



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

O experimento de Ptolomeu: uma introdução ao estudo da refração luminosa

Marcos Paulo da Cunha Martinho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Vitorvani Soares

Rio de Janeiro
Setembro de 2013

O experimento de Ptolomeu: uma introdução ao estudo da refração luminosa

Marcos Paulo da Cunha Martinho

Orientador: Vitorvani Soares

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Vitorvani Soares

Prof. Hélio Salim de Amorim

Prof. Alexandre Lopes de Oliveira

Rio de Janeiro
Setembro de 2013

Ficha catalográfica

M735e Martinho, Marcos Paulo da Cunha

O experimento de Ptolomeu: uma introdução ao estudo da refração luminosa / Marcos Paulo da Cunha Martinho. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2013.

xi, 65 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Vitorvani Soares.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2013.

Referências Bibliográficas: f. 62-65.

1. Ensino de Física. 2. Óptica. 3. Refração. I. Soares, Vitorvani. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. O experimento de Ptolomeu: uma introdução ao estudo da refração luminosa.

*Dedico este trabalho à minha família,
fonte de inspiração constante.*

Agradecimentos

Ao meu filho Gabriel, pela compreensão nos dias que não pudemos brincar. À minha esposa Fernanda pelos compromissos desmarcados por conta do cumprimento de minhas obrigações acadêmicas. À minha mãe Cléia e minha avó Eurides por terem alimentado meus sonhos desde pequeno. À professora Susana de Souza Barros (in memoriam), a quem devo parte de minha formação como professor. E um especial agradecimento ao meu orientador Vitorvani Soares por sua plena dedicação e contribuição na execução desse projeto, assim como, pelos ótimos dias que passamos onde pude aprender muito sobre Física.

This [, then,] is one of the important steps in the development of physical law: first we observe an effect, then we measure it and list it in a table; then we try to find the rule by which one thing can be connected with another.

— RICHARD P. FEYNMAN, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison–Wesley, 1964, vol. 1, p. 26-2.

RESUMO

O experimento de Ptolomeu: uma introdução ao estudo da refração luminosa

Marcos Paulo da Cunha Martinho

Orientador: Vitorvani Soares

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Apresentamos neste trabalho uma introdução ao conceito de refração luminosa para uso no Ensino Médio e em disciplinas do âmbito profissional das licenciaturas em Física. Nossos principais objetivos nesta dissertação são a descrição e a compreensão do fenômeno físico em questão, conforme primeiramente analisado por Ptolomeu, no século II da nossa era. A partir da formação de imagens de um objeto, empregando-se vários dioptros tais como ar-água, ar-vidro, ar-acrílico, vidro-água e acrílico-água, combinada com a análise dos dados obtidos para diferentes posições imagem-objeto, determinamos, de forma fenomenológica, a lei de Ptolomeu e, em seguida, a lei de Kepler e a lei de Snel-Descartes para a refração, estabelecidas no século XVII. Desta forma, estabelecemos a lei da refração tradicionalmente apresentada nos livros didáticos a partir da análise gráfica e algébrica das observações experimentais. Esperamos que o estudo aqui apresentado contribua para a discussão da formação de imagens com o auxílio de lentes e para a instrumentação dos futuros professores da educação secundária e dos primeiros anos dos cursos universitários.

Palavras chave: Ensino de Física, Óptica, Refração.

Rio de Janeiro
Setembro de 2013

ABSTRACT

The experiment of Ptolemy: an introduction to the study of luminous refraction

Marcos Paulo da Cunha Martinho

Supervisor: Vitorvani Soares

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

We present in this work an introduction to the concept of luminous refraction to be used in secondary school and in related disciplines of an undergraduated course in Physics. Our main goals in this dissertation are the description and the understanding of the considered physical phenomenon as first analyzed by Ptolemy, in the century II of the Current Era. From the image formation of an object and exploring as various different diopters as air-glass, air-acrylic, and acrylic-water, combined with an analysis of the obtained data for different image-object positions, we determine phenomenologically the Ptolemy's law of refraction and, as a consequence, the corresponding Kepler's law and the Snel-Descartes' law, established in the century XVII. In this way, we settle the law of refraction traditionally presented in textbooks from the graphical and algebraic analysis of the experimental observations. We hope that the study here presented contribute to the discussion of image formation with the help of lens and to the pedagogical machinery of future teachers of the secondary education level as well as to the teachers of the first years university staff.

Keywords: Physics education, Optics, Refraction.

Rio de Janeiro
Setembro de 2013

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Os PCN's e o ensino de Física	3
1.2	As habilidades e competências a serem desenvolvidas	4
2	Aspectos didáticos	6
2.1	Os laboratórios didáticos	6
2.2	O processo de ensino-aprendizagem e as práticas experimentais	9
2.3	A refração no Ensino Médio	12
3	O contexto histórico	16
3.1	Os gregos clássicos	16
3.2	A teoria moderna	19
3.3	O índice de refração negativo	22
4	Uma investigação da refração	24
4.1	A refração em perspectiva	24
4.2	O baptistir	30
4.3	A refração para o dioptró ar-acrílico	32
4.4	A refração para o dioptró ar-água	41
4.5	A refração para o dioptró acrílico-água	46
4.6	As características dos dioptrós	49
4.7	A fórmula de Bhaskara	50
4.8	A lei da refração atual	54
5	Considerações finais	60
	Referências	62

Lista de ilustrações

Figura 1	Material para a primeira atividade.	25
Figura 2	Localização da imagem.	26
Figura 3	Posição da imagem na primeira atividade.	28
Figura 4	Formação de imagens da primeira atividade.	29
Figura 5	Vista de frente e lateral do nosso baptistir.	31
Figura 6	Representação esquemática do nosso baptistir.	32
Figura 7	Baptistir e o diopetro ar-acrílico.	33
Figura 8	Medidas angulares para o diopetro ar-acrílico.	34
Figura 9	Diferença entre as medidas angulares para o diopetro ar-acrílico.	35
Figura 10	Razão entre as medidas angulares para o diopetro ar-acrílico.	36
Figura 11	Medidas angulares para o diopetro ar-acrílico.	37
Figura 12	Baptistir e o diopetro ar-acrílico.	38
Figura 13	Medidas para o diopetro acrílico-ar.	39
Figura 14	Razão entre as medidas angulares para o diopetro ar-acrílico.	40
Figura 15	Medidas angulares para o diopetro ar-acrílico	41
Figura 16	Baptistir e o diopetro ar-água.	42
Figura 17	Medidas angulares para o diopetro ar-água.	43
Figura 18	Razão entre as medidas angulares para o diopetro ar-água	44
Figura 19	Medidas angulares para o diopetro ar-água.	45
Figura 20	Medidas angulares para o diopetro acrílico-ar.	47
Figura 21	Razão entre as medidas angulares para o diopetro acrílico-água.	48
Figura 22	Medidas angulares para o diopetro acrílico-ar.	49
Figura 23	Círculo geométrico.	51
Figura 24	Seno e a fórmula de Bhaskara.	53
Figura 25	Formação das imagens na primeira atividade.	54
Figura 26	Lei dos senos para o diopetro ar-acrílico e ar-água.	56
Figura 27	Lei dos senos para o diopetro acrílico-ar e água-ar.	58

Lista de tabelas

Tabela 1	Medidas angulares para o diopetro ar-acrílico.	33
Tabela 2	Medidas angulares para o diopetro acrílico-ar.	38
Tabela 3	Medidas angulares para o diopetro ar-água	43
Tabela 4	Medidas angulares para o diopetro acrílico-água.	46
Tabela 5	Coefficientes para os diopetros ar-água e ar-acrílico.	50
Tabela 6	Seno e a fórmula de Bhaskara.	52
Tabela 7	Lei dos senos para o diopetro ar-acrílico e ar-água.	55
Tabela 8	Lei dos senos para o diopetro acrílico-ar e água-ar.	57

1 Introdução

Uma das razões que inspirou este projeto foi a possibilidade de realização de um ensino que incluía a atividade experimental e que, simultaneamente, permitia ao estudante construir os conceitos físicos a partir da observação e da análise de um determinado fenômeno. Assim, de acordo com Bransford, Brown e Cocking (2007) sobre o resultado das pesquisas em ensino de ciências dos EUA, “o conhecimento relevante ajuda as pessoas ir além da informação dada e a pensar nas representações do problema, a se envolver no trabalho mental de criar referências e relacionar diversos tipos de informação com a finalidade de tirar conclusões.”

Outra razão que também nos motivou foi observar que a formação de imagens reais com lentes e espelhos de diferentes formatos é um dos principais temas de ensino na educação secundária e nos primeiros anos do curso universitário. Entretanto, Mihás (2008) e Silveira e Axt (2006), entre outros autores, observam que a aplicação das leis da reflexão e da refração, por parte dos estudantes, no funcionamento de instrumentos ópticos, tem sido objeto de grande discussão.

Esperamos que as informações que apresentamos no presente trabalho contribuam para esse debate e ofereçam uma opção ao ensino tradicionalmente apresentado nos cursos atuais. A produção de experimentos didáticos ligados à óptica geométrica não é pequena e pode potencializar um ensino mais significativo dessa área da Física. Entretanto, especificamente sobre a refração, ao nosso conhecimento, existem poucos experimentos de caráter didático que seguem o procedimento que apresentamos nesta dissertação.

Uma terceira razão que nos levou a refletir sobre o tema aqui discutido e apresentá-lo da forma aqui proposta foi perceber que os livros-texto raramente exploram os aspectos históricos dos fenômenos físicos e pouco insistem que a maioria dos conceitos físicos precisaram de muitos anos, às vezes séculos, como no caso da refração, para serem compreendidos ou explorados em sua máxima potencialidade. Como um exemplo, o livro de Born e Wolf (1999), *Principles of Optics*, menciona rapidamente Euclides, que viveu no século III antes da nossa era, e, logo em seguida, salta 2000 anos na história e apresenta os trabalhos de Galileu, Snel e Descartes.

De fato, se pensarmos na lei de refração, Snel e Descartes são os nomes que surgem quase que imediatamente em nossa mente. Em geral, aprendemos em nosso curso introdutórios de óptica que a lei da refração da luz foi descoberta pelo matemático holandês Willebrord Snel van Royen (1580–1626) mas só teria sido publicada, em 1653, no livro *Dióptrique* de seu compatriota, o matemático, físico e astrônomo Christiaan Huygens (1629–1695), após o falecimento de Snel (HUYGENS, 1916). Aprendemos também que, nessa mesma época, essa lei vai ser descoberta e publicada por René Descartes (1596–1650), em 1637, em seu tratado *Discours de la Méthode* (DESCARTES, 2001).

Não sabemos com certeza se Descartes descobriu essa lei independentemente, mas sabemos que ele foi o primeiro a publicá-la. Consequentemente, ela é conhecida pelos franceses como a *lei de Descartes*. Apesar disso, Huygens (1916), Shirley (1951), Waard (1935) e Vollgraff (1936) sustentam que Snel já a conhecia em 1621. Portanto, *antes* de Descartes e, por esta razão, esta lei é conhecida na comunidade científica como lei de Snel-Descartes. Com o auxílio desta poderosa lei, Descartes foi capaz de calcular a localização do arco-íris e Isaac Newton (1642–1727) pode estabelecer as leis ópticas para a formação de imagens através de lentes. Do cuidadoso trabalho experimental de Snel, Descartes e outros a óptica moderna surgiu.

Como poderíamos deduzir da lei da eponímia de Stigler (1980)¹, o fato desta lei ser denominada lei de Snel-Descartes automaticamente implica que eles não foram os primeiros a descobri-la. Lohne (1959) apresenta fatos históricos que sugerem que esta lei já teria sido descoberta, em 1602, pelo inglês Thomas Harriot (c.1560–c.1621), baseado em suas observações, realizadas entre 1597 e 1598. Apesar de não ter publicado seus resultados, Harriot manteve correspondência com Johannes Kepler (1571–1630) sobre esse assunto (LOHNE, 1975). Kepler, por sua vez, em 1604, escreveu o seu tratado intitulado *Paralipomena ad Witelo* (KEPLER, 2000) e, segundo Mach (1926), também tentou estabelecer uma lei para descrever a refração luminosa.

Mas, o que ocorreu antes de Snel? Ficamos completamente surpresos ao descobrir nos trabalhos dos historiadores da ciência que o matemático e astrônomo grego Cláudio Ptolomeu (c.85–c.165) já teria realizado, no século II, um cuidadoso experimento para determinar as regras que balizam o fenômeno da refração. Ptolomeu fez um estudo quantitativo e surpreendentemente moderno, que hoje é realizado em muitos laboratórios de óptica por estudantes tanto do ensino médio quanto universitários. Há, portanto, um hiato de 20 séculos entre o estabelecimento das leis de reflexão e de refração que não é considerado quando o assunto é abordado nas escolas e um desconhecimento sobre quem são os personagens dessa história e o quanto eles contribuíram para a descrição e compreensão dessa lei.

Ptolomeu constrói o *baptistir*, um goniômetro com uma escala angular ao longo do seu perímetro com uma precisão de 0.5° , cujo centro coincide com a interface entre os meios dielétricos que ele explora. Ele escolhe os diopros ar-água, ar-vidro e vidro-água, varia os ângulos de incidência entre 10° e 80° em unidades de 10° (medidas a partir da normal para a interface) e mede os ângulos de refração correspondentes. Ele, em seguida, realiza um estudo detalhado dos seus resultados e produz uma lei empírica, precisa o suficiente para ser de uso prático ainda em nossos dias. Curiosamente, poucos fizeram uso dela, Ptolomeu incluído. Deste modo, podemos nos perguntar: (i) Por que não somos informados desse trabalho? e; (ii) Por que Ptolomeu não encontrou a lei da refração 1500

¹ Stephen Stigler, professor de Estatística da University of Chicago. Curiosamente, o próprio Stigler atribui a descoberta desta “lei” ao sociólogo Robert K. Merton, de maneira que a “lei de Stigler” é um exemplo de si mesma.

anos antes de Snel ou Descartes?

Procuramos responder essas e outras perguntas ao longo desta dissertação, onde descrevemos uma aula introdutória sobre a refração, a partir do experimento de Ptolomeu, e procuramos destacar a relevância desse experimento para o ensino do fenômeno da refração nos cursos introdutórios de óptica. Apresentamos, assim, uma abordagem alternativa para o estudo da refração que segue os passos de Ptolomeu e tem o caráter contemporâneo de um trabalho científico: a observação de um fenômeno, a conjectura de uma relação de causa e efeito, a realização de medidas e, por fim, uma conclusão.

1.1 Os PCN's e o ensino de Física

As razões apresentadas no início desse capítulo, para o desenvolvimento desse projeto, estão em acordo com as orientações dos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCNs), o documento que norteia as direções que o ensino básico no Brasil deve caminhar. Este Programa, vigente desde 1998, e o seu complemento de 2002, os *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio* (PCN+), sugerem que o ensino de Física deve fazer referências ao mundo vivencial dos estudantes e professores, aos diversos contextos em que ele se insere, à qualidade da informação, à história da ciência, à experimentação e à interdisciplinaridade, de forma que o estudante construa o seu conhecimento em etapas mas de forma integrada.

O ensino de Física, ainda segundo os PCN+, deve oferecer ao estudante a dimensão da universalidade e da síntese do conhecimento através de situações investigativas, de modo que ele possa, a partir delas, abstrair e generalizar conceitos e leis. Deste modo, a Física deve proporcionar ao estudante egresso do Ensino Médio uma compreensão do mundo em que vivemos e uma participação mais abrangente na nossa sociedade. O conteúdo da Física está relacionado com aquele das Ciências Naturais e, assim, possui procedimentos e linguagens próprias que nos permitem perceber e lidar com os fenômenos naturais. Através desse estudo é possível adquirir habilidades e competências para interagir com o mundo de forma abrangente e responsável.

Outro importante ponto desse documento é o questionamento inicial que ele invoca em seu texto: Para que ensinar Física? Orientando que é preciso verificar sempre sobre que tipo de competências e habilidades certo conteúdo pode contribuir para a formação do estudante. Dentro desse contexto — e fazendo a análise das competências e habilidades sugeridas —, observamos que nossa proposta está em acordo com essas orientações: apresentamos um estudo da refração que faz uso não somente das linguagens e procedimentos próprios da Física mas permite também a interdisciplinaridade com a Matemática e a História.

De fato, como podemos destacar do PCN+ (BRASIL, 2002, p. 59),

“a Física deve contribuir com um conjunto de competências especifi-

cas que permitam perceber e lidar com fenômenos naturais e tecnológicos. . . Isso implica na linguagem própria da Física, que faz uso de conceitos e terminologia bem definidos, além de suas formas de expressão que envolvem, muitas vezes, tabelas, gráficos ou relações matemáticas. Ao mesmo tempo, a Física deve ser reconhecida como um processo cuja construção ocorreu ao longo da história da humanidade.”

Dentro dessa perspectiva, compreendemos que o ensino de Física não deve se limitar a apenas oferecer informações através de formas decoradas e leis desconexas. A aprendizagem científica deve contribuir para transformações conceituais que produzam no indivíduo uma visão crítica da realidade.

O enfoque experimental de alguns conteúdos é bem-vindo nas escolas e alunos e professores concordam que este tipo de prática potencializa um melhor entendimento da matéria estudada. Contudo, esse reconhecimento nem sempre se traduz em ações efetivas no fazer pedagógico do professor de Física. Existem vários fatores que levam a esse quadro: o despreparo profissional, a falta de equipamentos ou de um espaço adequado para a realização de atividades experimentais são alguns exemplos. Acrescente-se, ainda, o curto tempo de preparação daquele professor que trabalha em várias escolas e, também, a gestão de algumas escolas que priorizam o cumprimento de um programa restrito à preparação para um exame ou concurso específico.

Desse modo, torna-se indispensável apresentar alternativas ao ensino e, em particular, ao ensino de Física, com a inserção ao longo do desenvolvimento das disciplinas de novos temas e abordagens mais atraentes tanto para os professores quanto para os alunos.

1.2 As habilidades e competências a serem desenvolvidas

Com a apresentação e a discussão de uma questão científica real, os estudantes têm a oportunidade de identificar o problema, conjecturar hipóteses sobre o fenômeno, estabelecer relações de causa e efeito entre os parâmetros envolvidos no problema e, ao final, medir essas grandezas e chegar a uma conclusão sobre o fenômeno considerado.

Assim, nesse processo, é aprendida a metodologia moderna, empregada nos laboratórios científicos atuais. O aluno tem então a oportunidade de se familiarizar com as etapas desse método para a solução de um problema e, além disso, aprende a trabalhar com os instrumentos de caráter teórico-experimental: gráficos, tabelas e equações para a modelagem dos resultados. Este tipo de atividade permite que o estudante desenvolva habilidades tanto no aspecto intelectual quanto na capacidade em lidar com máquinas, ferramentas, e outros diferentes equipamentos disponíveis em vários setores da sociedade.

Portanto, com as atividades sugeridas em nosso projeto, esperamos mostrar ao aluno que fazer Ciência não é privilégio de algum tipo particular de pessoa. Todo aquele que se interesse por esse tipo de atividade pode praticá-la desde que tenha desenvolvido a postura científica necessária, e que essa postura pode ser cultivada e aprimorada desde as idades

iniciais da educação. Nas palavras de Cervo, Bervian e Silva (2007), a importância em se desenvolver a postura científica nos estudantes desde as séries iniciais é assim descrita:

“Se tais atributos forem bem cultivados e administrados, a coerência metodológica que se espera na maturidade pode resultar em cientistas e pesquisadores produtivos ou, no mínimo, em adultos capazes de tratar, analisar e sintetizar os dados da realidade de maneira lógica e coerente ... A ciência pode ser praticada também nas mais variadas situações da vida, e não apenas no recesso dos laboratórios e na solidão das pesquisas de campo.”

Em nossa proposta pedagógica esperamos que os estudantes dominem a linguagem da Física e a estendam para outras áreas do conhecimento. Esperamos também mostrar a eles que a Ciência também é construída ao longo da história da humanidade e que esta Ciência está inserida em um contexto histórico e social.

Em nosso projeto também é possível estabelecer trabalhos interdisciplinares, ampliando ainda mais o seu alcance. As disciplinas de Matemática (gráficos e tabelas), História (contexto social de cada época), Química (as propriedades Físicas e química dos materiais), Biologia (o mecanismo da visão) e a Informática (análise dos dados e redação de relatórios por meio de programas computacionais) podem contribuir de forma integrada com a Física, permitindo ao estudante uma visão mais universal dos conteúdos estudados.

Para uma exposição mais detalhada das atividades discutidas nessa dissertação, a organizamos da seguinte maneira: No Capítulo 2 apresentamos a fundamentação didática da nossa proposta. No Capítulo 3 destacamos alguns aspectos da história da refração que acentuam as suas relações com o desenvolvimento científico e social e podem ser úteis no desenvolvimento das atividades propostas. No Capítulo 4 apresentamos o conjunto das atividades propostas para a identificação, discussão e representação do fenômeno da refração, que denominamos *o experimento de Ptolomeu*, e estabelecemos as diferentes formas da lei de refração. No último capítulo apresentamos as nossas considerações finais.

2 Aspectos didáticos

Vários autores defendem que a forma de ensino onde o aluno se comporta como um elemento passivo deve ser substituída por aulas que envolvam o planejamento e a realização de atividades que o tornem um elemento ativo no processo de sua própria aprendizagem. Neste caso, a experimentação e a discussão de experimentos reais em sala de aula podem funcionar como uma alternativa para esse cenário.

De fato, Capecchi e Carvalho (2006), Carrasco (1991) e Baker et al. (1986) são categóricos em afirmar que a prática experimental pode servir como instrumento determinante no desenvolvimento de competências e habilidades na formação do estudante. Entretanto, na maioria das escolas, o laboratório é pouco explorado e os estudantes passam, às vezes, todo o seu Ensino Médio sem trabalhar a Física como uma ciência experimental, uma disciplina que procura entender a natureza através de métodos próprios de observação e de análise dos fenômenos naturais.

Apresentamos, a seguir, algumas justificativas teóricas que apoiam a realização de atividades experimentais em sala de aula e que exploram o papel dos experimentos científicos e didáticos no desenvolvimento de competências e habilidades que auxiliem a formação do aluno. Também discutimos neste capítulo alguns procedimentos didáticos que, esperamos, possam ser explorados pelo professor para que a aula experimental proporcione ao aluno, ao final das atividades, a aprendizagem significativa desejada em relação aos conceitos envolvidos.

Neste capítulo também chamamos a atenção para alguns aspectos empregados no ensino da refração, por alguns livros de Física para o Ensino Médio, e quais as propostas experimentais presentes nos livros do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM).

2.1 Os laboratórios didáticos

A Física é uma ciência de caráter experimental. Entretanto, apenas alguns poucos professores praticam propostas experimentais em sala de aula, frente à maioria que ainda promove as tradicionais aulas expositivas, de “quadro e giz”. Entre essas atividades experimentais adotadas, poucas são de caráter verdadeiramente exploratório, em que o estudante tenha uma situação-problema a ser resolvida. Nesses casos, a aula experimental se limita a demonstrar ou verificar aquilo que está sendo informado.

Essas atividades experimentais também não são administradas a partir de um planejamento prévio das ações pedagógicas a serem implementadas nas turmas e, desse modo, o uso desse recurso acaba sendo casual e, muitas vezes, improvisado. Entretanto, a partir das recomendações e orientações dos PCNs o planejamento de atividades de caráter

didático-pedagógico tem se revigorado. O desenvolvimento das habilidades e competências apresentadas na Seção 1.2 traz à tona a discussão sobre os benefícios e as contradições que o ensino experimental pode introduzir no processo de ensino aprendizagem.

Acreditamos que esse tipo de laboratório deve estabelecer e consolidar a relação estreita entre ciência e realidade. Deste modo, a atividade no laboratório deve fornecer condições para os estudantes compreenderem os fenômenos relacionados às áreas de ciências e que a conquista dessa compreensão se inicia com a observação do fenômeno seguida da sua caracterização por meio das medidas realizadas com instrumentos adequados das grandezas envolvidas no evento considerado ou das variáveis pré-determinadas por teorias já estabelecidas. O estudante, assim, pode interagir com o fenômeno de forma empírica e, simultaneamente, construir o seu conhecimento do fenômeno em questão através da sua observação e da sua análise por meio da experimentação e da modelização.

Desse modo, os laboratórios se tornam espaços de ensino-aprendizagem onde os estudantes podem interagir entre si e com o professor. Como sugerem Marineli e Pacca (2006), através das atividades experimentais os alunos podem discutir seus vários pontos de vista sobre o fenômeno observado e podem ainda propor estratégias, manipular instrumentos, formular hipóteses, prever resultados e confrontar previsões com resultados obtidos experimentalmente.

Entretanto, isto não significa que a realização de experiências seja a solução do ensino de Física. O professor não deve ignorar que o conhecimento adquirido pelo aluno através da prática experimental, portanto científico, vai além do empírico: o aluno deve procurar, segundo nos orienta Cervo, Bervian e Silva (2007), a “compreender, além do ente, do objeto, do fato e do fenômeno, sua estrutura, sua organização e funcionamento, sua composição, suas causas e leis.”

É importante também salientar que as práticas experimentais podem levar o aluno a entender que a Ciência não está pronta e acabada, não possuindo assim verdades imutáveis, mas está sempre em permanente construção, onde se busca constantemente explicações e soluções para os problemas atuais a partir da compreensão de problemas antigos.

Como já comentamos no capítulo anterior, as atividades experimentais administradas e cultivadas em espaços de ensino-aprendizagem podem prover ao estudante uma postura científica que pode lhe ser útil a vida toda. Ainda conforme CERVO; BERVIAN; SILVA, op. cit., “a postura científica é, antes de tudo, uma atitude ou disposição subjetiva do pesquisador que busca soluções sérias, com métodos adequados para problemas que enfrenta”. Portanto, a postura científica deve caracterizar, no indivíduo que a possua, certa consciência crítica que o permita julgar, discernir e separar o essencial do superficial. Ele só admite o que é suscetível à prova.

Ainda para esses mesmos autores, outro aspecto da postura científica é o “senso aguçado da moral, dignidade e humildade que devem ser características essenciais em qualquer indivíduo.” Deve-se respeitar a verdade e não distorcê-la em caso algum. Isto é, o pesqui-

sador deve cultivar a honestidade científica.

Apesar das considerações prévias serem positivas e bem-vindas ao ensino de ciências, outros estudos indicam que a utilização de laboratórios didáticos no ensino da Física em diferentes níveis não tem produzido o efeito esperado. Um desses estudos, como aquele realizado por Marineli e Pacca (2006), revela algumas dificuldades nas concepções dos estudantes após a realização de atividades no laboratório tais como o fato de não compreenderem o processo de medida nem o seu tratamento e a sua análise, além de empregarem de forma não criteriosa alguma teoria previamente descrita para validar os seus resultados experimentais.

Outro ponto crítico é apontado por Moreira e Axt (1991) no que diz respeito ao despreparo dos professores em relação às aulas experimentais. Segundo eles para que as potencialidades do ensino experimental sejam postas em prática é necessário que o professor seja capaz de detectar as contradições que existem entre a maneira dos alunos pensarem e o procedimento do formalismo científico. Isso permite que o professor faça propostas claras e ajude o estudante a entender o que está sendo ensinado. Estes autores alertam ainda que, se o professor tiver contradições no mesmo nível dos alunos, há poucas chances de ocorrer uma aprendizagem significativa.

Os erros apresentados pelos estudantes em práticas de laboratório ocorrem muitas vezes devido à falta de preparo para o exercício da atividade científica, seja teórica ou experimental. Entretanto, um ensino que valorize práticas experimentais bem planejadas e regulares ao longo da formação do aluno desde os primeiros anos escolares pode minimizar os erros e equívocos no manuseio dos instrumentos teóricos e práticos e, por conseqüência, reduzir interpretações ambíguas dos fatos e fenômenos observados.

Para finalizar esta seção, julgamos importante frisar que as práticas experimentais por si só não teriam sentido sem uma estratégia didática previamente planejada pelo professor. Como já observamos anteriormente, o uso de laboratórios didáticos tem suas limitações. No entanto, suas potencialidades podem nos auxiliar a responder à pergunta feita no Capítulo 1 e presente nos PCNs: Para que ensinar Física? Para ensinar leis, teorias, fórmulas, resolução de problemas?

Lembramos então que, dentro dos vários caminhos e possibilidades que se apresentam para a realização da formação de um estudante, precisamos ter em mente que estamos formando cidadãos e não cientistas e, assim,

os conhecimentos que [ele] vai adquirir, os bons e maus mestres que vai enfrentar não constituirão o essencial da vida acadêmica. O essencial é aprender a trabalhar, como enfrentar e a solucionar problemas que se apresentam não só na Universidade, mas principalmente na vida profissional. Para isso, não é preciso adquirir conhecimentos científicos comprovados, fórmulas mágicas para todos os males, mas sim hábitos, consciência e espírito preparado no emprego dos instrumentos que levarão a soluções de problemas. (CERVO; BERVIAN; SILVA, 2007, p. 15)

2.2 O processo de ensino-aprendizagem e as práticas experimentais

Rezende, Ostermann e Ferraz (2009) observam que, desde a publicação dos PCNs, há uma grande preocupação na maioria dos trabalhos na área de ensino na elaboração de experimentos didáticos para auxiliar o professor na sua tarefa. Tais materiais didáticos são, em geral, acompanhados de uma proposta didática que inclui os alunos como parte essencial no processo de aprendizagem.

Como tais atividades não permitem mais que o professor desempenhe o papel de simples transmissor de conhecimento, ele deve, agora, também realizar a sua tarefa como um orientador que proporcione o bom desenvolvimento das tarefas propostas. O professor passa a representar um personagem mediador, que deve estimular os alunos a realizar abordagens qualitativas e quantitativas durante as ações em sala de aula.

O professor deve, ainda, saber contextualizar o conhecimento científico da sua disciplina e saber explorar adequadamente os recursos tecnológicos disponíveis. Essa nova perspectiva, que se apresenta como a nova dimensão para a educação básica — e, em destaque, para o Ensino Médio —, deve ser acompanhada por uma ação didática diferente daquelas que já se apresentam consolidadas na maioria das escolas brasileiras.

Parece também haver um consenso entre os pesquisadores em ensino que o aluno deve participar do seu aprendizado e não ser apenas um sujeito passivo e receptor de conhecimentos. Para modificar esta situação, é preciso que o aluno desenvolva habilidades próprias que o permitam interagir com o objeto a ser conhecido, experimentar, investigar e retirar do objeto de aprendizagem o conhecimento necessário contido nele.

O estudante em busca de explicações para um fenômeno a ele apresentado precisa, portanto, ter contato com as ideias científicas para praticar a formulação de hipóteses. Assim, com o auxílio de uma ação didática específica, ele pode ser auxiliado na construção do seu próprio conhecimento. Desse modo, como afirma Carvalho (2007), a escola deve então fornecer condições aos alunos para o exercício de uma cultura científica efetiva e não apenas demonstrá-la.

Portanto, diante da realidade que parece dominar o ensino atual, ainda fundamentada na metodologia da emissão-recepção, é preciso que sejam propostas metodologias alternativas que transformem a dinâmica da aula. Espera-se que ela deixe de ser totalmente expositiva e passe a adotar uma estratégia onde o estudante possa agir e refletir sobre os problemas a ele apresentado.

Espera-se, assim, uma aula em que as estratégias pedagógicas utilizadas pelo professor orientem o aluno na consolidação de um determinado conteúdo de ensino. Essa articulação do aluno com o objeto da aprendizagem deve estar contida necessariamente no planejamento do trabalho e, para que haja mudança na educação Wilsek e Tosin (2012) observam que

“é necessária uma (re)elaboração dos processos de ensino-aprendizagem que vai desde uma mudança dos papéis do professor(transmissor) e do

aluno (receptor) até a utilização de novas metodologias que possibilitem o aluno a construir seu próprio conhecimento tendo o professor como mediador do processo.”

As propostas pedagógicas de natureza investigativa têm por objetivo, portanto, auxiliar os estudantes a elaborar uma metodologia que os leve a desenvolver técnicas que os auxiliem a abordar e a resolver diferentes problemas. Ou seja, ao colocar o estudante diante de uma situação problema, ele precisa encontrar meios para solucioná-la e, nesse processo, adquirir uma determinada habilidade ou algum conceito contido na situação problema considerada.

Carvalho et al. (1998) observam que essa forma de trabalhar o aprendizado por investigação abre perspectivas para que o estudante possa se preparar para a vida social e profissional, tornando-se socialmente um ser crítico, consciente e apto para trabalhar em equipe. A ideia central é que o aluno deve construir o seu conhecimento através de ações pedagógicas que envolvam experimentação, reflexão, relatos, discussões, ponderações e explicações.

As atividades investigativas, segundo Kamil e Devries (1986), também podem ser classificadas em formas ou níveis de atuação dos estudantes frente às situações de aprendizagem:

1. Agir sobre os objetos;
2. Agir sobre os objetos para produzir um efeito desejado;
3. Ter consciência de como produziu o efeito desejado;
4. Dar explicações das suas causas.

Ter conhecimento dessas classificações é de grande ajuda para o planejamento da ação didática a ser empregada em uma situação problema. O professor deve ter domínio sobre a ação escolhida de maneira a garantir que a situação de aprendizagem seja bem sucedida. Espera-se, assim, que aprendizagem efetiva se construa ao longo do desenvolvimento da solução do problema considerado.

Para Carrasco (1991), também devemos produzir o ambiente em que o aluno seja o principal ator de sua aprendizagem. Um ambiente que, simultaneamente, favoreça a argumentação e revele ao estudante que o conhecimento não está pronto e acabado.

A aprendizagem de novos conhecimentos através de situações problemas também é defendida por Meirieu (1998). No entanto, este autor alerta para o fato de nada garantir que as dificuldades dos alunos desapareçam de maneira progressiva ao longo do “projeto de ensinar”. Ele observa também não ser possível garantir que essas dificuldades não reapareçam outras vezes ou, ainda pior, que continuem a reaparecer quando a aprendizagem foi supostamente efetuada. Nas palavras de MEIRIEU, op. cit., p. 172, devemos considerar que

“na verdade, todo esforço da pedagogia das situações-problema está em organizar metodicamente essa interação para que, na resolução do problema, a aprendizagem se realize (...) isso impõe que se tenha certeza da existência de um problema a ser resolvido e, ao mesmo tempo, da impossibilidade de resolver o problema sem aprendê-lo.”

Este autor ainda destaca um outro aspecto importante e controverso: se aprender por dificuldades não seria uma forma onerosa para o aluno. A simples proposição de um problema não é garantia que o aluno vá tentar resolvê-lo da maneira que achamos que ele deveria. É possível que o aluno vá buscar a solução mais fácil, através de um especialista ou de algum colega que a já tenha encontrado. Meirieu observa que isso não é má vontade por parte de alguns alunos, e que não devemos estranhar o fato desses alunos procurarem sistematicamente a facilidade pois somos acostumados a elas. Se isso acontecer, temos que rever os propósitos da tarefa e rever os objetivos fixados (MEIRIEU, 1998).

O professor, nesse cenário, não deve ser mais aquele que recita a lição e que coloca toda a atenção da aula para si mas, sim, aquele que guia, que orienta o estudante através de um caminho didático planejado para a situação de ensino-aprendizagem estabelecida. É preciso que o professor pesquise formas novas de ensinar e explore diferentes metodologias que permitam ao seu estudante ser o protagonista de sua aprendizagem. Então, devem se propostas atividades experimentais que estimulem e ajudem os estudantes a compreenderem um determinado conceito ou lei física, despertando a sua curiosidade e a sua criatividade (WILSEK; TOSIN, 2012).

Até aqui discutimos o cenário que se vislumbrou, a partir dos PCNs, em que a educação brasileira deve ser capaz de tornar nossos estudantes indivíduos mais críticos, mais conscientes e melhor preparados para atuar em sociedade. Para isso, é preciso que abandonemos as tradicionais cartilhas da aprendizagem por recepção e que nos debruçemos em metodologias alternativas para, desse modo, proporcionarmos aos nossos estudantes outras situações para o desenvolvimento de sua aprendizagem como, por exemplo, as atividades por investigação.

Acreditamos que o uso de atividades experimentais em salas de aula, como metodologia de ensino para a Física, possa ser uma ferramenta eficiente na diminuição das dificuldades de aprendizagem da disciplina. As pesquisas mostram que o uso das atividades experimentais são importantes para as ações didáticas implementadas nas salas de aulas. Embora seja consensual o uso de tal prática pedagógica, é preciso dizer que há uma versatilidade nas características com que ela é aplicada. Uma dessas características é a mera verificação de uma determinada lei física — prática muito corrente em aulas de laboratórios nas universidades — ou apenas a demonstração em salas de aulas da educação básica de um fenômeno particular, realizada muitas vezes pelo próprio professor.

Dentro de uma perspectiva distinta dessa prática experimental corrente, as situações didáticas devem permitir ao estudante elaborar reflexões acerca do atividade realizada, levando-o a formular novos questionamentos, novas ideias frente aquelas já existentes. O

ato de interrogar impulsionou a humanidade a dar passos na direção em que nos encontramos. Não podemos, então, tirar da escola essa dimensão de inquirir dos seus alunos. A escola não pode dar ao aluno a sensação que não temos mais nada a descobrir.

No entanto, o engajamento dos estudantes não será conquistado apenas com a formulação de um problema. É necessário que os estudantes estejam motivados a querer resolver o problema. O professor deve então ser capaz de criar situações problema que os motivem a resolvê-las. Nas palavras de Bachelard (1996), “como todo conhecimento é a resposta a uma questão, essa questão deve motivar o aluno, a ser significativo a ele, sob a pena de ele construir o conhecimento desejado.”

Assim, Bachelard nos assinala que as propostas didáticas oferecidas aos alunos devem transformar um conhecimento a ser adquirido por ele em um problema que ele mesmo possa resolver. Nesse enfoque, Capecchi e Carvalho (2006) lembram que as atividades experimentais podem aumentar as motivações do estudante ao lhe ensinar as técnicas necessárias para desempenhá-las e, concomitantemente, desenvolver nele uma visão aceitável da natureza da atividade científica ao aperfeiçoar a sua aprendizagem dos conhecimentos científicos e incentivar a sua atitude científica.

2.3 A refração no Ensino Médio

Como aprendemos durante a nossa formação acadêmica, a refração é sempre um assunto presente nos compêndios do Ensino Médio e é de grande importância científica. Muitos fenômenos e muitas tecnologias são construídas a partir de seu conhecimento e Sant’Anna et al. (2010) observam que

“inúmeros acontecimentos intrigantes relacionados ao comportamento da luz são explicados com base no conceito e nas leis que regem a refração luminosa. Da miragem ao arco-íris, da fibra óptica ao brilho do Diamante, a luz que provoca esses fenômenos é captada por nossos olhos, além de nos fascinar, é capaz de se tornar uma ferramenta tecnológica prodigiosa.”

Entretanto, a escolha da refração dentre outros temas que poderiam ter sido escolhidos como objeto da proposta experimental, deveu-se à possibilidade em mostrar ao estudante que ideias simples podem ser bastante eficazes na construção de uma lei física, sem a produção de experimentos muito sofisticados. A óptica geométrica permite a construção de experimentos simples que potencializam a descrição de alguns fenômenos de forma bastante satisfatória.

Como observamos no Capítulo 1, isto nos motivou a oferecer uma opção ao ensino da refração tradicionalmente apresentado nos cursos atuais. A produção de experimentos didáticos ligados à óptica geométrica não é pequena e pode potencializar uma aprendizagem mais significativa dessa área da Física. Entretanto, especificamente sobre a refração,

ao nosso conhecimento, existem poucos experimentos de caráter didático que seguem o procedimento que apresentamos nesta dissertação.

Uma outra razão que nos encorajou foi observar que os livros-texto exploram raramente os aspectos históricos dos fenômenos físicos e pouco insistem que a maioria dos conceitos físicos precisaram de muitos anos, às vezes séculos, como no caso da refração, para serem compreendidos ou investigados em sua máxima potencialidade.

Como já afirmamos, se pensarmos na lei de refração, Snel e Descartes são os nomes que surgem em nossa mente. Como um exemplo, o livro de Born e Wolf (1999), *Principles of Optics*, menciona rapidamente Euclides, que viveu no século III antes da nossa era, e, logo em seguida, salta 2000 anos na história e apresenta os trabalhos de Galileu, Snel e Descartes. Mas, o que ocorreu entre essas datas? Ao nosso conhecimento, somente o livro de Feynman, Leighton e Sands (1964) chama a atenção para a importância do trabalho experimental e analítico de Ptolomeu.

Assim, existe um hiato de 20 séculos entre o estabelecimento das leis de reflexão e de refração que não é considerado quando o assunto é abordado nas escolas, um desconhecimento sobre quem são os personagens dessa história e o quanto eles contribuíram para a descrição e para a compreensão atual desse fenômeno.

Também é interessante saber como o ensino da refração está disposto no Ensino Médio e quais são as propostas experimentais sugeridas para a descrição e análise desse fenômeno. Com esse propósito, realizamos um levantamento não exaustivo sobre as abordagens adotadas sobre o fenômeno da refração, apresentados nos livros didáticos dedicados à Física que, na sua maioria, são distribuídos pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM).

Como é do nosso conhecimento, os professores, em geral, seguem a estrutura dos livros didáticos recomendados para ministrarem seus cursos. Partindo desse ponto de vista, observamos uma diversidade na apresentação desse fenômeno aos estudantes mas de alguma forma existe uma equivalência na linha de condução didática e na escolha dos tópicos.

Os livros didáticos apresentam o assunto da refração luminosa em uma única unidade. Os assuntos abordados vão da conceituação do fenômeno aos sistemas óticos de formação de imagens, com exceção ao estudo de lentes que, em geral, também são apresentados em um único bloco. A seguir, dividimos em quatro partes a análise descritiva da refração encontrada nos livros didáticos consultados.

A primeira observação é constatar que é bem diversificada a introdução ao assunto. Sant'Anna et al. (2010) iniciam a discussão sobre a lei da refração fazendo perguntas abertas; Yamamoto e Fuke (2010) e Gonçalves e Toscano (2010) chamam a atenção para aspectos mais fenomenológicos, sugerindo a apresentação de uma situação concreta em sala de aula como, por exemplo, a experiência da moeda no fundo de um copo. Torres, Ferrero e Soares (2010), por sua vez, apresentam diretamente as definições dos conceitos

relativos ao fenômeno da refração sem dar exemplos.

Entretanto, é importante dizer que em todos os livros consultados a descrição do fenômeno da refração está intimamente ligada à Física ondulatória e todas as discussões assumem que a luz possui uma velocidade finita e o seu módulo depende do meio ótico. Observamos também que os autores, em geral, definem a refração como a passagem da luz de um meio ótico para outro com alteração da sua velocidade sem, em geral, definir o que é meio ótico. Somente Yamamoto e Fuke (2010) o fazem.

Não existe nada relevante em nenhum dos livros consultados sobre o método de caracterização de uma lei física e sobre a história do fenômeno mas alguns autores apresentam um pouco da história da Óptica, principalmente os mecanismos ligados à visão, muito discutido desde Antiguidade à Renascença. Sobre a refração, em particular, encontramos no máximo uma pequena referência a Snel ou a Descartes através de pequenas “caixas”, pequenos espaços delimitados na página do livro, contendo um resumo sobre suas vidas como em Torres, Ferrero e Soares (2010). Uma referência às medidas precursoras feitas por Ptolomeu no século II é encontrada somente em Guimarães e Boa (2006), que não está na seleção do PNLD.

Os livros didáticos são um importante subsídio ao trabalho do professor e no desenvolvimento acadêmico dos alunos, servindo tanto com apoio às aulas quanto para a seleção de problemas a serem resolvidos pelos alunos. Além das transposições didáticas teóricas, alguns livros também sugerem propostas de atividades experimentais de natureza tanto qualitativa quanto quantitativa.

É interessante observar que os experimentos propostos são, em geral, uma variação do experimento de Ptolomeu, mas sem qualquer referência histórica quanto a sua origem. Nesse experimento, um recipiente é preenchido com um material transparente e, mergulhado no material, temos um disco circular com linhas perpendiculares que se cruzam pelo seu centro. Uma das linhas serve como nível na interface do dióptro ar-material transparente e a outra representa a normal a esta interface.

Especifica-se um ângulo em relação à normal na parte do disco recoberta pelo material transparente. Emprega-se então um indicador laser para alinhar o feixe de laser com a marcação angular feita previamente. Observa-se o ângulo que a parte iluminada do feixe imerso no material e, a partir desses dois ângulos é possível verificar a validade da Lei de Snel comparando-se o valor do ângulo de refração previsto pela lei com o valor observado experimentalmente para o dióptro considerado, usando-se a fórmula de Snel, em geral apresentada *antes* da realização do experimento.

Apresentamos no Capítulo 4, uma proposta alternativa àquelas tradicionalmente discutidas. Ela permite determinar a lei para a refração proposta por Ptolomeu a partir da formação da imagem de um objeto observado através de diferentes meios óticos. O objetivo principal do nosso procedimento é a construção desses conceitos físicos partindo-se da observação e da análise da posição angular da imagem em relação à posição do

objeto e, deste modo, estabelecer os conceitos e as equações básicas da refração apresentadas habitualmente nos livros didáticos. Ao final, à partir da análise gráfica e algébrica destes resultados experimentais, construímos as relações fundamentais da refração sem a necessidade de antecipar a apresentação de modelos teóricos relativos ao fenômeno.

3 O contexto histórico

Sabemos que a história da Física é repleta de surpresas e curiosidades. Sabemos também que cada novo avanço científico se caracteriza pelo modelo de sociedade existente na sua respectiva época. Assim, acreditamos que ao valorizarmos o contexto social, cultural, político e econômico daquelas sociedades, a História da Ciência possa ser um auxiliar valioso para a compreensão dos conceitos envolvidos no ensino de Física.

Como afirma Herzberger (1966), o conhecimento histórico também estimula o pensamento criativo. O indivíduo que enfrentou um determinado problema científico e tentou estabelecer uma lei a partir de suas reflexões, com certeza analisa uma questão científica de maneira diferente daquela de alguém que simplesmente aceita uma lei a ele apresentada. Quem enfrentou o problema considerou alternativas ou diferentes interpretações para o fenômeno considerado, e algumas dessas possibilidades podem ainda estimular e até mesmo enriquecer as conclusões já estabelecidas.

Motivados por esse propósito, apresentamos neste capítulo um resumo do desenvolvimento histórico dos aspectos científicos mais relevantes para o problema da refração luminosa, como considerado por Ptolomeu, apesar da inserção da história no ensino de Física não ser o nosso objetivo principal nesta dissertação. Esperamos que esta contribuição possa dar uma visão mais abrangente desta ciência e do seu desenvolvimento ao longo da nossa história.

3.1 Os gregos clássicos

Como assinalamos no Capítulo 1, ficamos completamente surpresos ao descobrir que o matemático e astrônomo grego Cláudio Ptolomeu (c.85–c.165) já tivesse realizado, no século II, um cuidadoso experimento para determinar as regras que balizam o fenômeno da refração. Ptolomeu fez um estudo quantitativo e surpreendentemente moderno, que hoje é realizado em muitos laboratórios de Óptica por estudantes tanto do ensino médio quanto universitários.

De fato, podemos afirmar que a Óptica, o estudo da natureza da luz e de suas propriedades, tem sido objeto de interesse científico e tecnológico da nossa sociedade desde a Antiguidade. Atualmente existem evidências literárias e arqueológicas muito claras que instrumentos ópticos simples tais como espelhos curvos e lentes convexas já teriam sido empregados por várias civilizações antigas como “vidros calcinadores” (“burning glasses”) e lentes de aumento.

Entretanto, apesar destas antigas civilizações egípcias e sumérias já terem se utilizado desses diferentes instrumentos ópticos e, desse modo, terem explorado as leis da reflexão e da refração, o tratamento formal da Óptica se inicia com a cultura helênica, na Grécia An-

tiga, por volta do terceiro século antes da era cristã. Tal fato pode ser associado, segundo Russo (2004), à expansão dos domínios dos gregos e, por consequência, ao grande desenvolvimento neste período das suas antigas técnicas de navegação. Esta expansão exige, por exemplo, a construção de diferentes faróis marítimos ao longo de todo o Mediterrâneo helênico, cujo ápice é o farol de Faros, considerado, na época, de suma importância, de grande utilidade e uma das maravilhas do mundo antigo.

A associação entre o aperfeiçoamento das técnicas de navegação e o desenvolvimento do estudo da Óptica e da geometria, no mesmo período, não pode ser ignorada. O feixe de luz em uma única direção fixa, por exemplo, não seria de grande utilidade para a orientação naval e a navegação em mar aberto sem um sistema de orientação seria dramático. Assim, não é surpresa aprender que os mais antigos tratados matemáticos sobre formação de imagens que sobreviveu até os nossos dias são a *Óptica* e a *Catóptrica*, ambos de Euclides (c. 320 a.C.), que os apresenta em termos de postulados e teoremas, de maneira similar ao seu tratado de geometria *Os Elementos*.

Uma tradução para o inglês da *Óptica* de Euclides foi realizada por Burton (1945) e publicada no *Journal of the Optical Society of America*. Nesse seu primeiro livro, a *Óptica*, Euclides estuda as leis da visão e da perspectiva e, no segundo, a *Catóptrica*, ele estuda o processo de reflexão por espelhos. Herzberger (1966) constata que Euclides já apresenta em seus livros algumas ideias que poderiam ter sido associadas ao fenômeno da difração mas não há nesses livros nenhuma análise dedicada à refração luminosa. Somente quatro séculos mais tarde, Ptolomeu, mais conhecido pelo seu *Almagesto*, vai ser o primeiro a apresentar um estudo detalhado desse fenômeno.

Esta *Óptica* de Ptolomeu é o segundo livro mais antigo que conhecemos mas, infelizmente, ele não existe mais na sua forma original. Entretanto, existem fortes evidências para a existência de uma tradução para o latim a partir de uma versão árabe realizada no século XII por Eugênio da Sicília. Esta versão árabe, por sua vez, teria sido feita a partir do texto grego original. É esse manuscrito que tem sido indicado na literatura da História da Ciência como a *Óptica* de Ptolomeu. Lejeune (1956) publicou uma tradução para o francês da versão latina, intitulada *L'Optique de Claude Ptolemée*, e argumenta favoravelmente para essa identificação. Mais recentemente, Smith (1996) realizou uma tradução desse mesmo manuscrito para o inglês e também sustenta a mesma opinião.

O texto original da *Óptica* de Ptolomeu se compõe de cinco livros. O primeiro é dedicado ao estudo da visão, o terceiro e o quarto estudam a formação de imagens por meio de espelhos e o quinto livro é dedicado ao estudo da refração. Este último livro despertou grande interesse porque é nele que encontramos pela primeira vez a referência aos ângulos de incidência e refração definidos como o ângulo entre a linha de visão que vai de um meio dielétrico para outro e a normal a interface entre eles, e o *procedimento experimental detalhado* para a determinação de uma relação funcional entre esses ângulos quando a refração ocorre da água para o ar, do vidro para o ar e do vidro para a água.

Vale lembrar que a linha incidente era considerada pela óptica grega como a linha que parte do olho do observador em direção à superfície refletora ou refratora.

A leitura da *Óptica* de Ptolomeu nos revela a descrição de um experimento em nada a dever ao procedimento moderno de uma atividade experimental. Ptolomeu constrói um goniômetro preciso, marca ângulos ao longo do seu perímetro e localiza o centro do instrumento na interface entre os meios dielétricos que ele explora. Ele escolhe os dioptros ar-água, ar-vidro e vidro-água, varia os ângulos de incidência entre 10° e 80° em unidades de 10° (medidas da normal para a interface) e mede o correspondente ângulo de refração. Ele, em seguida, realiza um estudo detalhado dos seus resultados e produz uma lei empírica precisa o suficiente para ser de uso prático ainda em nossos dias.

A versão latina de que dispomos não apresenta o primeiro livro e também não tem parte do quinto livro, assim como a versão árabe da qual ela foi realizada. Observe-se também que a cópia latina apresenta muitas partes obscuras ou ininteligíveis. Cohen e Drabkin (1958) comentam que isto ocorre não somente por causa da falta de habilidade do tradutor latino mas sobretudo por causa das várias ocasiões no texto árabe nas quais a tradução correspondente se afasta do original grego.

A conclusão do próprio Ptolomeu ao estabelecer uma relação funcional entre a posição angular do objeto e da posição angular da sua imagem por uma função parabólica, como discutiremos no Capítulo 4, é um resultado notável. Apesar da história da trigonometria recuar até a Antiguidade, as funções trigonométricas na forma que as empregamos hoje em dia foram somente desenvolvidas no período medieval da história ocidental.

Hiparco (185 a.C.–124 a.C.) foi muito provavelmente o primeiro a se utilizar da função *corda*, o duplo do seno que, em termos modernos pode ser escrita na forma

$$\text{cord}(2\alpha) = 2R \text{sen } \alpha, \quad (3.1)$$

onde R é o raio do círculo e 2α é o ângulo correspondente ao arco do círculo considerado. Entretanto, a única tabela de cordas da qual temos conhecimento é a tabela encontrada no *Almagesto* de Ptolomeu. Empregando elegantes teoremas geométricos, ele desenvolveu fórmulas para determinar, por exemplo, $\text{cord}(\alpha + \beta)$, $\text{cord}(\alpha - \beta)$ e $\text{cord}(\alpha/2)$, conhecidas as cordas $\text{cord}(\alpha)$ e $\text{cord}(\beta)$. É de interesse para nós observar que ele calculou $\text{cord } 1^\circ$ por um método de aproximações, começando em $\text{cord } 0^\circ 45'$ e $\text{cord } 1^\circ 30'$. Ele determinou esses dois valores empregando repetidamente a fórmula de meio ângulo iniciando com $\text{cord } 12^\circ$, que ele calculou a partir do conhecimento das cordas de 72° e 60° . Entretanto, Ptolomeu não se utilizou das cordas na discussão sobre a refração que ele apresenta em sua *Optica*.

As tabelas trigonométricas teriam sido então aperfeiçoadas pelos matemáticos e astrônomos indianos e árabes (BOYER, 1991, p. 210). Somente no século VII, o matemático indiano Bhaskara I (600–680) vai estabelecer a primeira expressão racional para a determinação do seno trigonométrico de um dado ângulo, conhecida como a fórmula de

Bhaskara. Quando o ângulo é dado em graus, a fórmula de Bhaskara pode ser escrita na forma (GUPTA, 1967):

$$\operatorname{sen} x^\circ = \frac{4x^\circ (180 - x^\circ)}{40500 - x^\circ (180 - x^\circ)}. \quad (3.2)$$

Apenas muito mais tarde, em 1748, Leonhard Euler (1707–1783) vai publicar o seu livro *Introductio in analysin infinitorum* onde é apresentado o tratamento analítico das funções trigonométricas, as suas definições em termos de séries infinitas e a abreviação moderna sen , cos , tan , sec e cosec . Também é neste livro que aparece a sua famosa fórmula

$$e^{ix} = \operatorname{cos} x + i \operatorname{sen} x, \quad (3.3)$$

onde e é a base do logaritmo natural, $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária e cos e sen são as funções trigonométricas cosseno e seno, respectivamente, com o argumento x em radianos. As respectivas séries infinitas para a função seno e cosseno estabelecidas por Euler são

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3.4)$$

e

$$\operatorname{cos} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \quad (3.5)$$

3.2 A teoria moderna

Após o trabalho de Ptolomeu, temos que esperar a passagem de dez séculos para identificar um dos primeiros cientistas europeus a desempenhar um papel de grande destaque na Óptica: Witelo (c.1225–c.1280), um matemático polonês que viveu e estudou na Itália e explicou as cores do arco-íris como originárias a partir da reflexão e da refração da luz nas gotas de água da atmosfera. Seu livro em dez volumes é provavelmente o mais volumoso dos trabalhos em Óptica jamais escrito.

Curiosamente, nos dias atuais seu trabalho é mais conhecido pelos erros do que pelos acertos, como veremos mais adiante. Ele aparentemente refez as medidas de Ptolomeu para a refração da imagem de um objeto observado a partir da água para o ar, do vidro para o ar e do vidro para a água, além de adicionar outras medidas supostamente por realizadas por ele próprio. Entretanto, apesar das mais de quinhentas páginas que compõem o seu livro, ele em nenhum momento descreve *como* elas foram realizadas.

Dijksterhuis (2000a) nos lembra que devemos destacar as contribuições de Francesco Maurolico (1494–1575) e Giambattista della Porta (1543–1615) porque são os primeiros cientistas desse período que discutem o fenômeno da refração por lentes. Muito embora os óculos já tivessem sido inventados, em cerca de 1300, como observa Petroski (2013), as lentes nunca chamaram muito a atenção dos cientistas. No entanto, os resultados que Maurolico e della Porta apresentam são baseados em teorias qualitativas da refração, ainda herança da óptica medieval.

Desse modo, até o final do século XVI, uma lei precisa que descrevesse a refração da luz na interface de dois diferentes meios não tinha ainda sido encontrada. Finalmente, durante a primeira década do século XVII, Johannes Kepler (1571–1630) desenvolveu o conceito moderno de formação de imagens, e vários cientistas obtiveram a lei exata da refração. Kepler, em 1611, influenciado pela invenção do telescópio no ano anterior, cunhou o termo *dióptrica* para o estudo matemático das lentes.

Em seguida, outro protagonista de nossa história é Thomas Harriot (c.1560–c.1621), um notável cientista de Oxford. Segundo Pepper (2000), seus trabalhos em Óptica, realizados no final de 1590 o conduziu a lei dos senos da refração na sua forma atual, provavelmente em 1601, como indicado em um dos seus manuscritos. Sabemos também que entre os anos 1606–1609, várias questões de Óptica e outros assuntos científicos foram discutidos entre Harriot e Kepler, em uma correspondência iniciada por este último.

Aparentemente, tanto Harriot quanto Kepler tentaram determinar uma lei para a refração mas ao final, trabalharam de forma independente. Curiosamente, as abordagens que empregaram foram tão diferentes quantos os resultados que obtiveram. Ambos começaram analisando o problema a partir da tabela de ângulos de refração de Witelo, que continha vários erros.

Quando Harriot não se mostrou satisfeito com as medidas de Witelo então disponíveis ele então iniciou um programa para estabelecer novas medidas para os ângulos de refração. Ele rapidamente obteve como resultado a relação de proporcionalidade constante entre os senos dos ângulos de incidência e de refração. Na representação moderna, $\sin \theta_i = n \sin \theta_r$. A constante n é denominada o *índice de refração* e varia segundo o meio refratado considerado.

Kepler, por sua vez, optou por um caminho oposto ao de Harriot (DIJKSTERHUIS, 2000b). Kepler tentou determinar a lei da refração luminosa a partir de uma análise matemática e racional das observações realizadas com os instrumentos astronômicos não telescópicos que existiam em sua época. Os resultados previstos por seu modelo eram então comparados com as tabelas de Witelo e, a cada vez, Kepler rejeitava os seus cálculos em lugar de questionar os valores tabelados de Witelo. Kepler publicou, em 1604, seu trabalho no livro *Paralipomena ad Witelo (Suplemento ao Witelo)*. Os resultados de Harriot, por sua vez, ficaram desconhecidos até o século XX.

O emprego da luneta como um instrumento astronômico por Galileu Galilei (1564–1642), em 1610, vai motivar Kepler a escrever a sua *Dióptrica* (1611), iniciando assim o estudo matemático das propriedades das lentes e das suas configurações. Ainda sem dispor de uma lei de refração, Kepler usou uma regra aproximada para determinar as distâncias focais de alguns tipos de lentes e explicar como as diferentes configurações das lentes podem produzir imagens ampliadas de um objeto. Esta regra, o ângulo de desvio d corresponde a quatro terços do ângulo de incidência i , para o dioptra ar-água, é válida para pequenos ângulos de incidência e é ainda empregada nos dias de hoje (MIHAS, 2008).

Kepler discutiu a construção de telescópios formados por uma lente convexa e outra côncava e, também, a construção de telescópios formados pela combinação de duas lentes convexas, que ainda não tinham sido empregados em sua época, de modo a produzir um efeito telescópico ainda mais dramático. Entretanto, Kepler não teve oportunidade de construir seus próprios telescópios. Porém, em poucas décadas, os telescópios por ele projetados se tornaram o instrumento de referência da observação astronômica, até a criação do telescópio refletor de Newton, em 1671.

Por volta de 1620, Willebrord Snel (1580–1626) vai descobrir a lei exata da refração. Não é muito claro como ele a obteve porque seus manuscritos permaneceram perdidos durante várias décadas. É certo, entretanto, que ele ensinou Óptica na Universidade de Leiden durante o inverno de 1621–1622, onde ele provavelmente realizou experimentos sobre a reflexão e a refração luminosa. Uma nota em sua cópia do livro *Opticae libri quatuor*, de Friederich Risner, datado de 1606, torna plausível essa possibilidade. O enunciado da lei de Snel foi preservado em um manuscrito contendo um resumo das suas proposições relativas à refração. Segundo Snel, a razão entre o *radius verus* (o verdadeiro raio), RG , e o *radius apparens*, RJ , é sempre constante.

Durante o ano de 1620, os resultados de Snel se tornaram conhecidos dos círculos europeus especializados e, nesta mesma época, René Descartes (1596–1630) também tomou conhecimento da lei dos senos. Muito embora tenha sido acusado mais tarde de plágio, ele provavelmente obteve a lei dos senos de forma independente. Descartes não publicou a lei dos senos até 1637 e, de fato, perdeu a prioridade para Pierre Hérigone (c. 1643), que simplesmente mencionou a lei em um trabalho datado de 1637. Curiosamente, a teoria dióptrica de Descartes é baseada na regra aproximada de Kepler.

Descartes não somente formulou a lei dos senos mas, também, a aplicou para descrever as propriedades das lentes. Ele demonstrou que certos defeitos das lentes empregadas nos telescópios eram relativos a forma esférica adotada. A superfície esférica não permite, em geral, que os raios refratados converjam para o ponto focal e produzem a denominada *aberração esférica*. Em torno de 1626, Descartes determinou que as seções cônicas seriam as formas adequadas para a focalização perfeita. Muito provavelmente ele colaborou com Claude Mydorge (1585–1647) que mediu os índices de refração para determinar as medidas exatas das lentes. Na sua *La Dioptrique* (1637), Descartes explicou qual forma as lentes focalizadoras devem possuir e como elas podem ser moldadas. Esforços posteriores para moldar essas lentes falharam ao longo de todo o século XVII.

Em 1653, Christiaan Huygens (1629–1695) foi o primeiro a aplicar a lei dos senos às lentes esféricas empregadas em telescópios e microscópios. Ele obteve uma expressão geral para a distância focal de todos os tipos de lentes levando em conta todas as características das lentes. O propósito principal dos estudos de dioptria realizados por Huygens era solucionar a problema da aberração esférica. No final de 1660 ele apresentou uma teoria bastante sofisticada sobre a aberração esférica. Além disso, ele projetou uma configuração

de duas lentes esféricas que emularam perfeitamente as propriedades de focalização de lentes hiperbólicas. Em 1671, Isaac Newton mostrou que a refração da luz produz as cores, de maneira que nenhuma lente pode impedir as franjas coloridas nas imagens produzidas pelos telescópicos refratores. Por este motivo, o projeto de Huygens foi interrompido e ele nunca publicou a sua dióptrica. Curiosamente, supõe-se que foi Thomas Young (1773–1829), em 1807, o primeiro a empregar a expressão “índice de refração” para caracterizar a refringência dos materiais (YOUNG, 1961, p. 413).

3.3 O índice de refração negativo

Apesar de ser fora do propósito dessa dissertação, não podemos deixar de narrar um pouco da história contemporânea desse fenômeno e a previsão e a observação de materiais de índice de refração negativo. Em meados do século XVII, as observações experimentais de Olaf Roemer e a análise teórica de Huygens permitem caracterizar a luz como algo que se propaga com uma velocidade finita, de valor extraordinário igual a $300\,000\text{ km s}^{-1}$ quando ela se propaga no vácuo, e que obedece às propriedades de reflexão e refração típicos de um comportamento ondulatório. Este modelo ondulatório da luz vai ser coroado no século XIX com os trabalhos de Thomas Young, Augustin-Jean Fresnel (1788–1827) e James Clerk Maxwell (1831–1879). Acrescente-se ainda, nesse mesmo período, o desenvolvimento experimental e teórico da descrição atômica da matéria.

Nessa teoria eletromagnética, a luz visível é descrita por meio de uma onda eletromagnética composta de um campo elétrico e um campo magnético oscilantes e caracterizados por um comprimento de onda λ . O vidro, por sua vez, é agora descrito por um arranjo de átomos que interagem com a luz, quando esta o atravessa. Como o comprimento de onda da luz é centenas de vezes maior do que a distância interatômica dos átomos que compõem o vidro, os detalhes microscópicos da interação entre os átomos do vidro e os campos elétrico e magnético que definem a luz podem ser descritos por somente dois parâmetros eletromagnéticos macroscópicos: a permissividade elétrica ϵ permeabilidade magnética μ do material.

Uma das vitórias desse modelo é a associação do índice de refração n do material considerado com a sua permissividade elétrica ϵ e a permeabilidade magnética μ : $n = \sqrt{\epsilon\mu}$. Entretanto, do ponto de vista eletromagnético, o que define o “material” é a comparação entre o comprimento de onda da luz, λ , e a distância interatômica da considerada coleção de átomos. Qualquer conjunto de átomos cujo tamanho e espaçamento sejam inferiores ao valor de λ pode ter uma permissividade ϵ e uma permeabilidade μ associadas. Muito embora esta ideia não nos seja intuitiva, a onda eletromagnética que atravessa tal estrutura não percebe a diferença.

Esta propriedade nos permite criar materiais, denominados metamateriais, que podem apresentar determinadas propriedades físicas muito mais acentuadas do que aquelas

encontradas em materiais naturais ou mesmo neles inexistentes. Um dos exemplos mais impressionantes de uma dessas propriedades que ainda não teria sido observada naturalmente até então é o metamaterial de índice de refração negativo, os denominados *Negative Index Metamaterials* (NIMs) ou *Left Handed Materials* (LHMs).

Esses materiais são construídos de tal maneira que a sua permissividade ϵ e sua permeabilidade μ são negativas. Com o material convencional, ϵ e μ são positivos e, da teoria eletromagnética, podemos escrever a lei de Snell na forma

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_r} = n = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (3.6)$$

Se quisermos preservar a mesma forma da lei de Snell também para os metamateriais, temos que escolher o sinal negativo da raiz quadrada. Em outras palavras, quando ϵ e μ são simultaneamente negativos devemos escrever a lei de Snell na forma:

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_r} = n = -\sqrt{(-\epsilon)(-\mu)}. \quad (3.7)$$

O estudo sobre o índice de refração negativo foi publicado por Veselago (1968) e foi tema de dissertação de Mestrado de Santos (2011), trabalho realizado em nosso programa de pós-graduação. Por causa de suas propriedades eletromagnéticas não usuais, os NIMs permitem a realização de dispositivos que apresentam um comportamento óptico muito difícil ou mesmo impossível de ser realizado com materiais convencionais. Por consequência, o desenvolvimento desses metamateriais pode ter um impacto extraordinário na nossa sociedade.

4 Uma investigação da refração

A Óptica geométrica, através de seus princípios, nos permite estudar o processo de formação de imagens em diversas situações. Como chamamos a atenção nos capítulos precedentes, este processo é objeto de preocupação desde a Grécia Antiga e, neste capítulo apresentamos uma investigação sobre a formação de imagens devido a refração luminosa baseada em um conjunto de atividades que denominamos *o experimento de Ptolomeu*.

Em geral, os primeiros passos dos alunos do Ensino Médio nesta unidade de estudo são a formação de imagens com o auxílio da câmara escura ou pela projeção das sombras e, em seguida, a formação de imagens por reflexão, produzidas por espelhos planos e esféricos. Neste último caso, os alunos então percebem a simetria das imagens formadas em relação ao objeto refletido.

Deste modo, ao abordar as atividades apresentadas neste capítulo, esperamos que o estudante já possua alguns conceitos básicos tais como: (1) o raio visual, o segmento de reta que une o olho do observador ao objeto observado; e (2) a propriedade de reflexão, fenômeno associado a deflexão do raio visual por um espelho, um objeto não transparente ou, nas palavras de Ptolomeu, aquele objeto que não permite que o raio visual o atravesse.

Assim, para completar o estudo da formação de imagens em diferentes situações, ao final das atividades sugeridas nesse capítulo estabelecemos as condições geométricas em que um determinado objeto produz uma imagem correspondente, quando este mesmo objeto é observado através de um sistema óptico particular, o dioptro, um sistema constituído pela combinação de dois *meios transparentes* em contato.

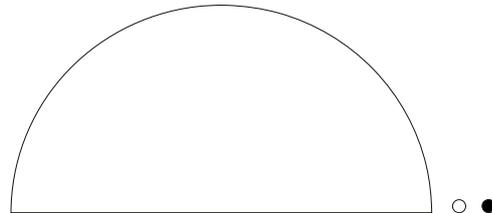
Para realizar as atividades aqui propostas, consideramos que além do estudo das condições de formação de imagens por espelhos, o estudante também possui familiaridade com construções geométricas e noções matemáticas adequadas ao seu estágio de aprendizagem.

4.1 A refração em perspectiva

No estudo da formação da imagem de um objeto vista por um observador através de um determinado sistema óptico devemos levar em consideração o fenômeno da refração luminosa. A experiência da moeda oculta no fundo de recipiente e que se torna visível com a colocação de certa quantidade de água dentro dele, como descrito por Ptolomeu (COHEN; DRABKIN, 1958, p. 273), é um bom exemplo de formação da imagem devido à presença de um dioptro. Apresentamos a seguir uma variação quantitativa dessa experiência.

A descrição geométrica da posição da imagem de um objeto quando este é observado através de um meio transparente pode ser compreendida inicialmente com a ajuda de cinco cilindros feito de acrílico que possuem um diâmetro $\phi_d = 2.00(5)$ cm e uma altura

$h = 2.00(5)$ cm e cinco pequenos discos não transparentes, de diâmetro igual ao diâmetro dos cilindros. Também temos à nossa disposição um disco semicilíndrico feito também em acrílico e que possui um diâmetro $\phi_D = 56.00(5)$ cm e uma altura $h = 2.00(5)$ cm igual à altura dos pequenos cilindros, como ilustrado na figura 1.



(a)



(b)

Figura 1. – Material para a primeira atividade. (a) Vista superior e (b) vista de frente do disco semicilíndrico feito em acrílico, de diâmetro $\phi_D = 56.00(5)$ cm e uma altura $h = 2.00(5)$ cm igual à altura do pequeno cilindro de diâmetro $\phi_d = 2.00(5)$ cm e do pequeno disco preto também de mesmo diâmetro que o cilindro. Um esquadro e uma régua milimetrada também devem ser incluídos no material.

O disco semicilíndrico é colocado sobre um plano horizontal e, com uma régua milimetrada, localizamos o ponto médio E que indica o centro da interface reta do nosso sistema óptico, o dióptro ar-acrílico. Para indicar esse ponto E , colocamos um dos pequenos cilindros de acrílico nesta posição, como indicado na figura 2a.

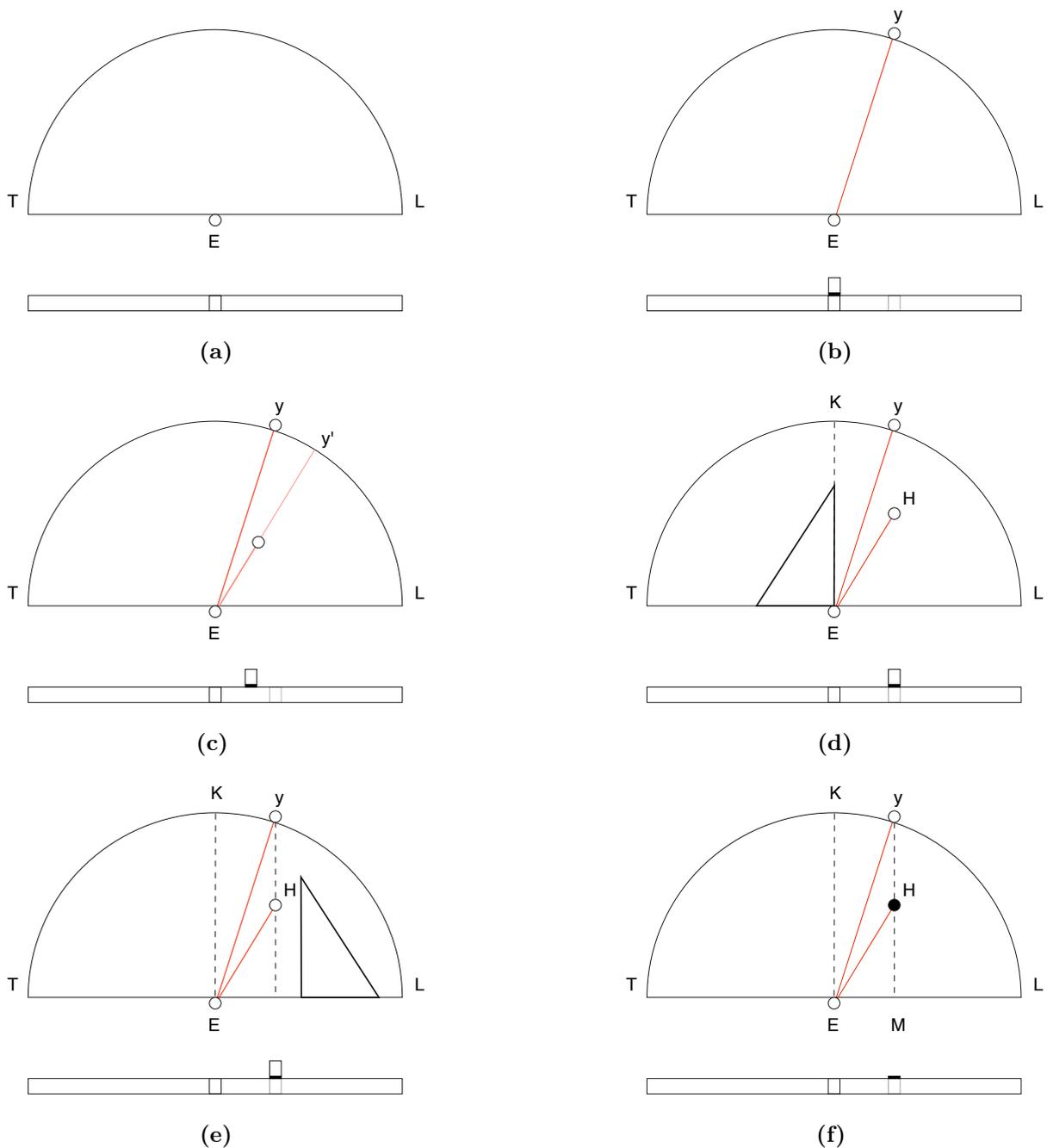


Figura 2. – Vista superior e de frente da representação do material da primeira atividade: o semidisco em acrílico que representa o dioptro ar-acrílico, os pequenos cilindros, também em acrílico, e o pequeno disco que servem como objeto e guia de localização, respectivamente. (a) Localização do ponto de referência E no ponto médio da face reta do semidisco. (b) A posição y do objeto em relação a E , em uma posição sobre uma reta tangente à borda do semidisco. (c) Deslizamento do cilindro sobre a reta Ey' , sobre a superfície do semidisco, para a determinação da posição H da imagem. (d) Orientações do objeto e da imagem, dadas por Ey e EH , respectivamente, em relação à normal à face plana do semidisco. (e) Alinhamento entre as posições do objeto e da imagem sobre o segmento de reta yM , perpendicular a face reta do semidisco. (f) Posição final H indicada sobre o semidisco pelo pequeno disco preto.

O objetivo da atividade é localizar um objeto, um dos pequenos cilindros, em uma posição y , pertencente a uma reta tangente à face curva do disco, e observar através do semidisco, a partir do ponto E , que a imagem desse objeto é formada no interior do dioptra em uma certa posição H , com o auxílio de um objeto guia e o pequeno disco acoplado a ele, como ilustrado nas figuras 1b e 2c. Nessas figuras, o segmento de reta Ey , em vermelho, representa o raio visual do objeto e o segmento de reta Ey' , também em vermelho, representa o raio visual da imagem do objeto.

Observamos que o processo de localizar a imagem exige não somente o deslizamento do conjunto objeto guia e o pequeno disco sobre a superfície do semidisco transparente mas, também, a comparação da largura do objeto guia com a largura da imagem observada em cada posição ao longo da direção de observação, o segmento Ey' . Este processo permite definir univocamente o ponto H sobre o semidisco como a posição correspondente da imagem do objeto, percebida através do dioptra pelo observador em E , como indicado na figura 2c.

Ao realizar essa experiência, duas observações são imediatas e surpreendentes. O ângulo de orientação da posição da imagem não é igual ao ângulo de orientação da posição do objeto em relação à perpendicular à face reta do semidisco, como indicado nas figura 2d. A segunda observação é que a posição H também pertence à mesma reta perpendicular à face plana do semidisco que se origina na posição real y do objeto e vai até um ponto M sobre esta mesma face do semidisco, conforme ilustrado nas figuras 2e e 2f.

Em seguida, distribuímos aleatoriamente outros cilindros similares ao longo da face curva e localizamos geometricamente as respectivas imagens desses objetos vistas pelo mesmo observador através do mesmo disco semicilíndrico transparente, como ilustrado na figura 3.

Da figura 3 podemos observar que: (1) todas as posições das imagens dos seus respectivos objetos apresentam uma posição angular em relação a normal à interface ar-acrílico maior do que a posição angular do objeto ao ser observado com o observador no meio menos denso. Dizemos então que o dioptra ar-acrílico apresenta a propriedade de refração: o encurvamento do raio visual; (2) todas as posições das imagens dos seus respectivos objetos se localizam sobre uma reta perpendicular à interface ar-acrílico que vai da posição original do objeto até esta interface; (3) todas as posições das imagens dos seus respectivos objetos se localizam sobre um arco de curva particular; (4) existe uma posição particular, K , definida pelo segmento de reta perpendicular à interface que passa pelo seu ponto médio E onde a imagem do objeto não sofre nenhum desvio; e (5) existe uma posição limite, w , para a observação da imagem objeto. Quando ele for colocado além desse limite, não haverá condições de observação da imagem correspondente.

A partir dessas observações podemos formular a seguinte questão: Conhecida a posição angular da imagem de um objeto, podemos determinar a sua posição real?

Nos dias de hoje, um observador treinado em trigonometria pode perceber da figura 4a

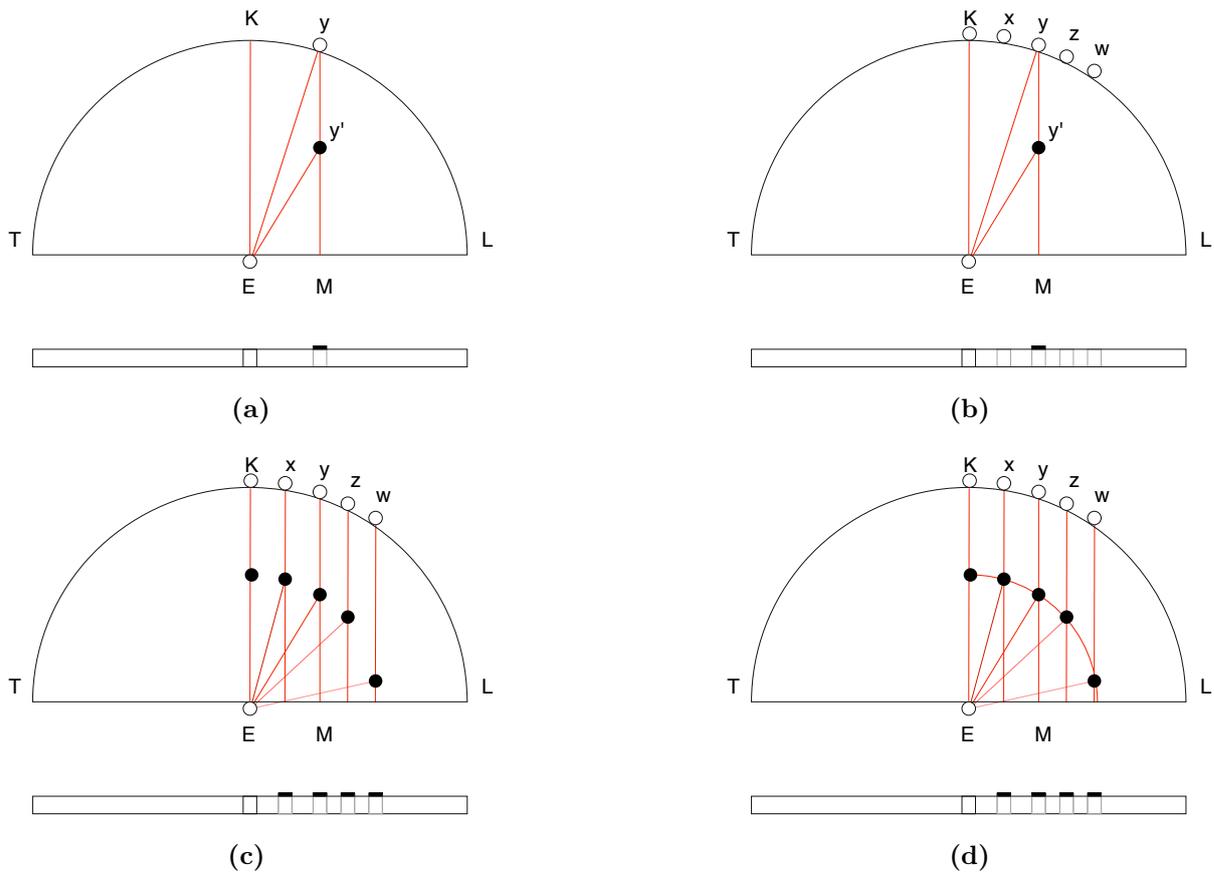


Figura 3. – Vista superior e de frente da representação do material da primeira atividade: o semidisco de acrílico que representa o dioptro ar-acrílico, os pequenos cilindros e os pequenos discos pretos que servem como objeto e guia de localização, respectivamente. (a) Posição y' da imagem objeto em relação a E . (b) Posição dos diferentes objetos em relação a E e as imagens observadas através do semidisco. (c) Posições das imagens dos diferentes objetos e suas orientações, indicadas pelos discos pretos. Observe que todas as posições das imagens repousam sobre uma reta perpendicular a face reta e que passa pela posição do objeto. (d) As posições das imagens repousam sobre um arco de curva.

que, se as dimensões do objeto observado e do objeto guia são muito menores do que as dimensões características do dioptro, ela pode ser representada como indicado na figura 4b.

Se as posições z e z' estão sobre a mesma perpendicular zM , então podemos escrever que

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{Ez}{Ez'} = \frac{1}{k}, \quad (4.1)$$

onde k é um parâmetro a ser determinado e $\theta_1 = Kz$ e $\theta_2 = K'z'$ são, respectivamente, a orientação angular do objeto e da imagem. Este observador pode conjecturar que o arco da curva é aproximadamente um arco de circunferência e, assim, o parâmetro k é independente da localização do objeto considerado. Neste caso, o valor de k pode ser determinado pela razão

$$k = \frac{EK'}{EK}, \quad (4.2)$$

onde EK é o *radius verus* e EK' é o *radius apparens*. Desse modo, a posição angular do

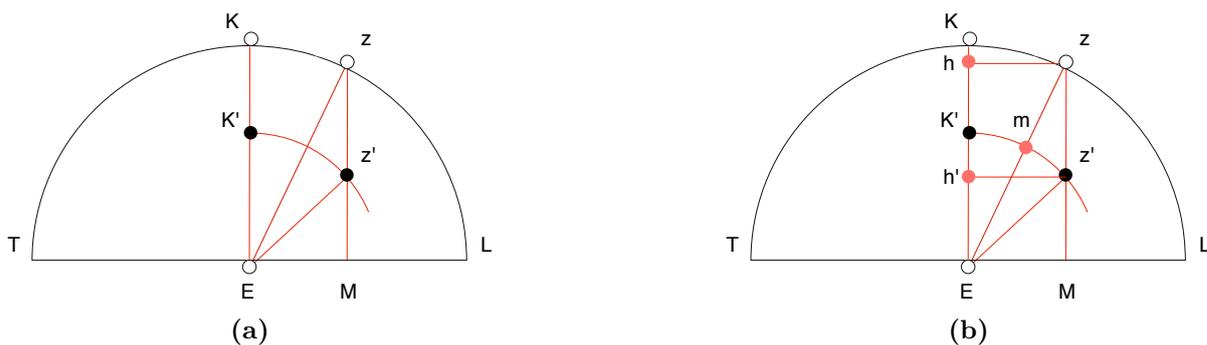


Figura 4. – Representação da formação de imagens da primeira atividade: o semidisco de acrílico que representa o dioptra ar-acrílico, os pequenos cilindros e os pequenos discos pretos que servem como objeto e guia de localização, respectivamente. (a) Posição z' da imagem do objeto em z , em relação a E e suas orientações, indicadas pelos discos pretos. (b) Decomposição dos diferentes orientações em relação à EK e EM .

objeto, θ_1 , é da pela expressão

$$\theta_1 = \text{asen} \left(\frac{\text{sen } \theta_2}{k} \right). \tag{4.3}$$

Portanto, podemos concluir de (4.3) que, conhecendo-se o parâmetro k e a posição angular θ_2 da imagem, a posição angular do objeto, θ_1 , fica completamente determinada. Para determinar o seno do ângulo basta simplesmente inserir o valor do ângulo de localização da imagem em uma calculadora científica, apertar o botão correspondente a função seno, dividir o resultado pelo valor de k e apertar o botão da função arco seno. A solução procurada aparece imediatamente no visor do instrumento.

No entanto, ao solucionarmos o problema proposto, realizamos uma série de etapas no seu desenvolvimento sem muito refletir sobre elas. Como foi construída a tabela de valores dos senos para todos os diferentes ângulos possíveis? Como podemos determinar o valor do seno da posição angular da imagem, a razão entre os segmentos $h'z'$ e Ez' , para qualquer ângulo e com a precisão desejada? Acrescente-se, ainda, que na solução apresentada por esse observador precisamos também conhecer a razão entre as distâncias EK e EK' , o que nem sempre é possível. Além disso, temos que admitir por hipótese que ao variarmos a localização angular do objeto a sua imagem correspondente estará sobre o *mesmo* arco de circunferência.

Consultando os trabalhos de Anderson, Katz e Wilson (2004) e de outros autores, ficamos bastante surpresos em saber que apesar da origem grega da geometria como a conhecemos, o seu desenvolvimento pleno — assim como o da trigonometria — só ocorreu no século VII, na Índia. Somente muito mais tarde, no século XII, estas ciências vão ser reintroduzidas na Europa pelos árabes. Portanto, Ptolomeu não tinha ao seu dispor uma tabela de senos. Na verdade, estas mesmas referências nos informam que é Ptolomeu quem vai publicar a primeira tabela de cordas, o dobro do seno, o segmento de reta que intercepta a circunferência em dois pontos.

Para poder responder a pergunta originalmente formulada, Ptolomeu emprega um método original para a sua época e moderno em todos os aspectos, como veremos adiante. Ele estabelece uma função que determina a localização angular do objeto conhecendo-se somente a localização angular da imagem. Para explorar esta técnica em nossa atividade, precisamos inicialmente dispor de um equipamento denominado *baptistir*, descrito na seção seguinte, também planejado por Ptolomeu.

4.2 O baptistir

O baptistir consiste em um instrumento por nós construído, seguindo a orientações de Ptolomeu descritas no quinto livro da sua *Optica* (COHEN; DRABKIN, 1958). Trata-se de um recipiente semicilíndrico com um disco conectado a ele que serve como goniômetro. O disco tem um raio igual ao raio do semicilíndrico e tanto o disco quanto o recipiente foram reproduzidos em acrílico. As dimensões internas do recipiente semicilíndrico são 60.00(5) cm \times 2.00(5) cm \times 30.00(5) cm e o disco tem as seguintes dimensões: 60.00(5) cm \times 60.00(5) cm \times 1.00(5) cm, como ilustrado na figura 5.

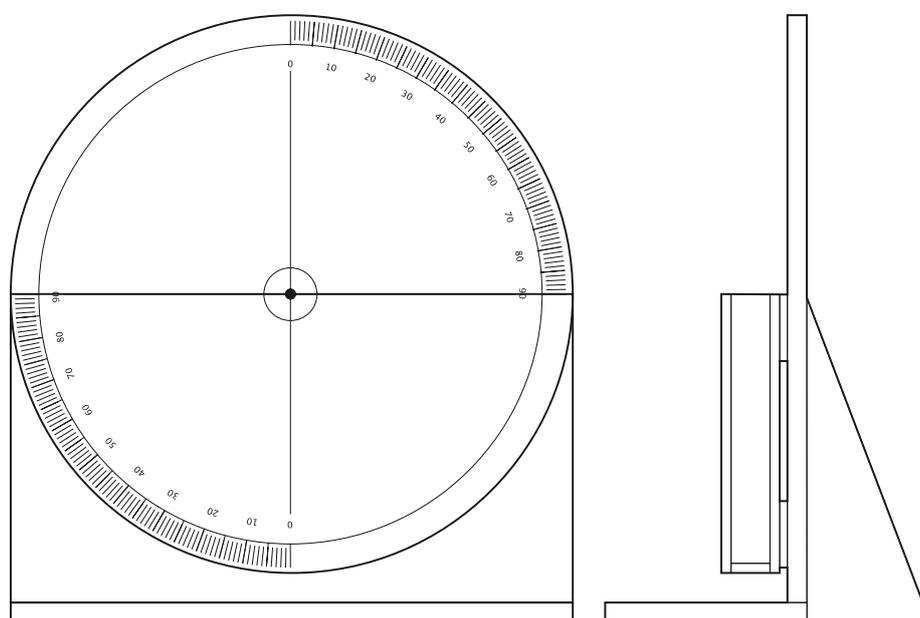
Sobre o disco desenhamos uma circunferência $ABGD$ com o centro em E coincidente com o centro do disco e também estão representados dois diâmetros AEG e BED perpendiculares entre si e passando pelo centro da circunferência E , como ilustrado esquematicamente na figura 6. Dividimos cada quadrante da circunferência em noventa partes iguais, denominadas grau, e localizamos o centro da circunferência com um indicador colorido.

É interessante lembrar que para os gregos, assim como para todos os cientistas até Newton, 90° não era apenas a medida do ângulo reto, mas também significava a distância correspondente a um quarto do perímetro da circunferência. Assim, o grau é uma medida angular que corresponde a uma dada distância ao longo da borda do disco. Escolhemos o diâmetro do nosso baptistir igual a $D = (60.00 \pm 0.05)$ cm e, seguindo a herança babilônica, consideramos o comprimento da circunferência igual 360° . Deste modo, estabelecemos o grau para o nosso baptistir da seguinte maneira:

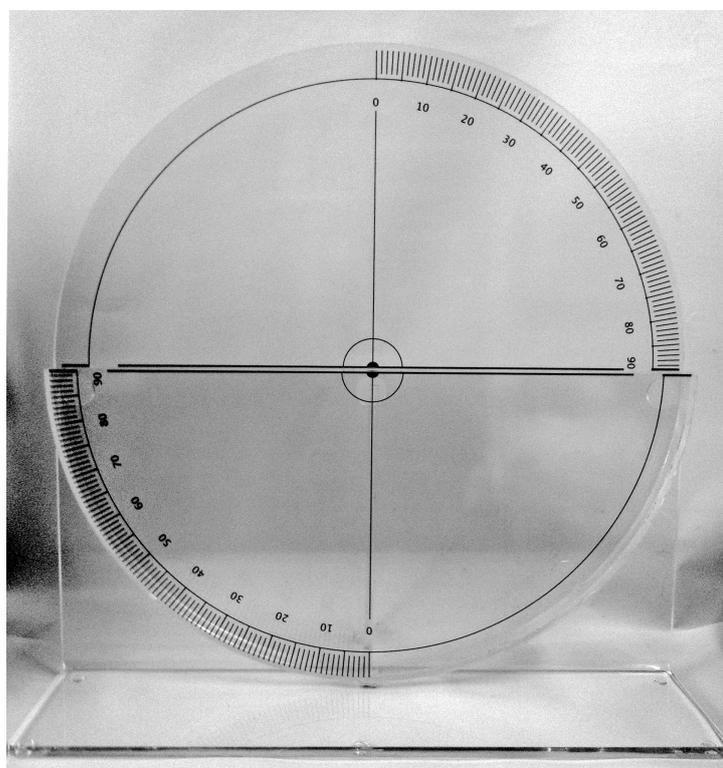
$$1^\circ = \frac{\pi D}{360} \approx 5.2 \text{ mm.} \quad (4.4)$$

Deste modo, a divisão em noventa graus ao longo do perímetro do disco fica definida com uma boa precisão. Uma distância correspondente a 1.0 mm sobre a borda do nosso disco corresponde então a aproximadamente 0.2° .

Na seção seguinte vamos empregar o baptistir para medir os ângulos da localização do objeto e da sua imagem correspondente e analisar quantitativamente a refração produzida por nosso dioptra ar-acrílico.



(a)



(b)

Figura 5. – (a) Vista de frente e lateral do nosso baptistir. (b) Foto do baptistir em acrílico, construído para o nosso trabalho.

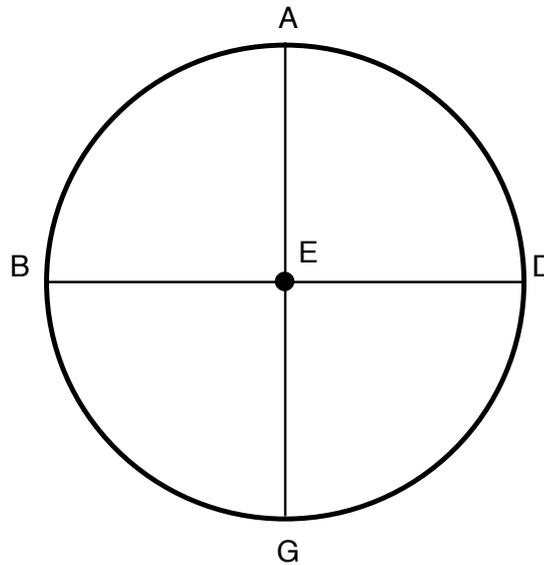


Figura 6. – Representação esquemática do nosso baptistir.

4.3 A refração para o dioptro ar-acrílico

Estamos interessados em investigar quantitativamente as observações feitas na atividade anterior, onde observamos que os ângulos de orientação da imagem e do objeto não são iguais e que o primeiro é maior que o segundo quando o observador observa a imagem do objeto a partir do ar (meio menos denso) para o acrílico (meio mais denso).

A seguinte questão foi formulada a partir das observações: Como podemos determinar a posição angular do objeto conhecendo-se a localização angular da sua imagem?

Para responder a esta pergunta, vamos proceder como Ptolomeu. Começamos então analisando o dioptro ar-acrílico usando o baptistir como instrumento de medida e aplicando a sua metodologia para a orientação angular da posição da imagem e do objeto para o dioptro ar-acrílico, como descrito na figura 7.

Para observarmos os efeitos do semidisco transparente sobre a formação da imagem de um objeto, quando o objeto é observado através dele, procedemos do seguinte modo. Primeiramente, colocamos o baptistir na vertical. Em seguida, colocamos um marcador no ponto z do semidisco e o inserimos no recipiente. Medimos então o ângulo Kz ao longo do arco GB , em um dos quadrantes do recipiente semicilíndrico.

Finalmente, medimos o arco AZ a partir do ponto A , em um dos quadrantes do disco $ABGD$, acima da interface recipiente-semidisco e oposto ao quadrante que contém o ângulo Kz . Esta medida é realizada da seguinte forma: com o auxílio de um marcador colorido, localizamos da seguinte forma a posição Z nesse quadrante superior; com um dos olhos miramos na direção do marcador E a partir de Z , de modo que eles estejam

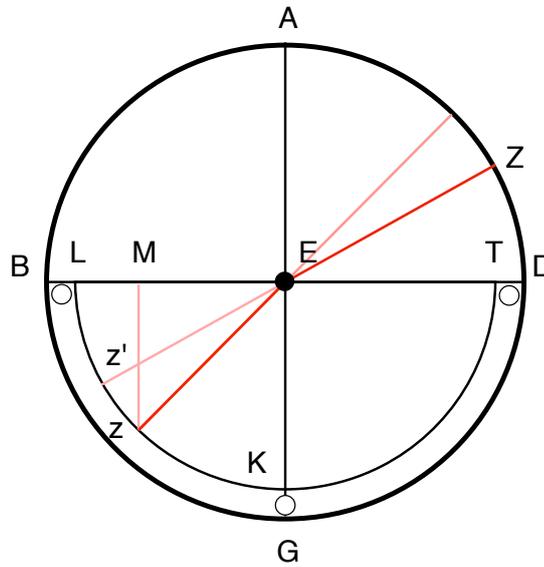


Figura 7. – Baptistir e o dioptra ar-acrílico. Os pequenos círculos brancos representam os pequenos cilindros usados anteriormente e que agora servem apenas para impedir que o semidisco caia no interior do recipiente e, ao mesmo tempo, também servem para alinhar as faces retas do semidisco e do recipiente.

orientados com o ângulo de guia AZ e, ao mesmo tempo, o marcador em E oculte a imagem do marcador em z .

Seguindo a convenção de Ptolomeu, denominamos os ângulos AZ e Kz de posição angular da imagem, θ_2 , e posição angular do objeto, θ_1 , respectivamente. Um conjunto de medidas para estes ângulos é apresentado na Tabela 1 e está representado graficamente na figura 8.

Tabela 1. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1 , para o dioptra ar-acrílico quando o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico). A localização angular da imagem foi desviada de $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ em relação à posição do objeto.

$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_1(^{\circ})$	$\Delta\theta(^{\circ})$
10,0(2)	7,0(2)	3,0(4)
20,0(2)	14,0(2)	6,0(4)
30,0(2)	19,5(2)	10,5(4)
40,0(2)	25,0(2)	15,0(4)
50,0(2)	31,0(2)	19,0(4)
60,0(2)	35,0(2)	25,0(4)
70,0(2)	39,0(2)	31,0(4)
80,0(2)	42,0(2)	38,0(4)

Como podemos concluir da figura 8 — para o dioptra ar-acrílico e o objeto sendo observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico) —, temos

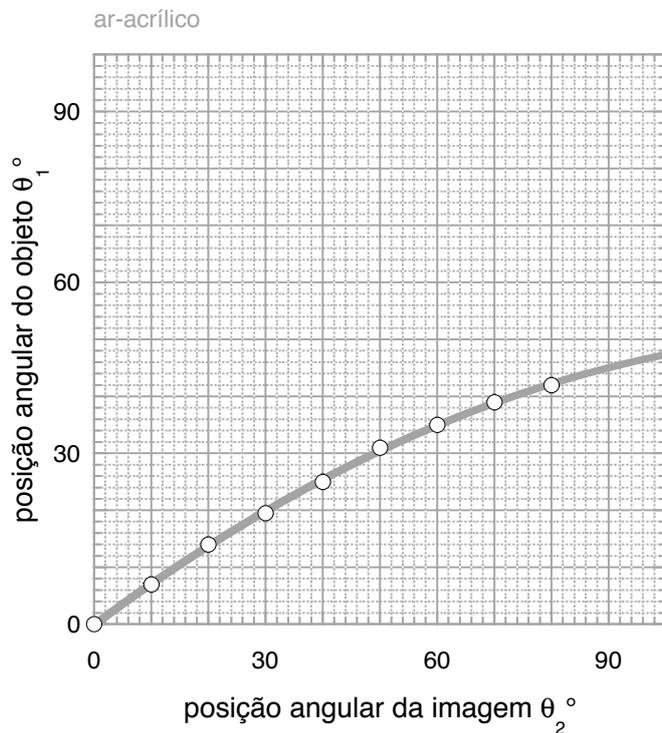


Figura 8. – Medidas para a posição angular do objeto, θ_1 , vs. a posição angular da imagem, θ_2 , para o dióptro ar-acrílico e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico).

que o arco AZ é sempre maior do que o arco Kz e, por conseqüência, a posição angular da imagem, θ_2 , é sempre maior do que a posição angular do objeto, θ_1 .

Assim, podemos afirmar que a linha guia para a observação do objeto em z sofreu um desvio na interface entre o ar e o acrílico. Portanto, o segmento de reta que orientava a visão do objeto na direção Ez foi encurvada para a direção EZ pela quantidade $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, de modo a observarmos a imagem do objeto em z' . A este fenômeno denominamos refração.

É interessante perceber que, se observarmos o objeto em G a partir da perpendicular AE , a guia não sofre nenhum desvio: a imagem continua sobre a mesma linha reta AE . Em todas as outras posições, entretanto, uma vez que aumentamos o arco AZ , a posição angular da imagem, θ_2 , o arco Kz correspondente, a posição angular do objeto, θ_1 , também aumenta. Entretanto, o encurvamento é progressivamente maior, como podemos observar na figura 9.

Da figura 9 também observamos que ao variarmos a posição angular da imagem, a posição angular do objeto varia mas não na mesma proporção. Quanto maior a posição angular da imagem, maior é a diferença entre a posição angular da imagem e do objeto. Isto nos sugere analisar o comportamento da razão entre essas duas grandezas, com

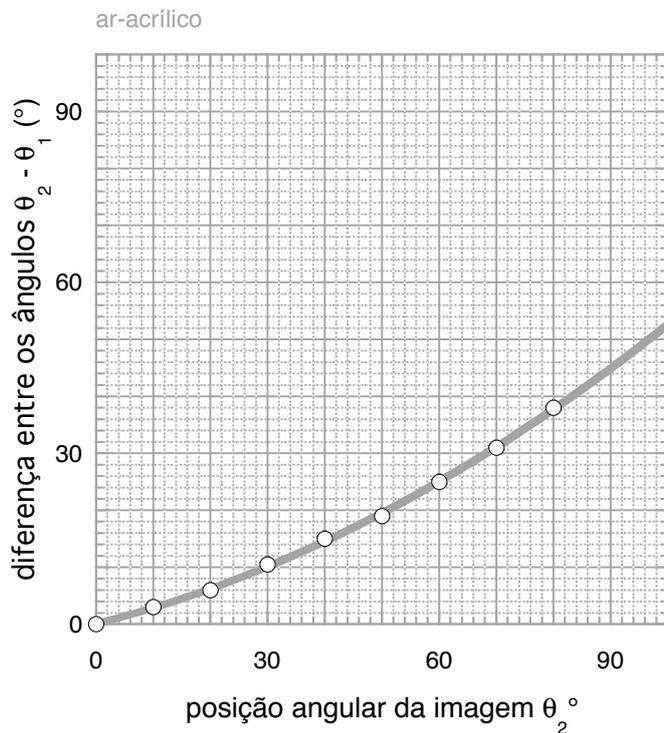


Figura 9. – Diferença $\Delta\theta$ entre as medidas para a posição angular da imagem do objeto, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1 , vs. posição angular da imagem, θ_2 , para o dióptro ar-acrílico e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico).

representado no gráfico da figura 10.

Percebemos da figura 10 que, para as posições angulares consideradas, esta razão varia linearmente com a posição angular da imagem do objeto, θ_2 . Desse modo, podemos escrever que

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = a - b\theta_2, \quad (4.5)$$

onde a e b são constantes de valor aproximado

$$a \approx 0.74(1) \quad (4.6)$$

e

$$b = \frac{0.74(1) - 0.48(1)}{100(1)^\circ} \approx 0.0026(2)/^\circ. \quad (4.7)$$

Estas constantes e suas incertezas são, respectivamente, o coeficiente linear e angular de (4.5), determinados por triangulação a partir do gráfico da figura 10.

Portanto, esta análise revela que a razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_1/θ_2 varia linearmente com a posição angular da imagem do objeto,

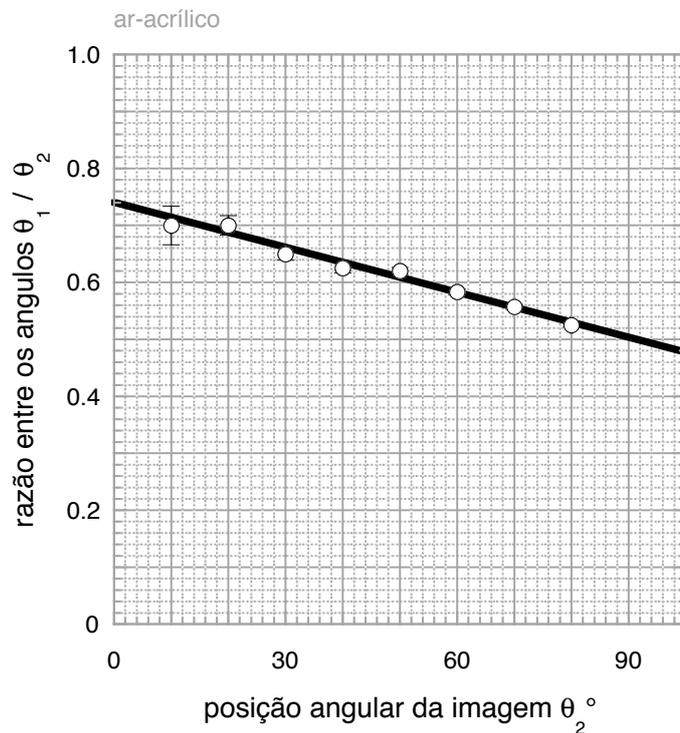


Figura 10. – Razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_1/θ_2 vs. posição angular da imagem do objeto, θ_2 , para o dióptro ar-acrílico e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico).

θ_2 , e podemos concluir que

$$\theta_1 = \theta_2 (a - b \theta_2) \quad (4.8)$$

ou, ainda, que

$$\theta_1 = a \theta_2 \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_0}\right), \quad (4.9)$$

onde

$$\theta_0 = \frac{a}{b} \quad (4.10)$$

é uma constante que corresponde a um ângulo característico do experimento. Esta é a lei da refração estabelecida por Ptolomeu, no século II, a partir da análise dos seus experimentos com os dióptros ar-água, ar-vidro e vidro-água.

Assim, para o dióptro ar-acrílico, obtemos

$$\theta_0 \approx 280(30)^\circ. \quad (4.11)$$

A figura 11 representa o comportamento parabólico, definido pela equação (4.9), da relação entre a posição angular do objeto, θ_1 e a posição angular da imagem do objeto, θ_2 .

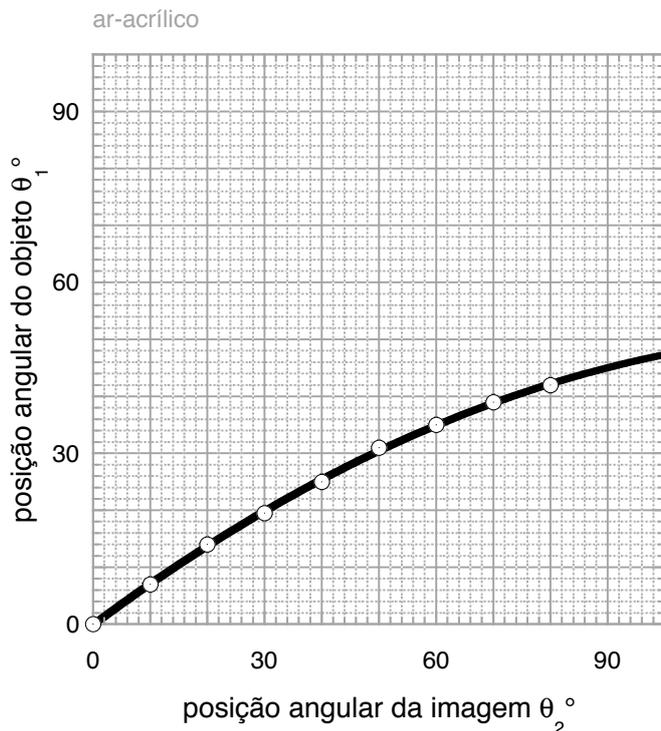


Figura 11. – Medidas para a posição angular do objeto, θ_1 , vs. posição angular da imagem, θ_2 , para o diopetro ar-acrílico e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico). A curva representa a função (4.9).

A partir da equação (4.9) também observamos que a posição angular da imagem do objeto, $\theta_2 = 90^\circ$ define um ângulo limite θ_c para a localização angular do objeto:

$$\theta_c = a \, 90^\circ \left(1 - \frac{90^\circ}{\theta_0} \right) = 45(3)^\circ. \tag{4.12}$$

Este último resultado pode ser verificado imediatamente pelo experimentador. Para o nosso diopetro ar-acrílico temos que o valor experimental de θ_c é igual a $44(1)^\circ$. Portanto, a previsão da posição limite do objeto, pela lei de Ptolomeu, apresenta uma discrepância de 1° em relação a posição angular real.

Observamos ainda que, para pequenas posições angulares das imagens, podemos reescrever a equação (4.9) na forma

$$\theta_1 \approx a \, \theta_2. \tag{4.13}$$

Assim, o coeficiente a é uma “medida” da quantidade de encurvamento causado pelo nosso diopetro. A equação (4.13) é conhecida como a lei de Kepler para a refração, quando os ângulos são pequenos.

É importante salientar que na experimentação que realizamos o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico). É natural, portanto, se

perguntar o que ocorre quando observamos a formação da imagem do objeto a partir de um meio mais denso em direção a um meio menos denso. Para realizar tal experimento, rearranjamos o baptistir como ilustrado na figura 12.

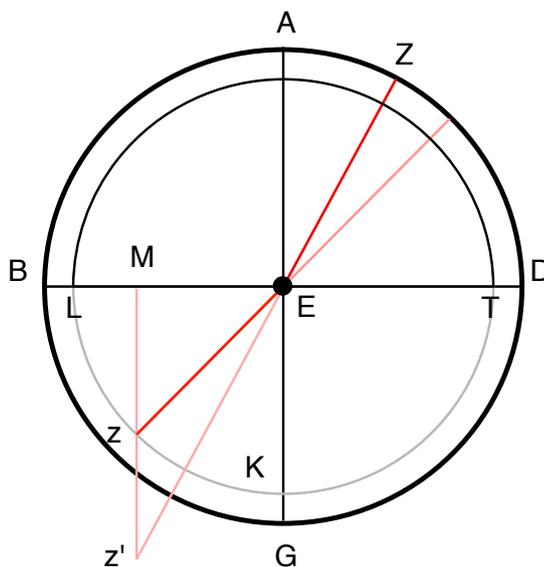


Figura 12. – Baptistir e o dioptra ar-acrílico, onde o objeto em z , no meio menos denso (o ar), é agora observado a partir de Z , o meio mais denso (o acrílico). O semicírculo de acrílico agora está apoiado no recipiente semicircular BGD do baptistir.

Um conjunto de medidas das posições angulares das imagens do objeto para diferentes posições angulares do objeto é apresentado na Tabela 2 e está representado graficamente na figura 13.

Tabela 2. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 e a ângulo da posição angular do objeto, θ_1 , para o dioptra ar-acrílico quando o objeto é observado a partir do meio mais denso (o acrílico) para o meio menos denso (o ar). A localização angular da imagem foi desviada de $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ em relação à posição do objeto.

$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_1(^{\circ})$	$\Delta\theta(^{\circ})$
6,5(2)	10,0(2)	-3,5(4)
13,0(2)	20,0(2)	-7,0(4)
19,5(2)	30,0(2)	-10,5(4)
25,5(2)	40,0(2)	-14,5(4)
31,5(2)	50,0(2)	-18,5(4)
36,0(2)	60,0(2)	-24,0(4)
39,0(2)	70,0(2)	-31,0(4)
42,5(2)	80,0(2)	-37,5(4)

Observamos da figura 13 que, para valores angulares para a posição do objeto — quando o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o

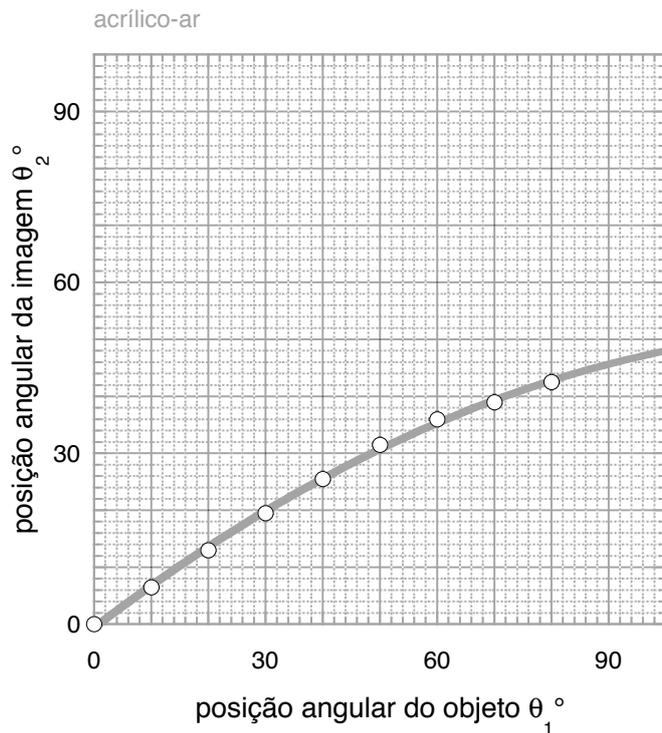


Figura 13. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 , vs. a posição angular do objeto, θ_1 , para o dióptro ar-acrílico quando o objeto é observado a partir do meio mais denso (o acrílico) para o menos denso (o ar). Observe a inversão em relação a figura 11.

acrílico) — são simétricos àqueles determinados quando o objeto observado a partir do meio mais denso (o acrílico) para o menos denso (o ar).

Uma vez mais podemos analisar o comportamento da razão entre essas duas grandezas, com representado no gráfico da figura 14.

Observamos da figura 14 que, para posições angulares da imagem maiores do que 30° , está razão varia linearmente com o ângulo da posição angular do objeto, θ_1 . Desse modo, podemos escrever que

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = a' - b' \theta_1, \tag{4.14}$$

onde a' e b' são constantes de valor aproximado

$$a' \approx 0.76(1) \tag{4.15}$$

e

$$b' = \frac{0.76(1) - 0.48(1)}{100(1)^\circ} \approx 0.0028(2)^\circ. \tag{4.16}$$

Estas constantes e suas incertezas são, respectivamente, o coeficiente linear e angular de (4.14), determinados por triangulação a partir do gráfico da figura 14.

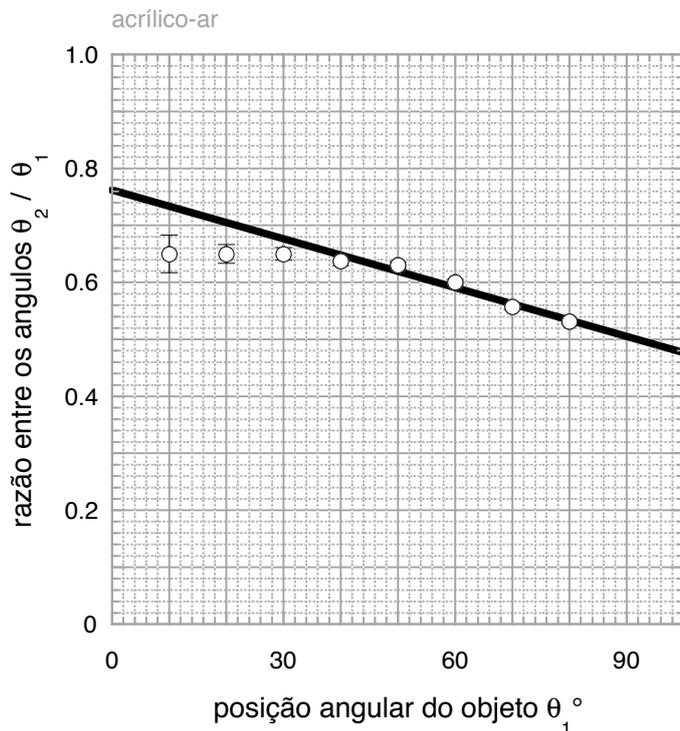


Figura 14. – Razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_1/θ_2 vs. ângulo da posição angular da imagem do objeto, θ_2 , para o dióptro ar-acrílico e o objeto observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico).

Portanto, esta análise revela que a razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_2/θ_1 varia linearmente com a posição angular do objeto, θ_1 , e podemos concluir que

$$\theta_2 = \theta_1 (a' - b' \theta_1) \tag{4.17}$$

ou, ainda, que

$$\theta_2 = a' \theta_1 \left(1 - \frac{\theta_1}{\theta'_0} \right), \tag{4.18}$$

onde

$$\theta'_0 = \frac{a'}{b'} \tag{4.19}$$

é uma constante que corresponde a um ângulo característico do experimento. Assim, para o dióptro ar-acrílico, obtemos

$$\theta'_0 \approx 270(30)^\circ. \tag{4.20}$$

Observe que θ'_0 é praticamente igual a constante θ_0 determinada anteriormente.

A figura 15 representa o comportamento parabólico, definido pela equação (4.18), da relação entre a posição angular da imagem do objeto, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1 .

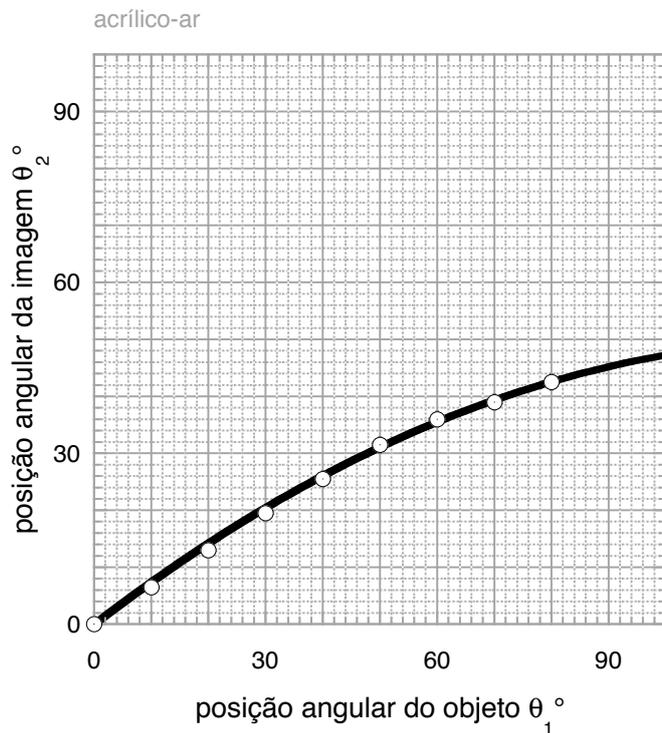


Figura 15. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 , vs. posição angular do objeto, θ_1 , para o dioptra ar-acrílico e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico). A curva representa a função (4.18). Observe a discrepância entre a função e os valores observados para a posição angular do objeto para ângulos menores do que 30° .

A partir da equação (4.18) também observamos que a posição angular do objeto, $\theta_1 = 90^\circ$ define um ângulo limite θ'_c para a localização angular da imagem:

$$\theta'_c = a \, 90^\circ \left(1 - \frac{90^\circ}{\theta'_0} \right) = 46(2)^\circ. \quad (4.21)$$

Este último resultado é similar ao caso precedente e pode ser verificado imediatamente pelo experimentador. Para o nosso dioptra ar-acrílico temos que o valor experimental de θ_c é igual a $44(1)^\circ$. Portanto, a previsão da posição limite do objeto, pela lei de Ptolomeu, apresenta uma discrepância de 2° em relação a posição angular real.

4.4 A refração para o dioptra ar-água

Após termos investigado o dioptra ar-acrílico, vamos explorar os efeitos da água sobre a formação da imagem de um objeto. Primeiramente, colocamos o baptistir na vertical e preenchemos o seu recipiente semicilíndrico com água limpa e em quantidade suficiente para alcançar a sua borda. Em seguida, verificamos se a superfície do disco do baptistir

está perpendicular à superfície da água. Esta superfície divide o disco em duas metades, de maneira que a metade BGD , fica inteiramente abaixo do nível da água. Assim, o diâmetro AEG também está perpendicular a superfície da água, como ilustrado na figura 16.

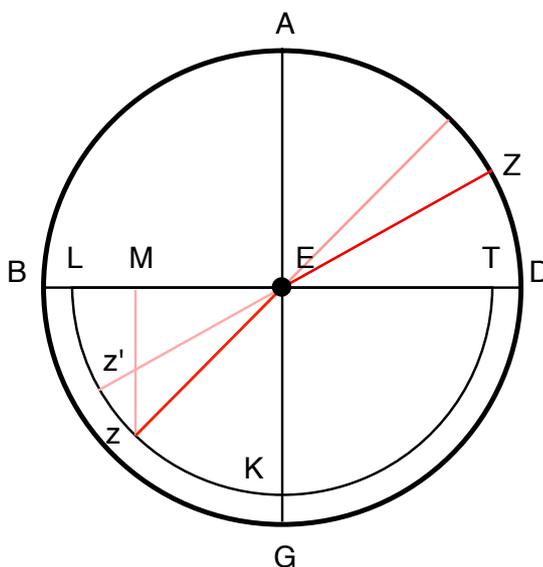


Figura 16. – Baptistir e o dióptro ar-água.

Agora procedemos como descrito na Seção 4.3. Colocamos um marcador em E , o ponto médio da lateral reta do semicilindro. Colocamos um outro marcador em z na base curva do recipiente e observamos, ao longo da borda do disco, partindo da ponto A linha guia AE a posição da imagem do objeto alinhada com o ponto E . Esta posição é indicada pelo ponto Z .

Um conjunto de medidas para estes ângulos é apresentado na Tabela 3 e está representado graficamente na figura 17. Mais uma vez percebemos, a partir das nossas medidas, indicadas na Tabela 3, que a posição angular da imagem AZ é maior do que a posição angular do objeto Kz .

Como podemos observar da figura 17, para o dióptro ar-água e o objeto sendo observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (a água), temos que o arco AZ é sempre maior do que o arco Kz e, por conseqüência, a posição angular da imagem, θ_2 , é sempre maior do que a posição angular do objeto, θ_1 . Portanto, podemos afirmar que a guia para a observação do objeto em H sofreu um desvio, isto é, o segmento de reta que orientava a visão do objeto na direção EZ foi encurvada para a direção Ez pela quantidade $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, de modo a observarmos o objeto em z , como no caso do dióptro ar-acrílico. Podemos afirmar então que a refração ocorre ao observamos um objeto através de dois meios transparentes em contato e o segmento de reta de orientação visual é refratado na interface entre os dois meios considerados.

Tabela 3. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1 , para o dioptra ar-acrílico quando o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (a água). A localização angular da imagem foi desviada de $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ em relação à posição do objeto.

$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_1(^{\circ})$	$\Delta\theta(^{\circ})$
10,0(2)	9,0(2)	1,0(4)
20,0(2)	16,0(2)	4,0(4)
30,0(2)	23,0(2)	7,0(4)
40,0(2)	29,5(2)	10,5(4)
50,0(2)	36,0(2)	14,0(4)
60,0(2)	41,0(2)	19,0(4)
70,0(2)	44,5(2)	25,5(4)
80,0(2)	49,0(2)	31,0(4)

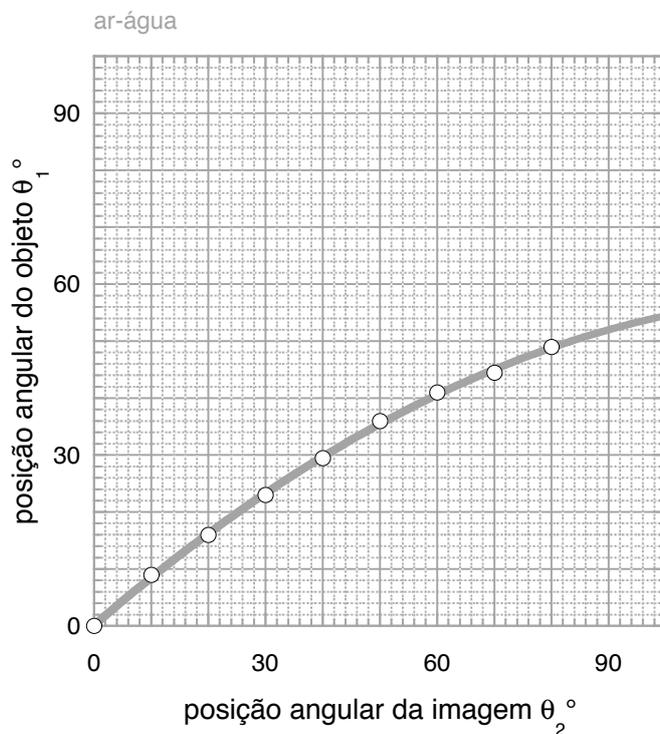


Figura 17. – Medidas para a posição angular do objeto, θ_1 , vs. posição angular da imagem, θ_2 , para o dioptra ar-água e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (a água).

É interessante perceber que, se observarmos o objeto em G a partir da perpendicular AE , a guia não sofre nenhum desvio: a imagem continua sobre a mesma linha reta AE . Em todas as outras posições, entretanto, uma vez que aumentamos o arco Kz , o arco AZ também aumenta, mas o encurvamento é progressivamente maior. Entretanto, os incrementos não são linearmente proporcionais. Ilustramos na figura 18 o comportamento

da razão entre as posições angulares em função da posição angular da imagem.

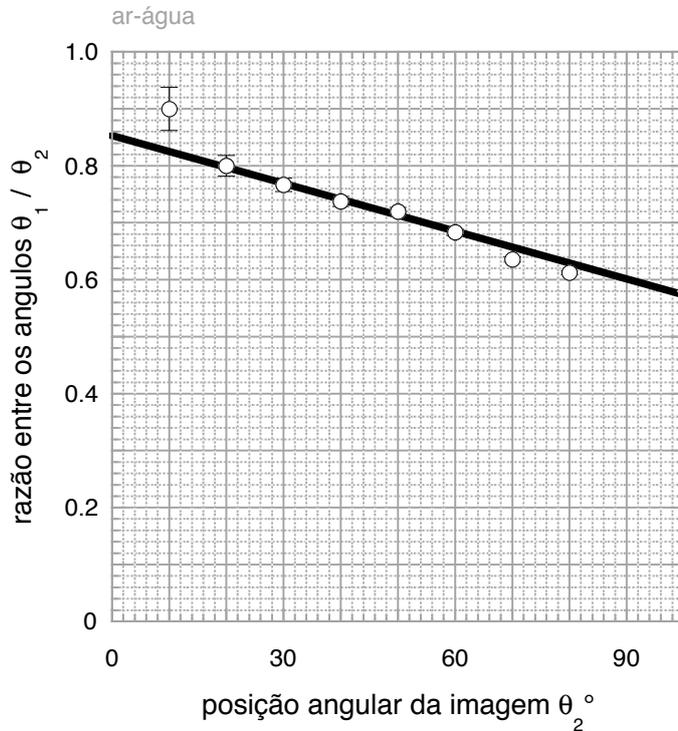


Figura 18. – Razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_1/θ_2 vs. ângulo da posição angular da imagem do objeto, θ_2 , para o dioptro ar-água e o objeto observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (a água).

Observamos da figura 18 que esta razão varia linearmente com o ângulo da posição imagem do objeto, θ_2 . Desse modo, podemos escrever que

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = a - b\theta_2, \quad (4.22)$$

onde a e b são constantes de valor aproximado

$$a \approx 0.85(1) \quad (4.23)$$

e

$$b = \frac{0.85(1) - 0.57(1)}{100(1)^\circ} \approx 0.0028(2)^\circ. \quad (4.24)$$

Estas constantes e suas incertezas são, respectivamente, o coeficiente linear e angular de (4.22), determinados por triangulação a partir do gráfico da figura 18.

Portanto, esta análise revela que a razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_1/θ_2 varia linearmente com a posição angular da imagem do objeto, θ_2 , e podemos concluir que

$$\theta_1 = \theta_2 (a - b\theta_2) \quad (4.25)$$

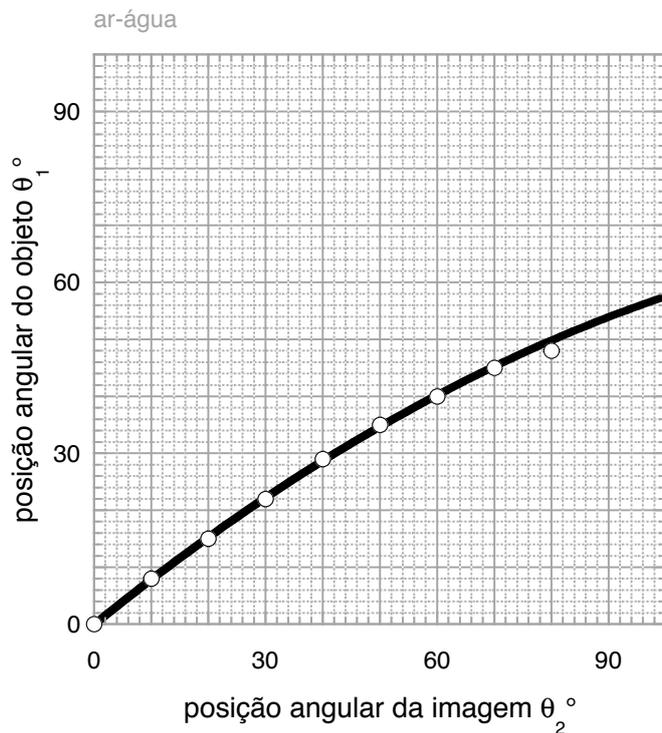


Figura 19. – Medidas para a posição angular do objeto, θ_1 , vs. a posição angular da imagem, θ_2 , para o dioptra ar-água e o objeto observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (a água). A curva representa a função (4.26). Observe a discrepância entre a função e os valores observados para a posição angular do objeto para ângulos maiores do que 60° .

ou, ainda, que

$$\theta_1 = a \theta_2 \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_0} \right), \quad (4.26)$$

onde

$$\theta_0 = \frac{a}{b} \quad (4.27)$$

é uma constante que corresponde a um ângulo característico do experimento. Esta é a lei da refração de Ptolomeu, aplicada ao dioptra ar-água.

Assim, para o dioptra ar-água, obtemos

$$\theta_0 \approx 300(30)^\circ. \quad (4.28)$$

A figura 19 representa o comportamento parabólico, definido pela equação (4.26), da relação entre a posição angular do objeto, θ_1 e a posição angular de sua imagem, θ_2 .

A partir da equação (4.26) também observamos que a posição angular da imagem do objeto em $\theta_2 = 90^\circ$ define um ângulo limite θ_c para a localização angular do objeto:

$$\theta_c = a 90^\circ \left(1 - \frac{90^\circ}{\theta_0} \right) = 54(3)^\circ. \quad (4.29)$$

Este último resultado pode ser verificado imediatamente pelo experimentador. Para o nosso dioptro ar-água temos que o valor experimental de θ_c é igual a $49(1)^\circ$. Portanto, a previsão da posição limite do objeto, pela lei de Ptolomeu, apresenta uma discrepância de 5° em relação a posição angular real. Isso significa que a lei de Ptolomeu prevê um ângulo limite maior do que o observado experimentalmente.

Observamos mais uma vez que, para pequenas posições angulares das imagens, podemos reescrever a equação (4.26) na forma

$$\theta_1 \approx a \theta_2. \quad (4.30)$$

Assim, percebemos novamente que o coeficiente a é uma “medida” da quantidade de encurvamento causado pelo nosso dioptro e a lei de Kepler para a refração, quando os ângulos são pequenos, se cumpre mais uma vez.

4.5 A refração para o dioptro acrílico-água

Após termos investigado o dioptro ar-água, vamos explorar os efeitos da combinação acrílico-água sobre a formação da imagem de um objeto. Primeiramente, colocamos o baptistir na vertical e preenchemos o seu recipiente semicilíndrico com água limpa e em quantidade suficiente para alcançar a sua borda. Em seguida, verificamos se a superfície do disco do baptistir está perpendicular a superfície da água. Esta superfície divide o disco em duas metades, de maneira que a metade BGD , fica inteiramente abaixo do nível da água. Em seguida colocamos o semidisco em acrílico sobre a borda do recipiente. Assim, o diâmetro AEG também está perpendicular a superfície da água, como ilustrado na mesma figura 12 que representou o dioptro ar-acrílico.

Ao procedermos como descrito na Seção 4.4, obtemos o conjunto de medidas para os ângulos como apresentado na Tabela 4 e representado graficamente na figura 20.

Tabela 4. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1 , para o dioptro acrílico-água quando o objeto é observado a partir do meio mais denso (o acrílico) para o meio menos denso (a água). A localização angular da imagem foi desviada de $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ em relação à posição do objeto.

$\theta_2(^\circ)$	$\theta_1(^\circ)$	$\Delta\theta(^\circ)$
8,0(2)	10,0(2)	-2,0(4)
17,0(2)	20,0(2)	-3,0(4)
25,5(2)	30,0(2)	-4,5(4)
34,5(2)	40,0(2)	-5,5(4)
42,5(2)	50,0(2)	-7,5(4)
50,0(2)	60,0(2)	-10,0(4)
56,5(2)	70,0(2)	-13,5(4)
61,0(2)	80,0(2)	-19,0(4)

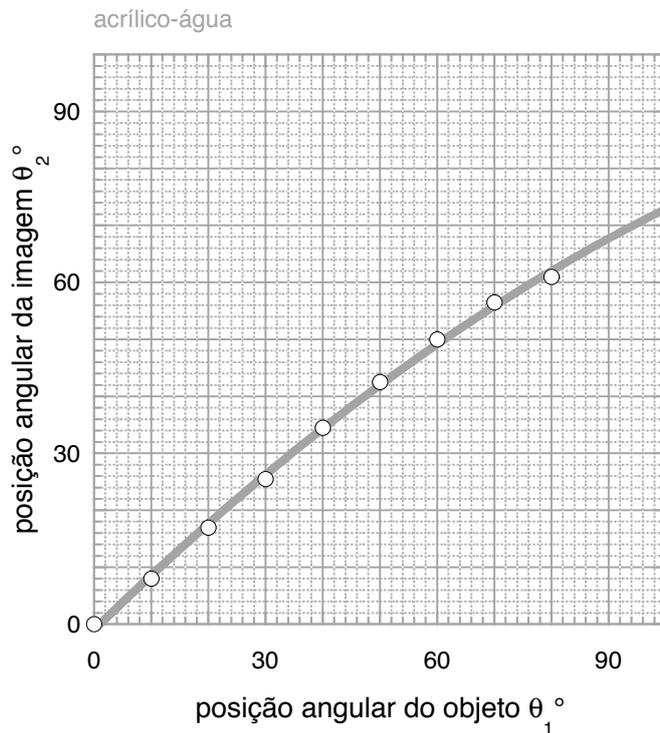


Figura 20. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 , vs. posição angular do objeto, θ_1 , para o dióptro ar-acrílico quando o objeto é observado a partir do meio mais denso (o acrílico) para o menos denso (o ar).

Observamos da figura 20 que os valores para a posição angular do objeto quando o objeto é observado a partir do meio mais denso (o acrílico) para o menos denso (a água) são similares àqueles determinados quando o objeto observado a partir do meio mais denso (o acrílico) para o menos denso (o ar). Uma vez mais podemos analisar o comportamento da razão entre essas duas grandezas, com representado no gráfico da figura 21.

Observamos da figura 21 que, para posições angulares da imagem maiores do que 30° , está razão varia linearmente com a posição angular do objeto, θ_1 . Desse modo, podemos escrever que

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = a' - b' \theta_2, \quad (4.31)$$

onde a' e b' são constantes de valor aproximado

$$a' \approx 0.97(1) \quad (4.32)$$

e

$$b' = \frac{0.97(1) - 0.72(1)}{100(1)^\circ} \approx 0.0025(2)^\circ. \quad (4.33)$$

Estas constantes e suas incertezas são, respectivamente, o coeficiente linear e angular de (4.31), determinados por triangulação a partir do gráfico da figura 21.

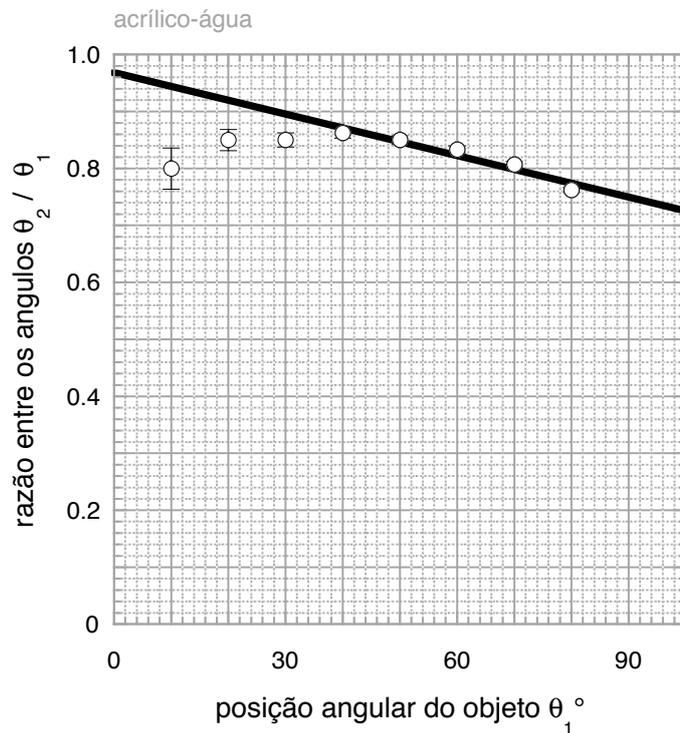


Figura 21. – Razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_1/θ_2 vs. posição angular da imagem do objeto, θ_2 , para o dióptro acrílico-água e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o acrílico) para o mais denso (a água).

Portanto, esta análise revela que a razão entre as medidas da posição angular da imagem e do objeto, θ_2/θ_1 varia linearmente com a posição angular do objeto, θ_1 , e podemos concluir que

$$\theta_2 = \theta_1 (a' - b' \theta_1) \quad (4.34)$$

ou, ainda, que

$$\theta_2 = a' \theta_1 \left(1 - \frac{\theta_1}{\theta'_0} \right), \quad (4.35)$$

onde

$$\theta'_0 = \frac{a'}{b'} \quad (4.36)$$

é uma constante que corresponde a um ângulo característico do experimento. Assim, para o dióptro ar-acrílico, obtemos

$$\theta_0 \approx 390(30)^\circ. \quad (4.37)$$

A figura 22 representa o comportamento parabólico, definido pela equação (4.35), da relação entre o ângulo posição angular da imagem do objeto, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1

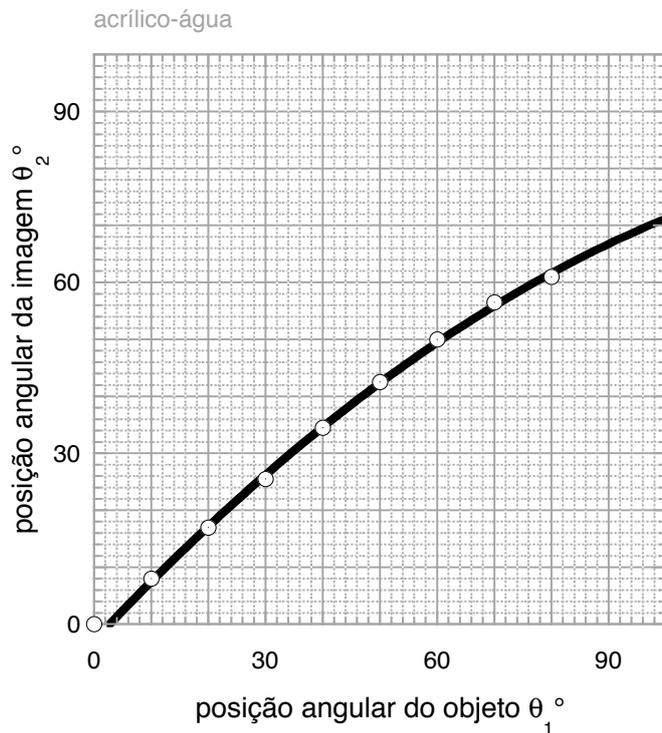


Figura 22. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 , vs. posição angular do objeto, θ_1 , para o dióptro ar-acrílico e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico). A curva representa a função (4.35). Observe a discrepância entre a função e os valores observados para a posição angular do objeto para ângulos menores do que 30° .

A partir da equação (4.18) também observamos que a posição angular do objeto, $\theta_1 = 90^\circ$ define um ângulo limite θ_c para a localização angular da imagem:

$$\theta_c = a \, 90^\circ \left(1 - \frac{90^\circ}{\theta_0} \right) = 68(2)^\circ. \quad (4.38)$$

Este último resultado pode ser verificado imediatamente pelo experimentador. Para o nosso dióptro acrílico-água temos que o valor experimental de θ_c é igual a $65(2)^\circ$. Portanto, a previsão da posição limite do objeto, pela lei de Ptolomeu, apresenta uma discrepância de 2° em relação a posição angular real.

4.6 As características dos dióptros

Uma análise das medidas para a posição angular do objeto, θ_1 , e da posição angular da sua imagem, θ_2 , para diferentes dióptros e quando o objeto é observado a partir do meio menos denso para o mais denso, mostraram que estas grandezas físicas obedecem a

lei de Ptolomeu:

$$\theta_1 = a \theta_2 \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_0} \right), \quad (4.39)$$

onde a e θ_0 são constantes que dependem do dioptro considerado. Na Tabela 5 apresentamos um resumo das características dos dioptros analisados.

Tabela 5. – Parâmetros matemáticos obtidos da análise dos dioptros ar-água e ar-acrílico apresentados nesta dissertação.

dioptro	a	b	$n_P = 1/a$	θ_0	θ_c	$\theta_{c \text{ exp}}$
ar-acrílico	0,74(1)	0,0026(2)	1,35(1)	280(30)	45(3)	44(1)
ar-água	0,85(1)	0,0028(2)	1,18(1)	300(30)	54(3)	49(1)

Uma análise da Tabela 5 mostra que o valor do parâmetro a é menor para o dioptro ar-água do que o seu correspondente para o dioptro ar-acrílico. Entretanto, o dioptro ar-acrílico produz uma refração maior do que o dioptro ar-água. Podemos então definir um coeficiente $n_P = 1/a$ que represente este comportamento. Este coeficiente n_P é denominado índice de refração do material.

Assim podemos concluir que: (1) o encurvamento do raio visual não ocorre em qualquer líquido ou meios rarefeitos. Um certo grau de encurvamento ocorre somente no caso daqueles meios transparentes de características refratárias diferentes; (2) o raio visual se prolonga ao longo de um segmento de reta e é naturalmente encurvado somente na interface entre os dois meios transparentes de intensidades diferentes; (3) o encurvamento ocorre não somente na interface orientada de um meio menos denso para um mais denso (como no caso da reflexão) mas, também, na interface orientada de um meio mais denso para um menos denso; e (4) este encurvamento não ocorre em ângulos iguais, quando medidos em relação à perpendicular a interface entre o dois meios, mas eles apresentam uma relação quantitativa bem definida, descrita aproximadamente pela lei de Ptolomeu dada pela equação (4.39).

4.7 A fórmula de Bhaskara

Como podemos observar da análise dos nossos resultados, a lei de Ptolomeu dada pela equação (4.39) representa uma boa aproximação para se determinar a posição angular do objeto uma vez conhecida a posição angular da sua imagem. Entretanto a lei de Ptolomeu apresenta uma discrepância significativa com a localização real quando consideramos ângulos menores do que 30° ou maiores do que 60° .

Para solucionar este problema, procedemos da seguinte maneira. Observemos da figura 23 que o círculo de diâmetro AG possui um raio $R = EZ$, e um arco AZ igual a θ

graus. Da figura, podemos ainda escrever que

$$mZ = R \operatorname{sen} \theta. \quad (4.40)$$

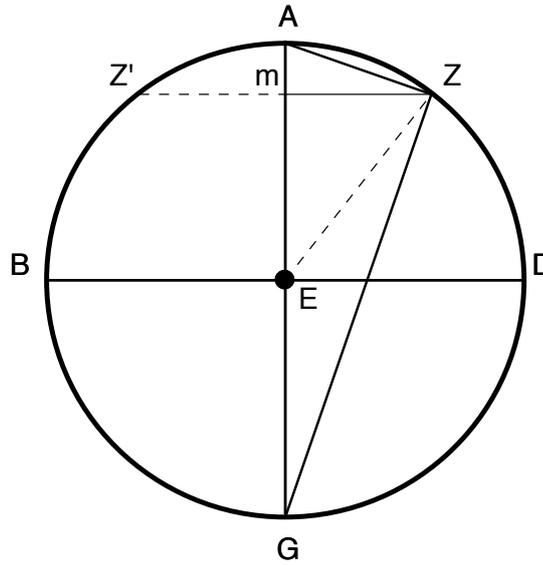


Figura 23. – A circunferência de diâmetro AG , raio $R = EZ$ e a corda $Z'Z$ correspondente ao arco $Z'AZ$. Observe que $mZ = R \operatorname{sen}(AZ)$.

Agora consideremos a área do triângulo AZG , inscrito na circunferência $ABGD$:

$$\begin{aligned} \Delta AZG &= \frac{1}{2} AZ \cdot ZG, \\ &= \frac{1}{2} AG \cdot mZ. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Portanto, podemos estabelecer a igualdade

$$\frac{1}{mZ} = \frac{AG}{AZ \cdot ZG}. \quad (4.42)$$

Como as cordas AZ e ZG são menores do que os seus respectivos arcos, podemos então afirmar que

$$\frac{1}{mZ} > \frac{AG}{(\operatorname{arc}AZ) \cdot (\operatorname{arc}ZG)}. \quad (4.43)$$

Para igualar o lado esquerdo de (4.43) ao seu lado direito, vamos agora admitir que deve ser satisfeita a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \frac{1}{mZ} &= \frac{x \cdot AG}{(\operatorname{arc}AZ) \cdot (\operatorname{arc}ZG)} + y, \\ &= \frac{2xR}{\theta(180 - \theta)} + y, \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde x e y são constantes a serem determinadas. Substituindo (4.42) em (4.44) obtemos então

$$R \operatorname{sen} \theta = \frac{\theta (180 - \theta)}{2xR + y\theta (180 - \theta)}. \quad (4.45)$$

Consideremos, agora, dois valores particulares de θ como, por exemplo, 30° e 90° para os quais conhecemos os valores exatos dos senos correspondentes. Assim, podemos determinar as constantes x e y com a ajuda da equação (4.45). Desta forma, encontramos:

$$2xR = \frac{40500}{4R}, \quad (4.46)$$

$$y = -\frac{1}{4R}. \quad (4.47)$$

Finalmente, substituindo esses valores para x e y na equação (4.45), obtemos a fórmula de Bhaskara para a determinação do seno de um dado ângulo, com a precisão desejada:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{4\theta (180 - \theta)}{40500 - \theta (180 - \theta)}. \quad (4.48)$$

Como podemos observar da Tabela 6 e da figura 24, esta aproximação algébrica relativamente simples para a determinação dos senos, descoberta por Bhaskara I no século VII, é surpreendentemente acurada em relação aos valores dos senos calculados com a fórmula de Euler, criada mil anos mais tarde.

Tabela 6. – Tabela de senos para diferentes ângulos θ , conforme calculado pela fórmula de Bhaskara, $\operatorname{sen}_B(\theta)$, e pela fórmula de Euler, $\operatorname{sen}(\theta)$. Também estão indicadas as incertezas correspondentes na determinação dos senos se a incerteza no valor do ângulo for igual a $\delta\theta = 0.2^\circ$.

$\theta(^{\circ})$	$\operatorname{sen}_B \theta$	$\operatorname{sen} \theta$
0,0(2)	0,000(4)	0,000(4)
10,0(2)	0,175(4)	0,174(3)
20,0(2)	0,343(4)	0,342(3)
30,0(2)	0,500(5)	0,500(3)
40,0(2)	0,642(5)	0,643(3)
50,0(2)	0,765(5)	0,766(2)
60,0(2)	0,865(5)	0,866(2)
70,0(2)	0,939(5)	0,940(1)
80,0(2)	0,985(6)	0,985(1)
90,0(2)	1,000(6)	1,000(0)

A título de comparação, para o cálculo dos senos pela fórmula de Euler empregamos a equação

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (4.49)$$

É interessante lembrar que, no nosso caso, os ângulos estão em graus. Assim, para calcular o seno do ângulo θ com a fórmula de Euler, temos que primeiramente dividi-lo por 180°

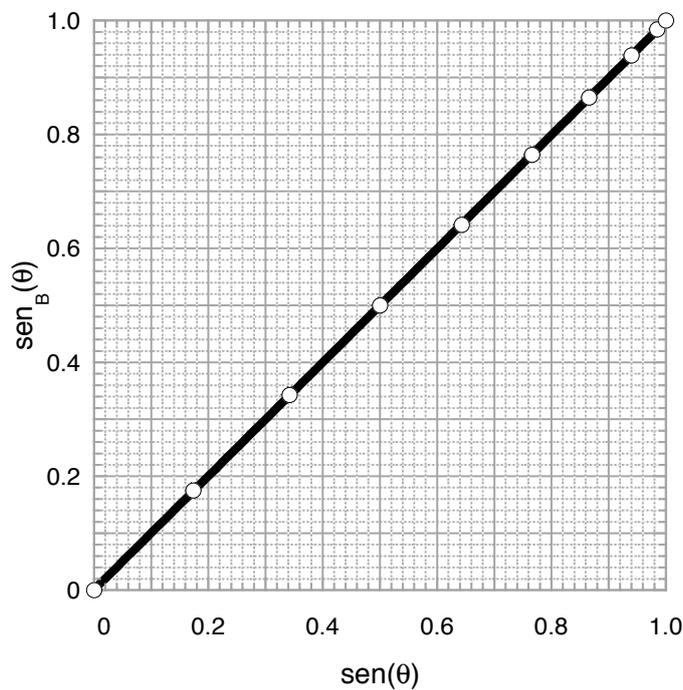


Figura 24. – Seno do ângulo θ como determinado pela fórmula de Bhaskara, equação (4.48), vs. seno do mesmo ângulo, como determinado pela fórmula de Euler.

e, em seguida, multiplicá-lo por π . Este procedimento exige que usemos o valor de π com muitas casas decimais, de forma a realizar um cálculo preciso dos diferentes termos da série e, ao final, determinar o mais acuradamente possível o valor desejado para o seno.

Uma rápida investigação da Tabela 6 nos revela que a fórmula de Bhaskara é discrepante da fórmula de Euler a partir somente da terceira casa decimal. Mais ainda, para erros da ordem do décimo de grau na medida angular, esta discrepância é oculta pela incerteza da medida.

Desse modo, a fórmula de Bhaskara se apresenta como uma fórmula bastante conveniente para propósitos práticos, particularmente quando lembramos que foi somente em 1622, na Inglaterra, que William Oughtred, um pastor anglicano, colocou lado a lado duas régua de madeira com escalas logarítmicas e criou a primeira régua de cálculo que se tem notícia. Acrescente-se, ainda, que usamos as mesmas régua de cálculo de Oughtred até os anos setenta do século passado e as primeiras calculadoras de bolso só começaram a ser produzidas comercialmente a partir de 1947 (STOLL, 2004; STOLL, 2006).

4.8 A lei da refração atual

Agora que sabemos como determinar os valores do seno trigonométrico com a fórmula de Bhaskara, para qualquer ângulo que consideremos, vamos então determinar a posição angular do objeto a partir da posição angular da sua imagem e considerando os respectivos senos. Inicialmente representamos geometricamente a formação da imagem como indicado na figura 25.

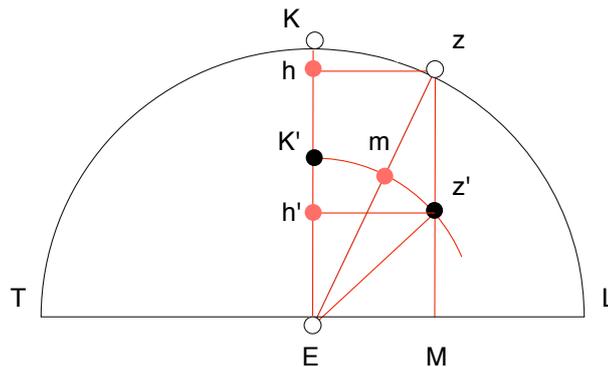


Figura 25. – Representação da formação de imagens da primeira atividade, com o semidisco que representa o dióptro ar-acrílico. Observe as posições K' e z' das imagens dos objetos em K e z , em relação a E , e suas respectivas localizações, indicadas pelos círculos pretos. Observe também a decomposição dos diferentes orientações em relação a EK e à face TL .

Se as posições z e z' estão sobre a mesma perpendicular zM , então podemos escrever que

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{Ez}{Ez'} = \frac{1}{k}, \tag{4.50}$$

onde $\theta_1 = Kz$ e $\theta_2 = K'z'$ são, respectivamente, a orientação angular do objeto e da imagem e k é um parâmetro a ser determinado, que pode depender ou não da posição angular da imagem. Neste caso, o comportamento do parâmetro k pode ser estabelecido investigando-se a razão entre $\text{sen } \theta_1$ e $\text{sen } \theta_2$.

Apresentamos na Tabela 7 as medidas para a posição angular da imagem, θ_2 , em função do ângulo da posição angular do objeto, θ_1 , para os dióptros ar-acrílico e ar-água, e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico ou a água). Incluímos também os seus respectivos senos, determinados a partir da fórmula de Bhaskara. Estas medidas estão representadas no gráfico da figura 26.

Como podemos concluir da figura 26 que, para o dióptro ar-acrílico e ar-água — e o objeto sendo observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico ou a água) —, temos que o arco KZ é sempre menor do que o arco $K'z'$ e, por conseqüência, a posição angular da imagem, θ_2 , é sempre maior do que a posição angular do objeto, θ_1 .

Assim, podemos afirmar que a linha guia para a observação do objeto em z foi refratada: ela sofreu um desvio na interface entre o ar e o acrílico ou entre o ar e a água.

Tabela 7. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1 , para o diopetro ar-acrílico quando o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico ou a água). Incluímos também os seus respectivos senos, determinados a partir da fórmula de Bhaskara.

ar-acrílico			
$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_1(^{\circ})$	$\text{sen}_B \theta_2$	$\text{sen}_B \theta_1$
10,0(2)	7,0(2)	0,175(3)	0,123(3)
20,0(2)	14,0(2)	0,343(3)	0,244(3)
30,0(2)	19,5(2)	0,500(3)	0,335(3)
40,0(2)	25,0(2)	0,642(3)	0,423(3)
50,0(2)	31,0(2)	0,765(2)	0,515(3)
60,0(2)	35,0(2)	0,865(2)	0,573(3)
70,0(2)	39,0(2)	0,939(1)	0,628(3)
80,0(2)	42,0(2)	0,985(1)	0,668(3)
ar-água			
$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_1(^{\circ})$	$\text{sen}_B \theta_2$	$\text{sen}_B \theta_1$
10,0(2)	9,0(2)	0,175(3)	0,158(3)
20,0(2)	16,0(2)	0,343(3)	0,277(3)
30,0(2)	23,0(2)	0,500(3)	0,392(3)
40,0(2)	29,5(2)	0,642(3)	0,492(3)
50,0(2)	36,0(2)	0,765(2)	0,587(3)
60,0(2)	41,0(2)	0,865(2)	0,655(3)
70,0(2)	44,5(2)	0,939(1)	0,700(2)
80,0(2)	49,0(2)	0,985(1)	0,753(2)

Portanto, o segmento de reta que orientava a visão do objeto na direção Ez foi encurvada para a direção Ez' pela quantidade $\Delta\theta = \text{asen} \theta_2 - \text{asen} \theta_1$, de modo a observarmos a imagem do objeto em z' .

Observamos da figura 26 que o seno da posição angular do objeto, $\text{sen} \theta_1$, varia linearmente com a posição angular da imagem do objeto, $\text{sen} \theta_2$. Desse modo, podemos escrever que

$$\text{sen} \theta_1 = \frac{1}{k} \text{sen} \theta_2, \quad (4.51)$$

onde k é uma constante de valor aproximado $1/0.74(1)$ e $1/0.67(1)$ para o diopetro ar-água e para o diopetro ar-acrílico, respectivamente. Observamos ainda que a refração é maior para o menor valor de k . Deste modo, podemos definir o índice n tal que

$$n = \frac{1}{0.76(1)} \approx 1.32(2) \quad (4.52)$$

e

$$n = \frac{1}{0.67(1)} \approx 1.49(2). \quad (4.53)$$

para o diopetro ar-água e para o diopetro ar-acrílico, respectivamente, e elas caracterizam o grau de refração causado pelo diopetro. Esta constante corresponde ao inverso do coefi-

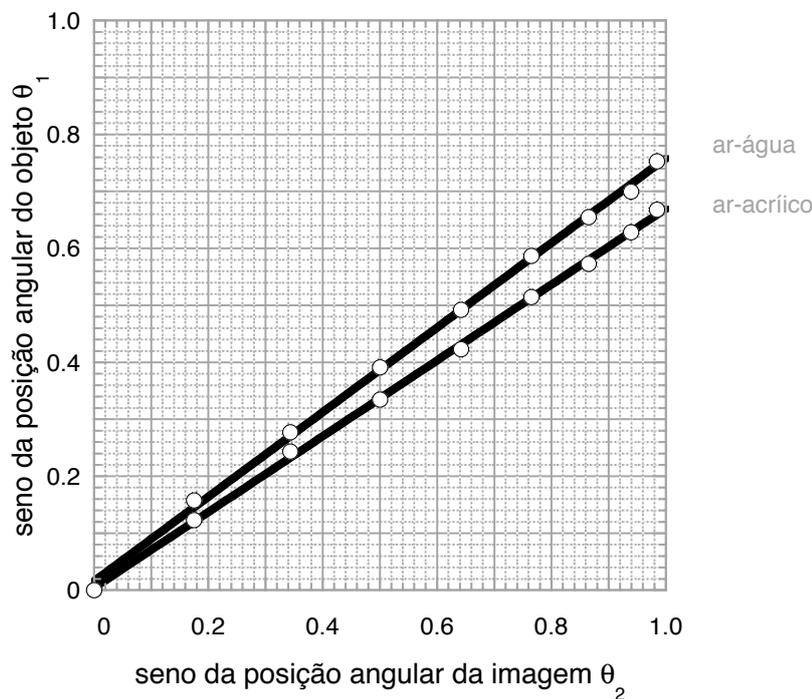


Figura 26. – Seno das medidas para a posição angular do objeto, θ_1 , vs. seno da posição angular da imagem, θ_2 , para o dióptro ar-acrílico e ar-água, onde o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico ou a água).

ciente angular da equação (4.51), é determinada pela triangulação a partir do gráfico da figura 26. Ela é denominada *índice de refração* do material que constitui o dióptro.

Portanto, esta análise revela que a razão entre o seno das medidas da posição angular da imagem e do objeto correspondente, $\text{sen } \theta_1 / \text{sen } \theta_2$, é uma constante que determina o índice de refração do material. Esta é a lei da refração estabelecida por Snel, no início do século XVII, a partir da análise dos seus experimentos.

Desse modo, a posição angular do objeto, θ_1 , é dada pela expressão

$$\theta_1 = \text{asen}(n \text{ sen } \theta_2). \quad (4.54)$$

Portanto, conhecendo-se o índice de refração do dióptro n e a posição angular θ_2 da imagem, o lado direito da equação (4.3), a posição angular do objeto, θ_1 , fica completamente determinada.

Lembremos ainda, como discutimos no início da Seção 4.3, que a máxima posição angular θ_1 deve ser igual a 90° . Naturalmente, isso só poderá acontecer quando

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{1}{n} \quad (4.55)$$

ou, ainda,

$$\theta_2 = \text{asen}\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4.56)$$

Para os dioptros ar-acrílico e ar-água, temos então $\theta_{c \text{ ar-ac}} = \text{asen}(0,67)$ e $\theta_{c \text{ ar-ag}} = \text{asen}(0,74)$, respectivamente. Consultando a Tabela 7 podemos determinar estes ângulos por interpolação. Para o diopetro ar-acrílico obtemos

$$\theta_{c \text{ ar-ac}} = 40,0(2) + \frac{50,0 - 40,0}{0,765 - 0,642}(0,67 - 0,642) = 42(2). \quad (4.57)$$

Para o diopetro ar-acrílico obtemos

$$\theta_{c \text{ ar-ag}} = 40,0(2) + \frac{50,0 - 40,0}{0,765 - 0,642}(0,74 - 0,642) = 48(2). \quad (4.58)$$

Apresentamos na Tabela 8 as medidas para a posição angular da imagem, θ_2 , em função do ângulo da posição angular do objeto, θ_1 , para o diopetro ar-acrílico e o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico ou a água). Incluímos também os seus respectivos senos, determinados a partir da fórmula de Bhaskara. Estas medidas estão representadas no gráfico da figura 27.

Tabela 8. – Medidas para a posição angular da imagem, θ_2 e a posição angular do objeto, θ_1 , para o diopetro acrílico-ar quando o objeto é observado a partir do meio menos denso (o ar) para o mais denso (o acrílico ou a água). Incluímos também os seus respectivos senos, determinados a partir da fórmula de Bhaskara.

acrílico-ar			
$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_1(^{\circ})$	$\text{sen}_B \theta_2$	$\text{sen}_B \theta_1$
6,5(2)	10,0(2)	0,115(4)	0,175(3)
13,0(2)	20,0(2)	0,227(3)	0,343(3)
19,5(2)	30,0(2)	0,335(3)	0,500(3)
25,5(2)	40,0(2)	0,431(3)	0,642(3)
31,5(2)	50,0(2)	0,522(3)	0,765(2)
36,0(2)	60,0(2)	0,587(3)	0,865(2)
39,0(2)	70,0(2)	0,628(3)	0,939(1)
42,5(2)	80,0(2)	0,674(3)	0,985(1)
acrílico-água			
$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_1(^{\circ})$	$\text{sen}_B \theta_2$	$\text{sen}_B \theta_1$
8,0(2)	10,0(2)	0,141(4)	0,175(3)
17,0(2)	20,0(2)	0,294(3)	0,343(3)
25,5(2)	30,0(2)	0,431(3)	0,500(3)
34,5(2)	40,0(2)	0,566(3)	0,642(3)
42,5(2)	50,0(2)	0,674(3)	0,765(2)
50,0(2)	60,0(2)	0,765(2)	0,865(2)
56,5(2)	70,0(2)	0,833(2)	0,939(1)
61,0(2)	80,0(2)	0,873(2)	0,985(1)

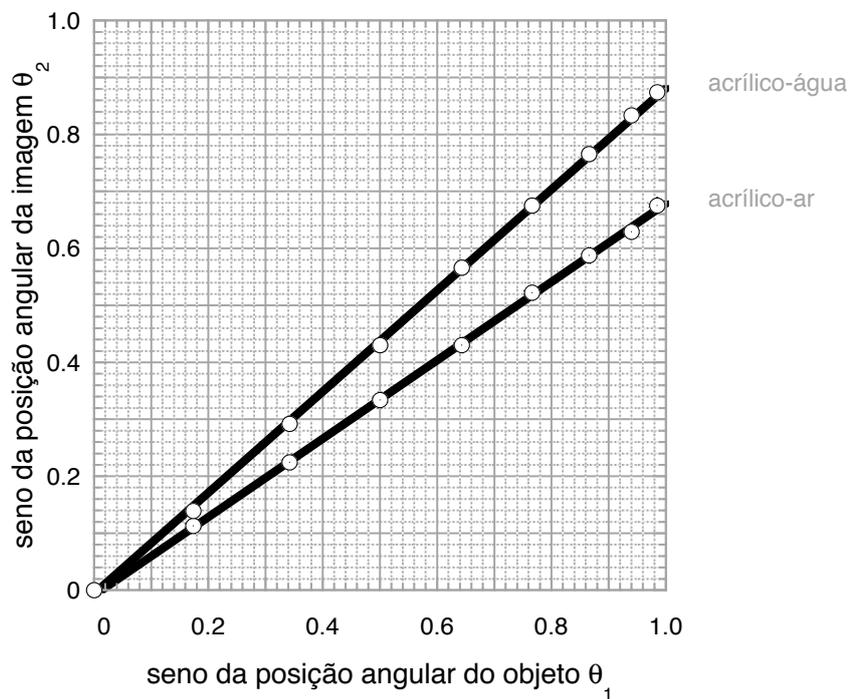


Figura 27. – Seno das medidas para a posição angular do objeto, θ_1 , vs. seno da posição angular da imagem, θ_2 , para o dióptro ar-acrílico e ar-água, onde o objeto é observado a partir do meio mais denso (o acrílico) menos denso (o ar para o menos denso (o ar ou a água)).

Da figura 27 observamos que o coeficiente angular para a formação de imagens com o dióptro acrílico-ar tem o mesmo coeficiente que para o caso ar-acrílico. Assim, podemos escrever que

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{1}{n_{\text{ar-ac}}} \text{sen } \theta_1 \quad (4.59)$$

e, por consequência, reobtemos o mesmo resultado apresentado em (4.54) que relaciona as posições angulares da imagem e do objeto correspondente. Se fizermos a analogia para o caso acrílico-água, devemos também ter que

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{1}{n_{\text{ac-ag}}} \text{sen } \theta_1. \quad (4.60)$$

Como o objeto está na água e a sua imagem é percebida através do acrílico, podemos fazer a seguinte conjectura: o índice de refração do dióptro acrílico-água deve ser descrito pela razão

$$n_{\text{ac-ag}} = \frac{n_{\text{ac}}}{n_{\text{ag}}}. \quad (4.61)$$

Novamente, da figura 27, obtemos que $n_{\text{ac-ag}} = 1/0.88(2) \approx 1,14(2)$ e, desse modo,

$$n_{\text{ac}} \text{sen } \theta_2 = n_{\text{ag}} \text{sen } \theta_1. \quad (4.62)$$

Podemos, assim, resumir algumas propriedades da refração, a partir dos experimentos realizados. A quantidade de encurvamento, o efeito da refração, é o mesmo quando observamos o objeto mergulhado em um determinado meio com um outro meio interposto entre o observador e o objeto. O que difere é o sentido do encurvamento. Quando observamos o objeto em um determinado meio, a partir de um meio menos denso, a imagem se afasta da normal à interface entre os dois meios. Quando o objeto é observado a partir de um meio mais denso, a imagem se aproxima desta normal.

É importante frisar que os valores determinados para n correspondem ao índice de refração relativo entre os materiais que compõe o dioptro. No caso dos nossos dioptros, formados com o ar, podemos definir os valores encontrados como valores relativos ao índice de refração do ar.

5 Considerações finais

As sugestões apresentadas aqui para o ensino da refração tem um viés alternativo às propostas utilizadas em sala de aula na maioria das escolas brasileiras. Destacamos dois aspectos na natureza deste trabalho. O primeiro deles está direcionado à Física, pois abordamos um assunto que, nos dias de hoje, parece ter ficado esquecido por alguns e talvez nem seja conhecido para outros. Contudo, ele é de grande relevância para a Ciência.

Muitos cientistas e professores desconhecem o trabalho de Ptolomeu sobre a refração, que é muito pouco divulgado. Mais ainda, mesmo aqueles que o conhecem não destacam a sua relevância para o desenvolvimento da Óptica. O trabalho de Ptolomeu, apesar de ter sido produzido no século II, ainda apresenta uma linguagem e uma metodologia admiravelmente modernas. Ptolomeu foi o precursor de todos os cientistas interessados no fenômeno da refração luminosa e, ao apresentar uma lei da refração em seu trabalho pioneiro, antecipa em 1500 anos os cientistas do século XVII .

A ciência da Antiguidade nos oferece muitas oportunidades para se aprender. Em especial, consideramos o trabalho de Ptolomeu bastante didático em sua forma de abordar o fenômeno da refração luminosa e muito preocupado com a apreciação de seu experimento pelas gerações futuras. Em seu livro, Ptolomeu apresenta de forma clara e objetiva os seus procedimentos, a sua metodologia e as conclusões do seu estudo. Aqueles que se habituaram à ideia que a ciência moderna surge no século XVII, muito se surpreenderiam com a contemporaneidade desse trabalho feito há 15 séculos.

Outro aspecto do nosso trabalho é a apresentação de propostas experimentais para o ensino, que não são comuns nas aulas de Física. Esperamos que a proposta discutida nessa dissertação contribua para o desenvolvimento das habilidades e competências dos alunos assim como para o aperfeiçoamento da sua postura científica.

Nosso objetivo principal foi construir os conceitos físicos envolvidos em um problema partindo-se da sua observação e da análise dos parâmetros físicos relevantes na situação, sem nenhum conhecimento antecipado dos modelos teóricos correspondentes. Expusemos uma situação problema de fato, um cenário que, esperamos, motive o aluno a resolver a questão formulada.

Apresentamos uma situação experimental onde o estudante pode empregar o método científico: observação, análise e conclusão. Em nossa atividade, a partir da formação de imagens empregando-se um semidisco em acrílico, podemos nos perguntar como podemos determinar a posição angular real do objeto conhecendo-se somente a posição angular da sua imagem. Em seguida, o observador deve responder à questão empregando as ferramentas de análise das observações realizadas.

Esse tipo de atividade é potencial para que os alunos possam desenvolver habilidades associadas à construção e à leitura de tabelas e gráficos, à construção e à representação

de situações-problema, ao manuseio de equipamentos e de instrumentos de medida, à realização de medidas e à estimativa de incertezas, além de poder identificar as grandezas relevantes associadas ao problema e relacioná-las algebricamente, conforme sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Esperamos que o tipo de atividade que aqui apresentamos coloque o estudante numa atmosfera científica propícia a aprender os métodos próprios da ciência, assim como a sua linguagem. Esperamos também que as práticas sugeridas nesse trabalho proporcionem ações sócio-interacionistas, pois ela permite que os estudantes pensem, reflitam, argumentem e contra-argumentem com seus pares. Um conjunto de exercícios dessa natureza pode potencializar estudantes mais críticos, conscientes e aptos para o trabalho, particularmente o trabalho em equipe.

Para finalizar, sabemos que atividades dessa natureza não são fáceis de serem desenvolvidas em aulas tradicionais e o sucesso dela depende de alguns fatores colaborativos que podem estar relacionados à formação prévia do estudante, à infra-estrutura da escola na disposição de equipamentos, aos recursos financeiros disponíveis ou ao tempo de dedicação. No entanto, não podemos esperar que esses aspectos se alterem para iniciar o trabalho em atividades dessa natureza com nossos alunos. Nesses casos, o planejamento pode fazer a diferença na aplicação de estratégias de ensino-aprendizagem em práticas laboratoriais nas escolas.

Nas palavras de Baker et al. (1986), “experimentalizar, em Ciências, é uma exploração, uma pesquisa no desconhecido”. Deste modo, esperamos que este trabalho possa equipar os professores para esta exploração ao oferecer abordagens alternativas para o desenvolvimento de suas aulas e também os inspirar na produção de materiais dessa natureza, resgatando o papel da experimentação científica na formação dos estudantes.

Referências

- ANDERSON, M.; KATZ, V.; WILSON, R. (Ed.). *Sherlock Holmes in Babylon and other tales of mathematical history*. Washington: The Mathematical Association of America, 2004.
- BACHELARD, G. *A Formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BAKER, A. G. et al. *The systematic experiment*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- BORN, M.; WOLF, E. *Principles of Optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- BOYER, C. B. *A history of mathematics*. 2nd ed. [rev.]. ed. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- BRANSFORD, J. D.; BROWN, A. L.; COCKING, R. R. *Como as pessoas aprendem: cérebro, mente, experiência e escola*. São Paulo: Editora SENAC São Paulo, 2007.
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais; Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BURTON, H. E. The Optics of Euclid. *Journal of the Optical Society of America (1917-1983)*, v. 35, p. 357–372, 1945.
- CAPECCHI, M. C. V. M.; CARVALHO, A. M. P. Atividade de laboratório como instrumento para a abordagem de aspectos da cultura científica em sala de aula. *Revista Pro-Posições (Faculdade de Educação da Unicamp)*, v. 17, n. 1, p. 137–153, 2006.
- CARRASCO, H. J. Experimentos de laboratório; un enfoque sistémico y problematizador (laboratory experiments: a systemic and problemizing approach). *Revista de Ensino de Física*, v. 13, p. 86–96, 1991.
- CARVALHO, A. de et al. *Ciências no ensino fundamental: o conhecimento físico*. São Paulo: Scipione, 1998. (Pensamento e ação no magistério).
- CARVALHO, A. M. P. de. Habilidades de professores para promover a enculturação científica. *Contexto & Educação*, v. 22, n. 77, p. 25–49, jan./jun. 2007.
- CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A.; SILVA, R. da. *Metodologia científica*. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.
- COHEN, M.; DRABKIN, I. *A source book in Greek science*. Harvard University Press, 1958. (Source books in the history of the sciences). Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=E VX7ZAF CWg0C>>.
- DESCARTES, R. *Discourse on Method, Optics, Geometry, and Meteorology*. Indianapolis: Hackett Publishing, 2001.

- DIJKSTERHUIS, F. J. Refraction. In: APPLEBAUM, W. (Ed.). *Encyclopedia of the scientific revolution from Copernicus to Newton*. New York: Taylor & Francis, 2000, (Garland Reference Library of the Humanities, v. 1800). p. 865–868.
- DIJKSTERHUIS, F. J. Snel (Snellius or Snel van Royen), Willebrord (1580–1626). In: APPLEBAUM, W. (Ed.). *Encyclopedia of the scientific revolution from Copernicus to Newton*. New York: Taylor & Francis, 2000, (Garland Reference Library of the Humanities, v. 1800). p. 936–937.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman Lectures on Physics*. Reading: Addison–Wesley, 1964.
- GONÇALVES, A.; TOSCANO, C. *Física e realidade*. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2010.
- GUIMARÃES, L. A.; BOA, M. F. *Física Ensino Médio: Mecânica*. Niterói: Galera Hipermedia, 2006.
- GUPTA, R. Bhaskara I's approximation to sine. *Indian Journal of History of Science*, v. 2, p. 121–136, 1967.
- HERZBERGER, M. Optics from Euclid to Huygens. *Applied Optics*, v. 5, n. 9, p. 1383–1393, 1966.
- HUYGENS, C. *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens: Vol. XIII, Fasc. I. Dioptrique, 1653; 1666; 1685-1692*. La Haye: Martinus Nijhoff, 1916.
- KAMIL, C.; DEVRIES, R. *O conhecimento físico na educação pré-escolar: implicações da teoria de Piaget*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1986.
- KEPLER, J. *Optics*. [S.l.]: Green Lion Press, 2000.
- LEJEUNE, A. *L'Optique de Claude Ptolémée: dans la version latine d'après l'arabe de l'émir Eugène de Sicile*. Louvain: E. J. Brill, 1956. (Collection de Travaux de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences). Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=wix2K mukK84C>>. Acesso em: julho de 2013.
- LOHNE, J. Thomas Harriott (1560–1621), the Tycho Brahe of Optics. *Centaurus*, v. 6, n. 2, p. 113–121, 1959.
- LOHNE, J. A. 14.8. Kepler and Harriot—their search for a law of refraction. *Vistas in Astronomy*, v. 18, n. 0, p. 857–858, 1975.
- MACH, E. *The principle of physical Optics*. New York: Dover, 1926.
- MARINELI, F.; PACCA, J. L. d. A. Uma interpretação para as dificuldades enfrentadas pelos estudantes em um laboratório didático de física. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, n. 4, p. 497–505, 2006.
- MEIRIEU, P. *Aprender... Sim, mas Como?* 7. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- MIHAS, P. Developing ideas of refraction, lenses and rainbow through the use of historical resources. *Science & Education*, v. 17, n. 7, p. 751–777, 2008.
- MOREIRA, M. A.; AXT, R. (Org.). *Tópicos em ensino de Física*. Porto Alegre: Sagra, 1991.

- PEPPER, J. V. Harriot, thomas (ca. 1560–1621). In: APPLEBAUM, W. (Ed.). *Encyclopedia of the scientific revolution from Copernicus to Newton*. New York: Taylor & Francis, 2000, (Garland Reference Library of the Humanities, v. 1800). p. 443–445.
- PETROSKI, H. The evolution of eyeglasses. *American Scientist*, v. 101, n. 5, p. 334–337, 2013.
- REZENDE, F.; OSTERMANN, F.; FERRAZ, G. Ensino–aprendizagem de física no nível médio: o estado da arte da produção acadêmica no século xxi. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2009.
- RUSSO, L. *The forgotten revolution: how science was born in 300 bc and why it had to be reborn*. New York: Springer, 2004.
- SANT’ANNA, B. et al. *Conexões com a Física*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010. 640 p.
- SANTOS, W. da S. *Refração, as velocidades da luz e metamateriais*. Disserta (Dissertação de Mestrado) — Instituto de Física — UFRJ, Rio de Janeiro, janeiro de 2011 2011.
- SHIRLEY, J. W. An early experimental determination of Snell’s law. *American Journal of Physics*, v. 19, n. 9, p. 507–508, 1951.
- SILVEIRA, F. L. da; AXT, R. Uma dificuldade recorrente em óptica geométrica—uma imperceptível descontinuidade de imagem na lupa. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, n. 4, p. 421–425, 2006.
- SMITH, A. M. *Ptolemy’s theory of visual perception: an english translation of the optics with introduction and commentary*. Philadelphia: Transactions of the American Philosophical Society, 1996.
- STIGLER, S. In: GIERYN, T. F. (Ed.). *Science and social structure: a festschrift for Robert K. Merton*. New York: NY Academy of Sciences, 1980. p. 147–157.
- STOLL, C. The curious history of the first pocket calculator. *Scientific American*, v. 290, n. 1, p. 92–99, 2004.
- STOLL, C. When slide rules ruled. *Scientific American*, v. 294, n. 5, p. 80–87, 2006.
- TORRES, C. M. A.; FERRERO, N. G.; SOARES, P. A. T. *Física e Tecnologia*. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.
- VESELAGO, V. G. Electrodynamics of substances with simultaneously negative electrical and magnetic permeabilities. *Soviet Physics Uspekhi*, v. 10, n. 4, p. 509–514, 1968.
- VOLLGRAFF, J. Snellius’ notes on the reflection and refraction of rays. *Osiris*, v. 1, p. 718–725, 1936.
- WAARD, C. D. Le manuscrit perdu de Snellius sur la refraction. *Janus*, v. 39, n. 40, p. 51–73, 1935.

WILSEK, M.; TOSIN, J. Ensinar e aprender ciências no ensino fundamental com atividades investigativas através da resolução de problemas. Estado do Paraná, v. 3, n. 5, 2012. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos>.> Acesso em: dezembro de 2012.

YAMAMOTO, K.; FUKU, L. F. *Física para o Ensino Médio*. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

YOUNG, T. *A course of lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*. London: Joseph Johnson, 1961.