



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

A Natureza da Eletricidade (Uma Breve História)

Rodrigo Fernandes Morais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Penha Maria Cardozo Dias

Rio de Janeiro
Setembro de 2014

A Natureza da Eletricidade (Uma Breve História)

Rodrigo Fernandes Morais

Orientador: Penha Maria Cardozo Dias

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

Presidente, Profa. Penha Maria Cardozo Dias

Prof. Francisco Caruso Neto

Prof. Antonio Carlos Fontes dos Santos

Rio de Janeiro
Setembro de 2014

FICHA CATALOGRÁFICA

M827n Morais, Rodrigo Fernandes
A Natureza da Eletricidade (Uma Breve História) /
Rodrigo Fernandes Morais. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2014.

x, 74 f.: il.; 30 cm.
Orientador: Penha Maria Cardozo Dias.
Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física /
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2014.
Referências Bibliográficas: f. 71-74.

1. História da Física. 2. Conceitos de carga e corrente
elétrica. 3. Ensino de Física. I. Cardozo Dias, Penha Maria.
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física,
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. A Na-
tureza da Eletricidade (Uma Breve História).

A meu eterno amigo e pai Wilson Morais.

Agradecimentos

A Penha Maria Cardozo Dias, pela orientação deste trabalho, pelo apoio sempre constante, pela escuta incansável, pelos conselhos e paciência nos momentos difíceis.

Aos professores do Mestrado Profissional em Ensino de Física da UFRJ: Alexandre Tort, Antônio Carlos Fontes dos Santos, Carlos Eduardo Aguiar, Deise Miranda Vianna, Helio Salim de Amorim, Marcos Gaspar, Marcos Venicius Cougo Pinto, Marta Feijó Barroso, Ricardo Borges Barthem e Virtovani Soares pelas aulas, atenção, incentivo e dedicação.

A Dilma e Carlos José, o Cazé, da Secretaria, por toda ajuda e carinho.

Aos colegas do Mestrado: Fernanda Marques Pantoja, Jonathas Lidmar Junior, José Carlos dos Santos, José Christian Lopes, Leonardo Leandro da Silva, Leonardo Sampaio Motta, Vanderlan Rodrigues dos Anjos e Vitor Ribeiro de Souza, pelo convívio, troca de ideias e amizade.

Aos professores da época do Bacharelado na UERJ: Arnaldo Santiago, Francisco Caruso, José Roberto Mahon, Jim Skea, Nilson Antunes, Romir Reis e Vitor Oguri, pela base sólida fornecida e pelas palavras de incentivo.

Aos colegas da graduação Arthur, Marlon, Ramon e Thiago pela tranquilidade antes das provas e pelo companherismo raro.

A minha esposa Fernanda Cavalcante de Sousa Morais pela compreensão, dedicação, motivação e por todo amor recebido.

A minha filha Mel de Sousa Fernandes Morais, a Godines, por todo amor e alegria.

Ao “Aplau” por possibilitar a criação do personagem e me fazer criança novamente.

A minha mãe Jacira F. Morais, meu irmão Raphael “Slau” F. Morais e minha avó Iza Maria S. Fernandes; pois sem vocês não teria chegado até aqui, vocês foram o alicerce de todo esse processo.

A Ronaldo F. Waddyngton pelas aulas de Física e Química bem no começo.

A Jorge Fernandes por me ensinar o caminho da liberdade.

À família Fernandes, família Morais, família U.P.I., família Estrada, família Rubro-Negra, família Plena União, família CIED, família B.C., família SINTUPERJ, família grevista 2013/2014 SEPE-RJ, família C.E. Compositor Manacéia José de Andrade e aos alunos e alunas por fazerem parte da minha história.

A todo aqueles que ao longo da história não se calaram diante da opressão,
lutaram pela liberdade e que tanto contribuíram para minha formação.
Ao grande *YAHWEH*, pelo fôlego da vida.

RESUMO

A Natureza da Eletricidade (Uma Breve História)

Rodrigo Fernandes Morais

Orientador: Penha Maria Cardozo Dias

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Nesta tese é apresentada uma breve história dos conceitos de carga e corrente elétricas. James Clerk Maxwell elaborou uma teoria do Eletromagnetismo, partindo de propriedades dinâmicas de um fluido, o éter; nessa teoria, a carga tem uma interpretação mecânica. O trabalho de Maxwell influenciou uma geração de físicos ingleses. Um sério problema enfrentado por essa geração foi o de entender a natureza da eletricidade.

No capítulo 2, são apresentadas as primeiras idéias sobre eletricidade, com ênfase nas influentes teorias de dois fluidos e de um fluido. No capítulo 3, é descrita a teoria de Maxwell, como apresentada em seu artigo *On Physical Lines of Force*; seguindo os cálculos de Maxwell, é possível identificar princípios, físicos e matemáticos, nos quais a teoria se apóia. No capítulo 4, é apresentada uma listagem das idéias de ‘elétron’, tanto idéias teóricas, quanto o experimento feito por Joseph John Thomson, o qual, segundo a opinião popular, o fez o descobridor do elétron. Foi elaborado um material instrucional para uso no Ensino Médio, com base no texto histórico.

Palavras chave: História da Física, Conceitos de carga e corrente elétrica, Ensino de Física.

Rio de Janeiro
Setembro de 2014

ABSTRACT

The nature of the electricity (A short history)

Rodrigo Fernandes Morais

Supervisor: Penha Maria Cardozo Dias

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

This thesis is a short history of the concepts of electrical charge and current. James Clerk Maxwell proposed a theory of the Electromagnetism, which was based on dynamic properties of a fluid, the ether; in the theory, the electric charge has a mechanical interpretation. Maxwell's ideas influenced a generation of English physicists. A serious problems faced by this generation was to understand the nature of the electricity.

In chapter 2, the first ideas on electricity are presented, with emphasis on the influent theories of two fluids and of one fluid. In chapter 3, it is presented Maxwell's theory, as it stands in *On Physical Lines of Force*; by following calculations made by Maxwell, it is possible to identify physical and mathematical principles on which the theory rests. In chapter 4, it is presented a list of conceptions of the 'electron', both the theoretical conceptions and the experiment by Joseph John Thomson, which according to the popular opinion, made him the discoverer of the electron. An instructional material was prepared, using the historical content of the work.

Keywords: History of Physics, Concepts of electric charge and current, Physics Education.

Rio de Janeiro
Setembro de 2014

Sumário

1	Introdução	1
2	Os fluidos de eletricidade e de magnetismo	3
3	O modelo mecânico da carga e da corrente elétrica	9
3.1	O éter com elasticidade rotacional	9
3.2	Modelo mecânico do magnetismo e da eletricidade	15
3.2.1	Modelo de éter com elasticidade rotacional	15
3.2.2	Origem da força magnética	16
3.2.3	Origem da indução elétrica	18
3.2.4	A natureza mecânica da corrente elétrica	19
3.3	A lei de Faraday	21
3.3.1	O estado eletrotônico e a lei de Faraday	23
3.3.2	A força eletromotriz em um corpo em movimento	25
3.4	A corrente de deslocamento	28
3.5	As equações propostas por Maxwell	30
4	Das “rodas livres” ao elétron	32
4.1	O problema da condução no contexto da teoria de Maxwell	32
4.2	Um pouco da historiografia: o estado da arte no final do século XIX	34
4.3	Dois problemas	38
4.3.1	A eletrólise	38
4.3.2	Os raios catódicos	39
4.4	O elétron	42
5	Arremate	44
A	Cálculo das pressões	45

B	Cálculo da quantidade de rodas livres transferidas através da unidade de área na direção ϵ_i na unidade de tempo	47
B.1	Cálculo da integral	48
C	Potência transmitida pelas rodas livres	49
D	Variação da velocidade dos vórtices	50
D.1	Variação da velocidade por translação infinitesimal da superfície do vórtice	50
D.2	Variação da velocidade por rotação infinitesimal da superfície do vórtice	51
D.3	Transformação de vetores	52
D.3.1	Caso particular da velocidade	52
D.3.2	Caso particular da posição	53
D.3.3	Caso particular do gradiente da posição	53
D.4	Transformação geral da velocidade	54
E	Material Instrucional	56
E.1	Fluidos de eletricidade e magnéticos	56
E.2	A concepção moderna do elétron	62
E.2.1	Os raios catódicos	62
E.2.2	O experimento de Thomson	63
E.3	Uma experiência no Ensino Médio	65
E.4	Experimento 1	66
E.5	Experimento 2	66
E.6	Experimento 3	67
E.7	Experimento 4	68
	Referências bibliográficas	71

Capítulo 1

Introdução

O uso da História de uma ciência no ensino é um assunto longamente debatido (Michael Matthews, 1992) e está longe de ter um fim; pelo contrário, de tempos em tempos volta ao debate e tem recebido novas propostas de implementação (Höttecke *et alii*, 2012).

Um argumento contra o uso de História no ensino foi oferecido por Martin Klein (Matthews, p.18); segundo ele, o uso da História não apreende a riqueza da História. Helge Kragh (1992, p.360) responde assim a esse tipo de crítica:

Em um contexto educacional, a história deverá necessariamente ser incorporada de um modo pragmático, mais ou menos editado. Não há nada ilegítimo em tal uso pragmático de dados históricos, desde que não sirva a propósitos ideológicos ou viole o conhecimento do que realmente aconteceu.

Então Kragh (1992, p.360) propõe estudos de casos:

Uma solução prática ao dilema entre verdade histórica e utilidade didática no ensino de ciência consiste em introduzir história em conexão com uns poucos casos selecionados.

Penha M. Cardozo Dias (2001, p.226-227) acredita que a História é um foro natural da discussão dos fundamentos de uma ciência. A História da descoberta de um conceito mostra não somente como o conceito foi criado, mas, sobretudo, seu porquê; a História mostra as questões para cujas soluções o conceito foi introduzido, aquilo que o conceito faz na teoria, sua função e

seu significado; assim, a História revela os ingredientes do pensamento, as próprias categorias que levam à elaboração de uma teoria, a lógica da construção conceitual. Em suma, nesse esforço, a História revive o próprio ato intelectual da criação científica.

Esta tese se situa na História do Eletromagnetismo. No Capítulo 2, são apresentadas as primeiras ideias de fluido elétrico e fluido magnético. A ênfase da tese, entretanto, é colocada nas discussões ocorridas a partir da segunda metade do século XIX; nessa época, a escola inglesa foi caracterizada pelo modelo mecânico do Eletromagnetismo, como resultante de propriedades dinâmicas de um fluido, o éter. Este modelo é apresentado no Capítulo 3 e segue de perto o artigo de Cardozo Dias e Rodrigo Morais. Entretanto, um problema deixado sem resposta foi o da natureza da eletricidade; no Capítulo 4, são apresentados sumários de problemas e de pesquisas que culminaram com o estabelecimento do elétron.

Dificuldades no ensino do conceito de carga foram observadas por professores (*apud* Sergio Luiz B. Boss *et alii*, 2009), que concebem que “... não é possível dizer o que é a carga elétrica, mas é possível descrever seu comportamento e suas propriedades”; essa visão operacionalista apresenta-se nos livros de Física da seguinte forma (Boss *et alii*):

... a carga elétrica é uma propriedade intrínseca da matéria que se apresenta na natureza de duas formas diferentes, convencionalmente chamadas de positiva e negativa. Uma característica importante da carga elétrica é a interação entre cargas.

Não é a intenção apresentar uma leitura alternativa a essa leitura operacionalista. A intenção é procurar na História argumentos que foram realmente invocados no esclarecimento dos fundamentos do Eletromagnetismo, seguindo de perto a proposta de Kragh, de estudo de casos; analisando as discussões e detalhando os cálculos envolvidos, é possível identificar princípios, físicos e matemáticos, nos quais a teoria se apóia.

No Apêndice E, apresenta-se um roteiro que pode ser útil para introduzir o conceito de carga no Ensino Médio.

Capítulo 2

Os fluidos de eletricidade e de magnetismo

Provavelmente, as primeiras observações de fenômenos elétricos foram na Grécia Antiga. Citações em trabalhos de filósofos apontam que Tales de Mileto (640-546 a.C.) foi, possivelmente, o primeiro a constatar que o âmbar, ao ser atritado, adquiria a propriedade de atrair corpos leves. Tales também teria notado a atração do ferro pelo ímã (J.L. Cindra e Odete P.B. Teixeira, p.386). Posteriormente, ainda na Grécia, Teofrasto (372-288 a.C.) observou que minerais atritados também atraíam corpos leves, ou seja, essa propriedade não era exclusiva do âmbar. Somente em 1550, o matemático Girolamo Cardano (1501-1576) diferencia os fenômenos do âmbar atritado daqueles provenientes dos ímãs. Por séculos, fenômenos elétricos e magnéticos foram tratados separadamente.

Um dos cientistas que iniciou as pesquisas modernas sobre magnetismo e sobre eletricidade foi o médico britânico William Gilbert (1544-1603). Ele denomina de *elétricos* os corpos que, ao serem atritados, passam a atrair corpos leves, como pluma e palha;¹ em outras palavras, corpos que têm a mesma propriedade do âmbar (Andre Koch Torres Assis p.17). A maior contribuição de Gilbert para a ciência da eletricidade foi a descoberta de uma série de substâncias que se comportam como o âmbar, ao serem atritadas

¹O termo vem de *elektron* que, em grego, significa âmbar (*apud* André Koch Torres Assis, p.21).

(Assis, p.20).

O desenvolvimento de novas teorias elétricas e magnéticas depois de Gilbert foi lento.

Uma teoria formal da natureza da eletricidade muito influente foi enunciada por Charles François de Cisternay Du Fay (1698-1739), em 1735. Ele propôs a existência de dois tipos de eletricidade, a vítrea e a resinosa. Naquela época, ainda não havia explicação para a atração e a repulsão entre corpos eletrizados. Du Fay refez experimentos análogos aos feitos por Francis Hauksbee (1660-1713) e Stephen Gray (1666-1736), dos quais se declarava devedor (Sérgio Luiz Bragatto Boss e João José Caluzi, p.636). Hauksbee e Gray utilizavam uma penugem que era atraída e em seguida repelida por um tubo atritado de *flint-glass*, uma espécie de vidro composto de chumbo (Assis, p.58). Desses experimentos, Du Fay extraiu novos princípios.

O primeiro princípio estabelece que (Du Fay, p.262):

[...] Corpos Elétricos atraem todos aqueles que não estão desta forma [não eletrizados] e os repelem, assim que eles se tornam elétricos, pela Proximidade ou pelo Contato com o Corpo Elétrico.

No mesmo parágrafo em que foi enunciado o primeiro princípio, Du Fay comenta um experimento em que uma lâmina de metal é aproximada de um tubo eletrizado. Lembrando que uma lâmina de metal, presa por um fio isolante, quando aproximada de um bastão eletrizado, é atraída e, após contato com o bastão, é repelida, pode-se entender o que Du Fay quis dizer. Esse princípio falhou, quando a lâmina de metal eletrizada foi aproximada de um pedaço eletrizado de goma-copal. Esperava-se que os corpos se repelissem, mas ocorreu o contrário, a lâmina metálica e a goma-copal se atraíram. Pode-se explicar a falha no primeiro princípio, levando em conta que o tubo estava eletrizado com cargas positivas e atraiu a lâmina de metal (neutra); após o contato com o tubo a lâmina de metal também ficou carregada com cargas positivas. A goma-copal (um tipo de material resinoso) estava carregada com cargas negativas e por isso foi atraída pela lâmina de metal.

O problema que se colocava era: Como um corpo eletrizado poderia atrair outro corpo eletrizado, sem ferir o primeiro princípio? Du Fay buscou respon-

der a essa questão, apresentando um segundo princípio (Du Fay, p.263-264):

[...] existem duas Eletricidades distintas, muito diferentes uma da outra, uma que chamo de eletricidade vítrea e a outra que chamo de eletricidade resinosa.

Nesse princípio, Du Fay postula a existência de dois tipos de eletricidade, a vítrea e a resinosa. A escolha do nome desses diferentes tipos de eletricidades também surge de suas observações experimentais, pois percebeu que, de um lado, os corpos sólidos e transparentes, como o vidros, e, de outro lado as resinas e os betuminosos, possuem comportamento elétrico diferente. Tomando essa diferença de comportamento elétrico como base, ele classificou alguns materiais. Por exemplo, matérias como vidro, pedra-cristal, pedras preciosas, pelo de animais, lã etc., quando eletrizados, ficavam contendo eletricidade do tipo vítrea. Por outro lado, materiais como âmbar, copal, goma-laca, seda, linha, papel etc., quando eletrizados, ficavam contendo eletricidade resinosa. Nas palavras de Du Fay (*apud* Assis, p.101):

Aí estão constantemente duas eletricidades de uma natureza totalmente diferente, a saber, a eletricidade dos corpos transparentes sólidos, como o vidro, o cristal etc., e a eletricidade dos corpos betuminosos e resinosos, como o âmbar, a goma-copal, a cera da Espanha etc. Uns e outros repelem os corpos que adquiriram uma eletricidade da mesma natureza que a deles e atraem, ao contrário, os corpos cuja eletricidade é de uma natureza diferente da deles. [...] Portanto aí estão duas eletricidades bem demonstradas, e não posso me dispensar de lhes dar nomes diferentes para evitar a confusão dos termos, ou embaraço de definir a cada momento a eletricidade que desejo falar; portanto, chamarei uma de eletricidade vítrea e a outra de eletricidade resinosa, não que eu pense que somente existam os corpos da natureza do vidro que sejam dotados de uma [espécie de eletricidade], e as matérias resinosas de outra, pois já tenho fortes provas do contrário, mas [escolho esta denominação] porque o vidro e o copal foram as duas matérias que me deram os vínculo para descobrir as duas eletricidades diferentes.

Sendo assim, Du Fay resolve a questão, quando divide os corpos eletrizados

em duas classes e chega à conclusão de que corpos com eletricidades iguais se repelem e com eletricidades diferentes se atraem.²

Du Fay não chegou a classificar a eletricidade como sendo uma espécie de fluido (Weinberg, p.15), mas suas pesquisas influenciaram diretamente a teoria dos dois fluidos desenvolvida posteriormente. Foi o Abbé Jean-Antonie Nollet (1700-1770), professor da Universidade de Paris, que introduziu a ideia de que os dois tipos de eletricidade correspondem a dois tipos distintos de fluido elétrico (Weinberg, p.16).

Durante esse período, as idéias mecanicistas exerciam forte influência sobre os cientistas, por uma influencia do Iluminismo. E a idéia de explicar os fenômenos elétricos, baseando-se em teorias mecânicas de fluidos era bastante atraente. O desenvolvimento de teorias mecânicas de fluidos foi um passo no processo de quantificação de alguns ramos da Física (Thomas L. Hankins, p.50). O fluido “sutil” ou “imponderável” era uma substância que possuía propriedades físicas, mas não era como a matéria comum; os melhores exemplos de “fluidos sutis” nasceram na tentativa de explicar os fenômenos elétricos e térmicos. Segundo Hankins (p.50), os “fluidos sutis” tinham a vantagem de mostrar o que deve ser medido em física; eles forneceram um quadro teórico em torno do qual se poderia construir conceitos físicos como “carga”, “tensão elétrica”, “calor”, “capacidade de calor” e “temperatura”.

A teoria de dois fluidos era consistente com todas as experiências que poderiam ser levadas a cabo no século XVIII (Weinberg, p.16). Nessa teoria, um corpo é considerado neutro, quando contém a mesma quantidade dos dois fluidos. A eletrização acontece, quando o corpo tem excesso ou falta de um fluido. Entretanto, outra teoria competidora, a de um fluido, foi logo proposta (Weinberg, p.16), inicialmente, pelo médico e naturalista londrino William Watson (1715-1787); depois, seria proposta mais detalhadamente e de forma mais influente por Benjamim Franklin (1706-1790). Como diz Weinberg (p.16), “a paixão dos físicos pela simplicidade não os deixa sossegados com uma teoria complicada, se uma mais simples pode ser achada”.

²Steven Weinberg (p.19) comenta que a série triboelétrica lista materiais, mostrando quais são aqueles que têm uma maior tendência a se tornarem positivamente eletrizados (eletricidade vítrea) e quais os que apresentam maior tendência de se tornarem negativamente eletrizados (eletricidade resinosa).

Edmund Whittaker (p.47) explica que Franklin pode ter sido motivado pelo seguinte experimento. Uma pessoa, *A*, de pé sobre cera, portanto isolada do solo, atrita um tubo de vidro. Depois, uma outra pessoa, *B*, também de pé sobre cera, passa o nó dos dedos ao longo do mesmo tubo, a uma pequena distância dele. Uma terceira pessoa, *C*, está de pé sobre o solo. Se *A* e *B* tocarem *C*, uma após a outra, surge uma faísca, em cada um dos dois toques, indicando que *A* e *B* estão eletrizados. Franklin interpreta o resultado, supondo que eletricidade é um elemento; cada corpo, em condições normais, possui uma certa proporção desse elemento. Assim, *A*, *B* e *C* possuem, inicialmente, antes do experimento, iguais quantidades de eletricidade; ao atritar o vidro, *A* passa eletricidade para o vidro que a transmite para *B*; *A* tem falta e *B*, excesso de eletricidade. Ao tocarem, um após o outro, *C*, que tem quantidade normal de eletricidade, a distribuição de eletricidade entre eles fica equalizada; se *A* e *B* se tocarem, eletricidade também flui entre eles, equilibrando a quantidade de fluido entre eles e nenhum tem mais ou menos eletricidade do que *C*. Franklin supôs, portanto, que a eletricidade fosse composta de um único tipo de fluido, constituído de “partículas extremamente finas”. Ele supôs, ainda, que a matéria comum dos corpos retivesse a eletricidade como um “tipo de esponja”. Ele não conhecia o trabalho de Du Fay e não usou sua terminologia (vítrea e resinosa); ele chamou a deficiência de eletricidade de eletricidade negativa e o excesso de eletricidade, de eletricidade positiva; à quantidade de eletricidade, positiva ou negativa, de um corpo ele chamou de *carga* do corpo, termos que ainda são usados nos dias de hoje.

Segundo Weinberg (p.16), Franklin foi o primeiro estudioso da natureza a afirmar que a quantidade total de cargas de um corpo é conservada; ou seja, foi o primeiro a postular que a eletricidade nunca é criada ou destruída, podendo apenas ser transferida de um corpo para outro corpo. Quanto ao fenômeno da atração e da repulsão, Franklin supôs que a eletricidade repele-se a si mesma, mas atrai a matéria que a retém; em outras palavras, um corpo com excesso de eletricidade repele um corpo com excesso de eletricidade e um corpo com excesso de eletricidade atrai um corpo com deficiência de eletricidade. Fazendo uma analogia com a teoria de Du Fay, pode-se

identificar como vítrea o que Franklin chamou de excesso de eletricidade e como resinosa, o que ele chamou de deficiência de eletricidade. A dificuldade do modelo era explicar a repulsão entre corpos com deficiência de eletricidade, ou seja, entre corpos que contêm eletricidade resinosa. Em 1759, o astrônomo, físico, matemático e filósofo natural alemão Franz Ulrich Theodosius Aepinus (1724-1802), conhecedor do trabalho de Franklin, solucionou esse problema, criando a tese de que, quando dois corpos possuem ausência de eletricidade, a matéria comum repele-se a si mesma.

A teoria de um fluido de eletricidade levou, naturalmente, a tentativas de se construir uma teoria semelhante para o magnetismo; isso foi efetuada em 1759 por Aepinus, que supôs que os “pólos” fossem lugares em que um fluido magnético se encontrasse presente em quantidade superior à quantidade normal. Subsequentemente, a teoria de dois fluidos magnéticos imponderáveis, nomeados de boreal e austral, foi postulada por Anton Brugmans (1732-1789) e por Johan Carl Wilcke (1732-1796). Segundo a teoria, esses fluidos deveriam ter as propriedades de atração e repulsão mútuas, semelhantes aos possuídos pelas eletricidades vítrea e resinosa (Whittaker, p.57).

Charles Augustin Coulomb (1736-1806) era favorável à teoria de dois fluidos (Whittaker, p.58-59); além disso, observou que dois fluidos magnéticos, ao contrário dos dois fluidos elétricos, não podem ser obtidos separadamente; quando um ímã é quebrado em duas partes, uma contém o norte e outra o sul (Whittaker, p.59).

A teoria dos dois fluidos e a teoria de um fluido dividiu o pensamento dos físicos. Olhando em retrospecto, a natureza da eletricidade foi um problema que só foi resolvido com a descoberta do elétron.

Capítulo 3

O modelo mecânico da carga e da corrente elétrica

3.1 O éter com elasticidade rotacional

No início do século XIX, o estudo da Mecânica era um campo desenvolvido. Era natural que físicos buscassem explicações mecânicas para vários tipos de fenômenos físicos (Peter Michael Harman, p.4). Por exemplo, a Termodinâmica macroscópica era justificada pelo movimento de partículas microscópicas. Não seria diferente com o Eletromagnetismo. Por outro lado, um fenômeno importante — que veio, em algum momento, a ser associado ao Eletromagnetismo — era a propagação da luz; ela seria uma vibração mecânica de um meio, o éter, e um dos problemas cruciais da Física no século XIX era o de encontrar um modelo de meio que representasse a propagação da luz. Neste capítulo, analisa-se o modelo mecânico do Eletromagnetismo, proposto por James Clerk Maxwell (1831-1879), partindo da suposição de que o mesmo éter explicasse as propriedades eletromagnéticas.

A natureza ondulatória da luz era um problema discutido e, hoje, é reconhecida a importância do experimento de Thomas Young (1773-1829). Ele fez com que a luz solar atravessasse um pequeno orifício em uma placa opaca, sofrendo difração (Fabio W.O. da Silva, p.155); em seguida, a luz incidia em dois novos orifícios, onde ocorria nova difração. Young observou a in-

terferência gerada pela superposição das ondas proveniente dos dois orifícios. A análise dessa famosa experiência forneceu a Young subsídios para defender a teoria ondulatória da luz: partículas não poderiam gerar a figura de difração observada.

Étienne Malus (1775-1812) fazia experimentos, utilizando um cristal de calcita, de dupla refração (Whittaker, p.105). Observou a luz do Sol refletida pela janela do Palácio de Luxemburgo e ficou surpreso ao notar que as duas imagens da dupla refração tinham diferentes intensidades. À noite fez a luz da vela incidir sobre uma superfície de água e observou que a luz era refletida, no caso de um ângulo de incidência de 36° (hoje chamado ângulo de polarização), da mesma forma que no cristal de calcita (Silva, p.155).

Hoje, entende-se que esse resultado significa que a luz pode ser polarizada por reflexão.

Tomando conhecimento desses resultados, Young escreve a seu amigo Jean Dominique Arago (1786-1853) reconhecendo que os experimentos demonstram a insuficiência da teoria ondulatória, adotada por ele, embora não comprovem sua falsidade (Young, *apud* Silva, p.155):

Tenho refletido sobre a possibilidade de dar uma explicação imperfeita ao problema da luz que constitui a polarização, sem partir da doutrina genuína de ondulações. Há um princípio [...] segundo o qual todas as ondulações são simplesmente propagadas através de espaços homogêneos em superfícies esféricas concêntricas do tipo das ondas sonoras, consistindo apenas de movimentos diretos e retrógrados das partículas na direção dos raios, com condensações e rarefações concomitantes (isto é, ondas longitudinais). Além disso, é possível explicar nessa teoria uma vibração transversal, propagando-se também na direção do raio, com igual velocidade, mas o movimento das partículas ocorrendo em uma certa direção constante em relação ao raio. Isso é uma polarização.

Young então sugere a seu amigo Arago que a luz seja uma onda que se propague de maneira transversal. Ou seja, as vibrações da luz são executadas em ângulos perpendiculares à direção de propagação. Essa proposta era bastante ousada para a época, levando em conta que se acreditava que a luz

se propagasse de maneira longitudinal, como as ondas sonoras nos fluidos.

Para explicar a possibilidade de propagação transversal, Young e Augustin Fresnel (1788-1827) fazem uma nova hipótese sobre a natureza do éter. Segundo a hipótese, o éter se comportaria como um sólido elástico, capaz de resistir a tentativas de distorcer sua forma, e não como um fluido, que não oferece tal resistência (Whittaker, p.128). No início, essa teoria enfrentou grande dificuldade para responder algumas questões importantes, como por exemplo: se o éter tem as qualidades de um sólido, como é que os planetas são capazes, em seus movimentos orbitais, de realizar viagens em alta velocidade sem encontrar qualquer resistência perceptível? George Gabriel Stokes (1819-1903) faz uma analogia com substâncias como piche (substância negra e resinosa) e cera de sapateiro: Embora sejam rígidas para serem capazes de vibrar elasticamente, são, também, suficientemente fluidas para permitir que outros corpos passem através delas. Para Stokes, o éter seria visto como uma substância que teria qualidades similares às da cera de sapateiro. O éter se comportaria como um sólido elástico, no caso de vibrações rápidas, como da luz, mas como um fluido, no caso do progressivo e bem mais lento movimento dos planetas (Whittaker, p.128). Outro problema enfrentado era que, quando a transversalidade da luz foi proposta, como acima relatado, nenhum método geral ainda havia sido desenvolvido para investigar matematicamente as propriedades de corpos elásticos. Mas, sob o estímulo de Fresnel, alguns dos melhores intelectuais da época foram atraídos pelo tema (Whittaker, p.129). Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Claude Lois-Marie-Henri Navier (1785-1836) propuseram modelos de sólido elástico, mas os modelos não conseguiam obter a lei de Fresnel para a relação entre as intensidades dos raios incidentes e refletidos, no caso da polarização perpendicular ao plano de incidência.

Em 1839, James MacCullagh (1809-1847) propõe um modelo de um sólido elástico para o éter, com propriedades que preenchem os requisitos da luz (Whittaker, p.143):

Em um sólido ordinário elástico, a energia potencial de deformação depende somente da mudança de tamanho e forma dos elementos de volume — de sua compressão e distorção, de fato. Para o novo meio de MacCullagh, por

outro lado, a energia potencial depende somente da *rotação* dos elemento de volume.

William Thomson (1824-1907), também conhecido como Lorde Kelvin, propôs um modelo mecânico molecular para o éter de MacCullagh (Whittaker, p.145). O modelo de Thomson motiva James Clerk Maxwell (Whittaker, p.247), que construiu um modelo mecânico para o Eletromagnetismo, extrapolando a aplicação, que era limitada à propagação da luz.

Maxwell desenvolveu uma teoria do Magnetismo e da Eletricidade a partir de propriedades de um meio — o éter — que preencheria o espaço. Ele apresenta a teoria do Eletromagnetismo em: *On Faraday's Lines of Force* (1856), *On Physical Lines of Force* (1861-1862), *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* (1864) e no livro *A Treatise on Electricity & Magnetism* (1873). O modelo do éter é apresentado em *On Physical Lines of Force*; a motivação mais imediata de Maxwell para desenvolver tal teoria foi sua descrença na ação à distância (Maxwell, 1864, p.527):

Eu preferi procurar uma explicação do fato [de que corpos distantes interagem] [...] supondo que [as interações] são produzidas por ações que acontecem no meio em volta bem como nos corpos excitados [pela interação] e tentando explicar a ação entre corpos distantes sem assumir a existência de forças capazes de agir diretamente a distâncias sensíveis.

[...] A teoria que proponho pode ser chamada de uma teoria do *Campo Eletromagnético*, porque ela tem a ver com o espaço nas vizinhanças dos corpos elétricos ou magnéticos e pode ser chamada de *teoria Dinâmica*, porque ela assume que nesse espaço há matéria em movimento, o que produz os fenômenos eletromagnéticos observados.

Muitos atribuem as motivações de Maxwell à construção de “analogias”; assim, ele procuraria uma analogia entre o Eletromagnetismo e movimentos de um fluido. Basicamente, a construção de analogias é uma declaração de princípios, epistemológica, que Maxwell fez sobre o conteúdo de verdade de sua teoria (Maxwell, 1861-1862, p.156):

Para obter ideias físicas, sem adotar uma teoria física, nós nos devemos familiarizar com a existência de analogias físicas. Por analogia física, eu

quero dizer aquela similaridade parcial entre as leis de uma ciência e aquelas de outra, que faz com que cada uma ilustre a outra.

O mesmo discurso é encontrado em *Illustrations of the Dynamical Theory of Gases* para justificar a analogia entre um gás perfeito e massas pontuais em colisão, e, daí, deduzir a distribuição de velocidades das moléculas em um gás perfeito, a hoje chamada “distribuição de Maxwell”. Por outro lado, é difícil evitar a sensação de que Maxwell parece envergonhar-se de formular uma teoria *ad hoc* e deixa claro para seu leitor de que sua teoria pode não ser baseada em princípios verdadeiros. De qualquer modo, as duas características — uma teoria microscópica baseada em Mecânica e o despreço pela ação à distância — não eram ideias estranhas ao tempo de Maxwell. Edmund Whittaker (Whittaker, p.98-99) cita que Leonhard Euler (1707-1783), como Maxwell depois, considerava o meio da propagação da luz o mesmo dos fenômenos elétricos; mais interessante é a natureza da gravitação como concebida por Euler; nas palavras de Whittaker (Whittaker, p.98-99):

[A eletrificação de um corpo] acontece, quando o éter contido em seus poros se torna mais ou menos elástico do que o que reside nos corpos adjacentes. Isso acontece, quando uma maior quantidade de éter é introduzida nos poros de um corpo ou quando parte do éter que ele contém é forçada para fora. Naquele caso, o éter se torna mais comprimido e, conseqüentemente, mais elástico; no outro caso, ele se torna rarefeito e perde sua elasticidade. Em ambos os casos, [o éter no corpo] não mais está em equilíbrio com aquele que é externo; e os esforços que [o éter] faz para recuperar seu equilíbrio produzem todos os fenômenos da eletricidade.

Não somente fenômenos elétricos, mas também gravitacionais, foram explicados em termos de um éter. A explicação dependia da suposição de que a pressão do éter cresce com a distância do centro da Terra, seja, como $[C - \frac{1}{r}]$ (C é uma constante)], de modo que a força que pressiona um corpo para a terra é mais forte do que a dirigida para longe dela, o balanço dessas forças sendo o peso do corpo.

Maxwell propôs que o meio tivesse a propriedade de elasticidade rotacional. Essa propriedade significa (Whittaker, p.143; James MacCullagh,

p.156): Se \vec{e} é uma perturbação de um ponto do éter e μ , uma constante magnética (similar à constante da mola), então a energia potencial por unidade de volume, na situação em que o meio está em seu estado não perturbado, é dada por (em notação moderna):

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu \left| \vec{\nabla} \times \vec{e} \right|^2;$$

ou, em termos de coordenadas, por

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu [\epsilon_{j\alpha\beta} (\partial_\alpha e_\beta) \epsilon_{jmn} (\partial_m e_n)] \equiv \frac{1}{2}\mu [\epsilon_{j\alpha\beta} \epsilon_{jmn} (\partial_\alpha e_\beta) (\partial_m e_n)].$$

Maxwell foi, inicialmente, influenciado pela ideia de linhas de força, introduzida por Michael Faraday. Em *Faraday's Lines*, ele imagina que essas linhas sejam linhas de fluxo de um fluido, formando tubos de escoamento. Essas linhas não se cruzam, significando que o número de linhas em um volume se conserva; então, o fluido é não compressível e obedece à equação da continuidade.

Já foi dito que Maxwell não acreditava em ação à distância e, seguindo a ideia da similaridade de linha de força com o fluxo de um fluido, supôs que um meio pudesse responder, também, pelas forças magnética e elétrica (Maxwell, 1964, p.527). Esse fluido seria o mesmo éter de MacCullagh. É interessante que o mesmo meio respondesse por fenômenos até então distintos, mas a ideia não é tão original; como mencionado anteriormente, Leonhard Euler já havia considerado que o éter da luz é a fonte de fenômenos elétricos (Whittaker, p.98-99).

3.2 Modelo mecânico do magnetismo e da eletricidade

3.2.1 Modelo de éter com elasticidade rotacional

Maxwell propõe uma origem para o magnetismo (Maxwell, 1861-1862, p.455):

Supomos que o fenômeno do magnetismo dependa da existência de tensões na direção das linhas de força, combinada com uma pressão hidrostática; ou, em outras palavras, uma pressão maior na região equatorial do que na direção axial. A próxima questão é: que explicação mecânica podemos dar para essa desigualdade de pressão em um fluido ou meio em movimento? A explicação que mais prontamente ocorre à mente é que o excesso de pressão na direção equatorial surge da força centrífuga dos vórtices [...] no meio, tendo seus eixos na direção paralela à das linhas de força.

Os vórtices formam um fluido. Em qualquer parte do fluido (Maxwell, 1861-1862, p.455), esses vórtices giram em torno de eixos paralelos, no mesmo sentido, com velocidade angular constante; mas ao passar de uma parte para outra do campo, a direção dos eixos, a velocidade de rotação e a densidade podem ser diferentes. Forças centrífugas acarretam uma pressão (Maxwell, 1861-1862, proposição II, p.457), que dá origem à força magnética. A seguinte analogia está implicada em todo o artigo do Maxwell:

grandeza hidrodinâmica	grandeza eletromagnética
velocidade do vórtice: \vec{v}	\vec{H}
vorticidade do fluido: $\vec{\nabla} \times \vec{v}$	$4\pi\vec{j}$

em que \vec{j} é a corrente. A indução é definida por $\vec{B} = \mu\vec{H}$, onde μ é uma grandeza magnética. A lei de Ampère está implícita na analogia e resulta da elasticidade rotacional, expressa pela vorticidade do fluido; em Hidrodinâmica, vorticidade é definida por $\frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{v}$ (Keith R. Symon). A

lei de Faraday vai ser demonstrada. O modelo ainda teria de definir a natureza da corrente (\vec{j}), o campo elétrico induzido (\vec{E}) e a natureza dos condutores; esses problemas tiveram impacto na História do Eletromagnetismo (Jed Buchwald).

3.2.2 Origem da força magnética

O cálculo da pressão, feito por Maxwell, é apresentado no Apêndice A. Modernizando a notação, as componentes do tensor de tensão (Symon) são (Maxwell, 1861-1862, fórmula (2), p.457-458):

$$\begin{aligned} p_{ii} &= \frac{1}{4\pi} \mu v_i v_i - p_0 \quad (\text{sem somar em } i) \\ p_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \mu v_i v_j = p_{ji} \end{aligned}$$

onde v_i é a componente i da velocidade linear de rotação; μ é uma constante relacionada a alguma propriedade magnética; p_0 é uma pressão isotrópica. No valor da pressão, deveria aparecer a densidade e não uma grandeza magnética; Maxwell substitui a densidade por $\frac{1}{4\pi}\mu$ (Apêndice A); o objetivo é escrever a lei de Ampère como $4\pi\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$.

Em Hidrodinâmica (Symon), a densidade de força é a divergência do tensor pressão; para facilitar a notação, denominando $\vec{p}_i = p_{ix}\hat{i} + p_{iy}\hat{j} + p_{iz}\hat{k}$, a componente i da força magnética é:

$$\mathcal{F}_i = \frac{\partial p_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial p_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{iz}}{\partial z} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{p}_i \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}_i = \partial_j p_{ij}.$$

Cálculo direto das derivadas fornece (Maxwell, 1861-1862, fórmula (5), p.458):

$$\mathcal{F}_i = \frac{1}{4\pi} v_i \left\{ \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu v_j) \right\} + \frac{1}{8\pi} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} v^2 - \frac{1}{4\pi} \left[\mu \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right]_{\text{componente } i}$$

De acordo com a analogia entre o Magnetismo e propriedades hidrodinâm-

micas, a densidade da força magnética é:

$$\vec{\mathcal{F}}_{\text{mag}} = \frac{1}{4\pi} \vec{H} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) + \frac{1}{8\pi} \mu \vec{\nabla} H^2 + \frac{1}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \times \vec{B}$$

Para interpretar o primeiro termo, Maxwell define

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi m$$

onde m é a densidade de matéria magnética; então (Maxwell, 1861-1862, p.460):

... sob a hipótese de vórtices moleculares, nosso primeiro termo fornece uma explicação mecânica para a força agindo nos pólos norte ou sul de um campo magnético.

O segundo termo, $\frac{1}{8\pi} \mu \vec{\nabla} H^2$, significa que (Maxwell, 1861-1862, p.460-461):

[...] qualquer corpo colocado no campo será pressionado *em direção a corpos de intensidade magnética mais intensa* com uma força que depende, parcialmente, de sua própria capacidade para a indução magnética e, parcialmente, da taxa de crescimento do quadrado da intensidade.

A lei de Ampère é consequência da própria analogia, de forma que o terceiro termo é $\vec{j} \times \vec{B}$.

Em resumo, um corpo em um campo magnético sofre a força

$$\vec{\mathcal{F}}_{\text{mag}} = m \vec{H} + \frac{1}{8\pi} \mu \vec{\nabla} H^2 + \vec{j} \times \vec{B}$$

3.2.3 Origem da indução elétrica

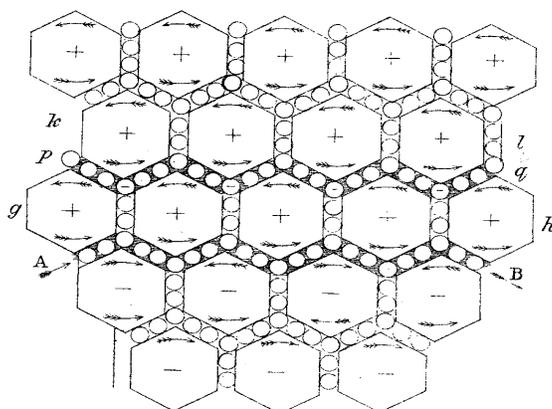


Figura 3.1: **Esquema das “rodas livres”**. (Maxwell, 1861-1862, placa VIII, fig. 2) Os “hexágonos” acima e abaixo de $A-B$ representam os vórtices de éter. As pequenas esferas são as “rodas livres”, colocadas entre os vórtices; elas formam a matéria da eletricidade.

No modelo dos vórtices rotacionais (figura 3.1), os vórtices giram no mesmo sentido. Ora, vórtices contíguos girariam em sentido contrário. Para girarem no mesmo sentido, Maxwell imaginou pequenas esferas entre os vórtices, as quais funcionam como “rodas livres” (*idle wheels*); elas transmitem o movimento de um vórtice para outro e constituem a matéria elétrica.

Inicialmente, vórtices e esferas estão em repouso. Se houver um deslocamento das esferas, por exemplo, de A para B (da esquerda para a direita), significa que uma corrente começou. Esse movimento faz com que os vórtices $g-h$, acima de $A-B$, sejam colocados em movimento no sentido oposto ao do relógio (sentido $+$).

Se as outras esferas são livres para se mover, elas giram no sentido dos ponteiros do relógio (considerado $-$) e, ao mesmo tempo, transladam da direita para a esquerda, em sentido oposto ao da corrente primária, formando uma corrente induzida (Maxwell, 1861-1862, p.477). Se houver resistência (elétrica) do meio, o movimento das esferas causa a rotação dos vórtices $k-l$ na direção $+$, como os vórtices $g-h$, até que os vórtices atinjam uma veloci-

dade tal que o movimento das partículas se reduza, apenas, ao de rotação. O movimento das “rodas livres” não se dá de maneira instantânea e sim, sequencialmente. De fato, de acordo com Maxwell (1861-1862, p.477):

Parece, pois, que os fenômenos da corrente induzida são parte do processo de comunicação da velocidade rotatória dos vórtices de uma parte do campo para outra.

Maxwell exemplifica a lei de Faraday na figura 3.2, a seguir. Na figura, B é um anel circular, sobre o qual é enrolado um fio. Se uma corrente passa no fio, um ímã dentro do anel será afetado, mas nenhum efeito magnético ocorre em um ponto externo; assim, nenhum efeito aparece em um ímã externo. Mas, se um condutor, C , envolver o anel, como na figura, uma força eletromagnética atua no fio e, quando a corrente variar e se o circuito fechar, haverá uma corrente em C (Maxwell, 1861-1862, p.478):

[Esse experimento mostra que] tudo que é preciso [para produzir força eletromotriz] é que as linhas de força passem através do circuito e que essas linhas de força variem em quantidade durante o experimento.

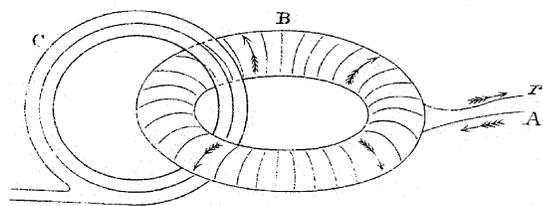


Figura 3.2: **Ilustração da Lei de Faraday, por Maxwell.** (Maxwell, 1861-1862, placa VIII, fig. 3) A figura mostra um bobina por onde passa uma corrente (B) e um circuito (C), envolvendo a bobina.

3.2.4 A natureza mecânica da corrente elétrica

Uma partícula na superfície de um vórtice tem velocidade (linear) de rotação \vec{v} . A normal à superfície é \hat{n} ; então, a componente da velocidade, paralela

à superfície é $\vec{v}_{\parallel} = \vec{v} \times \hat{n}$ ou $v_{\parallel} = v \sin(\hat{\text{ângulo entre }} \hat{v} \text{ e } \hat{n})$. A velocidade de um ponto da superfície é, pois, $u = v_{\parallel}$ ou (Maxwell, 1861-1862, fórmula sem número, p.469)

$$\vec{u} = \vec{v} \times \hat{n}.$$

Essa porção da superfície está em contato com outro vórtice. Uma camada de “rodas livres” entre os vórtices rola sem deslizar com uma velocidade, que é a média das velocidades dos vórtices que separam, $\vec{u}_{\text{roda livre}} = \frac{1}{2}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$, onde os índices 1 e 2 referem-se, respectivamente, a dois vórtices contíguos, vórtice 1 e vórtice 2 (Maxwell, 1861-1862, fórmula (27), p.469):

$$\vec{u}_{\text{roda livre}} = \frac{1}{2}[\vec{v}_1 \times \hat{n}_1 + \vec{v}_2 \times \hat{n}_2] = \frac{1}{2}[\vec{v}_1 - \vec{v}_2] \times \hat{n} = \frac{1}{2}\Delta\vec{v} \times \hat{n}$$

pois as superfícies sendo contíguas, a normal a um vórtice aponta para o interior do outro e resulta $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2 \equiv \hat{n}$. Em componentes:

$$u_i = \frac{1}{2}\epsilon_{i\alpha\beta}\Delta v_{\alpha}n_{\beta} \quad (3.1)$$

ou

$$u_x = \frac{1}{2}[n_z\Delta v_y - n_y\Delta v_z] \quad \text{etc.}$$

Maxwell, agora, define: Se j_x é o número de “rodas livres” atravessando a unidade de área na unidade de tempo na direção x , então o *momentum* transferido na direção x , pelas partículas no volume V é (Maxwell, 1861-1862, fórmula (28), p.470)

$$j_x = \int u_x \sigma dS_x,$$

onde a integral é sobre todas as componentes x de partes da superfície separando dois vórtices e onde σ é o número de “rodas livres” por unidade de área. Maxwell não justifica como chegou a essa expressão, mas ela pode ser verificada por mera análise dimensional; hoje, esse é um cálculo padrão (Apêndice B), que faz parte da formação de um físico. Após integração (Apêndice B):

$$\frac{\text{quantidade de partículas}}{\text{unidade de área} \times \text{unidade de tempo}} \equiv \vec{j} = \frac{1}{2}\sigma\vec{\nabla} \times \vec{v}$$

Maxwell substitui σ por $\frac{1}{2\pi}$, de modo que a lei de Ampère seja válida; então:

$$\vec{j} = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{v}.$$

O \vec{j} calculado aqui é idêntico ao \vec{j} que aparece no terceiro termo de \mathcal{F}_{mag} . Interpretando esses resultados (Maxwell, 1861-1862, p.471):

Parece, portanto, que [...] uma corrente elétrica é representada pela transferência de partículas móveis interpostas entre vórtices vizinhos [...]. Supõe-se que as partículas rolem sem deslizar entre os vórtices, [...] e não se tocam, de modo que enquanto permanecerem dentro de uma molécula, não há perda de energia por resistência. Entretanto, quando há uma transferência geral de partículas em uma direção, elas devem passar de uma molécula para outra e, ao fazê-lo, experimentam resistência, de modo a perder energia e gerar calor.

3.3 A lei de Faraday

Como a indução está associada ao movimento das “rodas livres”, Maxwell estuda como esse movimento afeta o movimento dos vórtices. Quando as “rodas livres” variam sua energia, essa energia passa aos vórtices como energia cinética das partículas na superfície do vórtice. Então, Maxwell calcula a variação de energia do campo (dos vórtices) e das “rodas livres” e as iguala; como consequência, segue-se a lei de Faraday.

A energia do campo é cinética e, substituindo ρ por $\frac{\mu}{4\pi}$, a densidade de energia é (Maxwell, 1861-1862, fórmula (51), p.475):

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \mu \sum_i v_i^2,$$

na qual a escolha da constante vem da aplicação a um caso simples, não discutido neste artigo (Maxwell, 1861-1862, fórmula (44), p.473); então, sendo V o volume, a energia é:

$$U = \mathcal{U} V = \frac{1}{8\pi} \mu V \sum_i v_i^2$$

A variação local da energia é (Maxwell, 1861-1862, fórmula (52), p.475):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{V}{4\pi} \mu \sum_i v_i \frac{dv_i}{dt} = \frac{V}{4\pi} \mu \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (3.2)$$

A seguir, Maxwell calcula a potência transmitida pelas “rodas livres”. Seja $\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}}$ a força por unidade de “rodas livres” ou de matéria elétrica na superfície dos vórtices; equivale, pois, ao campo elétrico, \vec{E} . Como cada “roda livre” toca dois vórtices diferentes, nas extremidades de um diâmetro, a reação é igualmente dividida entre vórtices e é: $-\frac{1}{2}\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}}$. Maxwell faz a densidade superficial de “rodas livres” igual a $\sigma = \frac{1}{2\pi}$; então a (densidade de força) força transmitida a um vórtice é $-\frac{1}{4\pi}\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}}$ e a (densidades de) potência é (Maxwell, 1861-1862, fórmula (47), p.474):

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \oint \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} \cdot \vec{u} dS$$

Expansão em série de Taylor, onde os índices 1 e 2 referem-se, respectivamente, a dois vórtices contíguos, vórtice 1 e vórtice 2:

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(P_0) + d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{F}_i(P_0) = \mathcal{F}_i(P_0) + (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) \partial_\gamma \mathcal{F}_i$$

junto com a expressão da velocidade, (3.1) acima:

$$u_i = \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} n_\alpha \Delta v_\beta$$

permitem achar (Apêndice C):

$$\oint \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} \cdot \vec{u} dS = -\frac{1}{2} \Delta v_\beta \epsilon_{\beta\alpha i} \partial_\alpha \mathcal{F}_i = -\frac{1}{4\pi} \vec{v} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} \right).$$

Então (Maxwell, 1861-1862, fórmula (50), p.475):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} V \quad (3.3)$$

Igualando (3.2) e (3.3), obtém-se (Maxwell, 1861-1862, fórmula (54),

p.475):

$$-\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} = \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (3.4)$$

ou, lembrando que $\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}}$ é a força por quantidade de “rodas livres” ou por unidade de matéria elétrica:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

3.3.1 O estado eletrotônico e a lei de Faraday

Michael Faraday reconhece que a indução envolve um “novo estado elétrico ou condição da matéria”, ao qual deu o nome de “estado eletrotônico” (Michael Faraday, 1831, p.273):

60. Enquanto o fio está sujeito à indução, seja eletro-voltaica seja magneto-elétrica, parece estar em um estado peculiar. Pois resiste à formação de uma corrente nele, enquanto que tal corrente seria produzida, quando em sua condição comum; e, quando não influenciado, tem o poder de originar uma corrente, um poder que o fio não possui em circunstâncias comuns. Essa condição elétrica da matéria não foi reconhecida, até agora, mas ela provavelmente exerce uma influência muito importante em muitos, senão na maioria dos fenômenos produzidos por correntes de eletricidade. Por razões que aparecerão a seguir (71), após aconselhamento com amigos doutos, eu me aventurei a chamá-la de estado *eletrotônico*.

[...]

71. Esse peculiar estado parece ser um estado de tensão e pode ser considerado *equivalente* a uma corrente de eletricidade, pelo menos igual àquela produzida, seja quando a condição é induzida ou [seja quando] destruída. A corrente gerada, entretanto, no início ou no término, não é para ser considerada uma medida do grau de tensão que o estado eletrotônico atingiu.

Maxwell explora a idéia de Faraday de um “estado eletrotônico” (Maxwell, 1856 , p.166):

Quando um condutor se move na vizinhança de uma corrente de eletricidade ou de um ímã ou quando uma corrente ou ímã próximos ao condutor

se movem próximos ao condutor, ou alteram a intensidade, então uma força atua no condutor e produz tensão elétrica ou uma corrente contínua, conforme o circuito seja aberto ou fechado. Essa corrente é produzida somente por mudanças dos fenômenos elétrico ou magnético em volta do condutor e, na medida em que esses [fenômenos] permaneçam constante, não há efeito observado no condutor. Ainda assim, o condutor está em estados diferentes, tanto quando perto de uma corrente ou ímã como quando [for] afastado de sua influência, pois a remoção ou destruição da corrente ou do ímã ocasiona uma corrente, a qual não existiria se o ímã ou a corrente não tivessem estado previamente em ação. Esse tipo de consideração levou o Professor Faraday a conectar sua descoberta da indução de correntes elétricas à concepção de um estado no qual todos os corpos são colocados pela presença de ímãs ou correntes. Esse estado não se manifesta por algum fenômeno, na medida em que ele permaneça impertubável, mas qualquer mudança nesse estado é indicada por uma corrente ou tendência a uma corrente. A esse estado, ele deu o nome de “estado eletrotônico” e, embora ele tenha, posteriormente, tido sucesso em explicar o fenômeno que o sugeriu [ao estado eletrotônico] por meio de concepções menos hipotéticas, em várias ocasiões ele sugeriu a probabilidade de que algum fenômeno possa ser descoberto, o qual tornaria o estado eletrotônico o objeto de indução legítima.

Maxwell identifica o “estado eletrotônico”. Na ausência de “matéria magnética”:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi m = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}} \quad \text{ou} \quad \mu\vec{v} = -\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}.$$

Derivando:

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t}$$

ou, usando a lei de Faraday, (3.4) acima,

$$-\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \left[\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} - \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} \right] = 0$$

A solução é

$$\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \Phi.$$

Inicialmente, porém, Maxwell escreve apenas

$$\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} = \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t}$$

e só posteriormente, embora ainda no mesmo artigo, ele adiciona o gradiente.

É possível, agora, identificar o “estado eletrotônico” (Maxwell, 1861-1862, p.476):

[...] eu apresentei razões para considerar as quantidades, $[\mathcal{A}_x]$, $[\mathcal{A}_y]$, $[\mathcal{A}_z]$ como partes resolvidas [componentes] daquilo que Faraday conjecturou existir e chamou de *estado eletrotônico*.

3.3.2 A força eletromotriz em um corpo em movimento

A variação de velocidade de um vórtice é devida à força eletromotriz, pela Lei de Faraday, $\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}}$. Porém, se — além de sua rotação em torno de um eixo, que responde pelos efeitos magnéticos — o vórtice tem um movimento, que causa uma deformação ou mudança de posição, a variação de velocidade deve ter um termo que responda por esses efeitos. Após longo cálculo (Apêndice D), Maxwell demonstra que esse termo é (Maxwell, 1861-1862, fórmula (68), p.481):

$$\delta \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \delta \vec{r}$$

ou, em termos de componentes,

$$\delta v_i = (v_\alpha \partial_\alpha) \delta x_i$$

onde δx_j é variação do vórtice devida à deformação ou movimento. Então, se $\vec{w} = \frac{\delta \vec{r}}{\delta t}$ for a velocidade com que se dá a deformação:

$$\frac{\delta \vec{v}}{\delta t} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}$$

Então (Maxwell, 1861-1862, fórmula (69), p.481):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}$$

Por outro lado, a derivada convectiva, devida ao movimento \vec{w} , é (Maxwell, 1861-1862, fórmula (70), p.481):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

Igualando:

$$-\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (3.5)$$

Agrupando termos:

$$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

O leitor moderno reconhece a expressão do cálculo vetorial:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{w} \times \vec{v}) = \vec{w} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{v} \vec{\nabla} \cdot \vec{w} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v};$$

no caso em que (Maxwell, 1861-1862, fórmula (72), p.482) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ (ausência de matéria magnética) e em que (Maxwell, 1861-1862, fórmula (71), p.481) $\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = 0$ (fluido incompressível), a expressão se torna

$$\vec{\nabla} \times (\vec{w} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}.$$

Maxwell não invoca a expressão do cálculo vetorial; como trabalha diretamente com componentes, ele escreve (3.5) para a componente x e abre as derivadas, usando a fórmula de derivação de um produto, juntamente com

as condições de ausência de matéria magnética e incompressibilidade. O resultado é o mesmo (Maxwell, 1861-1862, fórmula (73), p.482):

$$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{w} \times \vec{v}) \quad (3.6)$$

Essa expressão pode ser re-escrita usando potenciais, como feito por Maxwell (Maxwell, 1861-1862, p.482). Usando que, na ausência de matéria magnética, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (Maxwell, 1861-1862, fórmula (74), p.482):

$$\vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}} \quad \text{ou} \quad \mu \vec{v} = -\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}$$

Derivando (Maxwell, 1861-1862, fórmula (75), p.482):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t}$$

Colocando esse valor em (3.6):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} - \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{w} \times \mu \vec{v})$$

ou (Maxwell, 1861-1862, fórmula (76), p.482):

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} - \left(\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} + \vec{w} \times \mu \vec{v} \right) \right] = 0$$

A solução é (Maxwell, 1861-1862, fórmula (77), p.482):

$$\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} - \left(\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} + \vec{w} \times \mu \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} \Phi$$

$$\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} = \vec{w} \times \mu \vec{v} + \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi$$

ou, em termos de \vec{B} :

$$\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} = \vec{w} \times \vec{B} + \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi$$

A interpretação dessa expressão é a seguinte (Maxwell, 1861-1862, p.482): O primeiro termo é o efeito devido ao movimento em um campo magnético; o segundo termo é a mudança no estado eletrotônico produzido por alterações da posição ou da intensidade de ímãs ou correntes no campo; o terceiro é a tensão elétrica no campo.

“Modernizando” a expressão, ela coincide com o que, hoje, se chama força de Lorentz em um corpo carregado em movimento (onde q é a carga do corpo), escrita no sistema CGS (John D. Jackson):

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{estático}} + \frac{1}{q} \vec{w} \times \vec{B},$$

onde

$$\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} = q\vec{E} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi = q\vec{E}_{\text{estático}}$$

3.4 A corrente de deslocamento

Maxwell assim descreve a diferença entre um condutor e um dielétrico (Maxwell, 1861-1862, p.490-491):

Aqui temos duas qualidades independentes dos corpos, uma pela qual eles permitem a passagem de eletricidade através deles e outra, pela qual eles permitem que a ação elétrica seja transmitida através deles, mas sem permitir a passagem da eletricidade.

Um corpo condutor pode ser comparado a uma membrana porosa que opõe maior ou menor resistência à passagem de um fluido, enquanto um dielétrico é como uma membrana elástica que pode ser impermeável ao fluido, mas transmite a pressão do fluido em um lado ao [fluido] no outro.

Quando age em um condutor, a força motriz produz uma corrente que, ao encontrar resistência, ocasiona uma transformação intermitente de energia elétrica em calor, a qual é incapaz de ser armazenada, de novo, como energia elétrica por reversão do processo.

A força eletromotriz agindo em um dielétrico produz um estado de polarização de suas partes, similar em distribuição à polaridade de partículas de ferro sob a influência de um ímã e, como a polarização magnética, capaz de ser descrita como um estado no qual cada partícula tem seu pólo em condições opostas.

Em um dielétrico sob indução, pode-se conceber que a eletricidade em cada molécula esteja tão deslocada que um lado se torna positivamente elétrico e o outro, negativamente elétrico, [e conceber que] a eletricidade permaneça inteiramente conectada com a molécula e não passe de uma molécula para outra.

O efeito dessa ação na massa inteira do dielétrico é produzir um deslocamento geral da eletricidade em uma certa direção. Esse deslocamento não se torna uma corrente, pois, quando atinge certo valor, fica constante, mas é o começo de uma corrente e suas variações constituem correntes na direção positiva ou negativa, dependendo se o deslocamento cresce ou decresce.

De acordo com o texto de Maxwell, acima, existe uma corrente — a corrente de deslocamento — devida à intermitência do deslocamento, $\vec{\lambda}$; portanto, por definição:

$$\vec{j}_{\text{deslocamento}} = \frac{\partial \vec{\lambda}}{\partial t}.$$

A definição de “deslocamento” é apresentada de forma mais sucinta em (Maxwell, 1864, p.554):

Deslocamento elétrico consiste na eletrificação oposta dos lados de uma molécula ou partícula de um corpo que pode ou não ser acompanhada de transmissão através do corpo.

Por outro lado, a força eletromotriz por unidade de “rodas livres” é definida como proporcional ao deslocamento (talvez por ser elástica):

$$\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} = -4\pi\epsilon^2\vec{\lambda}$$

onde ϵ é um coeficiente que depende da natureza do dielétrico. Então:

$$\vec{j}_{\text{deslocamento}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}}}{\partial t}$$

ou, como $\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}}$ é força por unidade de “rodas livres”:

$$\vec{j}_{\text{deslocamento}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

3.5 As equações propostas por Maxwell

Somente em 1864, em *A dynamical theory of the electromagnetic field*, Maxwell reúne esses resultados em um conjunto de equações para o eletromagnetismo. Nesse artigo, ele apresenta uma descrição macroscópica do eletromagnetismo, o que não significa que tenha abandonado suas ideias anteriores. As equações são (Maxwell, 1864, p.534 e p.562):

(A) Relação entre deslocamento elétrico, corrente real, e corrente total, composta por ambas:

$$\text{corrente total: } \vec{J} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{\lambda}}{\partial t} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{deslocamento}} = \vec{j} - \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}}}{\partial t}$$

(B) Relação entre as linhas de força magnética e os coeficientes de indução de um circuito:

$$\text{força magnética: } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{or} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}} = \mu \vec{H}$$

(C) Relação entre a intensidade de uma corrente e seus efeitos magnéticos, de acordo com o sistema eletromagnético de medida:

$$\text{corrente elétrica: } \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{deslocamento}}$$

(D) Valor da força eletromotriz em um corpo, a qual resulta do movimento do um corpo no campo, da alteração do próprio campo e da variação do potencial de uma parte do campo a outra:

$$\text{força electromotriz: } \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} = \vec{w} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi$$

(E) Relação entre o deslocamento elétrico e a força eletromotriz que o produz:

$$\text{elasticidade elétrica: } \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} = k \vec{\lambda}$$

(F) Relação entre uma corrente elétrica e a força eletromotriz que a pro-

duz:

resistência elétrica: $\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} = \sigma^{-1} \vec{j}$ (condutores)

(G) Relação entre a quantidade de eletricidade livre em um ponto e o deslocamento elétrico na vizinhança:

equação da eletricidade livre: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\lambda} = e$

(H) Relação entre o crescimento ou diminuição de eletricidade livre e as correntes elétricas na vizinhança:

equação da continuidade: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

Capítulo 4

Das “rodas livres” ao elétron

4.1 O problema da condução no contexto da teoria de Maxwell

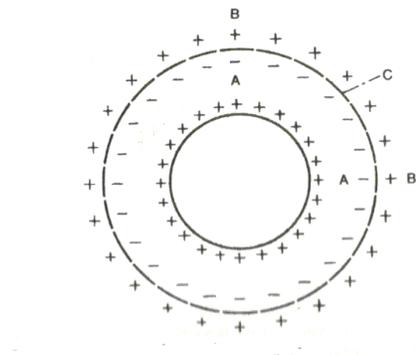


Figura 4.1: Esquema de uma esfera condutora em um meio dielétrico. A concepção maxwelliana dos corpos condutores (Buchwald, p.26).

O trabalho de Maxwell influenciou uma geração, que incluiu George Francis FitzGerald (1851-1901), Joseph Larmor (1857-1942), Oliver Lodge (1851-1940), Oliver Heaviside (1850-1925), Joseph John Thomson (1856-1940). FitzGerald e Lodge desenvolveram modelos mecânicos para o éter (Bruce J. Hunt). Esses autores tiveram de lidar com o problema das naturezas da condução e da corrente elétrica.

A natureza dos condutores é ilustrada na figura 4.1, acima (Buchwald,

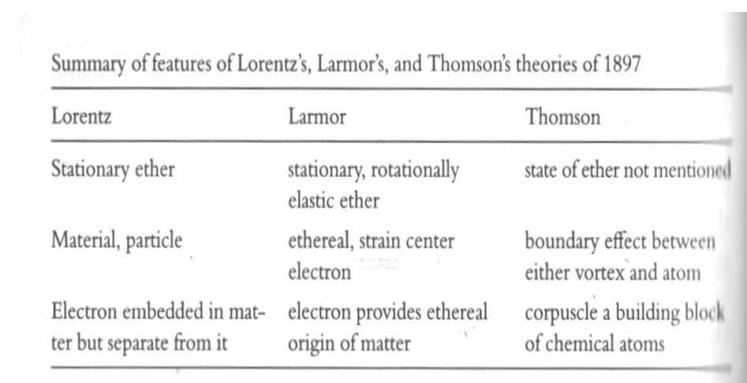
p.26-27). A figura mostra uma esfera condutora dentro de um dielétrico. O dielétrico é dividido em duas partes A e B : A parte B é limitada por uma esfera imaginária C e pelo infinito; a parte A está entre C e a esfera condutora. Na presença de um campo, elétrico, as cargas no dielétrico polarizam-se. Suponha que a superfície externa de C seja $+$; a interna será $-$; no limite em que C se aproxima da esfera, a superfície externa de C é a esfera. A interpretação não é que a esfera possui uma carga livre nela depositada, mas é a polarização que confere à parte externa da superfície do dielétrico em contato com a esfera a carga $+$.

A corrente de deslocamento era justificada no modelo, mas não a condução de eletricidade, o \vec{j} (Buchwald, p.23-34). Isso trouxe um problema (Joseph Larmor, p.453-458), descrito a seguir, como formulado em Buchwald (p.142-150). Dielétricos possuem elasticidade do éter, de modo que $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \neq 0$, porém condutores não têm elasticidade rotacional e $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$. Como entender a propagação de eletricidade em um circuito? Pela lei de Ampère, em torno da secção do fio deveria valer $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$, onde I é a corrente; mas em condutores $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$; trocando \vec{H} por \vec{E} , como fez Larmor, o leitor moderno reconhece o argumento usado, hoje, para introduzir a corrente de deslocamento. Larmor resolve o problema (Larmor, p.453-458; Buchwald, p.142-150), postulando que o éter sofre uma ruptura de elasticidade em volta do condutor, de modo a formar “tubos” de escoamento com elasticidade rotacional, em torno dos quais a circulação é não nula. A solução de Larmor sofre uma crítica de Kelvin: a força entre dois de tais tubos de escoamento tem sinal diferente da força entre dois fios, dada pela lei de Ampère (Buchwald, p.291-293; Larmor, p.504-508). Na procura de uma solução para o problema, Larmor — sempre guiado por FitzGerald — abandonou o modelo e colocou pontos de elasticidade ou centros de rotacional na superfície dos tubos — os elétrons (Larmor, p.455). Esse elétron teórico não necessariamente foi considerado como parte integrante da matéria ou do átomo (Buchwald; Isobel Falconer). A história que se segue é longa.

4.2 Um pouco da historiografia: o estado da arte no final do século XIX

J.J. Thomson é considerado o descobridor do elétron. Em 1897, ele anunciou o resultado de seus experimentos com raios catódicos; sugeriu que os raios catódicos fossem constituídos de partículas subatômicas negativas, a que chamou de “corpúsculos”. Posteriormente, ele as considerou como constituintes universais da matéria. Segundo a historiadora Isobel Falconer, as pesquisas realizadas por Thomson não tinham como preocupação inicial explicar a natureza dos raios catódicos, mas sim compreender melhor a condução dos raios de eletricidade em gases.

Falconer, em seu artigo *Corpuscles to electrons*, discute a teoria corpuscular proposta por Thomson e discute uma questão polêmica entre historiadores (Falconer, p.77): “...quão importante foram os experimentos de Thomson para estabelecer a existência de elétrons?” Para Falconer, a ideia de “descoberta” e de “descobridor” acaba de certa forma mascarando um episódio histórico importante, que se estendeu por vários anos e envolveu uma variedade enorme de pesquisadores.



Summary of features of Lorentz's, Larmor's, and Thomson's theories of 1897		
Lorentz	Larmor	Thomson
Stationary ether	stationary, rotationally elastic ether	state of ether not mentioned
Material, particle	ethereal, strain center electron	boundary effect between ether vortex and atom
Electron embedded in matter but separate from it	electron provides ethereal origin of matter	corpuscle a building block of chemical atoms

Figura 4.2: **Teorias de elétron em 1897.** (Falconer, p.86).

O próprio Thomson recordou mais tarde que sua teoria de “corpúsculos” não havia sido aceita muito bem até 1899, quando ele falou novamente do tema no encontro da *British Association* daquele mesmo ano. Segundo Falconer (p.77), por volta de 1900 a existência de elétrons tornava-se aceitável

e uma nova visão do eletromagnetismo estava surgindo com as teorias de Hendrik Lorentz (1853-1928), Larmor e Walter Kaufman (1871-1947), entre outros. Lorentz e Larmor assumiram a existência de um “elétron”, como que já havia sido postulado na teoria de Larmor. Falconer pergunta (p.77): “. . . mas esses elétrons foram os mesmos “corpúsculos” apresentados na teoria de Thomson?”. Para responder a essas perguntas, Falconer analisa relatos de duas escolas (alemã e britânica) e suas diferentes interpretações e ideias sobre o desenvolvimento da hipótese do elétron. Falconer argumenta que as diferentes tradições levaram os cientistas a diferentes conceitos de elétrons. Ela também aponta para o fato de que experiências idênticas tiveram interpretações e significados diferentes dentro dessas tradições. O britânico Lodge inicia seu livro *Electrons* analisando as propriedades de uma partícula carregada. Ele analisa os trabalhos de Heaviside a respeito do éter circundante, o de John Henry Poynting (1852-1914) sobre a transmissão de energia e o de Larmor sobre a energia irradiada de partículas carregadas. Essas ideias levam Lodge a escrever um capítulo em que trata a hipótese proposta por J.J. Thomson, em 1881, de que uma partícula portadora de carga em movimento tem uma inércia extra associada a ela, que depende diretamente da sua velocidade, o que Thomson entendeu como a massa eletromagnética. Em seguida, Lodge procura traçar uma ideia de unidade indivisível de carga elétrica, os chamados “átomos de eletricidade”, partindo das leis da Eletrólise, de Faraday. Lodge reconhece que George Johnstone Stoney (1826-1911) foi o primeiro cientista a nomear a unidade de carga como “elétron”; ele obtém a razão carga-massa do íon de Hidrogênio, citando experiências feitas pelo próprio Stoney, por Kelvin e Johann Josef Loschmidt (1821-1895). Lodge passa então a tentar compreender a natureza dos raios catódicos e, além disso, como menciona Falconer, Franz Arthur Friedrich Schuster (1851-1934) e, um pouco mais tarde, Edward John Sealy Townsend (1868-1957) observaram que os portadores de eletricidade em um tubo de descarga são altamente móveis, logo deveriam ter dimensões menores do que os átomos. Então, Lodge sugere que o elétron pode ser uma partícula, em vez de simplesmente uma determinada quantidade de carga (Falconer, p.78-79). Para Lodge, todos os fenômenos poderiam ser reduzidos à matéria em movi-

mento, podendo ser descritos pela determinação de sua massa e velocidade, visão típica dos físicos britânicos que tinham enraizada em sua formação a filosofia mecanicista. Lodge (*apud* Falconer, p.79-80) resume:

As magnitudes que precisam de determinação experimental em conexão com os raios catódicos, a fim de resolver a questão e determinar sua verdadeira natureza, são a velocidade, a carga elétrica, e se possível a massa das partículas de vôo.

Kaufmann, representante da escola alemã, começa sua discussão analisando a teoria eletromagnética de Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), que incluía a ação à distância, teoria contrária à proposta por Faraday e Maxwell. No entanto, Weber não efetua nenhuma tentativa para avaliar o tamanho do átomo de eletricidade. Embora na teoria de Maxwell a formulação matemática fosse desprovida de concepções atomísticas, ela pode explicar perfeitamente os fenômenos fundamentais, assim como a teoria de Weber, mas foi a única maneira de explicar as ondas de Hertz. Mas a teoria de Maxwell não conseguiu explicar alguns fenômenos ópticos, tais como desvios de índice de refração e a dependência das cores em relação aos índices de refração (Falconer, p.80-81). Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) tentou solucionar esse impasse, propondo uma teoria mecânica de dispersão, fundada na vibração molecular da matéria. E, em 1880, Lorentz apresentou as bases de uma teoria análoga, onde considera que cada molécula contém pontos materiais carregados com eletricidade, denominados por ele de “íons”, que seriam a origem das vibrações elétricas em um período definido. Assim como Lodge, Kaufmann aponta que as leis da eletrólise, de Faraday, haviam fornecido evidências concretas para a existência de átomos de eletricidade que, segundo o próprio Kaufmann, eram as partículas elétricas já apontadas por Lorentz (Falconer, p.81). Em 1874, Stoney estimou o valor da carga elementar, e , utilizando as leis de Faraday da eletrólise, apresentando seu resultado em uma reunião da *British Association for the Advancement of Science*, publicando o resultado apenas em em 1881; o valor achado foi de $10^{-20}C$ (Francisco Caruso e Vitor Oguri, p.226).

Em 1896, Pieter Zeeman (1865-1943) confirmou experimentalmente as previsões que Lorentz fizera da ação do campo magnético sobre as linhas espectrais. Zeeman conseguiu apenas observar o alargamento das raias espectrais do vapor de sódio (Na) e em uma das primeiras aplicações da expressão da força de Lorentz, esse resultado permitiu-lhe colocar em evidência a existência de uma carga fundamental no interior do átomo (Caruso e Oguri, p.233). Zeeman estimou a ordem de grandeza da razão carga-massa do que hoje se chama elétron (cerca de 2000 vezes menor do que o íon de hidrogênio). Assim, para Kauffman, o elétron foi formulado teoricamente, e a sua existência foi estabelecida no efeito Zeeman em 1896 (Falconer, p.82).

Falconer questiona se os resultados referentes ao desenvolvimento teórico proveniente das escolas britânica e alemã foram as mesmas. E, ainda, se o “elétron” postulado por Lorentz e Zeeman foi o mesmo que Thomson demonstrou em 1897. Segundo ela, a situação se complica ainda mais, pois Lodge e Kauffman falam de “elétrons”, enquanto, em 1896, Lorentz denomina sua partícula de “íon” e Thomson, como já foi citado, chamava sua partícula de “corpúsculo”. Lorentz mudou para elétron em 1899, enquanto Thomson se agarrou a seus “corpúsculos” até 1911-1912.

Buscando respostas para essas questões, Falconer analisa o trabalho desenvolvido por Larmor (1857-1942), cientista negligenciado nos relatos de Lodge e Kauffman. Larmor chegou a uma teoria de partículas elétricas que abordavam os mesmos problemas apresentadas na teoria de Lorentz. Seguindo a sugestão de FitzGerald, Larmor nomeia suas partículas de “elétrons”, definindo-os como centro de tensão radial em um éter rotacional e com propriedades elásticas. Larmor escreveu (*apud* Falconer, p.83):

Sistemas materiais são formados exclusivamente a partir de pontos singulares no éter que temos chamado de elétrons e que os átomos são simplesmente colocações muito estáveis de elétrons girando.

Assim como Larmor e Lorentz, Thomson também estava preocupado com problemas envolvendo a interação entre a o éter e a matéria, mas sua teoria foi formulada para responder um conjunto de perguntas completamente diferente do que as propostas por Larmor. Ele foi o único a perceber os

efeitos químicos como importante. Thomson bebeu na fonte da teoria eletromagnética de Maxwell na qual o éter era considerado contínuo e permeava toda a matéria. É importante lembrar que a visão de Maxwell da eletricidade foi contruída a partir de um estado de tensão do éter, estado esse que se manifestava de maneira contínua ao longo de qualquer meio, entretanto, entre dois meios de diferente condutividade e permeabilidade dielétrica a carga foi definida como uma espécie de manifestação dessa descontinuidade. A carga ficava distribuída uniformemente ao longo do contorno e não poderiam existir em qualquer lugar a não ser na fronteira. Thomson, continuando a tradição maxwelliana, acreditava que a carga elétrica existia apenas na fronteira que separa um condutor de um dielétrico, porém por volta de 1890, com as evidências propiciadas pela eletrólise, ele reconheceu que a carga elétrica se manifestava de maneira discreta e não contínua (Falconer, p.84).

4.3 Dois problemas

4.3.1 A eletrólise

Steven Weinberg (p.92) comenta, em seu livro *The Discovery of Subatomic Particles*, que a eletrólise já apontava para a existência da unidade de carga.

Faraday, em 1833, fez experimentos sobre os efeitos de uma corrente elétrica atuando em soluções, o que constitui a *eletrólise*. Colocando-se duas placas eletricamente carregadas, com polarizações opostas — os eletrodos — em uma cuba com uma solução de um sal, como o sulfato de cobre ($CuSO_4$), ou de um ácido, como o nitrato de prata ($AgNO_3$), resulta a produção de um campo elétrico que vai atuar sobre o fluido. Como consequência da ação desse campo, os metais (íons positivos) de tais soluções se depositam no eletrodo negativo (catodo), enquanto os não-metais (íons negativos) deslocam-se em direção ao eletrodo positivo (anodo) (Caruso e Oguri, p.224-225).

Desses experimentos, Faraday conclui (*apud* Caruso e Oguri, p.225):

a quantidade de massa (m) de substância depositada em cada um dos eletrodos, durante um dado intervalo de tempo, é proporcional à carga (Q) que percorre o circuito, ou seja,

$$m = K.Q, (1^{\text{a}} \text{ lei})$$

onde K , denominado *equivalente eletroquímico*, representa a massa liberada por unidade de carga durante a eletrólise. O equivalente eletroquímico (K) é proporcional ao chamado equivalente químico, $\frac{\mu}{n}$, onde μ é o peso atômico do elemento que constitui a substância depositada em um dos eletrodos e n a sua valência, ou seja,

$$\frac{\mu}{n} = F.K (2^{\text{a}} \text{ lei})$$

O fator de proporcionalidade, F , cujo valor é da ordem de $9,65 \times 10^4$ C, é denominado *constante de Faraday* e representa a carga depositada no eletrodo por um mol da substância de valência unitária.

Helmholtz, discursando a respeito dos resultados encontrados por Faraday afirma (*apud* Caruso e Oguri, p.226):

Se aceitarmos a hipótese de que as substâncias elementares são compostas de átomos, não podemos deixar de concluir que também a eletricidade, tanto positiva quanto negativa, se subdivide em porções elementares que se comportam como átomos de eletricidade.

Maxwell já havia reconhecido a importância da eletrólise (*apud* Caruso e Oguri, p.227), quando afirma que

de todos os fenômenos elétricos, a eletrólise parece ser o que melhor nos oferece um maior discernimento sobre a verdadeira natureza da corrente elétrica, porque encontramos correntes de matéria ordinária e correntes de eletricidade formando partes essenciais do mesmo fenômeno.

4.3.2 Os raios catódicos

Descargas elétricas em tubos de vidro contendo um gás a baixa pressão eram estudadas desde 1709. Cientistas, na época, descobriram que, quanto mais baixa fosse a pressão no interior do tubo, menos o gás brilhava e, ainda assim, uma corrente elétrica fluía, sendo possível observar uma mancha brilhante que se formava do lado oposto do catodo — eletrodo negativo. Sabe-se, hoje, que

as luzes são emitidas na ionização das moléculas do gás, quando colidem com elétrons provenientes do catodo. Se o vácuo for muito bom, ocorrem menos colisões, o que resulta em um feixe bem colimado dos elétrons do catodo. Por volta de 1800, com o auxílio de uma bomba de ar, o vácuo dentro do tubo foi sensivelmente melhorado, permitindo que os cientistas pudessem investigar o fenômeno mais a fundo.

Como visto na secção 4.2, a natureza do raio foi um problema longamente debatido. Do ponto de vista da Física, em retrospecto, o que distinguiu a pesquisa de Thomson foi que, diferentemente de outros pesquisadores, ele conseguiu obter um bom vácuo e um “bom feixe”, o que lhe permitiu observar desvios do feixe por forças elétricas e magnéticas. Então foi possível medir a deflexão do feixe por campos elétrico e magnético e calcular razão entre a carga e a massa dessas partículas, encontrando um valor bem superior ao dos íons na eletrólise. Assim, ou as partículas que constituíam os raios catódicos, os “corpúsculos”, teriam cargas elétricas muito grandes ou seriam extremamente leves. A massa do “corpúsculo” seria 1836 vezes menor que a do hidrogênio ionizado (H^+).

O experimento de Thomson

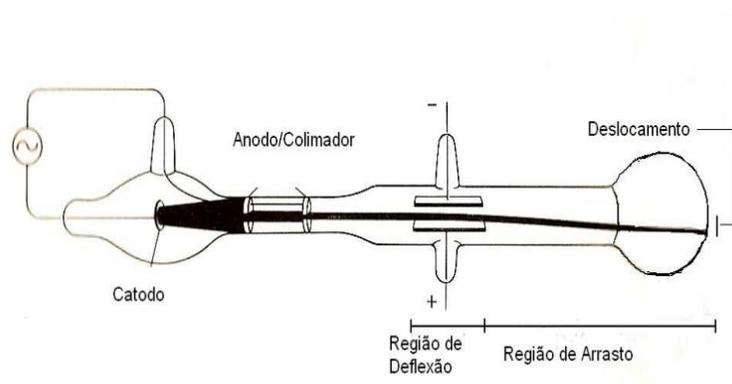


Figura 4.3: **Esquema de um tubo de raios catódicos.** O raio atravessa uma região, chamada de deflexão, com comprimento L_d , onde sofre forças perpendiculares à direção do raio. O raio emerge na região de arrasto, com comprimento L_a , onde não sofre forças e se move com movimento retilíneo uniforme.

A figura mostra o esquema do tubo de raios catódicos, tirados de um

artigo clássico de Thomson (Weinberg, p.30). O feixe de partículas sai do catodo, passa pela região de deflexão, onde é desviado por campos elétrico e/ou magnético, perpendiculares ao feixe. Em seguida, o raio atravessa a região de arrasto, onde se move com movimento retilíneo uniforme, até alcançar a parede do tubo. Uma mancha luminosa aparece onde o raio bate na parede do vidro no final do tubo.

O experimento de Thomson consistiu em medir o deslocamento do raio, devido primeiro à força elétrica e, depois, devido à força magnética; o deslocamento é dado pela distância entre a posição da mancha e a direção original do raio (quando não há forças externas). Usando os valores dos deslocamentos, é possível achar a razão $\frac{\text{massa}}{\text{carga}}$.

O raio sai do catodo com uma velocidade v_{\parallel} . Na região de deflexão, o raio sofre uma aceleração perpendicular a ele; adquire, pois, uma velocidade v_{\perp} dada pela lei de Newton:

$$v_{\perp} = at_d = \frac{F_{\perp}}{m}t_d = \frac{F_{\perp}}{m} \times \frac{L_d}{v_{\parallel}}, \quad (4.1)$$

na qual t_d é o tempo gasto na região. Na região de arrasto, o raio move com uma velocidade uniforme, com componentes paralela e perpendicular, isto é, $\vec{v}_a = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$; portanto, o deslocamento perpendicular é:

$$D_{\perp} = v_{\perp}t_a = v_{\perp} \times \frac{L_a}{v_{\parallel}}, \quad (4.2)$$

em que t_a é o tempo gasto na região. Colocando o valor de v_{\perp} de (4.1) em (4.2), é fácil obter:

$$D_{\perp} = \frac{F_{\perp}L_dL_a}{mv_{\parallel}^2} \quad (4.3)$$

Na montagem da figura, o campo elétrico (\vec{E}) é vertical, de cima para baixo e a força é igual a $F_{el} = qE$; uma carga negativa sofre um deslocamento para baixo. O campo magnético (\vec{B}) é aplicado perpendicular à folha de papel, saindo do papel, e a força magnética é $F_{mag} = qv_{\parallel}B$; uma carga negativa sofre um deslocamento para baixo. Colocando esses valores, respectivamente

em (4.3):

$$D_{\text{el}} = \frac{qEL_dL_a}{mv_{\parallel}^2} \quad \text{e} \quad D_{\text{mag}} = \frac{qv_{\parallel}BL_dL_a}{mv_{\parallel}^2} \quad (4.4)$$

O valor desconhecido de v_{\parallel} pode, então, ser calculado:

$$v_{\parallel} = \left(\frac{D_{\text{mag}}}{D_{\text{el}}} \right) \left(\frac{E}{B} \right) \quad (4.5)$$

e substituindo 4.5 em qualquer uma das equações em 4.4:

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2L_dL_aD_{\text{el}}}{ED_{\text{mag}}^2}.$$

ou seja, a razão $\frac{\text{massa}}{\text{carga}}$ é obtida em termos de grandezas conhecidas.

4.4 O elétron

Gas in cathode-ray tube	Material of cathode	Electric field (N/C)	Electric deflection (m)	Magnetic field (N/amp-m)	Magnetic deflection (m)	Deduced velocity of ray particles (m/sec)	Deduced ratio of particle mass to charge (kg/C)
Air	Aluminum	1.5×10^4	0.08	5.5×10^{-4}	0.08	2.7×10^7	1.4×10^{-11}
Air	Aluminum	1.5×10^4	0.095	5.4×10^{-4}	0.095	2.8×10^7	1.1×10^{-11}
Air	Aluminum	1.5×10^4	0.13	6.6×10^{-4}	0.13	2.2×10^7	1.2×10^{-11}
Hydrogen	Aluminum	1.5×10^4	0.09	6.3×10^{-4}	0.09	2.4×10^7	1.6×10^{-11}
Carbon dioxide	Aluminum	1.5×10^4	0.11	6.9×10^{-4}	0.11	2.2×10^7	1.6×10^{-11}
Air	Platinum	1.8×10^4	0.06	5.0×10^{-4}	0.06	3.6×10^7	1.3×10^{-11}
Air	Platinum	1.0×10^4	0.07	3.6×10^{-4}	0.07	2.8×10^7	1.0×10^{-11}

Figura 4.4: Alguns resultados de Thomson. (Weinberg, p.54)

A tabela acima mostra resultados obtidos por Thomson, em 1867. Como mencionado, historiadores chamam atenção para a “pobreza” dos resultados. Mesmo assim, em seu clássico *Cathode Rays*, Thomson lança a hipótese de que as partículas dos raios catódicos são constituintes fundamentais de toda

matéria ordinária (*apud* Weinberg, p.66):

[...] nós temos nos raios catódicos matéria em um novo estado, um estado em que a subdivisão da matéria está carregada muito além do que no estado gasoso ordinário: Um estado em que toda matéria — isto é, matéria derivada de diferentes fontes tais como hidrogênio, oxigênio etc. — é de uma única espécie; essa matéria sendo a substância da qual os elementos químicos são formados

Weinberg (p.67) considera que “. . . não havia como a existência de partículas dentro do átomo pudesse ser verificada com base nos experimentos de Thomson de 1867”. Entretanto, continua Weinberg, havia indicações que guiaram Thomson. Weinberg cita, inicialmente, a universalidade do valor da razão $\frac{\text{massa}}{\text{carga}}$, que independe do gás no tubo. Outro fato citado por Weinberg são os experimentos de Zeeman em espectroscopia; ele mede a razão $\frac{\text{massa}}{\text{carga}}$ do quer que seja que conduz corrente em átomos e os valores foram similares aos de Thomson (Weinberg, p.69).

Capítulo 5

Arremate

Esta tese se situa na História do Eletromagnetismo. No Capítulo 2, são apresentadas as primeiras ideias de fluido elétrico e fluido magnético. No capítulo 3, é apresentado o modelo de éter para o Eletromagnetismo, que dominou o pensamento Inglês na segunda metade do século XIX. Entretanto, uma dificuldade do modelo foi explicar a corrente de condução. No Capítulo 4, são apresentados sumários de problemas e de pesquisas que culminaram com o estabelecimento do elétron.

A passagem da noção de um fluido de eletricidade para a noção de elétron envolveu um trabalho teórico sobre o significado da corrente de condução, associado a Larmor, FitzGerald e Lorentz e trabalhos experimentais sobre a condução de eletricidade em líquidos, gases e sólidos, associado a Thomson, Schuster, Wiechert e muitos outros; foi um trabalho complexo e apresentou-se um resumo dos resultados na figura 4.2. Essa história é controversa e o centro do debate é a atribuição da descoberta do elétron a J.J. Thomson; essa controvérsia é um assunto longo e cheio de meandros, o qual não tem lugar no escopo da tese.

Apêndice A

Cálculo das pressões

Inicialmente, Maxwell supõe vórtices circulares e homogêneos, girando com a mesma velocidade angular, em torno de eixos paralelos (Maxwell, 1861-1862, p.456). A pressão radial, perpendicular ao eixo, é dada pela força centrífuga em uma superfície do éter, δS , perpendicular ao raio do círculo (r). A velocidade tangencial não é constante: $r\omega = v$; a pressão na circunferência é:

$$\begin{aligned} \text{força centrífuga: } \delta F &= \rho \delta V \frac{v^2}{r} = \rho \delta r \delta S \frac{v^2}{r} \quad (\text{onde } \delta V = \delta r \delta S) \\ \text{pressão na face } \delta S: \delta p_r &= \frac{\delta F}{\delta S} = \rho \delta r \frac{v^2}{r} = \rho \delta r r^2 \frac{\omega^2}{r} = \rho \omega^2 r \delta r \end{aligned}$$

Integrando, acha-se a pressão na circunferência (Maxwell, 1861-1862, fórmula sem número, p.456): $p_r = p'_0 + \frac{\rho}{2}\omega^2 r^2 = p'_0 + \frac{\rho}{2}v^2$, onde p'_0 é uma pressão no eixo. Maxwell introduz, ainda, uma pressão média no eixo, devida à não uniformidade da velocidade ao longo do raio (Maxwell, 1861-1862, fórmula sem número, p.456): $p_m - p'_0 = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2}\rho v^2\right) = \frac{1}{4}\rho v^2$, logo $p_m = p'_0 + \frac{1}{4}\rho v^2$.

No eixo atuam, pois, a pressão centrífuga e uma pressão média: $p_r - p_m = \frac{1}{4}\rho v^2$. Postos lado a lado, os vórtices formam um fluido que exerce a pressão $p = \frac{1}{4}\rho v^2$. Se os vórtices não são circulares e se as velocidades angulares e densidades não são uniformes, mas variam igualmente para cada vórtice, o resultado é generalizado: $p = C\rho v^2$, onde C depende da distribuição da velocidade angular e da densidade. Maxwell substitui $C\rho$ por $\frac{\mu}{4\pi}$, de modo

que (Maxwell,1861-1862, p.457): $p = \frac{\mu}{4\pi} v^2$.

As componentes da pressão (tensor *stress*) exercida pelo meio, paralelamente aos planos coordenados, parecem ser originadas dos efeitos centrífugos:

$$p_{ij} = \frac{1}{4\pi} \mu v_i v_j = p_{ji}$$

As componentes perpendiculares aos planos, paralelas aos eixos, parecem ser uma generalização; Maxwell inicia o capítulo com uma análise dimensional elementar, mostrando que pressão é proporcional a ρv^2 , o que legitima a analogia; então:

$$p_{ii} = \frac{1}{4\pi} \mu v_i^2 - p_0 \quad (\text{sem somar em } i)$$

onde p_0 é uma pressão hidrostática isotrópica, introduzida talvez para opor a um achatamento ao longo dos eixos, efeito para o qual Maxwell chama atenção (Maxwell,1861-1862, p.457).

Apêndice B

Cálculo da quantidade de rodas livres transferidas através da unidade de área na direção ϵ_i na unidade de tempo

Seja $\hat{\epsilon}_i$ qualquer uma das direções \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} . As partículas que cruzam a área normal a $\hat{\epsilon}_i$ no tempo δt são aquelas contidas no cilindro de volume $(\vec{u}\delta t) \cdot \hat{\epsilon}_i dS_i$ (sem somar em i). Então, se ρ é a densidade de matéria elétrica:

$$\text{massa de matéria elétrica através de } d\vec{S}_i = dS_i \hat{\epsilon}_i \text{ (sem soma em } i) \text{ em } \delta t = \rho \vec{u} \cdot \hat{\epsilon}_i dS_i \delta t \quad (\text{sem soma em } i)$$

$$\frac{\text{massa de matéria elétrica através de } d\vec{S}_i}{\text{unidade de tempo}} = \rho \vec{u} \cdot \hat{\epsilon}_i dS_i \equiv \rho u_i dS_i \quad (\text{sem soma em } i)$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{massa de matéria elétrica através da superfície separando dois vórtices, movendo na direção } \hat{\epsilon}_i}{\text{unidade de tempo}} &= \\ &= \oint_{\sum S_i} \rho u_i dS_i, \end{aligned}$$

onde $\sum S_i$ indica que a soma é sobre todas as superfícies S_i . Ora, por definição:

$$j_i = \frac{\text{massa de matéria elétrica transferida na direção } \hat{\epsilon}_i}{\text{unidade de área} \times \text{unidade de tempo}}$$

e

$$j_i \times \text{área} = \oint_{\Sigma S_i} \rho u_i dS_i;$$

notando que ρ tem unidades de $\frac{\sigma}{\text{distância}}$, onde σ é a densidade superficial de matéria elétrica, obtém-se (Maxwell, 1861-1862, fórmula (28), p.470):

$$j_i V = \oint_{\Sigma S_i} \sigma u_i dS_i$$

B.1 Cálculo da integral

Substituir u_i pelo seu valor, (3.1) acima, $u_i = \frac{1}{2}\epsilon_{i\alpha\beta}n_\alpha\Delta v_\beta$ e expandir em série de Taylor, em torno de P , onde 1 e 2 referem-se, respectivamente, a dois vórtices contíguos, vórtice 1 e vórtice 2:

$$\Delta v_\beta = (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) [\partial_\gamma v_\beta]_P$$

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma S_i} u_i dS_i &= \sum_i \oint_{S_i} \frac{1}{2}\epsilon_{i\alpha\beta}n_\alpha(x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) [\partial_\gamma v_\beta]_P dS_i \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{i\alpha\beta} [\partial_\gamma v_\beta]_P \sum_i \oint_{S_i} n_\alpha(x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) dS_i \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{i\alpha\beta} [\partial_\gamma v_\beta]_P \sum_i \int_{V_i} dV_i \partial_\alpha(x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) = \frac{1}{2}\epsilon_{i\alpha\beta} [\partial_\gamma v_\beta]_P \delta_{\alpha\gamma} \sum_i \int dV_i \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{i\alpha\beta} [\partial_\gamma v_\beta]_P \delta_{\alpha\gamma} \sum_i V_i = \frac{1}{2}\epsilon_{i\alpha\beta} [\partial_\alpha v_\beta]_P V \\ &= \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \times v)(P) \right]_{\text{componente } i} V \end{aligned}$$

Apêndice C

Potência transmitida pelas rodas livres

Usando a notação das secções 3.2.3 e 3.2.4:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i &= \mathcal{F}_i(P_0) + d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{F}_i(P_0) = \mathcal{F}_i(P_0) + (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) \partial_\gamma \mathcal{F}_i \\ u_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} n_\alpha \Delta v_\beta\end{aligned}$$

obtém-se:

$$\begin{aligned}\oint \vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} \cdot \vec{n} dS &= \oint (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) \partial_\gamma \mathcal{F}_i \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} n_\alpha \Delta v_\beta dS \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{i\alpha\beta} \Delta v_\beta \partial_\gamma \mathcal{F}_i \oint (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) n_\alpha dS \\ &= -\frac{1}{2} \Delta v_\beta \epsilon_{\beta\alpha i} \partial_\gamma \mathcal{F}_i \int dV \partial_\alpha (x_{1\gamma} - x_{2\gamma}) \\ &= -\frac{1}{2} \Delta v_\beta \epsilon_{\beta\alpha i} \partial_\gamma \mathcal{F}_i \delta_{\alpha\gamma} \\ &= -\frac{1}{2} \Delta v_\beta \epsilon_{\beta\alpha i} \partial_\alpha \mathcal{F}_i\end{aligned}$$

Apêndice D

Variação da velocidade dos vórtices

D.1 Variação da velocidade por translação infinitesimal da superfície do vórtice

Para deformar ou mover as faces de um cubo infinitesimal do vórtice, um trabalho tem de ser realizado contra as pressões calculadas no Apêndice A. Então, usando os valores das pressões, no Apêndice A:

trabalho para mover a face yz de δx :

$$\text{força} \times \delta x = [p_{xx} \times \text{área}] \times \delta x = -\frac{\mu}{4\pi} v_x^2 yz \delta x$$

trabalho para mover a face xz de δy :

$$\text{força} \times \delta y = [p_{yy} \times \text{área}] \times \delta y = -\frac{\mu}{4\pi} v_y^2 xz \delta y$$

trabalho para mover a face xy de δz :

$$\text{força} \times \delta z = [p_{zz} \times \text{área}] \times \delta z = -\frac{\mu}{4\pi} v_z^2 xy \delta z$$

Então (Maxwell, 1861-1862, fórmula (59), p.479):

$$\delta W = p_0 \delta V - \frac{\mu}{4\pi} (v_x^2 yz \delta x + v_y^2 xz \delta y + v_z^2 xy \delta z)$$

Uma partícula na face do cubo tem uma velocidade linear de rotação \vec{v} , de modo que a resistência à deformação resulta em (Maxwell, 1861-1862, fórmula (60), p.479):

$$-\delta T = \frac{\mu}{4\pi} v_i \delta v_i V$$

Conservação da energia:

$$\begin{aligned} \delta T &= -\delta W \\ \frac{\mu}{4\pi} [v_x \delta v_x + v_y \delta v_y + v_z \delta v_z] xyz &= +\frac{\mu}{4\pi} (v_x^2 yz \delta x + v_y^2 xz \delta y + v_z^2 xy \delta z) \\ v_x \delta v_x + v_y \delta v_y + v_z \delta v_z &= v_x^2 \frac{\delta x}{x} + v_y^2 \frac{\delta y}{y} + v_z^2 \frac{\delta z}{z} \end{aligned}$$

ou (Maxwell, 1861-1862, fórmula (61), p.480):

$$\sum_i v_i \left(\delta v_i - v_i \frac{\delta x_i}{x_i} \right) = 0;$$

como os v_i 's são independentes, a soma é zero só se (Maxwell, 1861-1862, fórmula (62), p.480):

$$\delta_{\text{trans}} v_i = v_i \frac{\delta x_i}{x_i} \quad \text{para todo } i \quad (\text{sem somar em in } i) \quad (\text{D.1})$$

D.2 Variação da velocidade por rotação infinitesimal da superfície do vórtice

Por uma rotação infinitesimal que transforma $\{x, y, z\}$ em $\{x', y', z'\}$:

$$\delta x = +y\theta_3 - z\theta_2 \quad \delta y = -x\theta_3 + z\theta_1 \quad \delta z = +x\theta_2 - y\theta_1$$

ou

$$\delta_{\text{rot}} x_i = -\epsilon_{i\alpha\beta} \theta_\alpha x_\beta$$

Essa é, também, a lei de transformação de vetores por rotações infinitesimais, de modo que, se a velocidade gira em torno do eixo \hat{n} (Maxwell, 1861-1862, fórmula (63), p.480):

$$\delta_{\text{rot}} \mathbf{v}_i = -\epsilon_{i\alpha\beta} \boldsymbol{\theta}_\alpha \mathbf{v}_\beta \quad (\text{D.2})$$

D.3 Transformação de vetores

Sejam ξ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, os elementos da matriz da transformação linear de $\{x, y, z\}$ em $\{x', y', z'\}$.

A transformação direta é $x'_i = \xi_{i\alpha} x_\alpha$ ou:

$$\begin{aligned} x' &= (\hat{i}' \cdot \hat{i}) x + (\hat{i}' \cdot \hat{j}) y + (\hat{i}' \cdot \hat{k}) z \equiv \xi_{11} x + \xi_{12} y + \xi_{13} z \\ y' &= (\hat{j}' \cdot \hat{i}) x + (\hat{j}' \cdot \hat{j}) y + (\hat{j}' \cdot \hat{k}) z \equiv \xi_{21} x + \xi_{22} y + \xi_{23} z \\ z' &= (\hat{k}' \cdot \hat{i}) x + (\hat{k}' \cdot \hat{j}) y + (\hat{k}' \cdot \hat{k}) z \equiv \xi_{31} x + \xi_{32} y + \xi_{33} z \end{aligned}$$

A transformação inversa é $x_i = x'_\alpha \xi_{\alpha i}$ ou:

$$\begin{aligned} x &= (\hat{i} \cdot \hat{i}') x' + (\hat{i} \cdot \hat{j}') y' + (\hat{i} \cdot \hat{k}') z' \equiv \xi_{11} x' + \xi_{21} y' + \xi_{31} z' \\ y &= (\hat{j} \cdot \hat{i}') x' + (\hat{j} \cdot \hat{j}') y' + (\hat{j} \cdot \hat{k}') z' \equiv \xi_{12} x' + \xi_{22} y' + \xi_{32} z' \\ z &= (\hat{k} \cdot \hat{i}') x' + (\hat{k} \cdot \hat{j}') y' + (\hat{k} \cdot \hat{k}') z' \equiv \xi_{13} x' + \xi_{23} y' + \xi_{33} z' \end{aligned}$$

D.3.1 Caso particular da velocidade

Um vetor é, por definição, uma grandeza que varia de acordo com essas transformações. Portanto, a transformação da velocidade é (Maxwell, 1861-1862, fórmula (65), p.481):

$$v'_i = \xi_{i\alpha} v_\alpha; \quad (\text{D.3})$$

a transformação inversa é:

$$v_i = \xi_{\alpha i} v'_\alpha$$

No caso de rotações infinitesimais, obtém-se (D.2):

$$\delta_{\text{rot}} v_i = -\epsilon_{i\alpha j} \theta_\alpha v_j \quad \text{onde a matriz da transformação é: } \xi_{ij}^{\text{rot}} = -\epsilon_{i\alpha j} \theta_\alpha \quad (\text{D.4})$$

No caso das translações infinitesimais:

$$\delta_{\text{trans}} v'_i = \xi_{\alpha i} \delta v_\alpha \quad \text{onde, de (D.1): } \delta v_\alpha = \frac{\delta x_\alpha}{x_\alpha} v_\alpha \quad (\text{sem somar em } \alpha)$$

$$\delta_{\text{trans}} v_i = \xi_{\alpha i} \delta v'_\alpha \quad \text{onde, de (D.1): } \delta v'_\alpha = \frac{\delta x'_\alpha}{x'_\alpha} v'_\alpha \quad (\text{sem somar em } \alpha)$$

Portanto:

$$\delta_{\text{trans}} v_i = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha i} \delta v'_\alpha = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha i} \frac{\delta x'_\alpha}{x'_\alpha} v'_\alpha \quad (\text{D.5})$$

ou, usando (D.3):

$$\delta_{\text{trans}} v_i = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha i} \xi_{\alpha \beta} \frac{\delta x'_\alpha}{x'_\alpha} v_\beta \quad (\text{D.6})$$

Usando a notação $\zeta'_\alpha \equiv \frac{\delta x'_\alpha}{x'_\alpha}$ (o que Maxwell não faz), a matriz da transformação é:

$$\xi_{ij}^{\text{trans}} = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha i} \xi_{\alpha j} \zeta'_\alpha$$

D.3.2 Caso particular da posição

As coordenadas também se transformam como (D.4) e (D.6):

$$\delta_{\text{rot}} x_i = +\epsilon_{i\alpha j} \theta_\alpha x_j \quad \text{e} \quad \delta_{\text{trans}} x_i = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha i} \xi_{\alpha j} \zeta'_\alpha x_j \quad (\text{D.7})$$

D.3.3 Caso particular do gradiente da posição

Calculando derivadas em (D.7):

$$\begin{aligned} \partial_\beta (\delta_{\text{rot}} x_i) &= -\partial_\beta (+\epsilon_{i\alpha j} \theta_\alpha x_j) = -\epsilon_{i\alpha \beta} \theta_\alpha = +\epsilon_{i\beta \alpha} \theta_\alpha \\ \partial_\beta (\delta_{\text{trans}} x_i) &= \sum_{\alpha} \xi_{\alpha i} \xi_{\alpha j} \zeta'_\alpha (\partial_\beta x_j) = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha i} \xi_{\alpha \beta} \zeta'_\alpha \end{aligned}$$

Somando, obtém-se as 9 componentes do gradiente, $\partial_\beta (\delta x_i) = \partial_\beta (\delta_{\text{rot}} x_i) + \partial_\beta (\delta_{\text{trans}} x_i)$, em termos das quantidades independentes (Maxwell,1861-1862, p.480) $\zeta'_i = \frac{\delta x'_i}{x'_i}$ (translação: 3 quantidades), θ_i (rotação: 3 quantidades) e 3 cossenos diretores (Maxwell,1861-1862, fórmula (64), p.481):

$$\partial_\beta (\delta x_i) = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha i} \xi_{\alpha \beta} \zeta'_{\alpha} + \epsilon_{i\beta\alpha} \theta_{\alpha} \quad (\text{D.8})$$

D.4 Transformação geral da velocidade

A deformação mais geral é uma translação da superfície junto com uma rotação. Então: $\delta \vec{v} = \delta_{\text{rot}} \vec{v} + \delta_{\text{trans}} \vec{v}$. Portanto, a transformação mais geral de v_i é,

$$\delta v_i = \xi_{\alpha i} \delta v'_{\alpha} - \epsilon_{i\alpha\beta} \theta_{\alpha} v_{\beta}$$

ou, abrindo a expressão (Maxwell,1861-1862, fórmula (66), p.481):

$$\begin{aligned} \delta v_1 &= \xi_{11} \delta v'_1 + \xi_{21} \delta v'_2 + \xi_{31} \delta v'_3 + v_3 \theta_2 - v_2 \theta_3 \\ \delta v_2 &= \xi_{12} \delta v'_1 + \xi_{22} \delta v'_2 + \xi_{32} \delta v'_3 - v_1 \theta_3 + v_3 \theta_1 \\ \delta v_3 &= \xi_{13} \delta v'_1 + \xi_{23} \delta v'_2 + \xi_{33} \delta v'_3 + v_1 \theta_2 - v_2 \theta_1 \end{aligned}$$

Usando (7), obtém-se a soma de (D.5) e (D.2):

$$\delta v_i = \left(\sum_{\alpha} \xi_{\alpha i} \frac{\delta x'_{\alpha}}{x'_{\alpha}} v'_{\alpha} \right) - \epsilon_{i\alpha\beta} \theta_{\alpha} v_{\beta}$$

ou, abrindo a expressão (Maxwell,1861-1862, fórmula (67), p.481):

$$\begin{aligned} \delta v_1 &= \xi_{11} v'_1 \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{21} v'_2 \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{31} v'_3 \frac{\delta z'}{z'} + v_3 \theta_2 - v_2 \theta_3 \\ \delta v_2 &= \xi_{12} v'_1 \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{22} v'_2 \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{32} v'_3 \frac{\delta z'}{z'} - v_1 \theta_3 + v_3 \theta_1 \\ \delta v_3 &= \xi_{13} v'_1 \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{23} v'_2 \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{33} v'_3 \frac{\delta z'}{z'} + v_1 \theta_2 - v_2 \theta_1 \end{aligned}$$

Usando (9), obtém-se a soma de (D.6) e (D.2):

$$\delta v_i = \left(\sum_{\alpha} \xi_{\alpha i} \frac{\delta x'_{\alpha}}{x'_{\alpha}} \xi_{\alpha\beta} v_{\beta} \right) - \epsilon_{i\alpha\beta} \theta_{\alpha} v_{\beta}$$

ou, abrindo a expressão:

$$\begin{aligned}
\delta v_1 &= \frac{\delta x'}{x'} \xi_{11} [\xi_{11} v_1 + \xi_{12} v_2 + \xi_{13} v_3] + \frac{\delta y'}{y'} \xi_{21} [\xi_{21} v_1 + \xi_{22} v_2 + \xi_{23} v_3] \\
&+ \frac{\delta z'}{z'} \xi_{31} [\xi_{31} v_1 + \xi_{32} v_2 + \xi_{33} v_3] + v_3 \theta_2 - v_2 \theta_3 \\
\delta v_2 &= \frac{\delta x'}{x'} \xi_{12} [\xi_{11} v_1 + \xi_{12} v_2 + \xi_{13} v_3] + \frac{\delta y'}{y'} \xi_{22} [\xi_{21} v_1 + \xi_{22} v_2 + \xi_{23} v_3] \\
&+ \frac{\delta z'}{z'} \xi_{32} [\xi_{31} v_1 + \xi_{32} v_2 + \xi_{33} v_3] - v_1 \theta_3 + v_3 \theta_1 \\
\delta v_3 &= \frac{\delta x'}{x'} \xi_{13} [\xi_{11} v_1 + \xi_{12} v_2 + \xi_{13} v_3] + \frac{\delta y'}{y'} \xi_{23} [\xi_{21} v_1 + \xi_{22} v_2 + \xi_{23} v_3] \\
&+ \frac{\delta z'}{z'} \xi_{33} [\xi_{31} v_1 + \xi_{32} v_2 + \xi_{33} v_3] + v_1 \theta_2 - v_2 \theta_1
\end{aligned}$$

Agrupando termos, obtém-se o resultado final:

$$\delta v_i = v_\beta \left[\left(\sum_{\alpha} \xi_{\alpha i} \xi_{\alpha \beta} \zeta'_{\alpha} \right) + \epsilon_{i\beta\alpha} \theta_{\alpha} \right] \quad (\text{D.9})$$

ou, abrindo a expressão:

$$\begin{aligned}
\delta v_1 &= v_1 \left[\xi_{11} \xi_{11} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{21} \xi_{21} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{31} \xi_{31} \frac{\delta z'}{z'} \right] + v_2 \left[\xi_{11} \xi_{12} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{21} \xi_{22} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{31} \xi_{32} \frac{\delta z'}{z'} - \theta_3 \right] \\
&+ v_3 \left[\xi_{11} \xi_{13} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{21} \xi_{23} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{31} \xi_{33} \frac{\delta z'}{z'} - \theta_2 \right] \\
\delta v_2 &= v_1 \left[\xi_{12} \xi_{11} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{22} \xi_{21} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{32} \xi_{31} \frac{\delta z'}{z'} - \theta_3 \right] + v_2 \left[\xi_{12} \xi_{12} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{22} \xi_{22} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{32} \xi_{32} \frac{\delta z'}{z'} \right] \\
&+ v_3 \left[\xi_{12} \xi_{13} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{22} \xi_{23} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{32} \xi_{33} \frac{\delta z'}{z'} + \theta_1 \right] \\
\delta v_3 &= v_1 \left[\xi_{13} \xi_{11} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{23} \xi_{21} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{33} \xi_{31} \frac{\delta z'}{z'} + \theta_2 \right] + v_2 \left[\xi_{13} \xi_{12} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{23} \xi_{22} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{33} \xi_{32} \frac{\delta z'}{z'} - \theta_1 \right] \\
&+ v_3 \left[\xi_{13} \xi_{13} \frac{\delta x'}{x'} + \xi_{23} \xi_{23} \frac{\delta y'}{y'} + \xi_{33} \xi_{33} \frac{\delta z'}{z'} \right]
\end{aligned}$$

Falta entender o significado de (D.9). Ora, comparando (D.8) e (D.9), a equação (D.9) pode ser escrita:

$$\delta v_i = (v_\beta \partial_\beta) \delta x_i \quad \text{ou} \quad \delta v_i = \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \delta x_i$$

Apêndice E

Material Instrucional

Alguns pesquisadores em Ensino de Física aconselham professores a utilizarem, em suas aulas, textos históricos originais, fragmentos dos mesmos ou textos de historiadores confiáveis, antes de serem ministrados conteúdos específicos. Acreditam que, a partir dos textos históricos, os estudantes possam desenvolver uma aprendizagem significativa do conceito em questão. Seguindo essa sugestão, apresenta-se, neste apêndice, um roteiro que pode ser útil para introduzir o conceito de carga no Ensino Médio, usando a História como motivadora de ideias, problemas e discussões.

Na primeira parte, usa-se material histórico (Capítulo 2) para motivar discussões sobre diferentes concepções do que é eletricidade e os fenômenos que motivaram seu estudo. Na segunda parte, a concepção moderna é introduzida pelo material histórico sobre raios catódicos (Capítulo 4). Na terceira parte, apresenta-se uma tentativa bem sucedida, de introduzir o conceito de carga elétrica para alunos de Ensino Médio do Colégio Santo Ignácio apresentado em Luiz Cesar Mendes da Silva *et alii*.

E.1 Fluidos de eletricidade e magnéticos

Provavelmente, as primeiras observações de fenômenos elétricos foram na Grécia Antiga. Citações em trabalhos de filósofos apontam que Tales de Mileto (640-546 a.C.) foi, possivelmente, o primeiro a constatar que o âmbar,

ao ser atritado, adquiria a propriedade de atrair corpos leves. Tales também teria notado a atração do ferro pelo ímã (J.L. Cindra e Odete P.B. Teixeira, p.386). Posteriormente, ainda na Grécia, Teofrasto (372-288 a.C.) observou que minerais atritados também atraíam corpos leves, ou seja, essa propriedade não era exclusiva do âmbar. Somente em 1550, o matemático Girolamo Cardano (1501-1576) diferencia os fenômenos do âmbar atritado daqueles provenientes dos ímãs. Por séculos, fenômenos elétricos e magnéticos foram tratados separadamente.

Um dos cientistas que iniciou as pesquisas modernas sobre magnetismo e sobre eletricidade foi o médico britânico William Gilbert (1544-1603). Ele denomina de *elétricos* os corpos que, ao serem atritados, passam a atrair corpos leves, como pluma e palha;¹ em outras palavras, corpos que têm a mesma propriedade do âmbar (Andre Koch Torres Assis p.17). A maior contribuição de Gilbert para a ciência da eletricidade foi a descoberta de uma série de substâncias que se comportam como o âmbar, ao serem atritadas (Assis, p.20).

O desenvolvimento de novas teorias elétricas e magnéticas depois de Gilbert foi lento.

Uma teoria formal da natureza da eletricidade muito influente foi enunciada por Charles François de Cisternay Du Fay (1698-1739), em 1735. Ele propôs a existência de dois tipos de eletricidade, a vítrea e a resinosa. Naquela época, ainda não havia explicação para a atração e a repulsão entre corpos eletrizados. Du Fay refez experimentos análogos aos feitos por Francis Hauksbee (1660-1713) e Stephen Gray (1666-1736), dos quais se declarava devedor (Sérgio Luiz Bragatto Boss e João José Caluzi, p.636). Hauksbee e Gray utilizavam uma penugem que era atraída e em seguida repelida por um tubo atritado de *flint-glass*, uma espécie de vidro composto de chumbo (Assis, p.58). Desses experimentos, Du Fay extraiu novos princípios.

O primeiro princípio estabelece que (Du Fay, p.262):

[...] Corpos Elétricos atraem todos aqueles que não estão desta forma [não eletrizados] e os repelem, assim que eles se tornam elétricos, pela Proximidade

¹O termo vem de *elektron* que, em grego, significa âmbar (*apud* André Koch Torres Assis, p.21).

ou pelo Contato com o Corpo Elétrico.

No mesmo parágrafo em que foi enunciado o primeiro princípio, Du Fay comenta um experimento em que uma lâmina de metal é aproximada de um tubo eletrizado. Lembrando que uma lâmina de metal, presa por um fio isolante, quando aproximada de um bastão eletrizado, é atraída e, após contato com o bastão, é repelida, pode-se entender o que Du Fay quis dizer. Esse princípio falhou, quando a lâmina de metal eletrizada foi aproximada de um pedaço eletrizado de goma-copal. Esperava-se que os corpos se repelissem, mas ocorreu o contrário, a lâmina metálica e a goma-copal se atraíram. Pode-se explicar a falha no primeiro princípio, levando em conta que o tubo estava eletrizado com cargas positivas e atraiu a lâmina de metal (neutra); após o contato com o tubo a lâmina de metal também ficou carregada com cargas positivas. A goma-copal (um tipo de material resinoso) estava carregada com cargas negativas e por isso foi atraída pela lâmina de metal.

O problema que se colocava era: Como um corpo eletrizado poderia atrair outro corpo eletrizado, sem ferir o primeiro princípio? Du Fay buscou responder a essa questão, apresentando um segundo princípio (Du Fay, p.263-264):

[...] existem duas Eletricidades distintas, muito diferentes uma da outra, uma que chamo de eletricidade vítrea e a outra que chamo de eletricidade resinosa.

Nesse princípio, Du Fay postula a existência de dois tipos de eletricidade, a vítrea e a resinosa. A escolha do nome desses diferentes tipos de eletricidades também surge de suas observações experimentais, pois percebeu que, de um lado, os corpos sólidos e transparentes, como o vidros, e, de outro lado as resinas e os betuminosos, possuem comportamento elétrico diferente. Tomando essa diferença de comportamento elétrico como base, ele classificou alguns materiais. Por exemplo, matérias como vidro, pedra-cristal, pedras preciosas, pelo de animais, lã etc., quando eletrizados, ficavam contendo eletricidade do tipo vítrea. Por outro lado, materiais como âmbar, copal, goma-laca, seda, linha, papel etc., quando eletrizados, ficavam contendo eletricidade resinosa. Nas palavras de Du Fay (*apud* Assis, p.101):

Aí estão constantemente duas eletricidades de uma natureza totalmente diferente, a saber, a eletricidade dos corpos transparentes sólidos, como o vidro, o cristal etc., e a eletricidade dos corpos betuminosos e resinosos, como o âmbar, a goma-copal, a cera da Espanha etc. Uns e outros repelem os corpos que adquiriram uma eletricidade da mesma natureza que a deles e atraem, ao contrário, os corpos cuja eletricidade é de uma natureza diferente da deles. [...] Portanto aí estão duas eletricidades bem demonstradas, e não posso me dispensar de lhes dar nomes diferentes para evitar a confusão dos termos, ou embaraço de definir a cada momento a eletricidade que desejo falar; portanto, chamarei uma de eletricidade vítrea e a outra de eletricidade resinosa, não que eu pense que somente existam os corpos da natureza do vidro que sejam dotados de uma [espécie de eletricidade], e as matérias resinosas de outra, pois já tenho fortes provas do contrário, mas [escolho esta denominação] porque o vidro e o copal foram as duas matérias que me deram os vínculo para descobrir as duas eletricidades diferentes.

Sendo assim, Du Fay resolve a questão, quando divide os corpos eletrizados em duas classes e chega à conclusão de que corpos com eletricidades iguais se repelem e com eletricidades diferentes se atraem.²

Du Fay não chegou a classificar a eletricidade como sendo uma espécie de fluido (Weinberg, p.15), mas suas pesquisas influenciaram diretamente a teoria dos dois fluidos desenvolvida posteriormente. Foi o Abbé Jean-Antonie Nollet (1700-1770), professor da Universidade de Paris, que introduziu a ideia de que os dois tipos de eletricidade correspondem a dois tipos distintos de fluido elétrico (Weinberg, p.16).

Durante esse período, as idéias mecanicistas exerciam forte influência sobre os cientistas, por uma influencia do Iluminismo. E a idéia de explicar os fenômenos elétricos, baseando-se em teorias mecânicas de fluidos era bastante atraente. O desenvolvimento de teorias mecânicas de fluidos foi um passo no processo de quantificação de alguns ramos da Física (Thomas L.

²Steven Weinberg (p.19) comenta que a série triboelétrica lista materiais, mostrando quais são aqueles que têm uma maior tendência a se tornarem positivamente eletrizados (eletricidade vítrea) e quais os que apresentam maior tendência de se tornarem negativamente eletrizados (eletricidade resinosa).

Hankins, p.50). O fluido “sutil” ou “imponderável” era uma substância que possuía propriedades físicas, mas não era como a matéria comum; os melhores exemplos de “fluidos sutis” nasceram na tentativa de explicar os fenômenos elétricos e térmicos. Segundo Hankins (p.50), os “fluidos sutis” tinham a vantagem de mostrar o que deve ser medido em física; eles forneceram um quadro teórico em torno do qual se poderia construir conceitos físicos como “carga”, “tensão elétrica”, “calor”, “capacidade de calor” e “temperatura”.

A teoria de dois fluidos era consistente com todas as experiências que poderiam ser levadas a cabo no século XVIII (Weinberg, p.16). Nessa teoria, um corpo é considerado neutro, quando contém a mesma quantidade dos dois fluidos. A eletrização acontece, quando o corpo tem excesso ou falta de um fluido. Entretanto, outra teoria competidora, a de um fluido, foi logo proposta (Weinberg, p.16), inicialmente, pelo médico e naturalista londrino William Watson (1715-1787); depois, seria proposta mais detalhadamente e de forma mais influente por Benjamin Franklin (1706-1790). Como diz Weinberg (p.16), “a paixão dos físicos pela simplicidade não os deixa sossegados com uma teoria complicada, se uma mais simples pode ser achada”.

Edmund Whittaker (p.47) explica que Franklin pode ter sido motivado pelo seguinte experimento. Uma pessoa, *A*, de pé sobre cera, portanto isolada do solo, atrita um tubo de vidro. Depois, uma outra pessoa, *B*, também de pé sobre cera, passa o nó dos dedos ao longo do mesmo tubo, a uma pequena distância dele. Uma terceira pessoa, *C*, está de pé sobre o solo. Se *A* e *B* tocarem *C*, uma após a outra, surge uma faísca, em cada um dos dois toques, indicando que *A* e *B* estão eletrizados. Franklin interpreta o resultado, supondo que eletricidade é um elemento; cada corpo, em condições normais, possui uma certa proporção desse elemento. Assim, *A*, *B* e *C* possuem, inicialmente, antes do experimento, iguais quantidades de eletricidade; ao atritar o vidro, *A* passa eletricidade para o vidro que a transmite para *B*; *A* tem falta e *B*, excesso de eletricidade. Ao tocarem, um após o outro, *C*, que tem quantidade normal de eletricidade, a distribuição de eletricidade entre eles fica equalizada; se *A* e *B* se tocarem, eletricidade também flui entre eles, equilibrando a quantidade de fluido entre eles e nenhum tem mais ou menos eletricidade do que *C*. Franklin supôs, portanto, que a eletricidade fosse

composta de um único tipo de fluido, constituído de “partículas extremamente finas”. Ele supôs, ainda, que a matéria comum dos corpos retivesse a eletricidade como um “tipo de esponja”. Ele não conhecia o trabalho de Du Fay e não usou sua terminologia (vítrea e resinosa); ele chamou a deficiência de eletricidade de eletricidade negativa e o excesso de eletricidade, de eletricidade positiva; à quantidade de eletricidade, positiva ou negativa, de um corpo ele chamou de *carga* do corpo, termos que ainda são usados nos dias de hoje.

Segundo Weinberg (p.16), Franklin foi o primeiro estudioso da natureza a afirmar que a quantidade total de cargas de um corpo é conservada; ou seja, foi o primeiro a postular que a eletricidade nunca é criada ou destruída, podendo apenas ser transferida de um corpo para outro corpo. Quanto ao fenômeno da atração e da repulsão, Franklin supôs que a eletricidade repele-se a si mesma, mas atrai a matéria que a retém; em outras palavras, um corpo com excesso de eletricidade repele um corpo com excesso de eletricidade e um corpo com excesso de eletricidade atrai um corpo com deficiência de eletricidade. Fazendo uma analogia com a teoria de Du Fay, pode-se identificar como vítrea o que Franklin chamou de excesso de eletricidade e como resinosa, o que ele chamou de deficiência de eletricidade. A dificuldade do modelo era explicar a repulsão entre corpos com deficiência de eletricidade, ou seja, entre corpos que contêm eletricidade resinosa. Em 1759, o astrônomo, físico, matemático e filósofo natural alemão Franz Ulrich Theodosius Aepinus (1724-1802), conhecedor do trabalho de Franklin, solucionou esse problema, criando a tese de que, quando dois corpos possuem ausência de eletricidade, a matéria comum repele-se a si mesma.

A teoria de um fluido de eletricidade levou, naturalmente, a tentativas de se construir uma teoria semelhante para o magnetismo; isso foi efetuada em 1759 por Aepinus, que supôs que os “pólos” fossem lugares em que um fluido magnético se encontrasse presente em quantidade superior à quantidade normal. Subsequentemente, a teoria de dois fluidos magnéticos imponderáveis, nomeados de boreal e austral, foi postulada por Anton Brugmans (1732-1789) e por Johan Carl Wilcke (1732-1796). Segundo a teoria, esses fluidos deveriam ter as propriedades de atração e repulsão mútuas, semelhantes aos

possuídos pelas eletricidades vítrea e resinosa (Whittaker, p.57).

Charles Augustin Coulomb (1736-1806) era favorável à teoria de dois fluidos (Whittaker, p.58-59); além disso, observou que dois fluidos magnéticos, ao contrário dos dois fluidos elétricos, não podem ser obtidos separadamente; quando um ímã é quebrado em duas partes, uma contém o norte e outra o sul (Whittaker, p.59).

A teoria dos dois fluidos e a teoria de um fluido dividiu o pensamento dos físicos. Olhando em retrospecto, a natureza da eletricidade foi um problema que só foi resolvido com a descoberta do elétron.

E.2 A concepção moderna do elétron

E.2.1 Os raios catódicos

Descargas elétricas em tubos de vidro contendo um gás a baixa pressão eram estudadas desde 1709. Cientistas, na época, descobriram que, quanto mais baixa fosse a pressão no interior do tubo, menos o gás brilhava e, ainda assim, uma corrente elétrica fluía, sendo possível observar uma mancha brilhante que se formava do lado oposto do catodo — eletrodo negativo. Sabe-se, hoje, que as luzes são emitidas na ionização das moléculas do gás, quando colidem com elétrons provenientes do catodo. Se o vácuo for muito bom, ocorrem menos colisões, o que resulta em um feixe bem colimado dos elétrons do catodo. Por volta de 1800, com o auxílio de uma bomba de ar, o vácuo dentro do tubo foi sensivelmente melhorado, permitindo que os cientistas pudessem investigar o fenômeno mais a fundo.

Como visto na seção 4.2, a natureza do raio foi um problema longamente debatido. Do ponto de vista da Física, em retrospecto, o que distinguiu a pesquisa de Thomson foi que, diferentemente de outros pesquisadores, ele conseguiu obter um bom vácuo e um “bom feixe”, o que lhe permitiu observar desvios do feixe por forças elétricas e magnéticas. Então foi possível medir a deflexão do feixe por campos elétrico e magnético e calcular razão entre a carga e a massa dessas partículas, encontrando um valor bem superior ao dos íons na eletrólise. Assim, ou as partículas que constituíam os raios

catódicos, os “corpúsculos”, teriam cargas elétricas muito grandes ou seriam extremamente leves. A massa do “corpúsculo” seria 1836 vezes menor que a do hidrogênio ionizado (H^+).

E.2.2 O experimento de Thomson

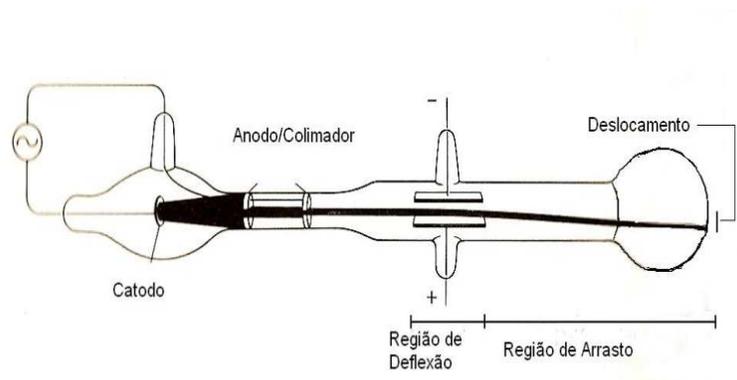


Figura E.1: **Esquema de um tubo de raios catódicos.** O raio atravessa uma região, chamada de deflexão, com comprimento L_d , onde sofre forças perpendiculares à direção do raio. O raio emerge na região de arrasto, com comprimento L_a , onde não sofre forças e se move com movimento retilíneo uniforme.

A figura mostra o esquema do tubo de raios catódicos, tirados de um artigo clássico de Thomson (Weinberg, p.30). O feixe de partículas sai do catodo, passa pela região de deflexão, onde é desviado por campos elétrico e/ou magnético, perpendiculares ao feixe. Em seguida, o raio atravessa a região de arrasto, onde se move com movimento retilíneo uniforme, até alcançar a parede do tubo. Uma mancha luminosa aparece onde o raio bate na parede do vidro no final do tubo.

O experimento de Thomson consistiu em medir o deslocamento do raio, devido primeiro à força elétrica e, depois, devido à força magnética; o deslocamento é dado pela distância entre a posição da mancha e a direção original do raio (quando não há forças externas). Usando os valores dos deslocamentos, é possível achar a razão $\frac{\text{massa}}{\text{carga}}$.

O raio sai do catodo com uma velocidade v_{\parallel} . Na região de deflexão, o raio sofre uma aceleração perpendicular a ele; adquire, pois, uma velocidade

v_{\perp} dada pela lei de Newton:

$$v_{\perp} = at_d = \frac{F_{\perp}}{m}t_d = \frac{F_{\perp}}{m} \times \frac{L_d}{v_{\parallel}}, \quad (\text{E.1})$$

na qual t_d é o tempo gasto na região. Na região de arrasto, o raio move com uma velocidade uniforme, com componentes paralela e perpendicular, isto é, $\vec{v}_a = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$; portanto, o deslocamento perpendicular é:

$$D_{\perp} = v_{\perp}t_a = v_{\perp} \times \frac{L_a}{v_{\parallel}}, \quad (\text{E.2})$$

em que t_a é o tempo gasto na região. Colocando o valor de v_{\perp} de (E.1) em (E.2), é fácil obter:

$$D_{\perp} = \frac{F_{\perp}L_dL_a}{mv_{\parallel}^2} \quad (\text{E.3})$$

Na montagem da figura, o campo elétrico (\vec{E}) é vertical, de cima para baixo e a força é igual a $F_{\text{el}} = qE$; uma carga negativa sofre um deslocamento para baixo. O campo magnético (\vec{B}) é aplicado perpendicular à folha de papel, saindo do papel, e a força magnética é $F_{\text{mag}} = qv_{\parallel}B$; uma carga negativa sofre um deslocamento para baixo. Colocando esses valores, respectivamente em (E.3):

$$D_{\text{el}} = \frac{qEL_dL_a}{mv_{\parallel}^2} \quad \text{e} \quad D_{\text{mag}} = \frac{qv_{\parallel}BL_dL_a}{mv_{\parallel}^2} \quad (\text{E.4})$$

O valor desconhecido de v_{\parallel} pode, então, ser calculado:

$$v_{\parallel} = \left(\frac{D_{\text{mag}}}{D_{\text{el}}} \right) \left(\frac{E}{B} \right) \quad (\text{E.5})$$

e substituindo (E.5) em qualquer uma das equações em (E.4):

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2L_dL_aD_{\text{el}}}{ED_{\text{mag}}^2}.$$

ou seja, a razão $\frac{\text{massa}}{\text{carga}}$ é obtida em termos de grandezas conhecidas.

E.3 Uma experiência no Ensino Médio

Nesta secção, é descrita uma série de experimentos realizados com alunos do Ensino Médio, do Colégio Santo Ignácio, no Rio de Janeiro. O colégio dispõe de uma versão moderna do aparelho de raios catódicos, utilizado por J.J. Thomson para determinar a razão $\frac{\text{carga}}{\text{massa}}$ do elétron. Foram feitos quatro experimentos: O primeiro experimento consistiu na mera visualização do feixe luminoso que permite a identificação da trajetória dos elétrons; no segundo, foi observado o comportamento do feixe na presença de um campo magnético; no terceiro, foi observado o comportamento do feixe, com a variação de seu ângulo com o campo; no quarto, os alunos fizeram medidas que levassem à razão $\frac{\text{carga}}{\text{massa}}$.

Os conceitos teóricos envolvidos nos experimentos foram discutidos com os alunos, a partir de uma texto usando história, previamente preparado (Mendes da Silva *et al.*, p.2-4); esse material pode ser as duas secções acima. Nessa experiência, os alunos participaram de todo processo de montagem do experimento, tendo a oportunidade de aprender e compreender, na prática, como efetuar ligações de voltímetros e amperímetros; por exemplo, aprendem que o amperímetro deve ser ligado em série e o voltímetro em paralelo, nos circuitos. Os materiais utilizados no experimento foram: Tubo de feixe colimado, par de bobinas de Helmholtz, fonte de tensão de 600 V-DC, fonte de tensão usada como fonte de corrente, amperímetro, voltímetro e fios de conexão, figura abaixo.



Figura E.2: Tubo de raios catódicos. (Mendes da Silva *et alii*).

E.4 Experimento 1



Figura E.3: **Feixe de elétrons.** (Mendes da Silva *et alii*).

No primeiro experimento os estudantes tiveram a oportunidade de visualizar a luminosidade que permite a identificação da trajetória dos elétrons. Neste experimento, propositalmente, as bobinas permaneceram desligadas, ou seja, não formavam campo magnético. Sendo assim, o feixe permaneceu em linha reta, sem sofrer nenhum tipo de desvio, como na figura E.3.

E.5 Experimento 2



Figura E.4: **Feixe de elétrons.** (Mendes da Silva *et al.*). O feixe forma um círculo, com velocidade perpendicular ao campo magnético.

A fonte de corrente contínua é ligada e a corrente elétrica que percorre o

Um fio condutor gera um campo magnético que faz com que o feixe de elétrons sofra um desvio. O desvio é devido à força magnética que age sobre ele; o feixe e a força magnética formam entre si um ângulo de 90° . Quanto maior a corrente das bobinas, maior o campo magnético e maior o desvio de feixe; isso é constatado pelos alunos, na leitura do amperímetro. Os alunos podem, assim, constatar que o desvio sofrido pelo feixe de elétrons é devido à ação do campo magnético. Em seguida, desligou-se a fonte de corrente contínua e um dos alunos aproximou do feixe um ímã; a turma pode então observar que o ímã age como uma bobina. Os alunos, assim, constatarem que o ímã também gera um campo magnético.

E.6 Experimento 3

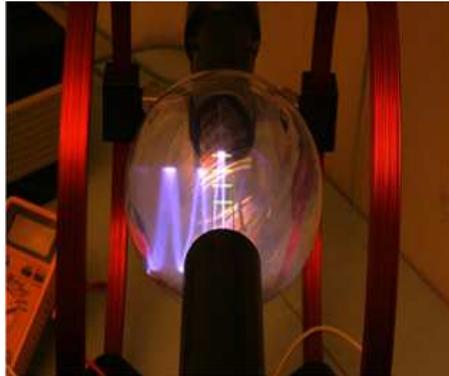


Figura E.5: **Feixe de elétrons.** (Mendes da Silva *et alii*). O feixe forma uma hélice pela modificação do ângulo.

Em um terceiro experimento a turma analisa a relação entre o ângulo formado pelo campo magnético e o feixe.

O ângulo é modificado, formando uma hélice, como mostrado na figura E.5. Com isso, os alunos observam a relação entre o ângulo e a força exercida no feixe.

E.7 Experimento 4

No quarto experimento, os alunos medem a razão $\frac{\text{carga}}{\text{massa}}$ em um experimento bem simples. Para entender o que vai ser medido, alguns cálculos são necessários. Se o feixe for circular (campo perpendicular ao plano do feixe), tem-se:

força centrípeta = força magnética

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \quad (\text{E.6})$$

Por outro lado, a energia da partícula é dada por:

energia potencial elétrica = energia cinética

$$qU = \frac{mv^2}{2} \quad (\text{E.7})$$

Resolvendo (E.6) para v e substituindo em (E.7), acha-se:

$$\frac{q}{m} = \frac{2U}{r^2 B^2} \quad (\text{E.8})$$

É possível modificar essa fórmula para colocá-la em termos de parâmetros manuseáveis no laboratório.

O campo B é dado independentemente em função da corrente i pelo arranjo de Helmholtz de duas bobinas de raio R com n espiras; sendo $\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ a permissividade do vácuo:

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \mu_0 \frac{n}{R} \times i; \quad (\text{E.9})$$

$n = 154$ e $R = 0,02$ m são fornecidos pelo fabricante e são constantes, de modo que:

$$B = \Lambda \times i \quad (\text{E.10})$$

onde a constante Λ é:

$$\Lambda = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \times 1,257 \times 10^{-6} \times \frac{154}{0,02}$$

Substituindo (E.10) em (E.8):

$$U = \left(\frac{q}{m}\right) r^2 \frac{\Lambda^2}{2} \times i^2 \quad (\text{E.11})$$

Portanto, para valores fixos de $\frac{q}{m}$ e r , o gráfico $i^2 \times U$ é uma reta, onde a tangente do ângulo entre a reta e a abscissa i^2 é $\left(\frac{q}{m}\right) r^2 \frac{\Lambda^2}{2}$; então:

$$\frac{q}{m} = \left(\frac{2}{\Lambda^2 r^2}\right) \times \frac{U}{i^2} \quad (\text{E.12})$$

O experimento consiste em variar a tensão e a corrente, de modo a trazer o feixe circular para um raio pré fixado. Os valores obtidos pelos alunos estão na tabela E.1:

Tabela E.1: Dados obtidos para $r = 0,03$ m

#	tensão (V)	corrente (A)	corrente ao quadrado(A^2)
1	150	1,71	2,92
2	165	1,81	3,28
3	180	1,91	3,65
4	195	2,00	4,00
5	210	2,14	4,58
6	225	2,17	4,71
7	240	2,32	5,38

As incertezas associadas às medidas são $0,1$ V para a tensão e $0,01$ A para a corrente. Para determinar a incerteza da corrente ao quadrado, foi usada a propagação de erros $2i\delta i$; os valores variam entre $0,02$ A^2 e $0,05$ A^2 .

Esses valores são ajustados em uma reta:

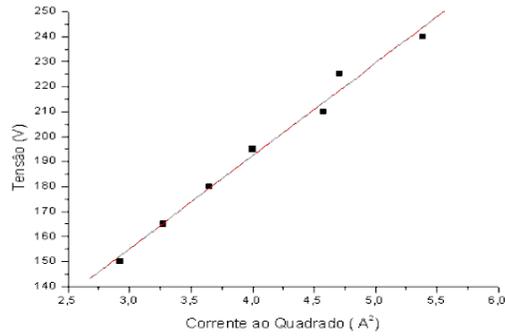


Figura E.6: Gráfico tensão versus corrente ao quadrado. (Mendes da Silva *et alii*).

Do gráfico:

$$\frac{U}{i^2} = 37,11 \pm 0,6 \frac{V}{A^2};$$

portanto, de (E.12),

$$\frac{q}{m} = 1,727 \times 10^{11} \frac{C}{kg};$$

a discrepância percentual em relação ao valor teórico, $1,759 \times 10^{11}$, é de 1,8%.

Referências Bibliográficas

- [1] Assis, André Koch Torres (2011), *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, Editora Livraria da Física.
- [2] Boss, Sérgio Luiz Bragatto Boss; Caluzi, João José (2007), “Os conceitos de eletricidade vítrea e eletricidade resinosa segundo Du Fay”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **29**, p.635-644.
- [3] Boss, Sérgio Bragatto; Souza Filho, Moacir P. de; Caluzi, João José (2009), “Fontes primárias e aprendizagem significativa: aquisição de subsunçoes para a aprendizagem do conceito de carga elétrica”, *Encontro Nacional de Pesquisa em Educação e Ciência*.
- [4] Buchwald, Jed (1985), *From Maxwell to Microphysics (Aspects of Electromagnetic Theory in the Last Quarter of the Nineteenth Century)*, The University of Chicago Press.
- [5] Bezerra, Valter Alnis (2006), *Maxwell, a Teoria do Campo e a Desmecanização da Física*, *Scientiae Studia* **4**, p.177-220.
- [6] Cardozo Dias, Penha Maria (2001), “A (Im)Pertinência da História ao Aprendizado da Física (Um Estudo de Caso)”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **23**, p.226-235
- [7] Cardozo Dias, Penha Maria; Morais, Rodrigo Fernandes (2014), “Os Fundamentos Mecânicos do Eletromagnetismo”, *Revista Brasileira de Física*, **36**, n. 3, 3601.
- [8] Caruso, Francisco; Oguri, Vitor (2006) *Física Moderna: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos*. Rio de Janeiro: Elsevier.
- [9] Cindra, José Lourenço; Teixeira, Odete P. Baiarl (2005), “A evolução das idéias relacionadas aos fenômenos térmicos e elétricos: algumas similaridades”, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, **22**, p.379-399.

- [10] Du Fay, Charles François de Cisternay (1733), “A letter from Mons. Du Fay . . . to his Grace Charles Duke of Richmond and Lenox”, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **38**, p.258-266.
- [11] Falconer, Isobel (2001), “Corpuscles to Electrons”, in: J. Buchwald e A. Warwick (editores) (2001), *Histories of the Electron*, The MIT Press; p. 77-100.
- [12] Faraday, Michael (1839-1855), *Experimental Researches in Electricity*, 3 vols. Republicado in: R. Maynard Hutchins (editor) (1952), *Great Books of the Western World*, v.45, Encyclopædia Britannica; p.254-898.
- [13] Hankins, Thomas L. (1985), *Science and the Enlightenment*, Cambridge University Press.
- [14] Harman , Peter Michael (1982) , *Energy, Force and Matter (the Conceptual Development of Nineteenth-Century Physics)*, Cambridge University Press.
- [15] Höttecke, D.; Henke, A.; Riess, F. (2012), “Implementing History and Philosophy in Science Teaching: Strategies, Methods, Results and Experiences from the European HIPST Project”, *Science and Education*, **21**, p.1233-1261.
- [16] Hunt, Bruce J. (1991), *The Maxwellians*, Cornell University Press.
- [17] Jackson, John D. (1962), *Classical Electrodynamics*, John-Wiley.
- [18] Kragh, Helge (1992), “A Sense of History: History of Science and the Teaching of Introductory Quantum Theory”, *Science and Education*, **1**, p.349-363.
- [19] Larmor, Joseph (1893), “A Dynamical Theory of the Electric and Luminiferous Medium, Part I”, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **185**, 719-822. Republicado in: J. Larmor (editor) (1929), *Mathematical and Physical Papers*, 2 vols., Cambridge University Press; v.1, p.389-536.
- [20] MacCullagh, James (1839), “An essay towards a Dynamic Theory of Crystalline Reflexion and Refraction”, *Transactions of the Royal Irish Academy*, **21**. Republicado in: John Jellet e Samuel Haughton (editores) (1880) *The Collected Works of James MacCullagh*, (Dublin: Hodges, Figgis & Co. Reprint por Nabu Public Domain Reprints.

- [21] Mendes da Silva, Luiz Cezar; Santos, Wilma Machado Soares; Cardozo Dias, Penha Maria (2011), “A Carga Específica do Elétron (Um Enfoque Histórico e Experimental)”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **33**, art.1601.
- [22] Matthews, Michael (1992), “History, Philosophy, and Science Teaching: The Present Rapprochement”, *Science & Education*, **1**, p.11-47.
- [23] Maxwell, James Clerk (1856), “On Faraday’s Lines of Force”, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **10**. Republicado in: W.D. Niven (editor), 2010, v.1, p.155-229.
- [24] Maxwell, James Clerk (1861-1862), “On Physical Lines of Force”, *Philosophical Magazine*, **21**. Republicado in: W.D. Niven (editor), 2010, v.1, p.451-490.
- [25] Maxwell, James Clerk (1864), “A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field”, *Royal Society Transactions*, **45**. Republicado in: W.D. Niven (editor), 2010, v.1, p.526-597.
- [26] Maxwell, James Clerk (1860), “Illustrations of the Dynamical Theory of Gases”, *Philosophical Transactions*, **47**. Republicado in: W.D. Niven (editor), 2010, v.1, p.377-409.
- [27] Maxwell, James Clerk (1873), *A Treatise on Electricity & Magnetism*, 2 vols., Clarendon. Reprint da terceira edição (1891), Dover, 1954.
- [28] Niven, W.D. (editor) (1890), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 2 vols., Cambridge University Press. Reprint, 2010.
- [29] Silva, Fabio W.O. (2007), “A evolução da teoria ondulatória da luz e os livros didáticos”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **29**, p.149-159.
- [30] Symon, Keith R. (1967), *Mechanics*, Addison-Wesley.
- [31] Thomson, William (1870), “On the Forces experienced by Solids immersed in a Moving Liquid”, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*. Republicado in: Lord Kelvin (editor) (1884), *Reprints of Papers on Electrostatic and Magnetism*, Cambridge University Press. Reprint, 2011; p.572-576.
- [32] Weinberg, Steven (1983), *The Discovered of Subatomic Particles*, Scientific American Library.

- [33] Whittaker, Edmund (1951), *A History of the Theories of Æther and Electricity*, 2 vols., The Philosophical Library; v.1.