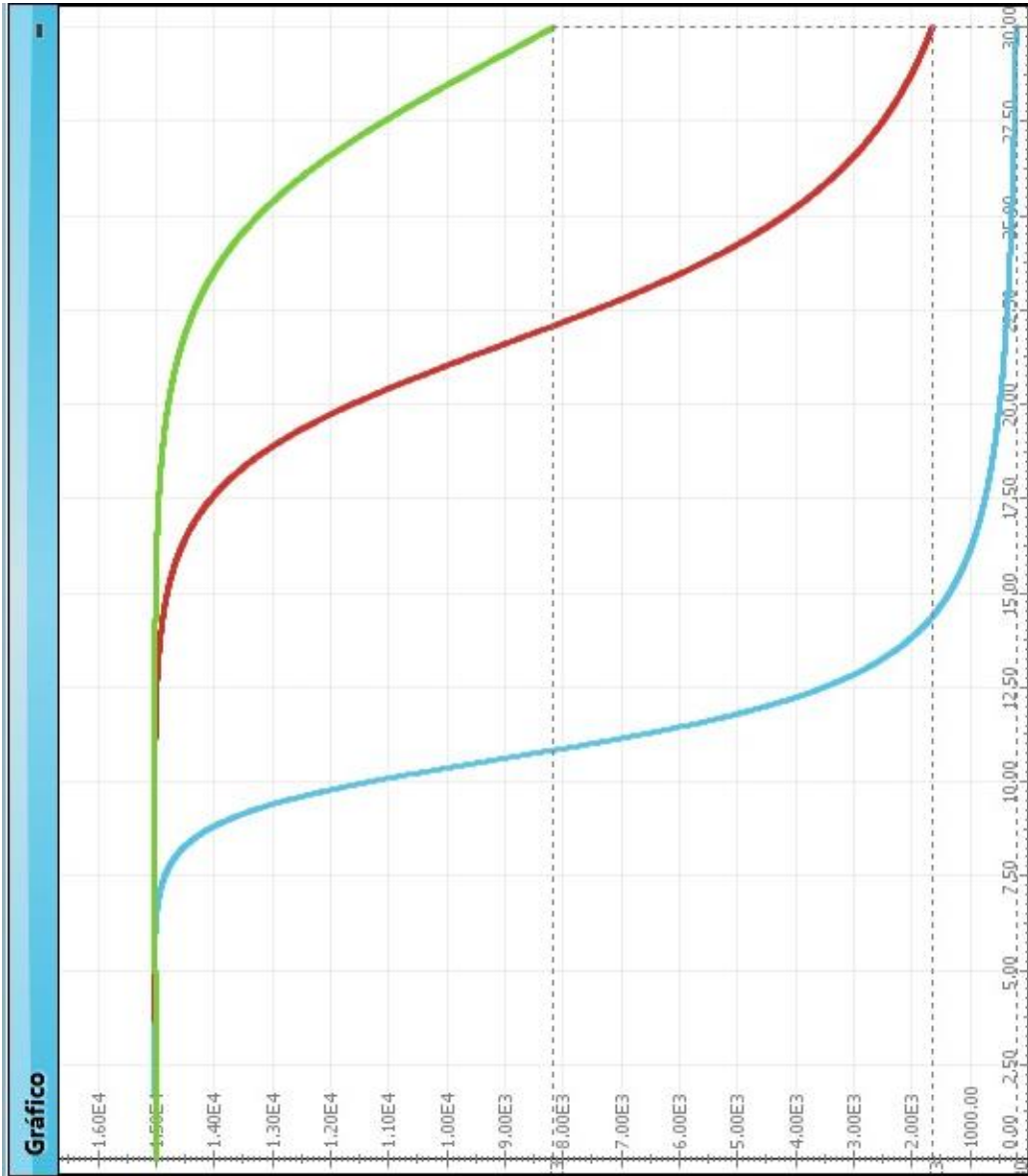


Figura 3.4.8. Mostra a velocidade  $v$  em função do tempo  $t$ , para os três ângulos de entrada.

Sendo a curva azul para  $\theta_0 = 45^\circ$ , a vermelha para  $\theta_0 = 20^\circ$  e a verde para  $\theta_0 = 15^\circ$ .

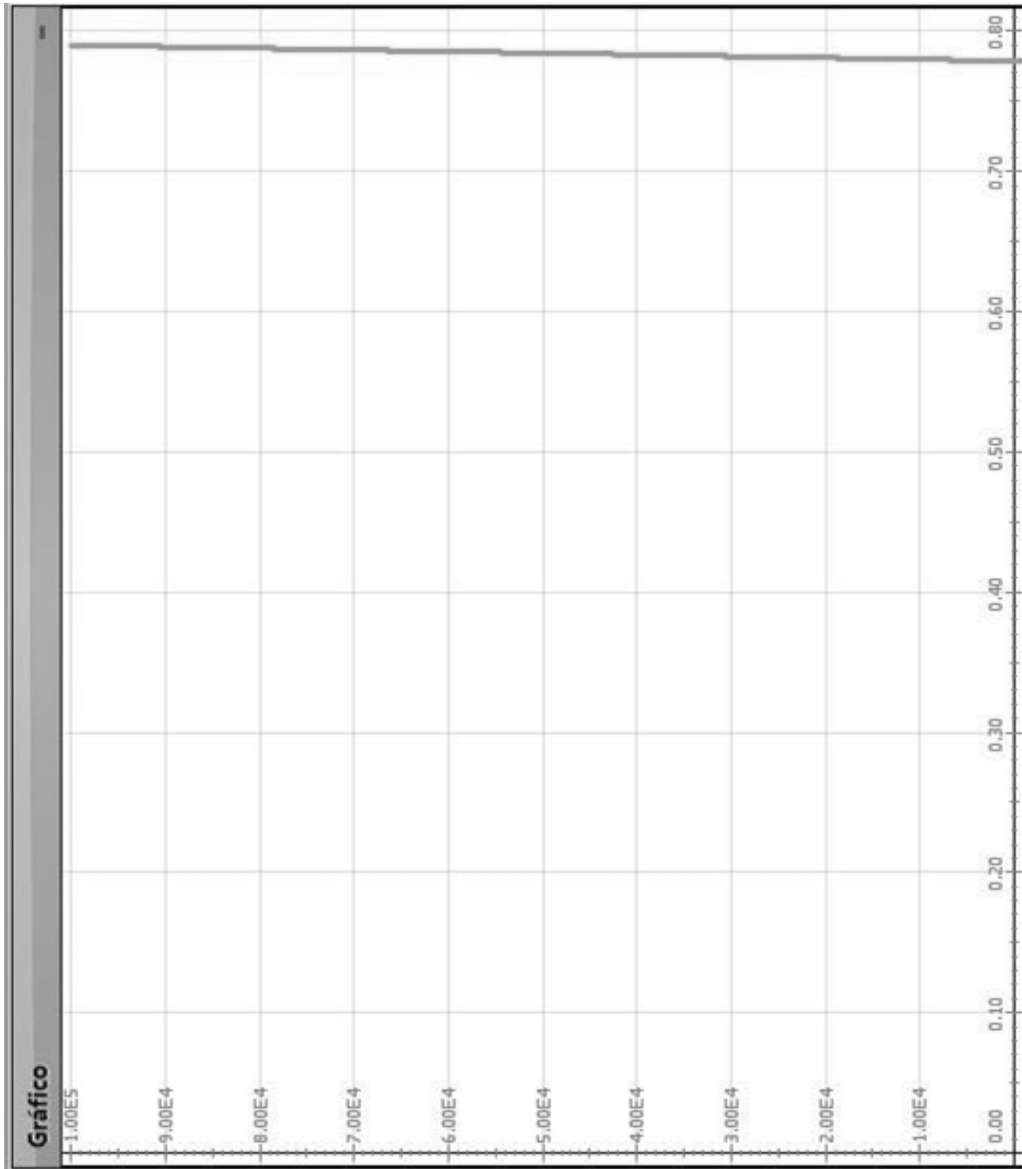


Figura 3.4.9. Mostra a altitude  $z$  em função da inclinação  $\theta$  do movimento do meteoro em relação à horizontal, para  $\theta_0 = 45^\circ$ .

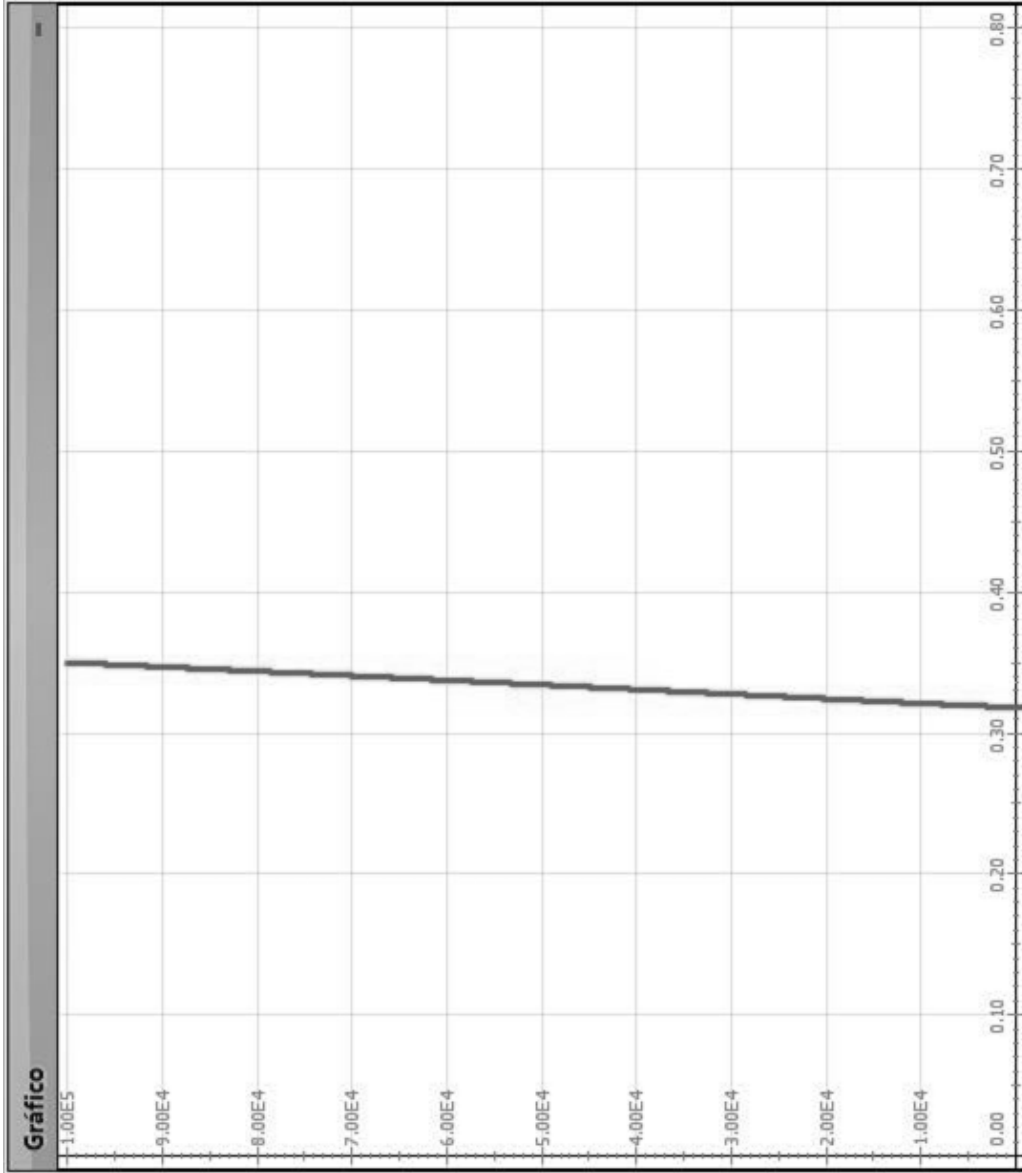


Figura 3.4.10. Mostra a altitude  $z$  em função da inclinação  $\theta$  do movimento do meteoro em relação à horizontal, para  $\theta_0 = 20^\circ$ .

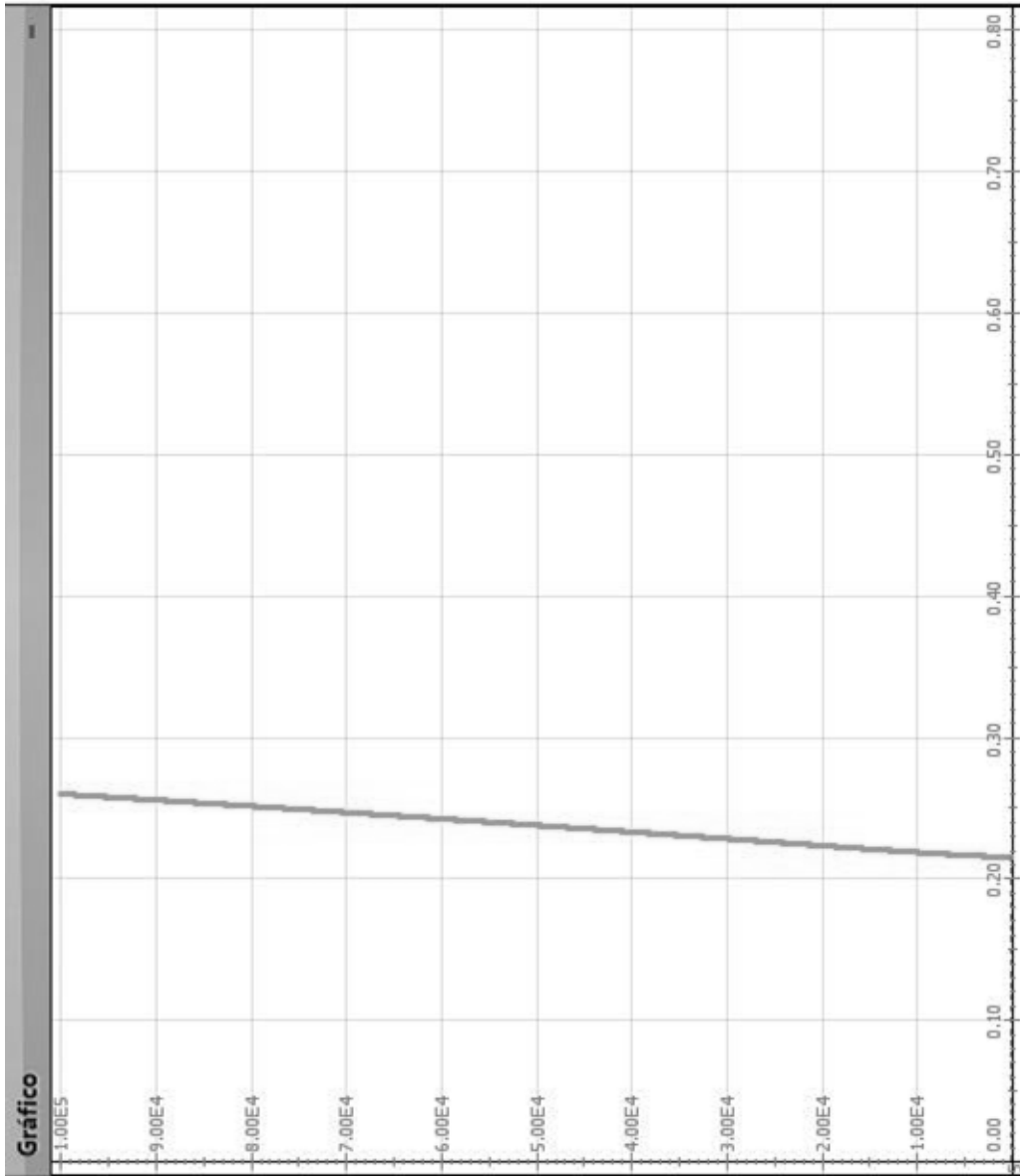


Figura 3.4.11. Mostra a altitude  $z$  em função da inclinação  $\theta$  do movimento do meteoro em relação à horizontal, para  $\theta_0 = 15^\circ$ .

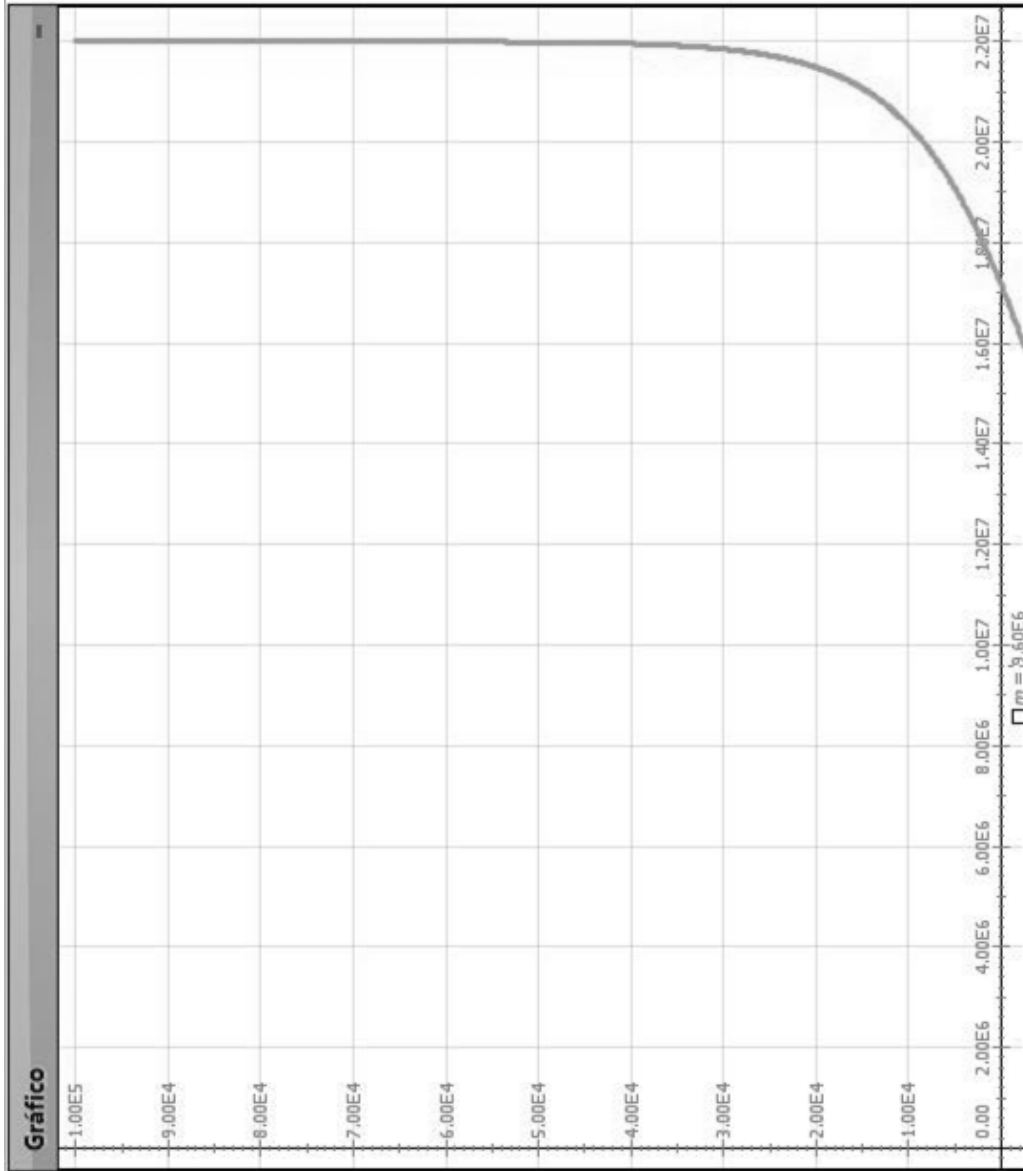


Figura 3.4.12. Mostra a altitude  $z$  em função da massa  $m$  variável do meteoro, para  $\theta_0 = 45^\circ$ .

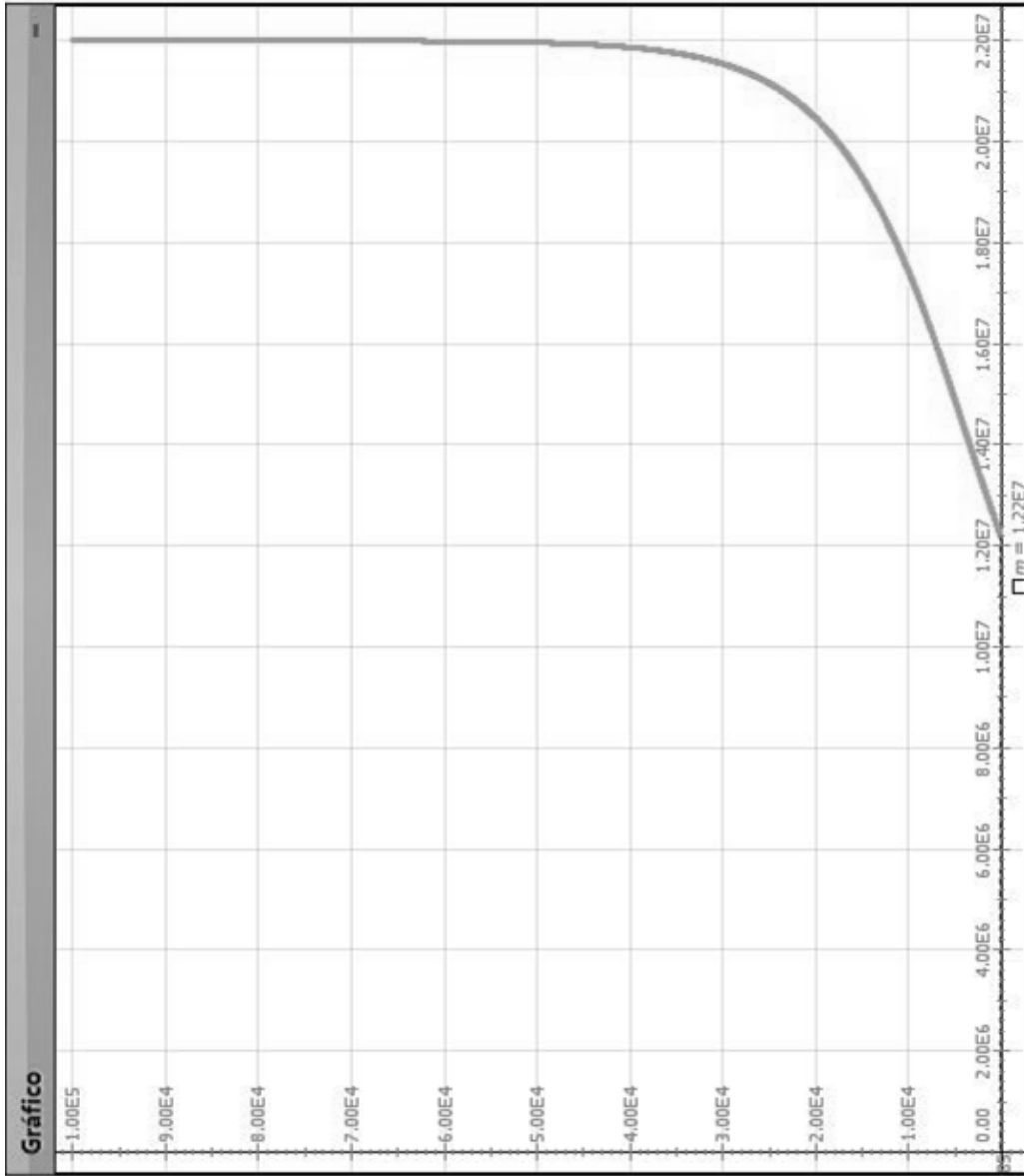


Figura 3.4.13. Mostra a altitude  $z$  em função da massa  $m$  variável do meteoro, para  $\theta_0 = 15^\circ$ .



### 3.5 Oscilador Cúbico

Movimentos oscilatórios descrevem diversos eventos que rodeiam o cotidiano das pessoas. Tais movimentos também tem uma importância significativa em diversos fenômenos da Física. Em especial o movimento harmônico simples é bastante discutido, em diversos níveis de aprofundamento nos cursos de Física.

Por outro lado, existem alguns movimentos oscilatórios, importantes fisicamente, mas que são pouquíssimo estudados. Um exemplo desse caso é o oscilador cúbico, que possui um movimento dito anarmônico e de grande interesse para a Física, como citado por Santiago; Rodrigues (2005), por descrever o movimento vibracional de átomos constituintes de uma rede cristalina, ou o modo de respiração do movimento coletivo nuclear, além de ser útil para o estudo de caos determinístico.

Um oscilador cúbico bastante interessante e que pode ser construído materialmente em um laboratório, por exemplo, bem como simulado facilmente com o *Modellus*, foi apresentado por Cromer (1992). Ele pode ser construído prendendo um planador sobre um trilho de ar à uma mola como mostrado na Figura 3.5.1.

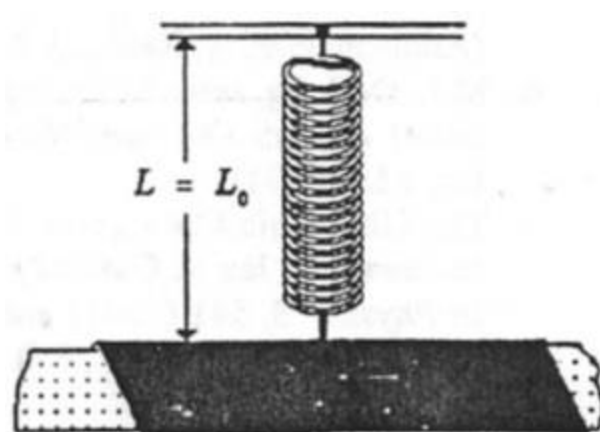


Figura 3.5.1. Oscilador cúbico montado a partir de um planador sobre um trilho de ar e preso a uma mola de comprimento inicial  $L = L_0$ . Retirado do artigo de Cromer (1992).

Sem querer discutir as discrepâncias entre resultados experimentais e o modelo de Cromer (1992), como o fez Santiago; Rodrigues (2005), aqui será apenas apresentado a possibilidade do aluno perceber algumas características desse movimento.

Este problema foi escolhido tendo em vista sua importância Física, o fato de ser pouco discutido em livros de nível superior e, principalmente, por ser uma chance de o professor trabalhar um problema diferente de movimento oscilatório com seus alunos de ensino médio. Como base desse problema, será usada uma tradução livre do artigo de

Cromer (1992) mostrando o desenvolvimento necessário, para que o professor compreenda o que o aluno deverá realizar no Modellus.

Para um oscilador anarmônico, a força de restauração é dada por

$$F = -hx^3$$

onde a constante  $h$  tem dimensões de

$$\text{força/comprimento}^3 = \text{massa/comprimento}^2 \text{ tempo}^2.$$

Assim  $\sqrt{m/h}$  tem dimensão de comprimento x tempo. Dessa forma, a única combinação de quantidades deste problema que tem a dimensão de tempo é  $\sqrt{m/h}/A$ , onde  $A$  é a amplitude do movimento. O período do oscilador é, portanto,

$$T = c \sqrt{m/h}/A$$

onde  $c$  é uma constante adimensional ainda a ser determinada.

Este resultado é muito estranho, uma vez que implica que quanto menor a amplitude - quanto menor a distância, ao longo do trilho, que o planador deslizar – mais tempo ele leva para completar uma oscilação. Com efeito, como a distância percorrida vai para zero, o tempo que leva vai para infinito. Esse resultado será explorado no problema proposto abaixo.

A razão para este comportamento peculiar é que a força é extremamente fraca, nas proximidades da posição de equilíbrio, mas aumenta rapidamente para longe do equilíbrio. Com uma pequena amplitude, ao longo do eixo horizontal, conforme mostrado abaixo, na Figura 3.5.2, o planador tem uma pequena força de restauração e por isso leva um longo tempo para ir, por exemplo, a partir do repouso, de  $x = 1$  cm para  $x = 0$ . Mas, se  $x = 6$  centímetros a força restauradora é  $6^3 = 216$  vezes maior, e o planador tem grande aceleração inicial. Por isso, vai relativamente rápido, uma vez que se aproxima do equilíbrio e passa rapidamente por esta região de força fraca. Simplificando, com o aumento da amplitude a força aumenta mais rapidamente do que a distância percorrida, e assim diminui o período.

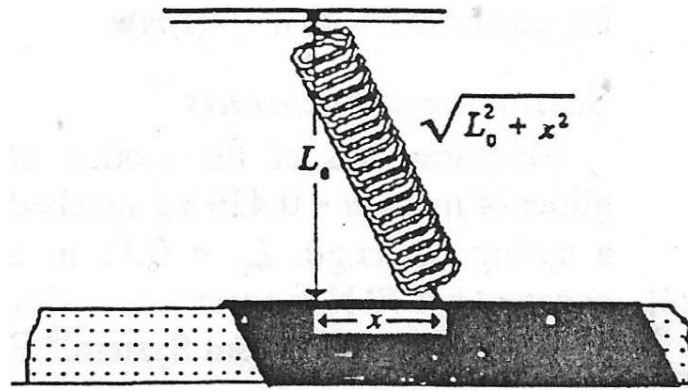


Figura 3.5.2. Oscilador cúbico, deslocado em relação ao ponto de equilíbrio de uma distância  $x$ .

Esse planador (tubo deslizante) está para um oscilador cúbico à mesma aproximação que um pêndulo está para um oscilador harmônico. Na prática dispositivos como esse acabam sendo amortecidos, por causa dos atritos. Se o professor quiser trazer essa discussão para a sala poderá utilizar o artigo Santiago; Rodrigues (2005) para se basear.

### 3.5.1 Problema Contextualizado: “Laboratório Virtual”

Um oscilador cúbico pode ser construído fixando uma mola fraca verticalmente a um tubo (planador) que desliza sobre um trilho de ar, como mostrado na Figura 3.5.1.

Para um oscilador anarmônico como esse, a força de restauração é dada por

$$F = -hx^3.$$

A distância  $L$  entre o suporte superior da mola e o eixo do trilho tem de ser exatamente o comprimento não esticado  $L_0$  da mola. Em seguida, quando o planador é deslocado a uma distância  $x$  da sua posição de equilíbrio, conforme Figura 3.5.2, o comprimento da mola aumenta para  $\sqrt{L_0^2 + x^2}$ , de modo que a força  $F$ , exercida pela mola passa a ter uma magnitude dada por

$$F = k(\sqrt{L_0^2 + x^2} - L_0) = kL_0(\sqrt{1 + (x/L_0)^2} - 1)$$

Sendo que, para  $(x/L_0)^2 \ll 1$  a raiz quadrada é dada aproximadamente por

$$\sqrt{1 + (x/L_0)^2} = 1 + \frac{1}{2}(x/L_0)^2$$

e para essa aproximação a intensidade da força vale

$$F = \frac{kx^2}{2L_0}$$

A componente da força elástica paralela ao trilho é

$$F_x = -F \cos \theta$$

onde

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{L_0^2 + x^2}} \approx \frac{x}{L_0}$$

Combinando as três últimas equações obtém-se

$$F_x = -\left(\frac{kx^2}{2L_0}\right)\left(\frac{x}{L_0}\right) \Rightarrow F_x = -\left(\frac{k}{2L_0^2}\right)x^3$$

Logo, comparando com a força restauradora dada, tem-se que

$$h = \frac{k}{2L_0^2}$$

Dessa forma, seja o exemplo a seguir uma sugestão para se trabalhar com os alunos.

**Exemplo:**

Um oscilador cúbico, construído em laboratório fixando uma mola fraca verticalmente a um tubo (planador) que desliza sobre um trilho de ar, conforme a Figura 3.5.3, sofre uma deslocamento inicial horizontal  $x$ , conforme a Figura 3.5.4.

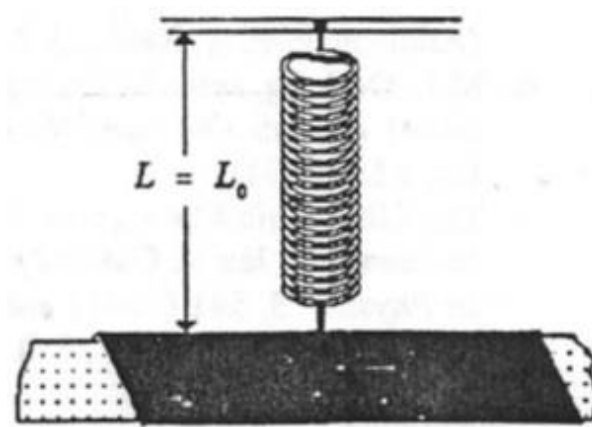


Figura 3.5.3. Oscilador cúbico em seu ponto de equilíbrio.

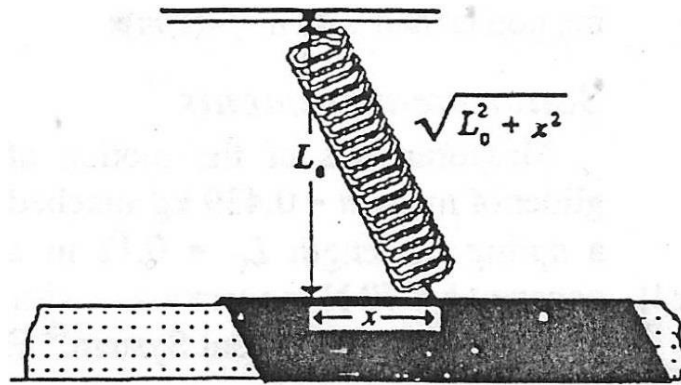


Figura 3.5.4. Oscilador cúbico afastado de  $x$  em relação ao seu ponto de equilíbrio.

Esse tipo de oscilador recebe o nome de cúbico porque a força de restauração que age sobre o planador é dada por

$$F = -hx^3$$

sendo a constante  $h$ , por sua vez, dada por

$$h = \frac{k}{2L_0^2}$$

Sendo  $k = 70 \text{ N/m}$ ,  $L_0 = 0,12 \text{ m}$  encontra-se  $h = 2.430 \text{ N/m}^3$ .

Considere a massa do planador igual a  $0,439 \text{ kg}$  e a aceleração experimentada por ele

$$a = -\left(\frac{h}{m}\right) \cdot x^3,$$

a velocidade calculada por

$$v = v_0 + a\Delta t$$

e a posição  $x$  por

$$x = x_0 + v\Delta t.$$

Escreva no Modellus essas equações de movimento para o oscilador cúbico e responda:

1. Qual o período de oscilação quando a amplitude vale  $6 \text{ cm}$  ( $0,06 \text{ m}$ )?
2. Qual o período de oscilação quando a amplitude vale  $3 \text{ cm}$  ( $0,03 \text{ m}$ )?
3. O que se observa em relação ao período à medida que diminui a amplitude de oscilação?
4. Discuta as possíveis razões para que o período tenha esse comportamento em função da amplitude.

### 3.5.2 Configuração do Modellus para Resolução do Problema:

Após iniciar o Modellus, deve-se:

- i. na aba *Início*, menu *Preferências*, definir:
  - a. *Casas Decimais*: **3**;
- ii. na aba *Variável Independente*, definir:
  - a. *Variável Independente*: **t**;
  - b. *Passo ( $\Delta t$ )*: **0.1**;
  - c. *Mín*: **0**;
  - d. *Máx*: **50**;
- iii. na aba *Modelo*:
  - a. janela *Modelo Matemático*: inserir o *script* apresentado no Modelo 3.5.1 abaixo;
  - b. menu *Modelo* acionar o botão *Interpretar*.
- iv. na aba *Gráfico* e menu *Gráfico*, definir inicialmente:
  - a. *Eixo Horizontal*: **t – caso1**;
  - b. *Eixo Vertical*: **x – laranja – caso1**, **x – verde – caso 2** e **x – ciano – caso 3**;
  - c. marcar as caixas: **Projeções**, **Valores** e **Valores nos eixos** e
  - d. *Espessura*: **1**;
- v. na aba *Tabela*:
  - a. menu *Opções*, definir *Tabelar cada 1 passos*;
  - b. menu *Tabela*, definir a *primeira coluna* como **t**, a *segunda coluna* **x – caso 1**, a *terceira coluna* **x – caso 2**;

### 3.5.3 Roteiro de Aplicação para o Professor

Abaixo segue uma sugestão de roteiro, que o professor poderá usar, para aplicação do exemplo e seu possível tratamento no Modellus.

O professor poderá:

- i. Discutir exemplos de movimentos oscilatórios presentes no cotidiano dos alunos;
- ii. Apresentar e discutir o movimento harmônico simples, destacando a relação entre período e amplitude desse tipo de oscilação;
- iii. Apresentar o problema do oscilador cúbico, destacando a sua importância Física;
- iv. dividir a turma em pequenos grupos, conforme disponibilidade de computadores, e pedir para que escrevam todas as equações fornecidas no enunciado do problema no Modellus, conforme mostrado na janela Modelo 3.5.1;
- v. Ao analisar o Figura 3.5.7 e a Tabela 3.5.2 é possível verificar que o período de oscilação do movimento anarmônico em questão foi de enunciado do problema no Modellus, conforme mostrado na janela Modelo 3.5.1;
- vi. solicitar aos grupos que insiram os parâmetros e as condições iniciais do problema, fornecidos no enunciado, conforme a Figura 3.5.5 e a Figura 3.5.6, respectivamente;
- vii. pedir para executarem o modelo, apertando o botão play do Modellus;
- viii. solicitar aos alunos que respondam às questões levantadas no problema:
  1. *Qual o período de oscilação quando a amplitude vale 6 cm (0,06 m)*

R. Ao analisar a Figura 3.5.7 e a Tabela 3.5.1 é possível verificar que o período de oscilação do movimento anarmônico em questão foi de aproximadamente 1,6 s. O que é condizente com o encontrado por Cromer (1992).
  2. *Qual o período de oscilação quando a amplitude vale 3 cm (0,03 m)?*

R. Ao analisar a Figura 3.5.7 e a Tabela 3.5.2 é possível verificar que o período de oscilação do movimento anarmônico em questão foi de aproximadamente 3,2 s. Ou seja, o dobro do período anterior. O que é condizente com o encontrado por Cromer (1992).

3. *O que se observa em relação ao período à medida que diminui a amplitude de oscilação?*

R. Este resultado é estranho, mas verdadeiro, uma vez que implica que quanto menor a amplitude - quanto menor a distância, ao longo do trilho, que o planador deslizar – mais tempo ele leva para completar uma oscilação. Com efeito, como a distância percorrida vai para zero, o tempo que leva vai para infinito.

4. *Discuta as possíveis razões para que o período tenha esse comportamento em função da amplitude.*

R. A razão para este comportamento peculiar é que a força é extremamente fraca, nas proximidades da posição de equilíbrio, mas aumenta rapidamente para longe do equilíbrio. Com uma pequena amplitude, ao longo do eixo horizontal, o planador tem uma pequena força de restauração e por isso leva um longo tempo para ir, por exemplo, a partir do repouso, de  $x = 1$  cm para  $x = 0$ . Mas, se  $x = 6$  cm a força restauradora é  $6^3 = 216$  vezes maior, e o planador tem grande aceleração inicial. Por isso, vai relativamente rápido, uma vez que se aproxima do equilíbrio e passa rapidamente por esta região de força fraca. Simplificando, com o aumento da amplitude a força aumenta mais rapidamente do que a distância percorrida, e assim diminui o período.



### 3.5.4 Janelas do Modells

```
Modelo Matemático
x = last( x ) + v × Δ t
v = last( v ) + a × Δ t
a = - ( h / m ) × x 3
```

Modelo 3.5.1. Script do Problema “Laboratório Virtual”

	<input type="checkbox"/> Caso1	<input checked="" type="checkbox"/> Caso2	<input type="checkbox"/> Caso3	<input type="checkbox"/> Caso4
iguais h =	2.430E3	2.430E3	0.000	0.000
iguais m =	0.439	0.439	0.000	0

Figura 3.5.5. Parâmetros do Problema “Laboratório Virtual”

	<input type="checkbox"/> Caso1	<input checked="" type="checkbox"/> Caso2	<input type="checkbox"/> Caso3	<input type="checkbox"/> Caso4
iguais x =	0.060	0.030	0.000	0.000
iguais v =	0.000	0.000	0.000	0.000

Figura 3.5.6. Condições Iniciais do Problema “Laboratório Virtual”

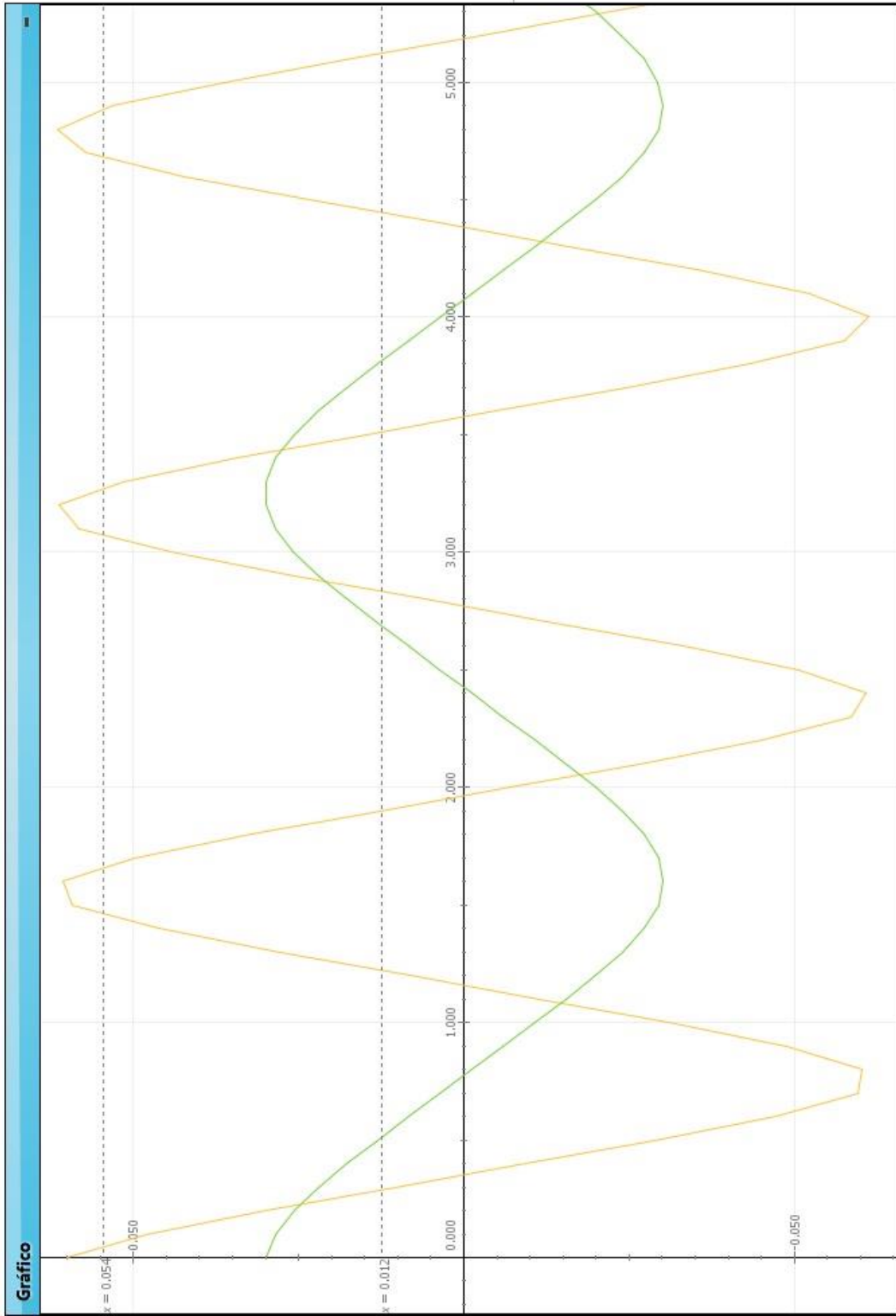


Figura 3.5.7. Mostra a amplitude  $x$  ao longo do tempo  $t$ .

Tabela	
$t$	$x$
0.000	0.060
0.100	0.048
0.200	0.030
0.300	0.010
0.400	-0.009
0.500	-0.029
0.600	-0.047
0.700	-0.060
0.800	-0.060
0.900	-0.049
1.000	-0.031
1.100	-0.011
1.200	0.008
1.300	0.028
1.400	0.046
1.500	0.059
1.600	0.061
1.700	0.050
1.800	0.032
1.900	0.013

Tabela 3.5.1. Mostra a amplitude  $x$  ao longo do tempo  $t$ , para a amplitude inicial de 6 cm.

Tabela	
$t$	$x$
0.000	0.030
0.100	0.029
0.200	0.026
0.300	0.022
0.400	0.018
0.500	0.013
0.600	0.008
0.700	0.004
0.800	-0.001
0.900	-0.006
1.000	-0.011
1.100	-0.015
1.200	-0.020
1.300	-0.024
1.400	-0.027
1.500	-0.029
1.600	-0.030
1.700	-0.029
1.800	-0.027
1.900	-0.024
2.000	-0.020
2.100	-0.015
2.200	-0.011
2.300	-0.006
2.400	-0.001
2.500	0.004
2.600	0.008
2.700	0.013
2.800	0.018
2.900	0.022
3.000	0.026
3.100	0.029
3.200	0.030
3.300	0.030
3.400	0.028

Tabela 3.5.2. Mostra a amplitude  $x$  ao longo do tempo  $t$ , para a amplitude inicial de 3 cm.

## 4 Conclusão

A escola tradicional de hoje foi forjada há décadas e talvez por sempre ter atendido a interesses do mercado, e também políticos, não acompanhou o desenvolvimento observado em diversas áreas do conhecimento humano. Talvez por isso, hoje a sociedade vive uma realidade em que os alunos, em sala de aula, passam horas sentados, muitas vezes, desconfortavelmente, ouvindo professores falarem de experiências realizadas há séculos, de uma forma monótona e cansativa, preocupando-se em decorar fórmulas, ficando tensos e com medo das provas. Enquanto isso, esses mesmos alunos, fora da escola, podem assistir, sentados na sala da sua casa, em poltronas confortáveis a programas com imagens fantásticas, até tridimensionais, com informações sobre as últimas descobertas da ciência, enquanto conversam, simultaneamente, através de redes sociais, com amigos, que moram até em outros países, comendo uma pipoca e desfrutando de um ambiente agradável, sem temores. Essa discrepância entre a sala de aula e a vida fora dela, deve ser um dos principais motivos para o professor levar a cabo a promoção de mudanças em sua maneira de trabalhar ensinando Física. Como afirma Netto (2005), a escola não acompanhou o avanço tecnológico experimentado pela humanidade no século XX. Portanto, sem perder de vista que o homem é mais importante que a máquina, os conceitos filosóficos e pedagógicos que norteiam a nossa educação devem ser adaptados, buscando principalmente uma maior contextualização, pois, mesmo com algumas opiniões divergentes em alguns pontos, é inegável a gama de possibilidades gerada pelas tecnologias modernas para a educação e que elas tem um potencial suficiente para apoiar um aprendizado ativo e um ensino inovador.

Essa dissertação, portanto, vem dar uma pequena contribuição para promover tais mudanças necessárias ao desenvolvimento do ensino de Física para o nível médio. Com o material aqui produzido acredita-se que o professor será capaz de tornar a sua aula mais atual, à medida que trabalha problemas contextualizados; mais atrativa, pois irá usar os computadores de uma maneira talvez nova para os alunos, já habituados a usá-los de outras formas; mais dinâmica, pois terá a possibilidade de criar pequenos grupos, onde todos deverão interagir para resolver os problemas; e, com resultados maiores de aprendizagem, tendo em vista, que os alunos partirão de problemas que fazem parte do cotidiano e deverão ser estimulados a construir seus scripts e interpretar as respostas obtidas nos computadores.

É importante salientar, nessa conclusão, que o papel do professor é visto como fundamental para que as atividades aqui propostas produzam os efeitos desejados. Não é possível, sem o mínimo de dedicação, produzir problemas e ambiente necessário para que as situações diárias tornem-se em exercícios possíveis de se trabalhar no Modellus e para que a aprendizagem seja realmente significativa.

Como sugestão para trabalhos futuros seria interessante produzir e disponibilizar vídeos tutoriais, através da internet, contendo a aplicação dos exemplos dessa dissertação no Modellus, através dos scripts aqui sugeridos.

## 5 Referências Bibliográficas

A EXPLOSÃO DO METEORO NA RÚSSIA EM 2013-02-15. A explosão do meteoro na Rússia em 2013-02-15. Disponível em:

<[https://www.youtube.com/watch?v=M7S6L\\_dyWZE](https://www.youtube.com/watch?v=M7S6L_dyWZE)>. Acesso em: 3/5/2015.

AGUIAR, C. E. M. DE; GAMA, E. A.; COSTA, S. M. Ciências da natureza e Matemática: Física no Ensino Médio. **Instituto de Física UFRJ**, 2005.

AIKEN, J. M. **Transforming high school physics with modeling and computation**, 2013. 72 f. Masters of Science - College of Arts and Sciences, Georgia State University. Disponível em: <<http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1310/1310.3725.pdf>>. .

ARAUJO, I. S. **Um estudo sobre o desempenho de alunos de física usuários da ferramenta computacional Modellus na interpretação de gráficos em cinemática**. 2002. 121 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/2251>>. Acesso em: 24/5/2014.

ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A.; MOREIRA, M. A. Uma revisão da literatura sobre estudos relativos a tecnologias computacionais no ensino de Física. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 4, n. 3, p. 5–18, 2004.

ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A.; MOREIRA, M. A. Atividades de modelagem computacional no auxílio à interpretação de gráficos da Cinemática. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 26, n. 2, p. 179–184, 2004. Sociedade Brasileira de Física. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1806-11172004000200013&lng=en&nrm=iso&tlng=pt](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172004000200013&lng=en&nrm=iso&tlng=pt)>. Acesso em: 5/11/2014.

ARRUDA, J. R. C. Un modelo didáctico para enseñanza aprendizaje de la física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 25, n. 1, p. 86–99, 2003. Rio de Janeiro. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0102-47442003000100011&lng=es&nrm=iso&tlng=es](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-47442003000100011&lng=es&nrm=iso&tlng=es)>. Acesso em: 8/10/2014.

ASSOCIAÇÃO DOS PERITOS OFICIAIS DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. Conheça a Profissão de Perito Criminal. Disponível em: <<http://www.aperj.org/artigos/790/>>. Acesso em: 17/5/2014.

BIASOTO, J. E. **O Pensamento em Ação dos Alunos na Resolução de um Problema Experimental de Física**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) - Ensino de Ciências (Física, Química e Biologia), Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/81/81131/tde-22022011-111935/>>. Acesso em: 23/5/2014.

BÍBLIA SAGRADA. **Bíblia Sagrada**. Nova Tradu ed.Barueri: Sociedade Bíblica do Brasil, 2012.

CAMARGO, P. DE. Percursos contemporâneos| Revista Educação. **157**, maio 2010. São Paulo. Disponível em: <<http://revistaeducacao.uol.com.br/textos/157/artigo234762-1.asp>>. Acesso em: 16/11/2014.

CROMER, A. The  $X^3$  Oscillator. **The Physics Teacher**, v. 30, p. 249–250, 1992.

DOCA, R. H.; BISCUOLA, G. J.; BÔAS, N. V. **Tópicos de Física - Vol. 1 - Mecânica Inclui Hidrodinâmica**. 21. ed. São Paulo: Saraiva, 2012.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **Lições de Física**. Porto Alegre: Bookman, 2008.

FIOLHAIS, C.; TRINDADE, J. Física no computador: o computador como uma ferramenta no ensino e na aprendizagem das ciências físicas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 25, n. 3, p. 259–272, 2003. Sociedade Brasileira de Física. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1806-11172003000300002&lng=en&nrm=iso&tlng=pt](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172003000300002&lng=en&nrm=iso&tlng=pt)>. Acesso em: 30/10/2014.

GÓMEZ, J. J. H.; MARQUINA, V.; GÓMEZ, R. W. On the performance of Usain Bolt in the 100 m sprint. **European Journal of Physics**, v. 34, n. 5, p. 1227–1233, 2013. Popular Physics; Classical Physics, IOP Publishing. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/0143-0807/34/5/1227/article/>>. Acesso em: 17/5/2014.

KELLNER, A. Como se determina a idade dos fósseis? **Ciência Hoje Online**. 2008. Disponível em: <<http://cienciahoje.uol.com.br/colunas/cacadores-de-fosseis/como-se-determina-a-idade-dos-fosseis>>. Acesso em: 14/1/2015.

KNIGHT, W. D.; KITTEL, C.; RUDERMAN, M. A. **Curso de Física de Berkeley - Mecânica, v.1**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1970.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. F. DE. Possibilidades e Limitações das Simulações Computacionais no Ensino da Física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 24, n. 2, p. 77–86, 2002. Sociedade Brasileira de Física. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1806-11172002000200002&lng=en&nrm=iso&tlng=pt](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172002000200002&lng=en&nrm=iso&tlng=pt)>. Acesso em: 26/5/2014.

MENDES, J. F.; COSTA, I. F.; DE SOUSA, C. M. S. G. O uso do software Modellus na integração entre conhecimentos teóricos e atividades experimentais de tópicos de mecânica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 34, n. 2, p. 1–9, 2012. Sociedade Brasileira de Física. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1806-11172012000200011&lng=en&nrm=iso&tlng=pt](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172012000200011&lng=en&nrm=iso&tlng=pt)>. Acesso em: 26/5/2014.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem Significativa - A Teoria de David Ausubel**. São Paulo: Moraes, 1982.

NETTO, A. A. DE O. **Novas Tecnologias & Universidade**. 1. ed. Petrópolis: Vozes, 2005.



OLIVEIRA JÚNIOR, R. L. **Problemas e Curvas de Perseguição no Ensino Médio: Usando o Modellus como Ferramenta Interativa**, 2011. 89 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

PCN. Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio. 1999. Brasília: Secretaria de Educação do Ministério da Educação.

REVISTA MUNDO ESTRANHO. Como é determinada a idade de um fóssil? Disponível em: <<http://mundoestranho.abril.com.br/materia/como-edeterminada-a-idade-de-um-fossil>>. Acesso em: 14/1/2015.

RICARDO, E. C.; CUSTÓDIO, J. F.; REZENDE JUNIOR, M. F. A tecnologia como referência dos saberes escolares: perspectivas teóricas e concepções dos professores. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 1, p. 135–147, 2007. Sociedade Brasileira de Física. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1806-11172007000100020&lng=en&nrm=iso&tlng=pt](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172007000100020&lng=en&nrm=iso&tlng=pt)>. Acesso em: 26/5/2014.

RODRIGUES, H. Modelling the motion of meteors in the Earth's atmosphere. **European Journal of Physics**, v. 34, n. 5, p. 1135–1143, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0143-0807/34/i=5/a=1135?key=crossref.ad7bd8cae5e03b06d5380353e8093fca>>. Acesso em: 17/5/2014.

SANTIAGO, A. J.; RODRIGUES, H. Efeitos de amortecimento sobre um oscilador X3. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 27, n. 2, p. 245–249, 2005. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rbef/v27n2/a10v27n2>>.

SANTOMAURO, B. Como se calcula a idade de um fóssil? **Revista Nova Escola Online**. Disponível em: <<http://revistaescola.abril.com.br/historia/fundamentos/como-se-calcula-idade-fossil-488076.shtml>>. Acesso em: 14/1/2015.

SANTOS, G. H.; ALVES, L.; MORET, M. A. Modellus: Animações Interativas Mediando a Aprendizagem Significativa dos Conceitos de Física no Ensino Médio. **Sitientibus Série Ciências Físicas**, v. 02, p. 56–67, 2006. Disponível em: <[http://dfis.uefs.br/sitientibus/vol2/Marcelo\\_Main-SPSS.pdf](http://dfis.uefs.br/sitientibus/vol2/Marcelo_Main-SPSS.pdf)>. Acesso em: 6/5/2015.

TEODORO, V. D. **Modellus: Learning Physics with Mathematical Modelling**. 2002. 248 f. Tese de doutoramento em Ciências da Educação, área de Teoria Curricular e Ensino das Ciências. Universidade Nova de Lisboa: Faculdade de Ciências e Tecnologia. 2002. Disponível em: <<http://run.unl.pt/handle/10362/407>>. Acesso em: 17/5/2014.

TEODORO, V. D. FMHI: Download do Modellus 4.5 (Windows & Mac OS). Disponível em: <<http://modellus.fct.unl.pt/mod/resource/view.php?id=464>>. Acesso em: 5/11/2014.

Usain Bolt New World Record 100m In 9.58 Seconds In Berlin. Gold medal in Beijing 9.68 sec. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=NHmEpqUFLZ8>>. Acesso em: 1/5/2015.

Usain Bolt: Berlin 100 m World Record Analysis. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=SyY7RgNLCUk>>. Acesso em: 1/5/2015.