

**Geraldo Claret Plauska**

*A experiência do jato de água:  
Um guia para o professor*

Rio de Janeiro — RJ

Janeiro / 2013



Geraldo Claret Plauska

*A experiência do jato de água:  
Um guia para o professor*

Suplemento para a Dissertação *Experimento e aprendizagem: Uma aula introdutória à mecânica dos fluidos*, apresentada à Coordenação do Mestrado em Ensino de Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador:  
Prof. Vitorvani Soares

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE FÍSICA  
INSTITUTO DE FÍSICA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Rio de Janeiro — RJ

Janeiro / 2013

P696e Plauska, Geraldo Claret

A experiência do jato de água: Um guia para o professor.  
(Suplemento da dissertação Experimento e aprendizagem:  
Uma aula introdutória à mecânica dos fluidos) / Geraldo  
Claret Plauska. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2013.

vi. 58 f.; il.; 30 cm.

Orientador: Vitorvani Soares.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física /  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2013.

Referências bibliográficas: f. 55–58.

1. Ensino de Física. 2. Hidrodinâmica. 3. Experimento.  
I. Soares, Vitorvani. II. Universidade Federal do Rio de Ja-  
neiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em  
Ensino de Física. III. Experimento e aprendizagem: Uma  
aula introdutória à mecânica dos fluidos.

*Dedico este trabalho aos meus pais.*

# *Agradecimentos*

Agradeço a todos que me ajudaram a vencer mais esta etapa em minha vida.

The method, therefore, we propose to follow is neither strictly the analytic nor the synthetic but rather, as may best suit with a *didactic* composition. Our object is not to convince or refute opponents, nor to enquire, under the semblance of an assumed ignorance, for principles of which we are all the time in full possession—but simply to *teach* what we know.

— JOHN FREDERICK WILLIAM HERSCHEL, *A Treatise on Astronomy*, 1833, p. 3.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p.7
<b>2</b>	<b>A experiência do jato de água</b>	p.10
2.1	Recipiente de diâmetro 6,0(1) cm . . . . .	p.10
2.1.1	Alcances para uma dada altura $H$ do orifício . . . . .	p.10
2.1.2	Alcances para diferentes alturas $H$ . . . . .	p.15
2.2	Recipiente de diâmetro 15,0(1) cm . . . . .	p.19
2.2.1	Alcances para diferentes alturas $H$ . . . . .	p.20
2.3	Recipiente de diâmetro 9,6(1) cm . . . . .	p.25
2.3.1	Alcances para diferentes alturas $H$ . . . . .	p.25
2.4	Recipiente de seção 4,5(1) cm . . . . .	p.32
2.4.1	Alcances para diferentes alturas $H$ . . . . .	p.32
2.5	Recipiente de seção 1,9(1) cm . . . . .	p.38
2.5.1	Alcances para diferentes alturas $H$ . . . . .	p.38
2.6	Interpretando o experimento do jato de água . . . . .	p.47
	<b>Referências</b>	p.55

# 1 *Introdução*

Neste suplemento apresentamos um guia para a atividade que denominamos *A experiência do jato de água*. Esta atividade é desenvolvida a partir da observação do fluxo de uma coluna de água na forma de um jato que escoar através de um orifício na superfície lateral do recipiente. Percebemos então que o alcance  $A$  que a água ejetada realiza varia com a altura  $h$  da coluna de água em relação ao orifício. Observamos também que se elevarmos a altura  $H$  do orifício em relação ao fundo do recipiente que recolhe a água ejetada, ocorre também uma variação do alcance realizado pelo jato.

Deste modo, as variáveis a serem trabalhadas são a altura  $h$  da coluna de água, a altura  $H$  do orifício e o alcance  $A$  do jato de água, e procuramos determinar uma relação algébrica entre elas através da análise dimensional e da análise de gráficos que relacionem estes parâmetros físicos. Através do experimento e da sua análise pretendemos também discutir os fenômenos relacionados à pressão hidrostática e, em particular, a equação de Bernoulli.

Para essa atividade, consideramos que os alunos já tenham estudado a mecânica newtoniana da partícula, aprendido sobre os lançamentos vertical e oblíquo, a conservação de energia e o conceito de pressão (atmosférica e hidrostática). Eles devem também dominar o conteúdo básico de funções do 1º, do 2º grau, de elaboração dos gráficos correspondentes, além de noções de análise dimensional, de construção geométrica e de propagação de erros.

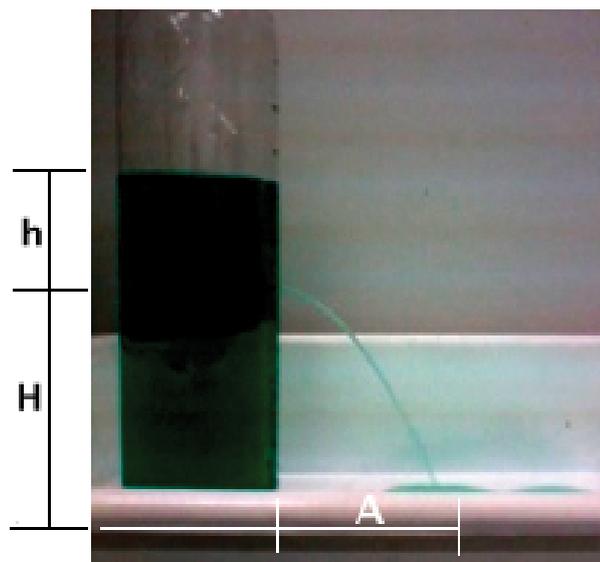
A experiência é realizada com o auxílio de recipientes plásticos (do tipo utilizado para guardar mantimentos) e um recipiente plástico de base retangular (tipo bacia) conforme ilustrado na figura 1. Também podem ser utilizadas garrafas PET (politereflato de etileno) de seção circular razoavelmente bem definida, apoiadas em suportes convenientes. Também utilizamos tubos cilíndricos em acrílico, de diâmetros variados, que podem ser encontrados nas casas do ramo a um preço razoável.



**Figura 1:** Recipientes típicos para o experimento.

Após construir o arranjo ilustrado na figura 1, preenchamos com água o recipiente e permitimos que o líquido escoe através de um pequeno orifício feito na parte lateral inferior deste mesmo recipiente, como ilustrado na figura 2. No nosso experimento o diâmetro do orifício foi constante e igual a  $4,0(1)$  mm.

Para indicar as incertezas absolutas, empregamos a notação sobre os últimos algarismos incertos da medida entre parênteses. Deste modo, por exemplo, a medida  $1,0(1)$  cm corresponde a  $(1,0 \pm 0,1)$  cm e a medida  $1,03(12)$  cm corresponde a  $(1,03 \pm 0,12)$  cm. Sempre que possível, reduzimos a incerteza à somente um algarismo significativo, como indicado na medida do diâmetro do orifício.



**Figura 2:** Alcance  $A$  do jato de água para uma coluna de água a uma altura  $h$  e para um orifício a uma altura  $H$  em relação à base definida pelo recipiente que recolhe a água.

O professor pode estimular os alunos a experimentar com um mesmo vasilhame com o orifício em diferentes alturas, vasilhames de mesma forma mas seções diferentes e até mesmo vasilhames de diferentes formas e seções. Em nosso experimento tivemos a nossa disposição dois tipos de vasilhames: um em forma de garrafa PET (cilíndrico) e um segundo na forma de tubo cilíndrico em acrílico, para pequenos diâmetros.

Ao trabalharmos junto com os alunos, observamos de forma qualitativa que o alcance que o jato realiza depende da altura da coluna de água no interior do vasilhame. Procuramos então estabelecer uma relação entre o alcance  $A$  da água e a altura  $h$  da coluna formada por ela no interior do recipiente. Para este propósito, fixamos o valor da altura  $H$  do orifício em relação ao fundo do recipiente que recebe a água e onde marcamos o alcance realizado pelo jato, como ilustrado na figura 2. As medidas do alcance podem ser feitas com uma simples régua, fixada ao fundo da cuba, como ilustrado na figura 1, ou feitas por meio das linhas paralelas traçadas na parte inferior da cuba em intervalos de 1,0(1) cm e definindo, assim, uma superfície “centimetrada” no seu interior, não visíveis nesta figura.

## 2 *A experiência do jato de água*

### 2.1 Recipiente de diâmetro 6,0(1) cm

Inicialmente descrevemos o alcance  $A$  realizado pelo jato de água, para uma coluna de água no recipiente cilíndrico de diâmetro  $D$  igual a 6,0(1) cm, a partir de diferentes alturas  $h$ , e para um orifício de diâmetro igual a 4,0(1) mm a uma altura  $H$  em relação à base igual a 5,0(3) cm.

#### 2.1.1 Alcances para uma dada altura $H$ do orifício

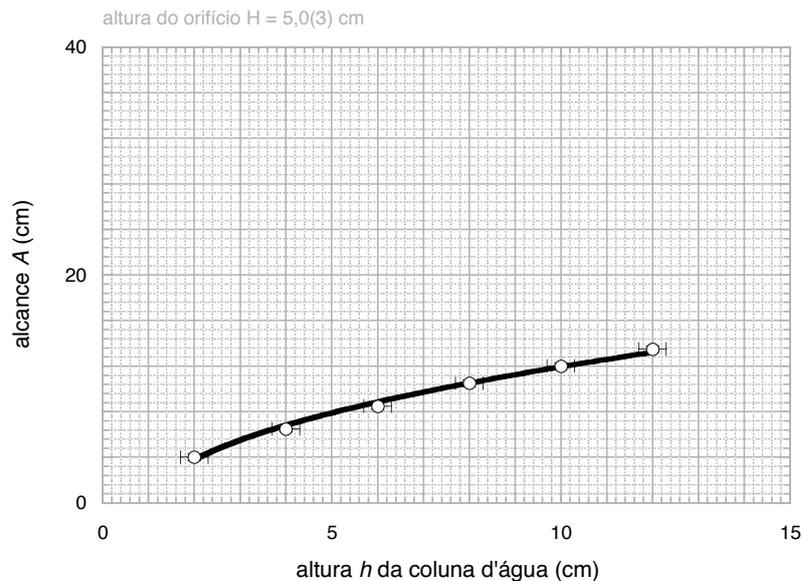
Os resultados obtidos relacionando o alcance  $A$  do jato de água com a altura  $h$  da coluna de água no interior do recipiente, a partir de um orifício lateral a uma altura  $H = 5,0(3)$  cm, estão representados na Tabela 1.

**Tabela 1:** Alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) vs. altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral a uma altura  $H = 5,0(3)$  cm.

altura $h$ (cm)	alcance $A$ (cm)
2,0(3)	4,0(3)
4,0(3)	6,5(3)
6,0(3)	8,5(3)
8,0(3)	10,5(3)
10,0(3)	12,0(3)
12,0(3)	13,5(3)

A partir da Tabela 1, observamos que, ao variar a altura  $h$ , o alcance  $A$  também varia. Para investigarmos qual é a relação ente estas duas grandezas físicas, representamos na figura 3 os dados obtidos para o alcance  $A$  vs. altura  $h$  arbitrada. Este é

um bom momento para lembrar ao aluno que já nos encontramos diversas vezes, ao longo da sua formação, com gráficos similares a este, particularmente na cinemática do movimento de corpos acelerados como, por exemplo, na cinemática de corpos em queda livre. Para este propósito, para uma discussão deste tipo de gráfico aplicado à cinemática do movimento, ver o trabalho de final de curso de Brito (2008).



**Figura 3:** Alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água. O orifício de diâmetro igual a 4,0(1) mm se encontra a uma altura  $H = 5,0(3)$  cm a partir do fundo do recipiente que recebe a água. A curva traçada é somente um guia e revela a relação não linear entre os parâmetros físicos envolvidos.

Do gráfico obtido na figura 3, fica evidente que não existe uma relação linear entre as grandezas envolvidas no problema. Esta seria uma boa oportunidade para empregarmos a análise dimensional para estabelecer uma relação funcional entre o alcance  $A$ , a altura do líquido  $h$  e a altura do orifício  $H$ :

$$[A] = [H]^p [h]^q, \quad (2.1)$$

e temos então várias possibilidades matemáticas. Dentre elas, temos, por exemplo,

$$p = 0 \quad \text{e} \quad q = 1. \quad (2.2)$$

Esta opção pode ser descartada porque, do gráfico, não há linearidade entre os parâmetros físicos  $A$  e  $h$ . Outra possibilidade, que vai se mostrar bastante frutífera, é a escolha

$$p = 1/2 \quad \text{e} \quad q = 1/2. \quad (2.3)$$

Podemos enfatizar junto aos alunos que estas possíveis representações gráficas apresentadas são apenas tentativas geométricas (hipóteses) para uma possível representação algébrica dos parâmetros envolvidos no problema.

Evidentemente, poderíamos tentar outras relações como, por exemplo, a razão entre os parâmetros ou o produto entre eles, respeitando a análise dimensional. Ao final, ficaremos sempre com aquela representação que for a mais simples que encontrarmos. Portanto, seguindo este procedimento, determinamos o quadrado dos alcances obtidos, como indicado na Tabela 2,

**Tabela 2:** Alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) vs. altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral a uma altura  $H = 5,0(3)$  cm.

$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	4,0(3)	16(2)
4,0(3)	6,5(3)	42(4)
6,0(3)	8,5(3)	72(5)
8,0(3)	10,5(3)	110(6)
10,0(3)	12,0(3)	144(7)
12,0(3)	13,5(3)	182(8)

e representamos, na figura 4, o quadrado do alcance realizado pela água em função da altura da coluna do líquido.

Ao analisarmos o gráfico da figura 4 com o auxílio da figura 5, observamos que, de fato, obtemos uma relação linear entre os parâmetros envolvidos:

$$A^2 = bh + a, \quad (2.4)$$

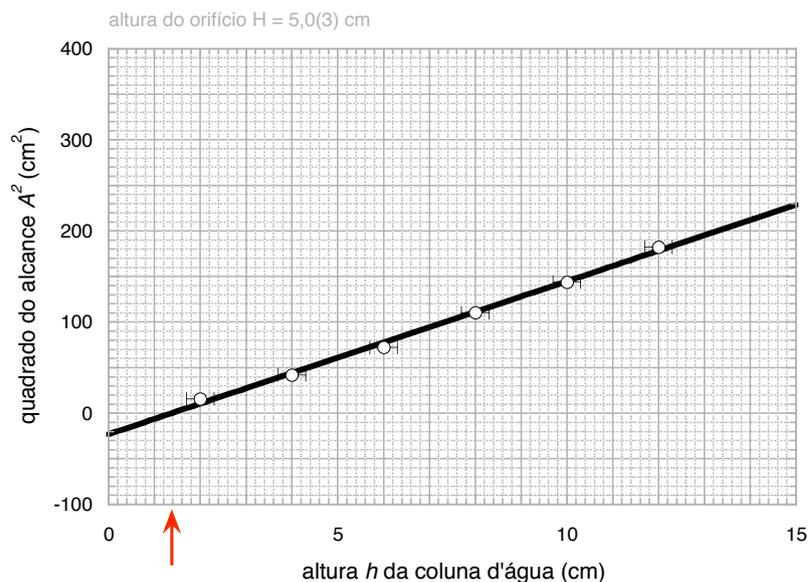
onde  $a$  e  $b$  são constantes de valor aproximado

$$a \approx -23(5) \text{ cm}^2 \quad (2.5)$$

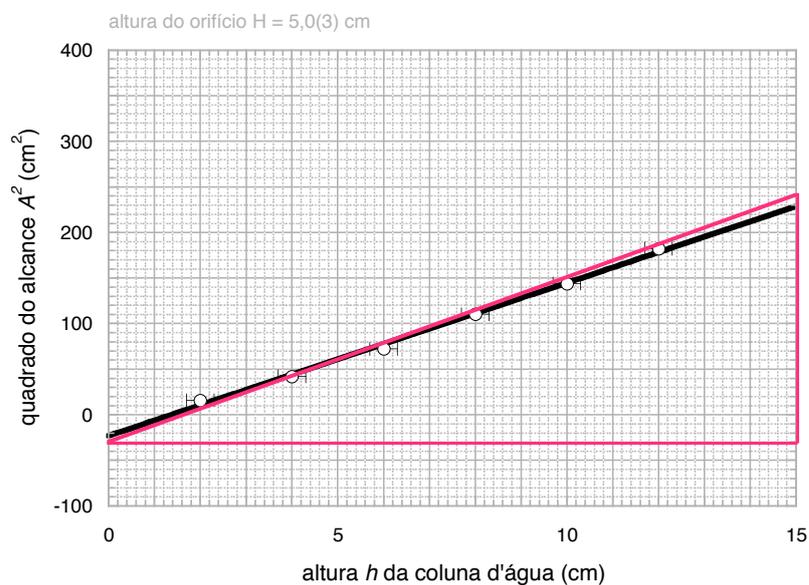
e

$$b = \frac{250(10) \text{ cm}^2}{15,0(6) \text{ cm}} \approx 17(1) \text{ cm}. \quad (2.6)$$

Estas constantes e suas incertezas são, respectivamente, o coeficiente linear e angular da reta determinados por triangulação a partir dos gráficos das figuras 4 e 5.



**Figura 4:** Quadrado do alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água. O orifício de diâmetro igual a 4,0(1) mm se encontra a uma altura  $H = 5,0(3)$  cm. A flecha indica que para uma altura  $h_0 \approx 1,4(4)$  cm não há fluxo de água no recipiente.



**Figura 5:** Quadrado do alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água. Os coeficientes linear  $a$  e angular  $b$  da reta são determinados por triangulação.

Portanto, esta análise revela que o alcance  $A$  que o jato de água realiza obedece a

uma lei polinomial com a altura  $h$  da coluna de água:

$$A = \alpha (h - h_0)^{1/2} \quad (2.7)$$

onde, agora, escrevemos

$$\alpha = b^{1/2} \quad (2.8)$$

e

$$h_0 = -\frac{a}{b'} \quad (2.9)$$

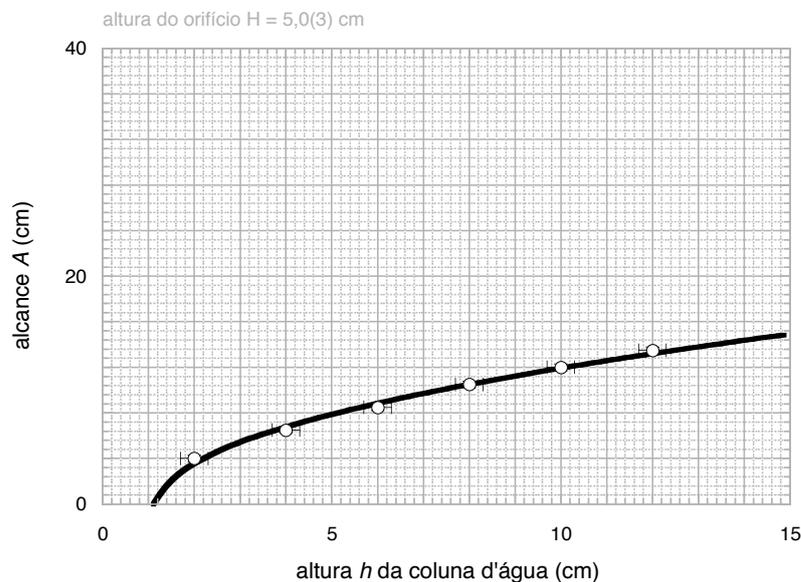
uma constante que corresponde a uma altura limite para a coluna de água: para alturas menores do que este valor, não deve ocorrer mais nenhum jato de água. Se não fosse deste modo, o quadrado do alcance teria um valor negativo! Substituindo-se os valores de  $a$  e  $b$ , obtemos

$$\alpha \approx 4,8(5) \text{ cm}^{1/2} \quad (2.10)$$

e

$$h_0 \approx 1,4(4) \text{ cm.} \quad (2.11)$$

Este último resultado pode ser verificado imediatamente pelo experimentador.



**Figura 6:** Alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água. A linha contínua representa a equação (2.7) ajustada a partir da análise dos dados.

Finalmente, o alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água está representado na figura 6, para um orifício na superfície lateral do recipiente de diâmetro igual a 4,0(1) mm

e a uma altura  $H = 5,0(3)$  cm a partir do fundo do recipiente que recebe a água. A linha contínua representa a equação (2.7) ajustada a partir da análise dos dados.

Com o propósito de verificar se o padrão obtido persiste para diferentes alturas  $H$  do orifício em relação ao fundo da cuba, fazemos novas medições onde, desta vez, variamos este parâmetro.

### 2.1.2 Alcances para diferentes alturas $H$

As Tabelas 3 e 4 representam o alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) vs. altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral a diferentes alturas  $H$  em relação à base.

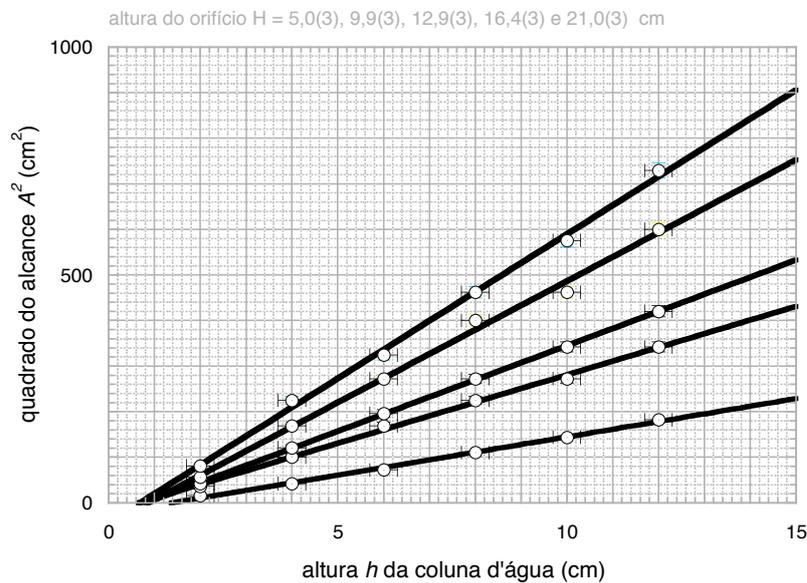
**Tabela 3:** Alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) vs. altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral a uma altura  $H$ .

$H$	9,9(3) cm		12,9(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	6,0(1)	36(4)	6,5(3)	42(4)
4,0(3)	10,0(3)	100(6)	11,0(3)	121(7)
6,0(3)	13,0(3)	169(8)	14,0(3)	196(8)
8,0(3)	15,0(3)	225(9)	16,5(3)	272(10)
10,0(3)	16,5(3)	272(10)	18,5(3)	342(11)
12,0(3)	18,5(3)	342(10)	20,5(3)	420(12)

**Tabela 4:** Alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) vs. altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral a uma altura  $H$ .

$H$	16,4(3) cm		21,0(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	7,5(3)	56(4)	9,0(3)	81(5)
4,0(3)	13,0(3)	169(8)	15,0(1)	225(9)
6,0(3)	16,5(3)	272(10)	18,0(3)	324(11)
8,0(3)	20,0(3)	400(12)	21,5(3)	462(13)
10,0(3)	21,5(3)	462(13)	24,0(3)	576(14)
12,0(3)	24,5(1)	600(15)	27,0(3)	729(16)

Os quadrados dos alcances das Tabelas 2, 3 e 4 estão representados na figura 7 em função da altura  $h$  da coluna de água.

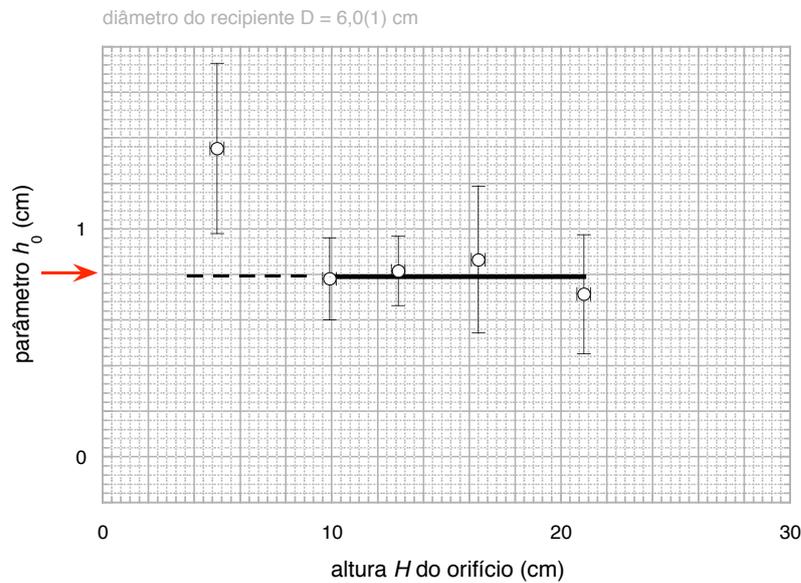


**Figura 7:** Quadrado do alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água, para diferentes alturas  $H$  do orifício.

**Tabela 5:** Coeficientes  $a$  e  $b$  para diferentes alturas  $H$  do orifício.

$H$ (cm)	$a$ (cm <sup>2</sup> )	$b$ (cm)	$\alpha$ (cm <sup>1/2</sup> )	$h_0$ (cm)
5,0(3)	-23(3)	17(1)	4,1(1)	1,4(4)
9,9(3)	-25(5)	32(1)	5,7(6)	0,8(2)
12,9(3)	-30(5)	38(1)	6,1(6)	0,8(1)
16,4(3)	-45(15)	53(2)	7,2(1)	0,8(3)
21,0(3)	-45(13)	63(2)	7,9(1)	0,7(3)

A partir do gráfico da figura 7, podemos concluir que, para a região considerada para as alturas  $h$ , existe sempre uma relação linear entre o quadrado do alcance e a altura da coluna de água. Podemos então obter os coeficientes linear  $a$  e angular  $b$  das respectivas retas associadas às diferentes alturas  $H$  do orifício, como indicado na Tabela 5. Considerando as incertezas das medidas, podemos observar, a partir desta tabela, que o valor do parâmetro  $h_0$  é, exceto para o seu primeiro valor, praticamente constante e podemos concluir também que o coeficiente angular  $b$  aumenta ao aumentarmos a altura  $H$ .



**Figura 8:** Parâmetro  $h_0$  para os diferentes experimentos. Observamos desta figura que, se não considerarmos a primeira medida de  $h_0$ , para  $H = 5,0(3)$  cm, (linha tracejada) o valor deste parâmetro é praticamente constante (linha contínua) e de valor médio  $\bar{h}_0 \approx 0,8(2)$  cm.

A primeira observação pode ser verificada com a construção do gráfico representado na figura 8. Observamos desta figura que, se não considerarmos a primeira medida de  $h_0$ , para  $H = 5,0(3)$  cm, (linha tracejada, na figura) o valor deste parâmetro é praticamente independente do valor que estabelecemos para a altura  $H$  do orifício no recipiente por onde flui a água (linha contínua, na mesma figura). Determinando a média aritmética dos quatro últimos valores de  $h_0$ , obtemos um valor médio igual a  $0,8(2)$  cm.

Podemos analisar a segunda observação, a variação do coeficiente angular  $b$  com a variação da altura  $H$ , através da construção do gráfico representado na figura 9.

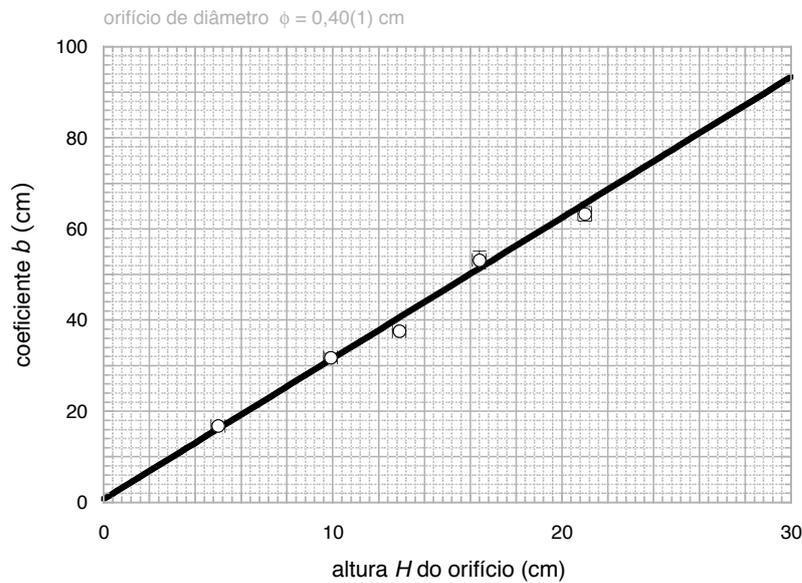
Do gráfico da figura 9 observamos que o coeficiente angular  $b$  é linearmente proporcional à altura  $H$  do orifício:

$$b = cH, \quad (2.12)$$

onde  $c$  é o coeficiente angular da reta na figura:

$$c = \frac{94(4) \text{ cm}}{30,0(8) \text{ cm}} \approx 3,1(2). \quad (2.13)$$

Então, podemos concluir que  $\alpha = \sqrt{cH}$ . Deste modo, fazendo  $\kappa = \sqrt{c}$ , podemos



**Figura 9:** Gráfico do coeficiente angular  $b$  vs. altura  $H$  do orifício no recipiente de diâmetro  $D = 6,0(1)$  cm.

também escrever que

$$\alpha = \kappa\sqrt{H}. \quad (2.14)$$

Substituindo a equação (2.14) em (2.7) obtemos, finalmente, que

$$A = \kappa\sqrt{H}\sqrt{h - h_0}, \quad (2.15)$$

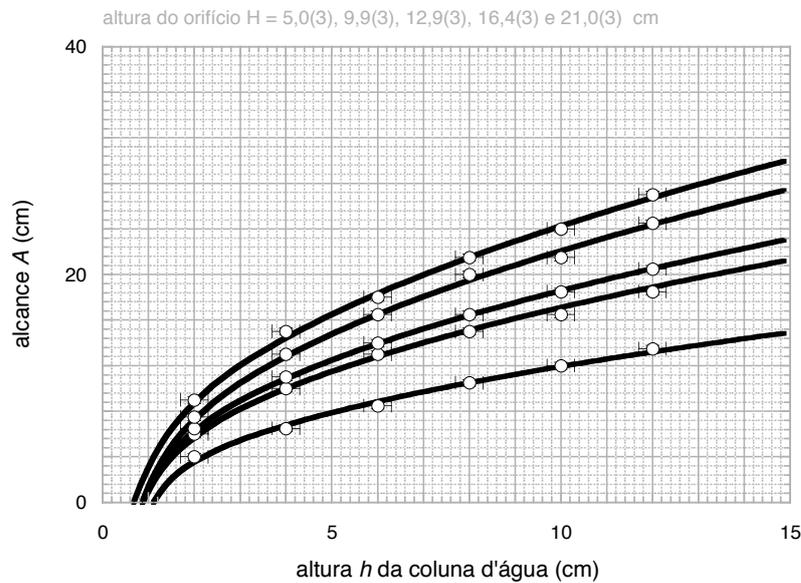
onde  $\kappa \approx \sqrt{3,1(2)} \approx 1,76(6)$ .

A figura 10 representa o gráfico do alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água, conforme definido pela equação (2.15). O orifício de diâmetro igual a 4,0(1) mm se encontra a uma altura  $H = 5,0(3), 9,9(3), 12,9(3), 16,4(3)$  e  $21,0(3)$  cm, a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Observamos ainda que, para alturas da coluna de água  $h$  muito maiores do que  $h_0$ , reobtemos o resultado de Torricelli:

$$A \approx \kappa\sqrt{Hh}, \quad (2.16)$$

o alcance do jato de água é proporcional à média geométrica da altura  $H$  do orifício e da altura  $h$  da coluna de água.

Este é um bom momento para recordar os estudos de Galileu e Torricelli sobre o movimento parabólico de um ponto material lançado com velocidade  $v$  paralela à direção horizontal de uma altura  $H$ . Eliminando a duração da queda  $t = \sqrt{2H/g}$  na



**Figura 10:** Alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água. O orifício está a uma altura  $H$  a partir do fundo do recipiente que recebe a água.

expressão do alcance do jato d'água,  $A = vt$  e comparando o resultado obtido com a equação (2.16), podemos conjecturar que o quadrado da velocidade de saída da água  $v$  é proporcional à altura  $h$  da sua coluna no recipiente que a contém.

Observamos também que uma questão natural que se apresenta é se o peso da coluna de água influi no alcance realizado. Podemos investigar o papel do peso variando a seção do recipiente que contém uma coluna de água de mesma altura  $h$ . Discutimos os resultados obtidos nas seções seguintes.

## 2.2 Recipiente de diâmetro 15,0(1) cm

Descrevemos agora o alcance  $A$  realizado pelo jato de água, para uma coluna de água no recipiente de diâmetro  $D$  igual a 15,0(1) cm, a partir de diferentes alturas  $h$ , quando o orifício de diâmetro 4,0(1) mm se encontra a uma altura  $H = 5,0(3), 9,9(3), 12,9(3), 16,4(3)$  e  $21,0(3)$  cm a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Os resultados obtidos estão representados e discutidos nos parágrafos seguintes.

### 2.2.1 Alcances para diferentes alturas $H$

As Tabelas 6 e 7 representam o alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) em função da altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral de diâmetro igual a 4,0(1) mm a uma altura  $H = 5,0(3), 9,9(3), 12,9(3), 16,4(3)$  e  $21,0(3)$  cm. Em seguida, representamos na figura 11 os dados obtidos para o alcance  $A$ .

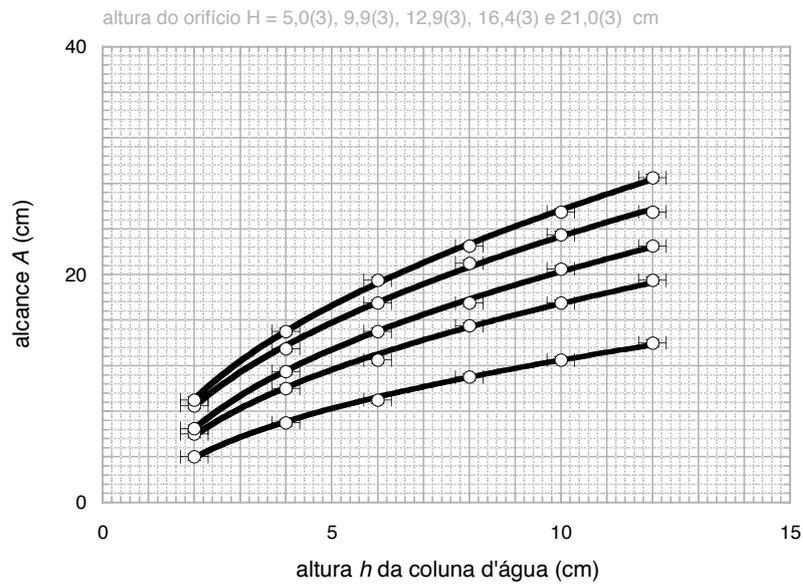
**Tabela 6:** Alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) vs. altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral a uma altura  $H$ .

$H$		5,0(3) cm		9,9(3) cm		12,9(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	
2,0(3)	4,0(3)	16(2)	6,0(1)	36(4)	6,5(3)	42(4)	
4,0(3)	7,0(3)	49(4)	10,0(3)	100(6)	11,5(3)	132(7)	
6,0(3)	9,0(3)	81(5)	12,5(3)	156(8)	15,0(1)	225(9)	
8,0(3)	11,0(3)	121(7)	15,5(3)	240(9)	17,5(3)	306(10)	
10,0(3)	12,5(3)	156(8)	17,5(3)	306(11)	20,5(3)	420(12)	
12,0(3)	14,0(3)	196(8)	19,5(3)	380(12)	22,5(3)	506(14)	

**Tabela 7:** Alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) vs. altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral a uma altura  $H$ .

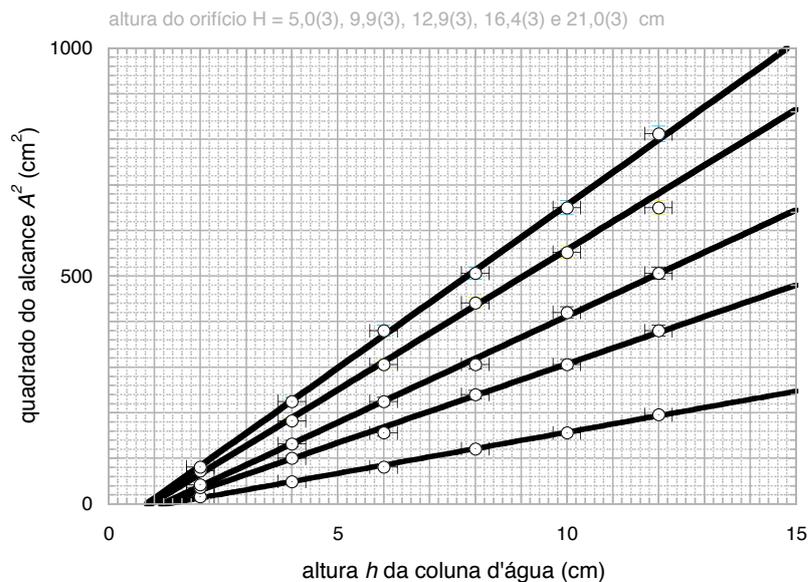
$H$		16,4(3) cm		21,0(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	
2,0(3)	8,5(3)	72(5)	9,0(3)	81(5)	
4,0(3)	13,5(3)	182(8)	15,0(1)	225(9)	
6,0(3)	17,5(3)	306(10)	19,5(3)	380(12)	
8,0(3)	21,0(3)	441(13)	22,5(3)	506(14)	
10,0(3)	23,5(3)	552(14)	25,5(3)	650(15)	
12,0(3)	25,5(3)	650(15)	28,5(3)	812(17)	

Seguindo o procedimento estabelecido na seção 2.1, o gráfico da figura 11 nos revela mais uma vez a não linearidade entre o alcance realizado e a altura da coluna de água. Este comportamento nos sugere que representemos o quadrado do alcance realizado pela água em função da altura da sua coluna no interior do recipiente.



**Figura 11:** Alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água. O orifício está a diferentes alturas  $H$ , como indicado no gráfico. As curvas traçadas são somente um guia para os olhos.

Os quadrados dos alcances das Tabelas 6 e 7 estão representados na figura 12 em função da altura  $h$  da coluna de água.

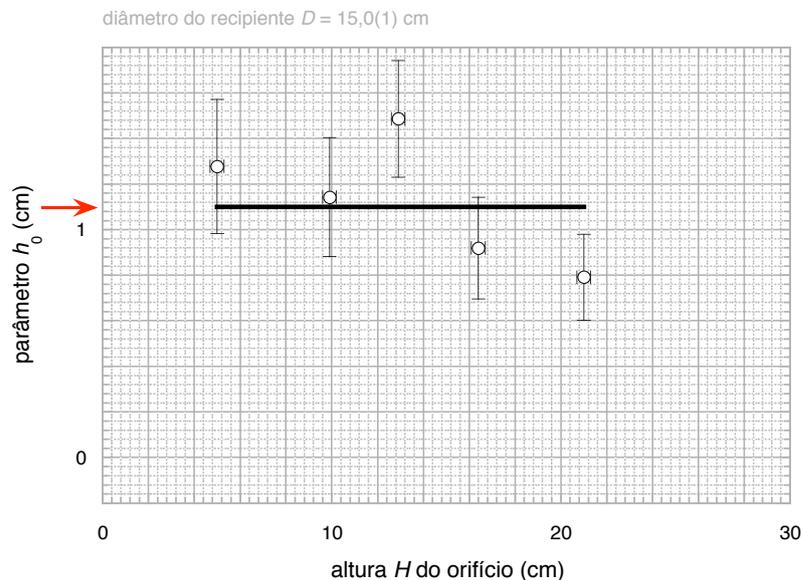


**Figura 12:** Quadrado do alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água, para diferentes alturas  $H$  do orifício. Observamos que existe uma altura  $h_0$  a partir da qual não há fluxo de água no recipiente.

A partir do gráfico da figura 12, podemos concluir que, para a região considerada para as alturas  $h$ , existe sempre uma relação linear entre o quadrado do alcance e a altura da coluna de água. Podemos então obter os coeficientes linear  $a$  e angular  $b$  das respectivas retas associadas às diferentes alturas  $H$  do orifício, como indicado na Tabela 8. Considerando as incertezas das medidas, podemos observar, a partir desta tabela, que o valor do parâmetro  $h_0$  não varia substancialmente com a variação da altura  $H$  e podemos concluir também que o coeficiente angular  $b$  aumenta ao aumentarmos a altura  $H$ .

**Tabela 8:** Coeficientes  $a$  e  $b$  para diferentes alturas  $H$  do orifício.

$H$ (cm)	$a$ (cm <sup>2</sup> )	$b$ (cm)	$\alpha$ (cm <sup>1/2</sup> )	$h_0$ (cm)
5,0(3)	-23(4)	18(1)	4,2(1)	1,3(3)
9,9(3)	-40(8)	35(1)	5,9(1)	1,1(3)
12,9(3)	-55(8)	37(1)	6,1(1)	1,5(3)
16,4(3)	-57(12)	62(2)	7,9(1)	0,9(2)
21,0(3)	-57(12)	72(2)	8,5(1)	0,8(2)

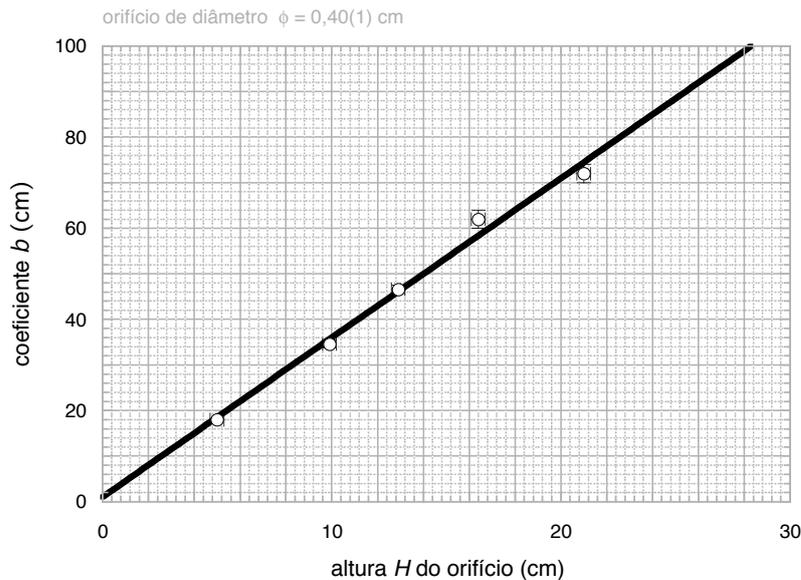


**Figura 13:** Parâmetro  $h_0$  para os diferentes experimentos. Observamos desta figura que, dentro da margem de incertezas das medidas, o valor deste parâmetro é praticamente constante (linha contínua) e de valor médio  $\bar{h}_0 \approx 1,1(3)$  cm.

A primeira observação pode ser verificada com a construção do gráfico represen-

tado na figura 13. Observamos desta figura que, considerando as incertezas das medidas, o valor de  $h_0$  é praticamente constante. Determinando a média aritmética dos valores de  $h_0$  considerados, obtemos um valor médio igual a 1,1(3) cm.

Podemos analisar a segunda observação, a variação do coeficiente angular  $b$  com a variação da altura  $H$ , através da construção do gráfico representado na figura 14.



**Figura 14:** Coeficiente angular  $b$  vs. altura  $H$  do orifício no recipiente de diâmetro  $D = 15,0(1)$  cm.

Do gráfico da figura 14 observamos que o coeficiente angular  $b$  é linearmente proporcional à altura  $H$  do orifício:

$$b = cH, \quad (2.17)$$

onde  $c$  é o coeficiente angular da reta na figura:

$$c = \frac{100(4) \text{ cm}}{28,0(8) \text{ cm}} \approx 3,6(2). \quad (2.18)$$

Então, podemos concluir que  $\alpha = \sqrt{cH}$ . Deste modo, fazendo  $\kappa = \sqrt{c}$ , podemos também escrever que

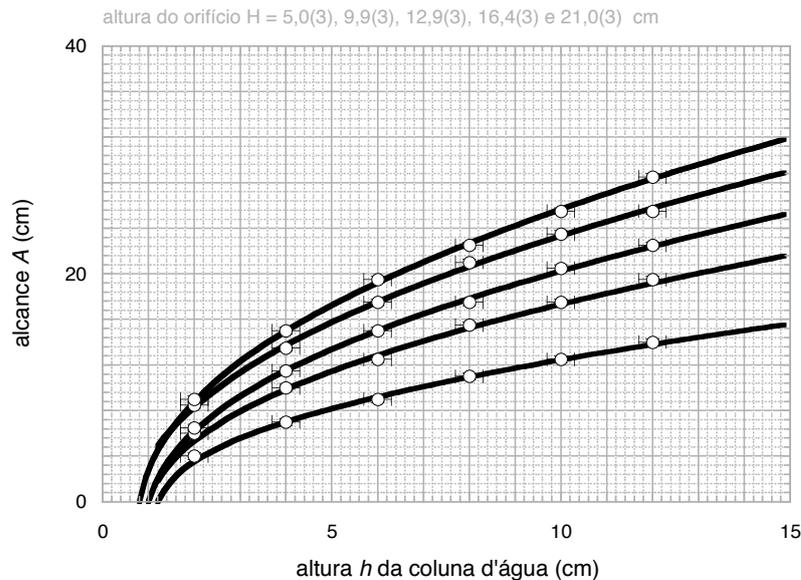
$$\alpha = \kappa\sqrt{H}. \quad (2.19)$$

Substituindo a equação (2.19) em (2.7) obtemos, finalmente, que

$$A = \kappa\sqrt{H}\sqrt{h - h_0}, \quad (2.20)$$

onde agora temos  $\kappa \approx \sqrt{3,6(2)} \approx 1,90(5)$ .

A figura 15 representa o gráfico do alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água, conforme definido pela equação (2.20). O orifício de diâmetro igual a 4,0(1) mm se encontra a uma altura  $H = 5,0(3), 9,9(3), 12,9(3), 16,4(3)$  e  $21,0(3)$  cm, a partir do fundo do recipiente que recebe a água.



**Figura 15:** Alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água. O orifício está a uma altura  $H$  a partir do fundo do recipiente que recebe a água.

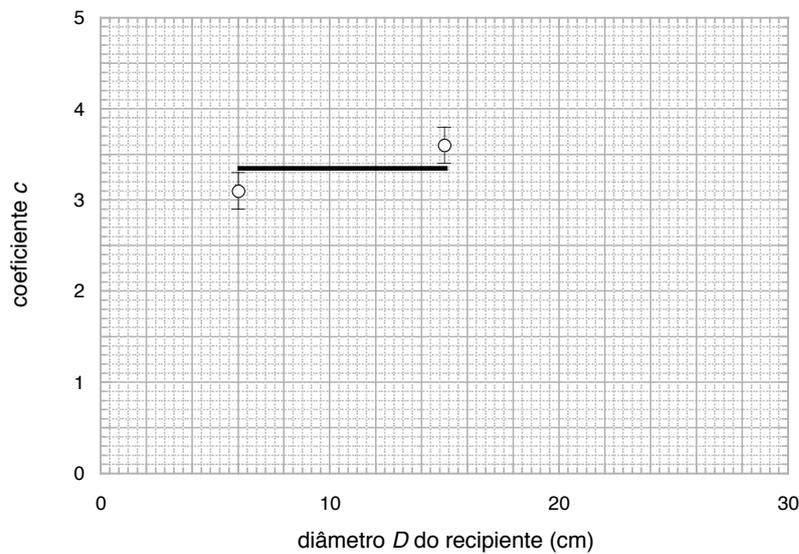
Observamos ainda que, para alturas da coluna de água  $h$  muito maiores do que  $h_0$ , reobtemos o resultado de Torricelli:

$$A \approx \kappa \sqrt{Hh}, \quad (2.21)$$

o alcance do jato de água é proporcional à média geométrica da altura  $H$  do orifício e da altura  $h$  da coluna de água.

Podemos comparar o resultado para o valor de  $\kappa$ , para o recipiente de diâmetro  $D = 15,0(1)$  cm, com o resultado obtido para este mesmo parâmetro com o recipiente de diâmetro  $D = 6,0(1)$  cm, como ilustrado na figura 16.

A partir desta figura, podemos concluir que o valor do coeficiente  $\kappa$  e, deste modo,  $\kappa$ , parece ser independente da seção do recipiente, para a região de valores considerada, e de valor médio  $\kappa \approx 3,4(2)$ . Entretanto, a discrepância entre este valor médio e os valores medidos é maior do que as incertezas associadas às medidas. Este compor-



**Figura 16:** Coeficiente  $c = \kappa^2$  vs. diâmetro  $D$  do recipiente que contém a coluna de água.

tamento sugere uma investigação mais detalhada do comportamento deste parâmetro em função do diâmetro do recipiente considerado. Na seção 2.3 analisamos tal possibilidade realizando o experimento com um recipiente de diâmetro igual a 9,6(1) cm.

## 2.3 Recipiente de diâmetro 9,6(1) cm

Descrevemos agora o alcance  $A$  realizado pelo jato de água, para uma coluna de água no recipiente de diâmetro  $D$  igual a 9,6(1) cm, a partir de diferentes alturas  $h$ , quando o orifício de diâmetro 4,0(1) mm se encontra a uma altura  $H = 5,0(3), 9,9(3), 12,9(3), 16,4(3)$  e  $21,0(3)$  cm a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Os resultados obtidos estão representados e discutidos nos parágrafos seguintes.

### 2.3.1 Alcances para diferentes alturas $H$

As Tabelas 9 e 10 representam o alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) em função da altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral de diâmetro igual a 4,0(1) mm a uma altura  $H = 5,0(3), 9,9(3), 12,9(3)$  cm,  $16,4(3)$  e  $21,0(3)$  cm. Em seguida, representamos na figura 17 os dados obtidos para o alcance  $A$ .

**Tabela 9:** Alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) vs. altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral a uma altura  $H$ .

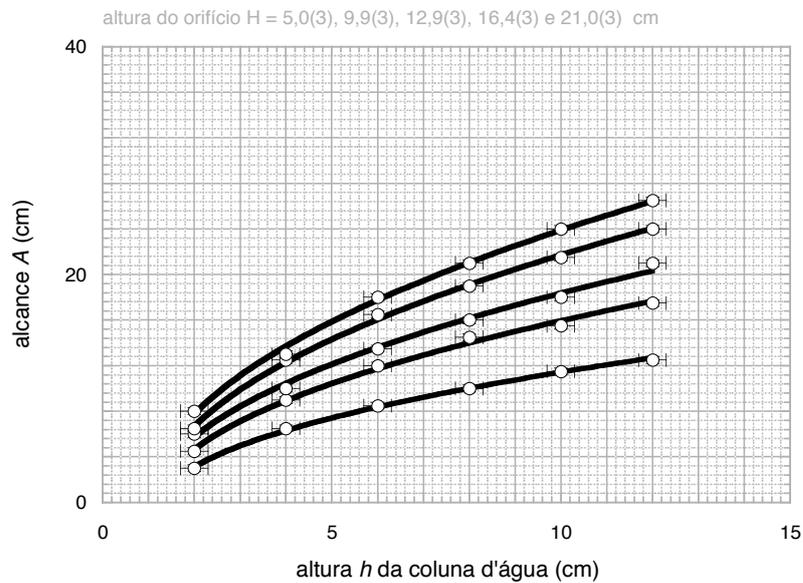
$H$		5,0(3) cm		9,9(3) cm		12,9(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	3,0(3)	9(2)	4,5(1)	20(3)	6,0(1)	36(4)	
4,0(3)	6,5(3)	42(4)	9,0(3)	81(5)	10,0(3)	100(6)	
6,0(3)	8,5(3)	72(5)	12,0(3)	144(7)	13,5(3)	182(8)	
8,0(3)	10,0(3)	100(6)	14,5(1)	210(9)	16,0(1)	256(10)	
10,0(3)	11,5(3)	132(7)	15,5(3)	240(9)	18,0(3)	324(11)	
12,0(3)	12,5(3)	156(8)	17,5(3)	306(10)	21,0(3)	441(13)	

**Tabela 10:** Alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) vs. altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral a uma altura  $H$ .

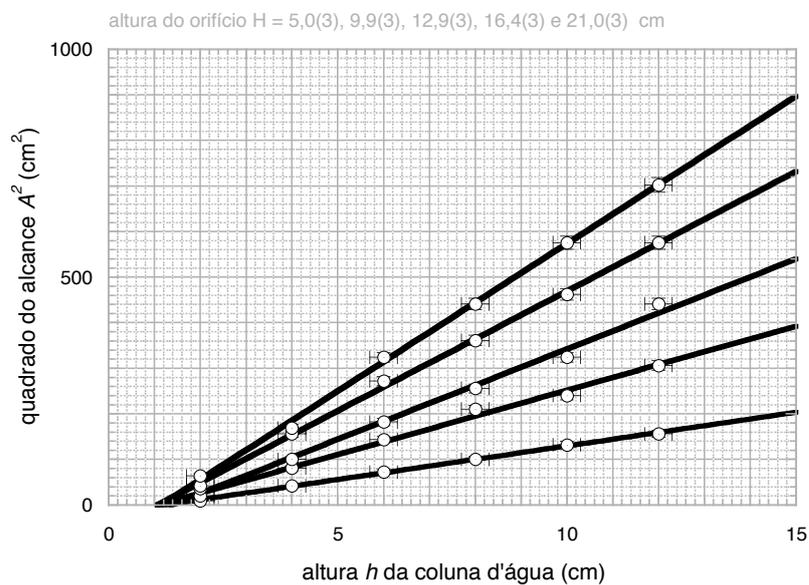
$H$		16,4(3) cm		21,0(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	6,5(3)	42(5)	8,0(3)	64(5)	
4,0(3)	12,5(3)	156(8)	13,0(3)	169(8)	
6,0(3)	16,5(3)	272(10)	18,0(3)	324(11)	
8,0(3)	19,0(3)	361(11)	21,0(3)	441(13)	
10,0(3)	21,5(3)	462(13)	24,0(3)	576(14)	
12,0(3)	24,0(3)	576(14)	26,5(3)	702(16)	

Seguindo o procedimento estabelecido na seção 2.1, o gráfico da figura 17 nos revela mais uma vez a não linearidade entre o alcance realizado e a altura da coluna de água. Este comportamento nos sugere que representemos o quadrado do alcance realizado pela água em função da altura da sua coluna no interior do recipiente.

Os quadrados dos alcances das Tabelas 9 e 10 estão representados na figura 18 em função da altura  $h$  da coluna de água.



**Figura 17:** Alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água. O orifício está a diferentes alturas  $H$ , indicadas no gráfico. A curva traçada é somente um guia para os olhos.



**Figura 18:** Quadrado do alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água, para diferentes alturas  $H$  do orifício. Observamos que existe uma altura  $h_0$  a partir da qual não há fluxo de água no recipiente.

A partir do gráfico da figura 18, podemos concluir que, para a região considerada para as alturas  $h$ , existe sempre uma relação linear entre o quadrado do alcance e a

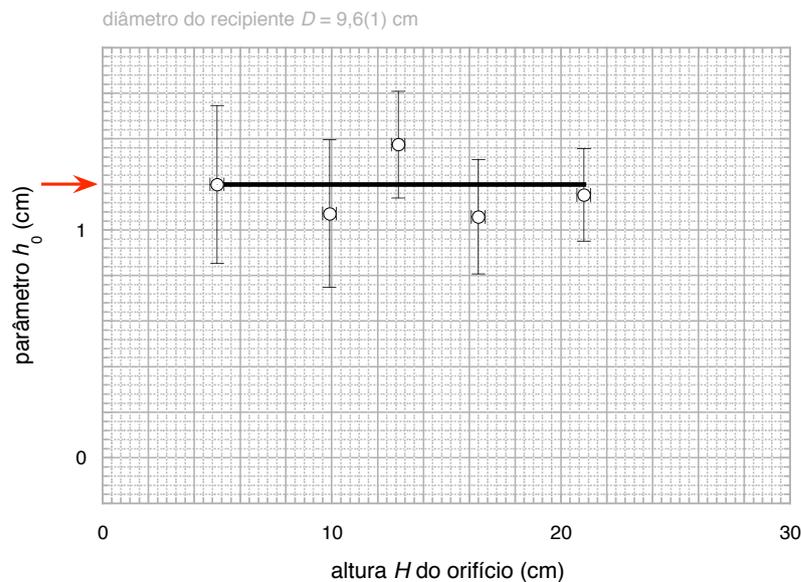
altura da coluna de água. Podemos então obter os coeficientes linear  $a$  e angular  $b$  das respectivas retas associadas às diferentes alturas  $H$  do orifício, como indicado na Tabela 11.

**Tabela 11:** Coeficientes  $a$  e  $b$  para diferentes alturas  $H$  do orifício.

$H(\text{cm})$	$a(\text{cm}^2)$	$b(\text{cm})$	$\alpha(\text{cm}^{1/2})$	$h_0(\text{cm})$
5,0(3)	-18(4)	15(1)	3,9(1)	1,2(3)
9,9(3)	-30(8)	28(1)	5,3(1)	1,1(3)
12,9(3)	-55(8)	40(1)	6,3(1)	1,4(2)
16,4(3)	-55(12)	52(1)	7,2(1)	1,1(3)
21,0(3)	-75(12)	65(1)	8,1(1)	1,2(2)

Considerando as incertezas das medidas, podemos observar, a partir desta tabela, que o valor do parâmetro  $h_0$  é praticamente constante e podemos concluir também que o coeficiente angular  $b$  aumenta ao aumentarmos a altura  $H$ .

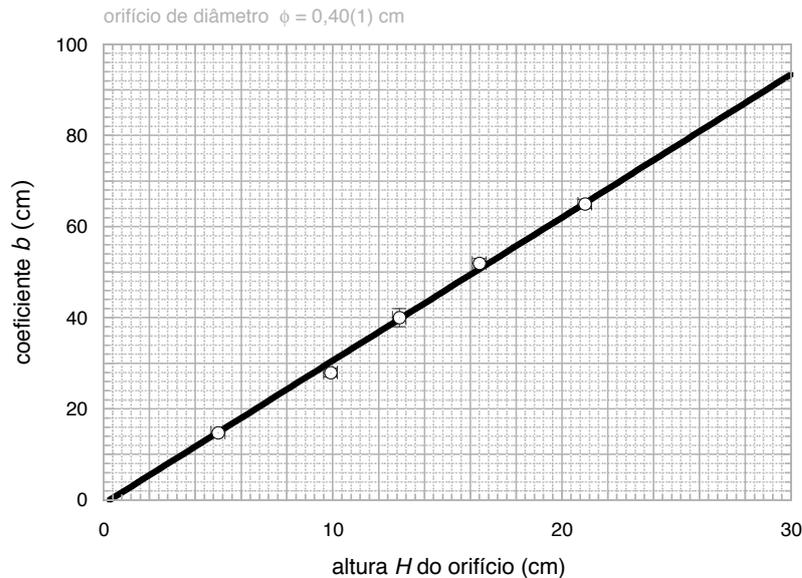
A primeira observação pode ser verificada com a construção do gráfico representado na figura 19.



**Figura 19:** Parâmetro  $h_0$  para os diferentes experimentos. Observamos desta figura que, dentro da margem de incertezas das medidas, o valor deste parâmetro é praticamente constante (linha contínua) e de valor médio  $\bar{h}_0 \approx 1,2(3)$  cm.

Observamos desta figura que o valor de  $h_0$  é praticamente constante. Determinando a média aritmética dos valores de  $h_0$ , obtemos um valor médio igual a 1,2(3) cm.

Podemos analisar a segunda observação, a variação do coeficiente angular  $b$  com a variação da altura  $H$ , através da construção do gráfico representado na figura 20.



**Figura 20:** Coeficiente angular  $b$  vs. altura  $H$  do orifício no recipiente de diâmetro  $D = 9,6(1)$  cm.

Do gráfico da figura 20 observamos que o coeficiente angular  $b$  é linearmente proporcional à altura  $H$  do orifício:

$$b = cH, \quad (2.22)$$

onde  $c$  é o coeficiente angular da reta na figura:

$$c = \frac{94(4) \text{ cm}}{30,0(8) \text{ cm}} \approx 3,1(2). \quad (2.23)$$

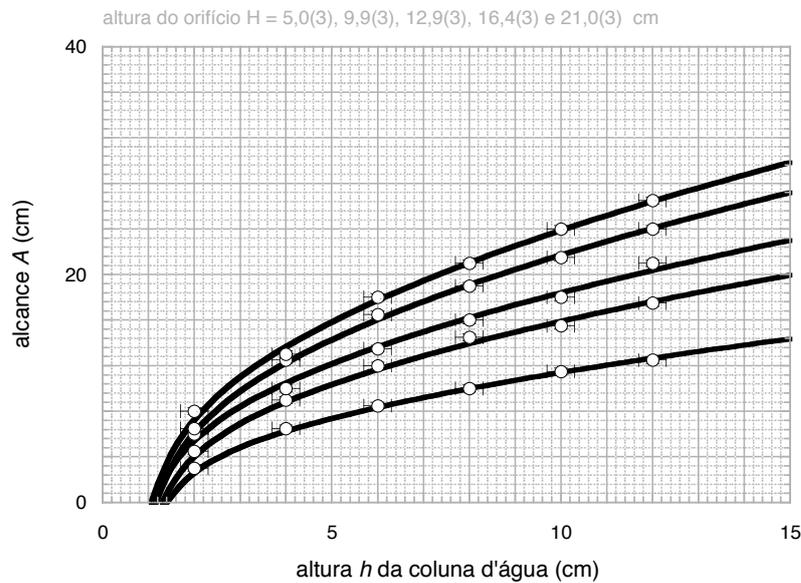
Então, podemos concluir que  $\alpha = \sqrt{cH}$ . Deste modo, fazendo  $\kappa = \sqrt{c}$ , podemos também escrever que

$$\alpha = \kappa\sqrt{H}. \quad (2.24)$$

Substituindo a equação (2.24) em (2.7) obtemos, finalmente, que

$$A = \kappa\sqrt{H}\sqrt{h - h_0}, \quad (2.25)$$

onde  $\kappa \approx \sqrt{3,1(2)} \approx 1,76(6)$ .



**Figura 21:** Alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água. O orifício está a uma altura  $H$  a partir do fundo do recipiente que recebe a água.

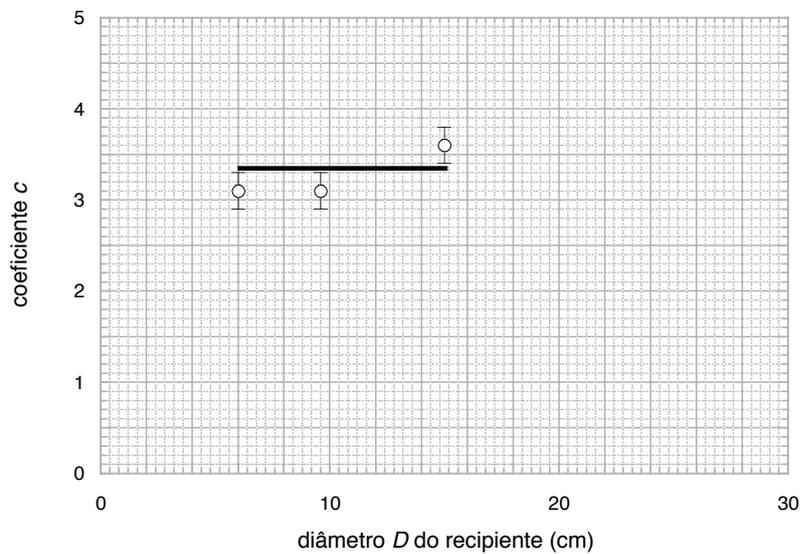
A figura 21 representa o gráfico do alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água, conforme definido pela equação (2.25). O orifício de diâmetro igual a  $4,0(1)$  mm se encontra a uma altura  $H = 5,0(3), 9,9(3), 12,9(3), 16,4(3)$  e  $21,0(3)$  cm, a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Observamos ainda que, para alturas da coluna de água  $h$  muito maiores do que  $h_0$ , reobtemos o resultado de Torricelli:

$$A \approx \kappa \sqrt{Hh}, \quad (2.26)$$

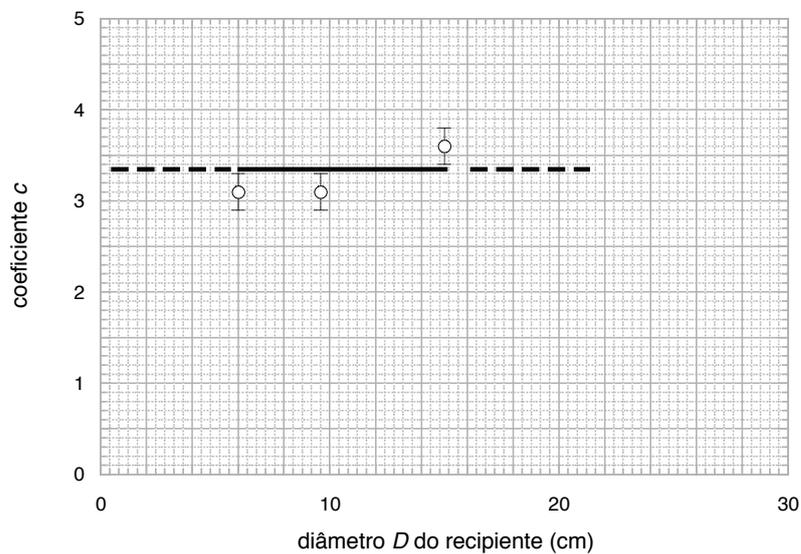
o alcance do jato de água é proporcional à média geométrica da altura  $H$  do orifício e da altura  $h$  da coluna de água.

Podemos comparar o resultado para o valor de  $\kappa$ , para o recipiente de diâmetro  $D = 9,6(1)$  cm, com os resultados obtido para este mesmo parâmetro com os recipientes de diâmetro  $D = 6,0(1)$  e  $15,0(1)$  cm, respectivamente, como ilustrado na figura 22.

A partir desta figura, podemos concluir que o valor do coeficiente  $c$  e, deste modo,  $\kappa$ , parece ser independente da seção do recipiente, para a região de valores considerada. Entretanto, este resultado é bastante intrigante. Um observador mais atento poderia se perguntar que se este comportamento se mantivesse mesmo para pequenos diâmetros, teríamos um coeficiente  $c$  diferente de zero mesmo para um diâmetro nulo, como indicado na figura 23, o que não parece ser fisicamente plausível.



**Figura 22:** Coeficiente  $c = \kappa^2$  vs. diâmetro  $D$  do recipiente que contém a coluna de água.



**Figura 23:** Extrapolação do comportamento do coeficiente  $c = \kappa^2$  vs. diâmetro  $D$  do recipiente que contém a coluna de água.

Na seção 2.4 continuamos a investigar o comportamento do parâmetro  $c$  realizando o experimento com um recipiente de diâmetro igual a 4,0(1) cm. Vale lembrar que garrafas PET de seções cilíndricas bem definidas com dimensões inferiores a 6,0(1) cm

não são facilmente disponíveis. Neste caso, os tubos cilíndricos em acrílico do mercado se tornam de grande valia.

## 2.4 Recipiente de seção 4,5(1) cm

Descrevemos agora o alcance  $A$  realizado pelo jato de água, para uma coluna de água no recipiente de diâmetro  $D$  igual a 4,5(1) cm, a partir de diferentes alturas  $h$ , quando o orifício de diâmetro 4,5(1) mm se encontra a uma altura  $H = 5,9(3), 9,4(3), 13,2(3), 16,7(3)$  e  $21,5(3)$  cm a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Os resultados obtidos estão representados e discutidos nos parágrafos seguintes.

### 2.4.1 Alcances para diferentes alturas $H$

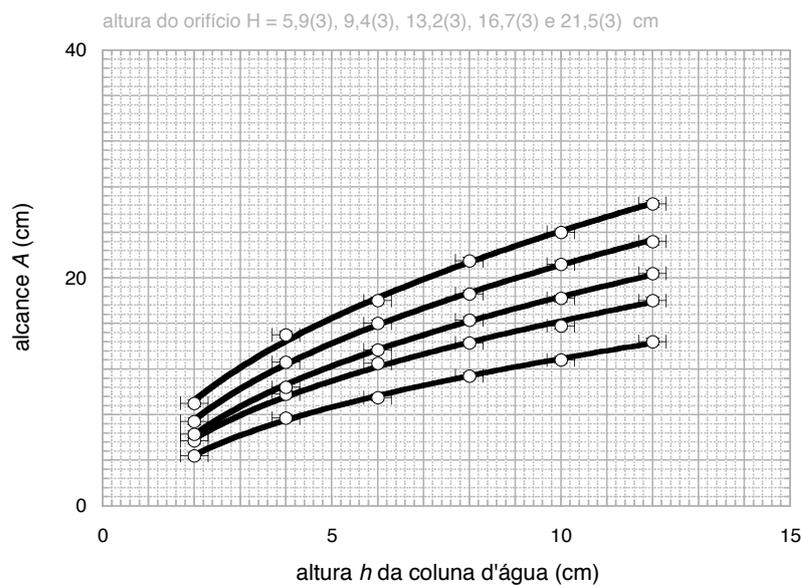
As Tabelas 12 e 13 representam o alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) em função da altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral de diâmetro igual a 4,0(1) mm a uma altura  $H = 5,9(3), 9,4(3), 13,2(3), 16,7(3)$  e  $21,5(3)$  cm. Em seguida, representamos na figura 24 os dados obtidos para o alcance  $A$ .

**Tabela 12:** Alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) vs. altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral a uma altura  $H$ .

$H$		5,9(3) cm		9,4(3) cm		13,2(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	
2,0(3)	4,4(3)	19,4(3)	5,7(3)	32(3)	6,3(3)	40(4)	
4,0(3)	7,7(3)	59(5)	9,8(3)	96(6)	10,4(3)	108(6)	
6,0(3)	9,5(3)	90(6)	12,5(3)	156(8)	13,7(3)	188(8)	
8,0(3)	11,4(3)	130(7)	14,3(3)	204(9)	16,3(3)	267(10)	
10,0(3)	12,8(3)	164(8)	15,8(3)	250(9)	18,2(3)	331(11)	
12,0(3)	14,4(3)	207(9)	18,0(3)	324(11)	20,4(3)	416(12)	

**Tabela 13:** Alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) vs. altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral a uma altura  $H$ .

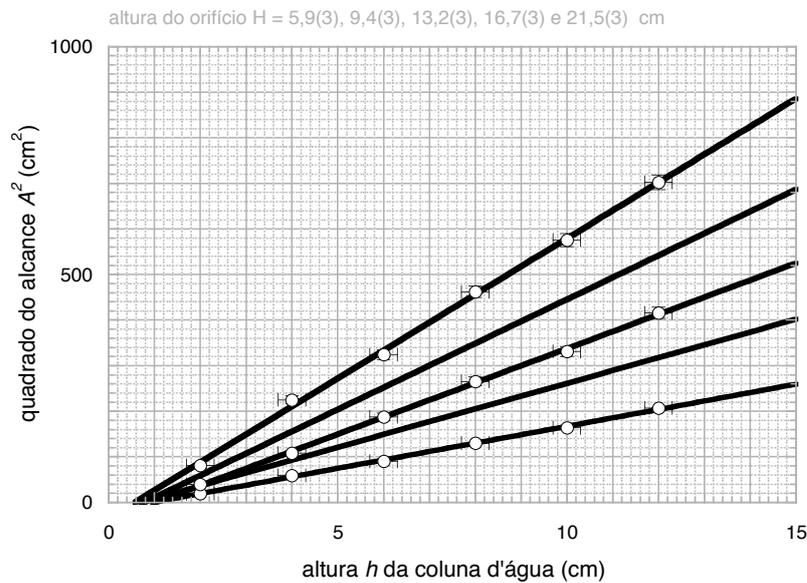
$H$	16,7(3) cm		21,5(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	7,4(3)	54(4)	9,0(3)	81(5)
4,0(3)	12,6(3)	159(8)	15,0(1)	225(9)
6,0(3)	16,0(1)	256(9)	18,0(3)	324(11)
8,0(3)	18,6(3)	346(11)	21,5(3)	462(13)
10,0(3)	21,2(3)	449(13)	24,0(3)	576(14)
12,0(3)	23,2(3)	530(14)	26,5(3)	702(16)



**Figura 24:** Alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água. O orifício está a diferentes alturas  $H$ , indicadas no gráfico. A curva traçada é somente um guia para os olhos.

Seguindo o procedimento estabelecido na seção 2.1, o gráfico da figura 24 nos revela mais uma vez a não linearidade entre o alcance realizado e a altura da coluna de água. Este comportamento nos sugere que representemos o quadrado do alcance realizado pela água em função da altura da sua coluna no interior do recipiente.

Os quadrados dos alcances das Tabelas 12 e 13 estão representados na figura 25 em função da altura  $h$  da coluna de água.



**Figura 25:** Quadrado do alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água, para diferentes alturas  $H$  do orifício. Observamos que existe uma altura  $h_0$  a partir da qual não há fluxo de água no recipiente.

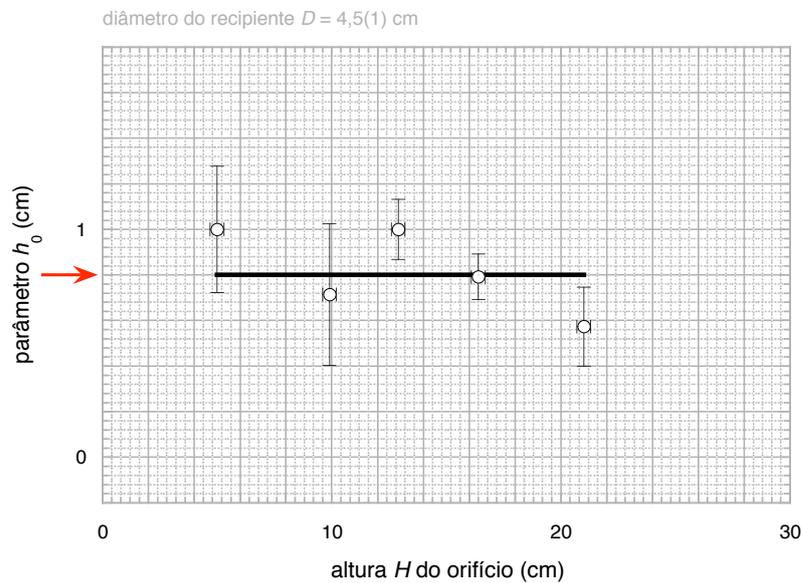
A partir do gráfico da figura 25, podemos concluir que, para a região considerada para as alturas  $h$ , existe sempre uma relação linear entre o quadrado do alcance e a altura da coluna de água. Podemos então obter os coeficientes linear  $a$  e angular  $b$  das respectivas retas associadas às diferentes alturas  $H$  do orifício, como indicado na Tabela 14.

**Tabela 14:** Coeficientes  $a$  e  $b$  para diferentes alturas  $H$  do orifício.

$H(\text{cm})$	$a(\text{cm}^2)$	$b(\text{cm})$	$\alpha(\text{cm}^{1/2})$	$h_0(\text{cm})$
5,0(3)	-18(4)	18(1)	4,2(1)	1,0(2)
9,9(3)	-20(8)	28(1)	5,3(1)	0,7(3)
12,9(3)	-38(4)	38(1)	6,2(1)	1,0(1)
16,4(3)	-38(4)	48(1)	6,9(1)	0,8(1)
21,0(3)	-35(10)	61(1)	7,8(1)	0,6(2)

Considerando as incertezas das medidas, podemos observar, a partir desta tabela, que o valor do parâmetro  $h_0$  é praticamente constante e podemos concluir também que o coeficiente angular  $b$  aumenta ao aumentarmos a altura  $H$ .

A primeira observação pode ser verificada com a construção do gráfico representado na figura 26.



**Figura 26:** Parâmetro  $h_0$  para os diferentes experimentos. Observamos desta figura que, dentro da margem de incertezas das medidas, o valor deste parâmetro é praticamente constante (linha contínua) e de valor médio  $\bar{h}_0 \approx 0,8(2)$  cm.

Observamos desta figura que o valor de  $h_0$  é praticamente independente do valor que estabelecemos para a altura  $H$  do orifício no recipiente por onde flui a água (linha contínua, na mesma figura). Determinando a média aritmética dos valores de  $h_0$ , obtemos um valor médio igual a  $0,8(2)$  cm.

Podemos analisar a segunda observação, a variação do coeficiente angular  $b$  com a variação da altura  $H$ , através da construção do gráfico representado na figura 27.

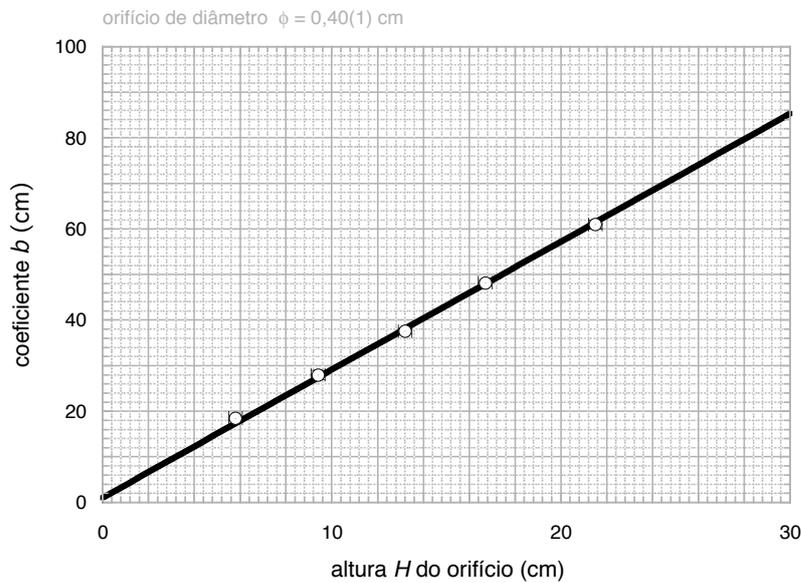
Do gráfico da figura 27 observamos que o coeficiente angular  $b$  é linearmente proporcional à altura  $H$  do orifício:

$$b = cH, \quad (2.27)$$

onde  $c$  é o coeficiente angular da reta na figura:

$$c = \frac{84(4) \text{ cm}}{30,0(8) \text{ cm}} \approx 2,8(2). \quad (2.28)$$

Então, podemos concluir que  $\alpha = \sqrt{cH}$ . Deste modo, fazendo  $\kappa = \sqrt{c}$ , podemos



**Figura 27:** Coeficiente angular  $b$  vs. altura  $H$  do orifício no recipiente de diâmetro  $D = 4,5(1)$  cm.

também escrever que

$$\alpha = \kappa\sqrt{H}. \quad (2.29)$$

Substituindo a equação (2.29) em (2.7) obtemos, finalmente, que

$$A = \kappa\sqrt{H}\sqrt{h - h_0}, \quad (2.30)$$

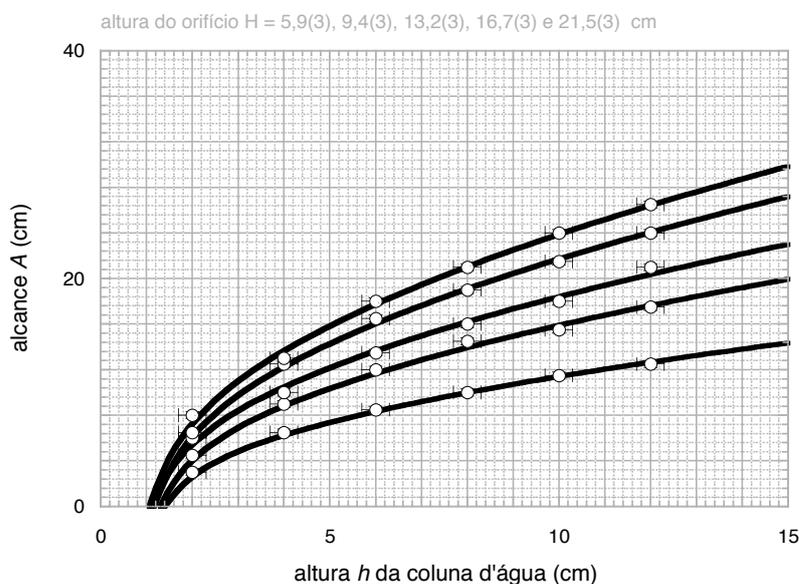
onde  $\kappa \approx \sqrt{2,8(2)} \approx 1,67(3)$ .

A figura 28 representa o gráfico do alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água, conforme definido pela equação (2.30). O orifício de diâmetro igual a 4,5(1) mm se encontra a uma altura  $H = 5,9(3), 9,4(3), 13,2(3), 16,7(3)$  e 21,5(3) cm, a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Observamos ainda que, para alturas da coluna de água  $h$  muito maiores do que  $h_0$ , reobtemos o resultado de Torricelli:

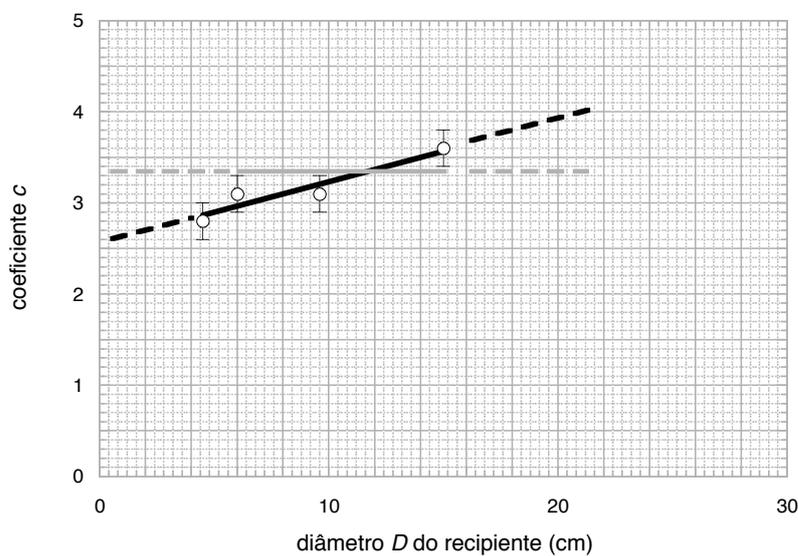
$$A \approx \kappa\sqrt{Hh}, \quad (2.31)$$

o alcance do jato de água é proporcional à média geométrica da altura  $H$  do orifício e da altura  $h$  da coluna de água.

Podemos comparar o resultado para o valor de  $\kappa$ , para o recipiente de diâmetro  $D = 4,5(1)$  cm, com o resultado obtido para este mesmo parâmetro com o recipiente de diâmetro  $D = 6,0(1), 9,6(1)$  e 15,0(1) cm, como ilustrado na figura 29.



**Figura 28:** Alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água. O orifício está a uma altura  $H$  a partir do fundo do recipiente que recebe a água.



**Figura 29:** Coeficiente  $c = \kappa^2$  vs. diâmetro  $D$  do recipiente que contém a coluna de água.

A partir desta figura, podemos concluir que o valor do coeficiente  $c$  e, deste modo,  $\kappa$ , não parece mais ser independente do diâmetro do recipiente, para a região de valores considerada (linha preta contínua, no gráfico da figura). Entretanto, a relação linear

sugerida no gráfico ainda não esclarece o problema: segundo esta solução, ainda teríamos fluxo, mesmo para um tubo ínfimo! Na seção 2.5 continuamos a investigar o comportamento do parâmetro  $c$  realizando o experimento com um recipiente de diâmetro igual a 1,9(1) cm.

## 2.5 Recipiente de seção 1,9(1) cm

Descrevemos agora o alcance  $A$  realizado pelo jato de água, para uma coluna de água no recipiente de diâmetro  $D$  igual a 1,9(1) cm, a partir de diferentes alturas  $h$ , quando o orifício de diâmetro 4,0(1) mm se encontra a uma altura  $H = 5,9(3), 9,4(3), 13,2(3), 16,7(3)$  e  $21,5(3)$  cm a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Os resultados obtidos estão representados e discutidos nos parágrafos seguintes.

### 2.5.1 Alcances para diferentes alturas $H$

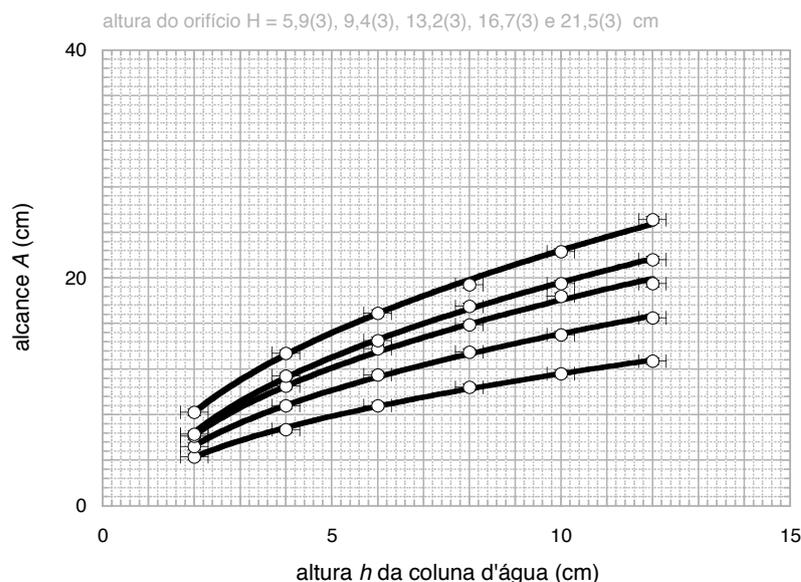
As Tabelas 15 e 16 representam o alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) em função da altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral de diâmetro igual a 4,0(1) mm a uma altura  $H = 5,9(3), 9,4(3), 13,2(3), 16,7(3)$  e  $21,5(3)$  cm. Em seguida, representamos na figura 30 os dados obtidos para o alcance  $A$ .

**Tabela 15:** Alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) vs. altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral a uma altura  $H$ .

$H$		5,9(3) cm		9,4(3) cm		13,2(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	
2,0(3)	4,3(3)	18(3)	5,7(3)	27(3)	6,1(3)	37(4)	
4,0(3)	6,7(3)	50(5)	8,8(3)	77(5)	10,5(3)	110(6)	
6,0(3)	8,8(3)	77(5)	11,5(3)	132(7)	13,8(3)	190(8)	
8,0(3)	10,4(3)	108(6)	13,5(3)	182(8)	15,9(3)	253(9)	
10,0(3)	11,6(3)	135(7)	15,0(1)	225(9)	18,4(3)	339(11)	
12,0(3)	12,7(3)	161(8)	16,5(3)	272(10)	19,5(3)	380(12)	

**Tabela 16:** Alcance realizado pelo jato de água ( $A$ ) e seu quadrado ( $A^2$ ) vs. altura da coluna de água ( $h$ ), para um orifício lateral a uma altura  $H$ .

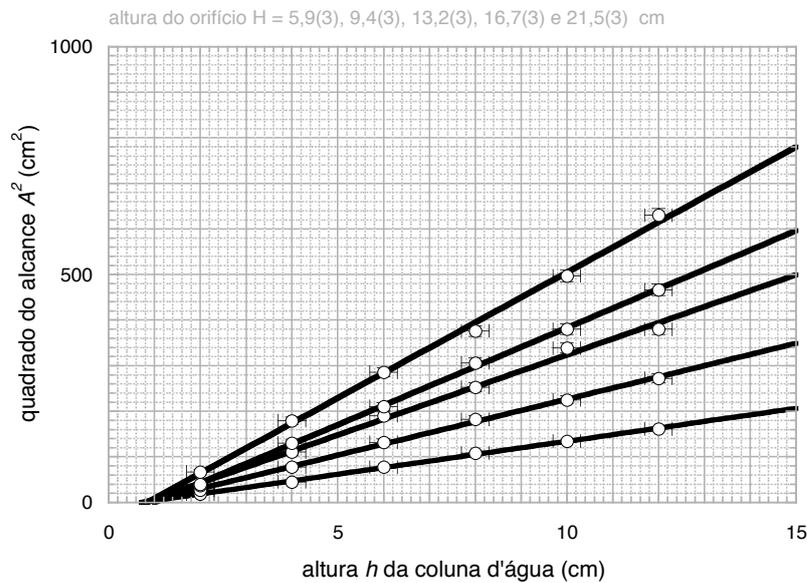
$H$		16,7(3) cm		21,5(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	
2,0(3)	6,3(3)	40(4)	8,2(3)	67(5)	
4,0(3)	11,4(3)	130(7)	13,4(3)	180(8)	
6,0(3)	14,5(3)	210(9)	16,9(3)	286(10)	
8,0(3)	17,5(3)	306(10)	19,4(3)	376(12)	
10,0(3)	19,5(3)	380(12)	22,3(3)	497(13)	
12,0(3)	21,6(3)	467(13)	25,1(3)	630(15)	



**Figura 30:** Alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água. O orifício está a diferentes alturas  $H$ , indicadas no gráfico. A curva traçada é somente um guia para os olhos.

Seguindo o procedimento estabelecido na seção 2.1, o gráfico da figura 30 nos revela mais uma vez a não linearidade entre o alcance realizado e a altura da coluna de água. Este comportamento nos sugere que representemos o quadrado do alcance realizado pela água em função da altura da sua coluna no interior do recipiente.

Os quadrados dos alcances das Tabelas 15 e 16 estão representados na figura 31 em função da altura  $h$  da coluna de água.

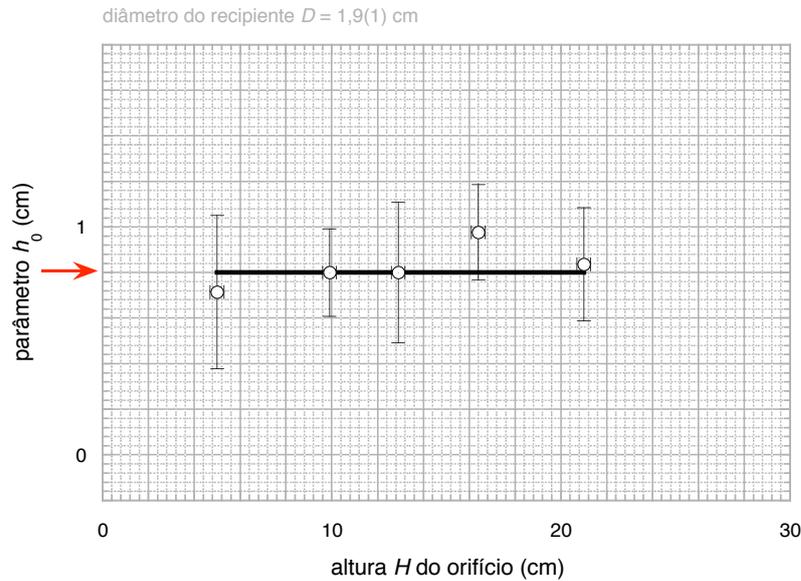


**Figura 31:** Quadrado do alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água, para diferentes alturas  $H$  do orifício. Observamos que existe uma altura  $h_0$  a partir da qual não há fluxo de água no recipiente.

A partir do gráfico da figura 31, podemos concluir que, para a região considerada para as alturas  $h$ , existe sempre uma relação linear entre o quadrado do alcance e a altura da coluna de água. Podemos então obter os coeficientes linear  $a$  e angular  $b$  das respectivas retas associadas às diferentes alturas  $H$  do orifício, como indicado na Tabela 17.

**Tabela 17:** Coeficientes  $a$  e  $b$  para diferentes alturas  $H$  do orifício.

$H$ (cm)	$a$ (cm <sup>2</sup> )	$b$ (cm)	$\alpha$ (cm <sup>1/2</sup> )	$h_0$ (cm)
5,9(3)	-10(4)	14(1)	3,7(1)	0,7(3)
9,4(3)	-20(4)	25(1)	5,0(1)	0,8(2)
13,2(3)	-28(10)	35(1)	5,9(1)	0,8(3)
16,7(3)	-42(8)	43(1)	6,6(1)	1,0(2)
21,5(3)	-46(12)	55(2)	7,4(1)	0,8(2)



**Figura 32:** Parâmetro  $h_0$  para os diferentes experimentos. Observamos desta figura que, dentro da margem de incertezas das medidas, o valor deste parâmetro é praticamente constante (linha contínua) e de valor médio  $\bar{h}_0 \approx 0,8(2)$  cm.

De fato, considerando as incertezas das medidas, podemos observar, a partir desta tabela, que o valor do parâmetro  $h_0$  é praticamente constante, de valor médio  $0,8(2)$  cm, o pode ser verificado com a construção do gráfico representado na figura 32.

Podemos analisar a segunda observação, a variação do coeficiente angular  $b$  com a variação da altura  $H$ , através da construção do gráfico representado na figura 33.

Do gráfico da figura 33 observamos que o coeficiente angular  $b$  é linearmente proporcional à altura  $H$  do orifício:

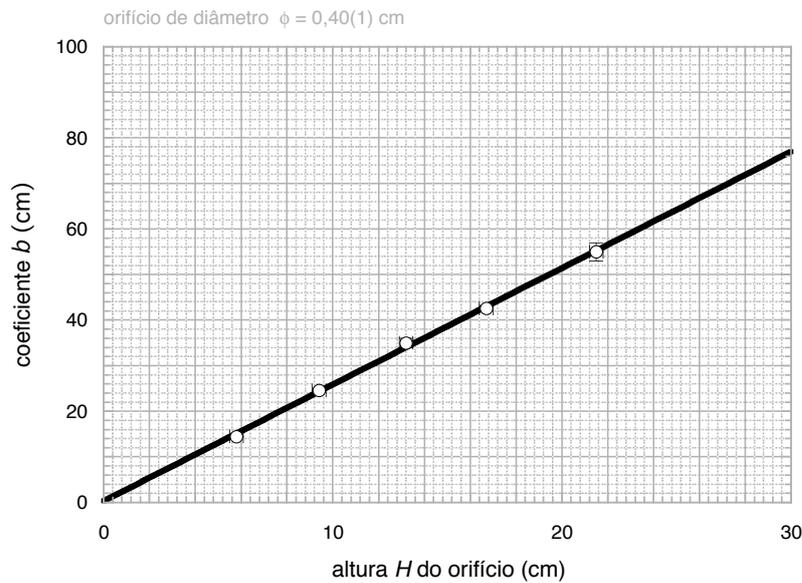
$$b = cH, \quad (2.32)$$

onde  $c$  é o coeficiente angular da reta na figura:

$$c = \frac{78(4) \text{ cm}}{30,0(8) \text{ cm}} \approx 2,6(2). \quad (2.33)$$

Então, podemos concluir que  $\alpha = \sqrt{cH}$ . Deste modo, fazendo  $\kappa = \sqrt{c}$ , podemos também escrever que

$$\alpha = \kappa\sqrt{H}. \quad (2.34)$$



**Figura 33:** Coeficiente angular  $b$  vs. altura  $H$  do orifício no recipiente de diâmetro  $D = 1,9(1)$  cm.

Substituindo a equação (2.34) em (2.7) obtemos, finalmente, que

$$A = \kappa \sqrt{H} \sqrt{h - h_0}, \quad (2.35)$$

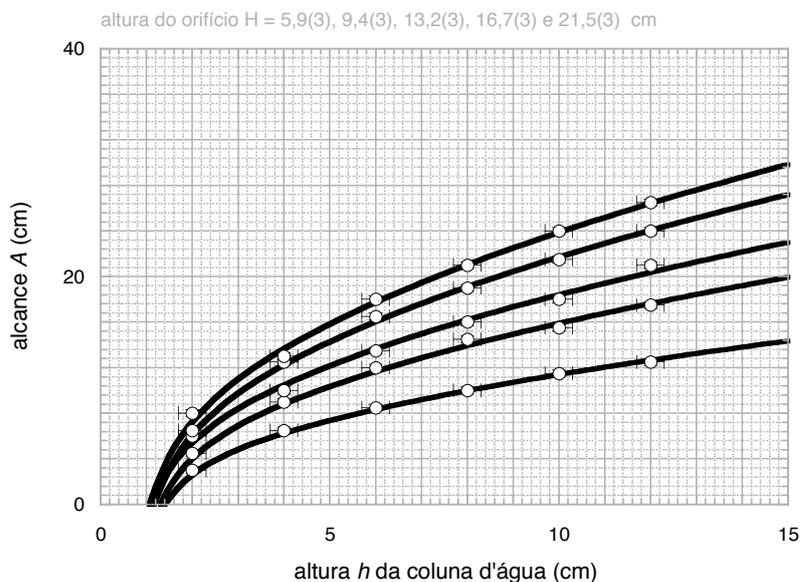
onde  $\kappa \approx \sqrt{2,6(2)} \approx 1,61(3)$ .

A figura 34 representa o gráfico do alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água, conforme definido pela equação (2.35). O orifício de diâmetro igual a 4,0(1) mm se encontra a uma altura  $H = 5,9(3), 9,4(3), 13,2(3), 16,7(3)$  e 21,5(3) cm, a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Observamos ainda que, para alturas da coluna de água  $h$  muito maiores do que  $h_0$ , reobtemos o resultado de Torricelli:

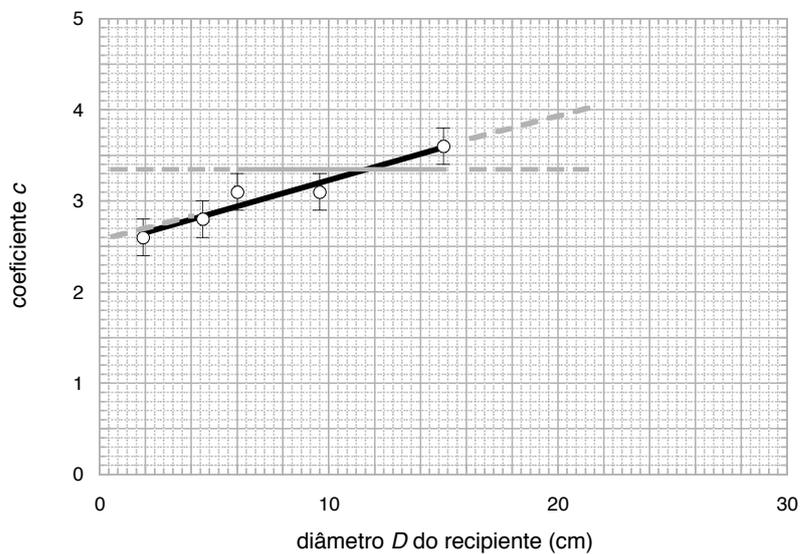
$$A \approx \kappa \sqrt{Hh}, \quad (2.36)$$

o alcance do jato de água é proporcional à média geométrica da altura  $H$  do orifício e da altura  $h$  da coluna de água.

Podemos comparar o resultado para o valor de  $\kappa$ , para o recipiente de diâmetro  $D = 1,9(1)$  cm, com o resultado obtido para este mesmo parâmetro com os recipientes de diâmetro  $D = 4,5(1), 6,0(1), 9,6(1)$  e 15,0(1) cm, como ilustrado na figura 35.



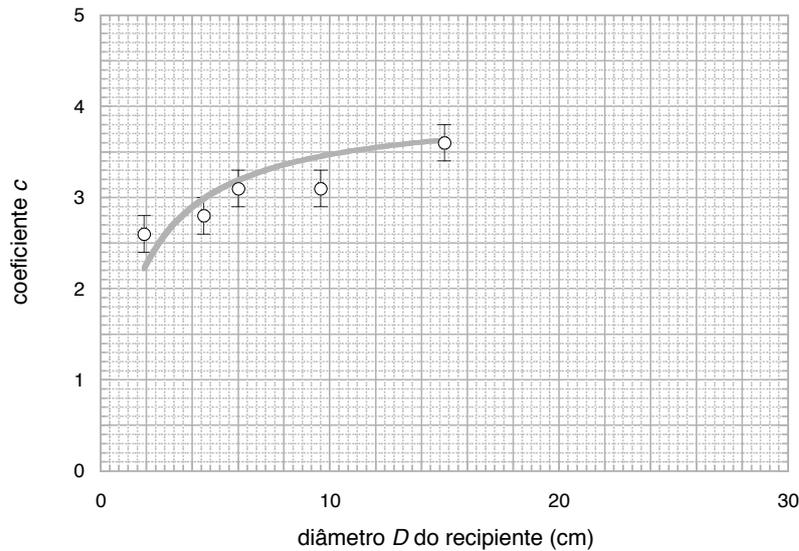
**Figura 34:** Alcance  $A$  vs. altura  $h$  da coluna de água. O orifício está a uma altura  $H$  a partir do fundo do recipiente que recebe a água.



**Figura 35:** Coeficiente  $c = \kappa^2$  vs. diâmetro  $D$  do recipiente que contém a coluna de água.

A partir desta figura, podemos concluir que o valor do coeficiente  $c$  e, deste modo,  $\kappa$ , é dependente da diâmetro do recipiente, para a região de valores considerada e esta dependência deve ser uma função não linear do diâmetro do tubo pois se considerar-

mos somente as três medidas para os diâmetros menores teremos um segmento de reta de maior inclinação do que o segmento de reta considerando todas as medidas. Procuramos, portanto, uma curva que deve ter a forma aproximada da curva ilustrada na figura 36.

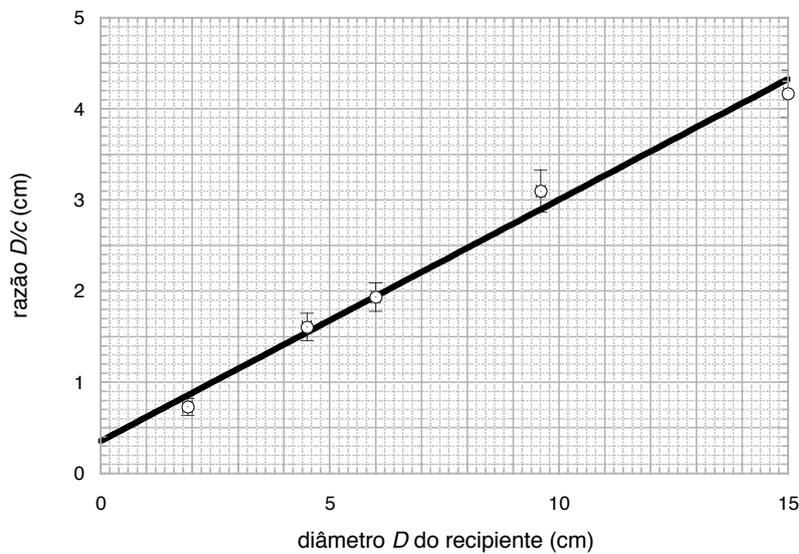


**Figura 36:** Coeficiente  $c = \kappa^2$  vs. diâmetro  $D$  do recipiente que contém a coluna de água. A curva é somente um guia para descrever o comportamento do parâmetro.

De fato, observando que a variação do coeficiente  $c$  não é linearmente proporcional à variação do diâmetro  $D$ , podemos construir um novo gráfico para estudarmos o comportamento da razão entre estes dois parâmetros em função do parâmetro  $c$  ou em função do diâmetro  $D$  do recipiente. A segunda opção é muito mais esclarecedora para o comportamento do fluido no tubo e está ilustrada na figura 37 a partir dos dados da Tabela 18.

**Tabela 18:** Coeficientes  $c$ ,  $\bar{h}_0$  e  $D/c$  para diferentes diâmetros  $D$  do recipiente.

$D$ (cm)	$c$	$\bar{h}_0$ (cm)	$D/c$ (cm)
1,9(1)	2,6(2)	0,8(2)	0,7(1)
4,5(1)	2,8(2)	0,8(2)	1,6(2)
6,0(1)	3,1(2)	0,8(2)	1,9(2)
9,6(1)	3,1(2)	1,2(3)	3,1(2)
15,0(1)	3,6(2)	1,1(3)	4,2(3)



**Figura 37:** Razão entre o diâmetro  $D$  do recipiente e o coeficiente  $c$  vs. diâmetro  $D$  do recipiente.

Como podemos observar da figura 37, se considerarmos a margem de incertezas das medidas, a razão  $D/c$  obedece a uma relação linear com o valor do diâmetro  $D$  do recipiente. Deste modo, podemos concluir que

$$\frac{D}{c} = \alpha + \beta D, \quad (2.37)$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente linear da reta da figura

$$\alpha \approx 0,4(1) \text{ cm} \quad (2.38)$$

e  $\beta$  é o seu coeficiente angular:

$$\beta = \frac{3,9(2)}{15,0(4)} \approx 0,26(2). \quad (2.39)$$

Então, resolvendo a equação (2.37) para  $c$ , podemos escrever que

$$c = \frac{\omega}{1 + d/D}. \quad (2.40)$$

onde

$$\omega = 1/\beta \approx 3,8(2) \quad (2.41)$$

e

$$d = \frac{\alpha}{\beta} \approx 1,5(2) \text{ cm}. \quad (2.42)$$

Portanto, o coeficiente  $\kappa$  é uma função do diâmetro do recipiente na forma

$$\kappa = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{1 + d/D}}. \quad (2.43)$$

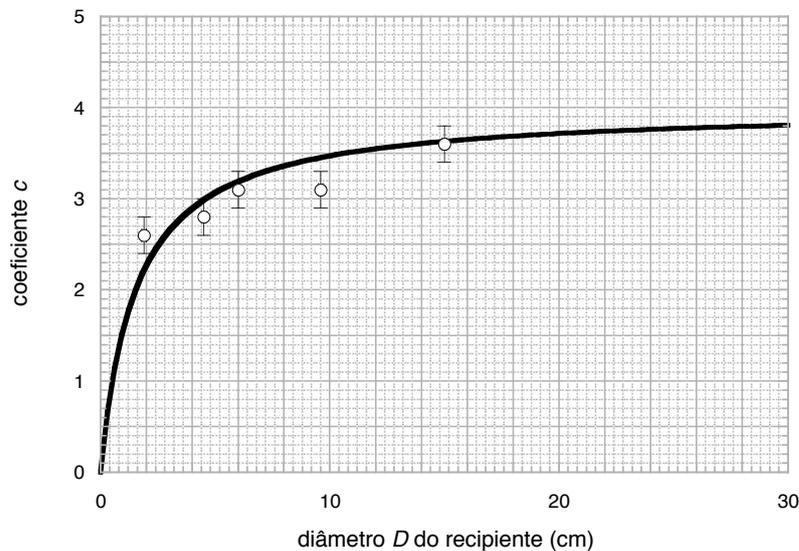
A figura 38 representa o gráfico do coeficiente  $c$  vs. diâmetro  $D$  do recipiente que sustenta a coluna de água, conforme definido pela equação (2.40).

Da Tabela 18, podemos determinar o valor mais provável de  $h_0$ :

$$h_0 = 0,9(1) \text{ cm}. \quad (2.44)$$

Substituindo (2.43) e (2.44) em (2.35) obtemos, finalmente, o alcance  $A$  em função do diâmetro  $D$  do recipiente, da altura de queda  $H$  e da altura  $h$  da coluna de água:

$$A = \frac{\sqrt{\omega}\sqrt{H}}{\sqrt{1 + d/D}} \sqrt{h - h_0}. \quad (2.45)$$



**Figura 38:** Coeficiente  $c = \kappa^2$  vs. diâmetro  $D$  do recipiente que contém a coluna de água. A curva contínua é definida pela equação (2.45).

Observamos ainda que, para diâmetros muito maiores do que  $d$  e para alturas da coluna de água  $h$  muito maiores do que  $h_0$ , reobtemos o resultado de Torricelli:

$$A \approx \sqrt{\omega}\sqrt{Hh} \approx 1,95(5)\sqrt{Hh}, \quad (2.46)$$

o alcance do jato de água é proporcional à média geométrica da altura  $H$  do orifício e

da altura  $h$  da coluna de água.

## 2.6 Interpretando o experimento do jato de água

A imagem do jato de água jorrando através do orifício nos lembra fortemente a imagem de uma partícula de massa  $\Delta m$  sendo lançada de uma altura  $H$  a partir do solo, após uma queda de uma altura igual a  $h - h_0$ .

Se a saída da água é perfeitamente paralela ao plano horizontal, a massa  $\Delta m$  realiza um alcance  $A$  dado por

$$A = vt \quad (2.47)$$

e cai de uma altura  $H$  definida por

$$H = \frac{1}{2}gt^2, \quad (2.48)$$

onde  $t$  corresponde a duração da queda. De fato, determinando-se a duração da queda com a equação (2.48) e substituindo-se este resultado na equação (2.47), obtemos o alcance realizado pela partícula em função da sua altura de queda  $H$  e da sua velocidade de saída  $v$ :

$$A = v\sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (2.49)$$

Considerando-se também que a partícula de massa de água igual a  $\Delta m$ , partindo do repouso, caia de uma altura no interior recipiente dada por  $h - h_0$ , então, neste caso, ela adquire uma energia cinética

$$\frac{1}{2}\Delta mv^2 = \Delta mg(h - h_0). \quad (2.50)$$

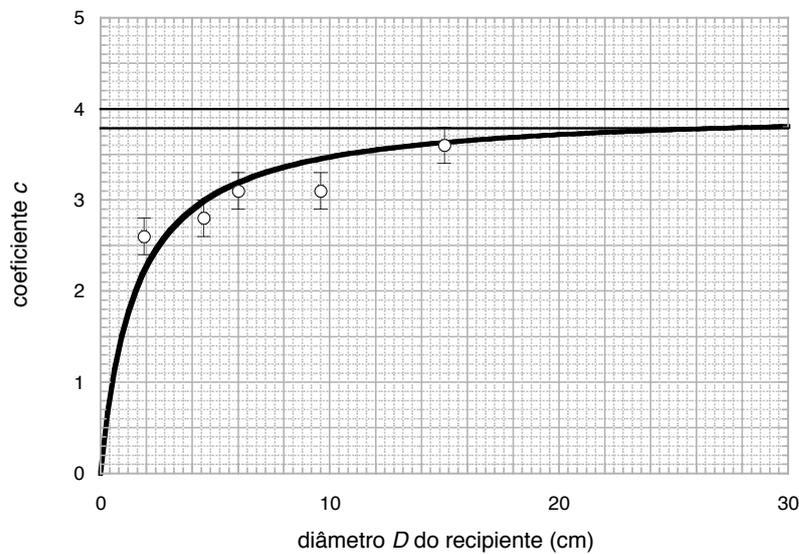
Deste modo, podemos determinar a velocidade  $v$  adquirida na posição  $h_0$ :

$$v = \sqrt{2g(h - h_0)}. \quad (2.51)$$

Portanto, conhecendo-se  $H$  e  $h - h_0$ , podemos determinar o alcance da água ao ser ejetada do recipiente:

$$A = 2\sqrt{H}\sqrt{(h - h_0)}. \quad (2.52)$$

Observamos, da expressão (2.52), que o alcance  $A$  não depende da forma da massa  $\Delta m$  considerada. A única exigência é que a saída da água seja paralela à horizontal e



**Figura 39:** Coeficiente  $c = \kappa^2$  vs. diâmetro  $D$  do recipiente que contém a coluna de água. A curva contínua é definida pela equação (2.45). A linha horizontal superior mostra as condições limite de Torricelli e a linha horizontal inferior mostra as condições limite para a equação (2.45).

que a porção de líquido ejetado “caia livremente” de uma altura  $h - h_0$ .

Da nossa experiência, observamos que, para tubos de diâmetros  $D$  muito maiores do que  $d$  e para alturas da coluna de água  $h$  muito maiores do que  $h_0$ , temos

$$A \approx \sqrt{\omega} \sqrt{Hh} \approx 1,95(5) \sqrt{Hh}. \quad (2.53)$$

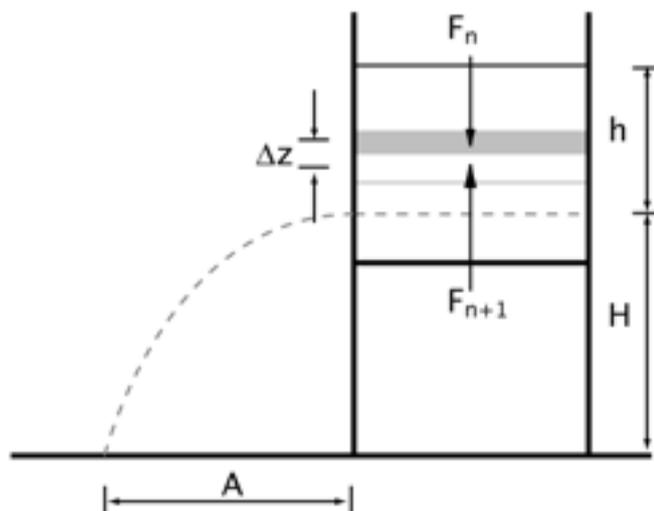
O modelo de Torricelli nos dá um resultado muito próximo ao comportamento observado:

$$\kappa \leq \sqrt{3,8} \approx 1,95 \lesssim 2. \quad (2.54)$$

A figura 39 ilustra este comportamento. Na figura, a curva contínua é definida pela equação (2.45). A linha horizontal superior mostra as condições limite de Torricelli e a linha horizontal inferior mostra as condições limite para a equação (2.45).

Entretanto, para situações fora do limite de Torricelli, há uma discrepância significativa. Nas próprias palavras de Torricelli, como observamos no Capítulo 3 da dissertação, “a água ejetada através do orifício possui o mesmo ímpeto que um corpo de mesmo peso que cai livremente da mesma altura”, entretanto “a experiência parece confirmar a hipótese, mas não totalmente”.

Para discutirmos esta discrepância entre o modelo de Torricelli e a experiência, empregamos a técnica de análise de dos Bernoulli e de Euler. Dividimos virtualmente a altura no recipiente, dada por  $h_f - h_i$ , em  $N$  intervalos  $\Delta z$  na direção vertical  $z$ , conforme a ilustração da figura 40.



**Figura 40:** Alcance  $A$  do jato de água para uma coluna de água a uma altura  $h$  e para um orifício a uma altura  $H$ . Dividimos a coluna de água em  $N$  camadas e sobre a  $n$ -ésima camada (em cinza) indicamos as forças atuando sobre ela

Consideramos também que, a uma dada altura  $z$ , toda a camada apresenta a mesma velocidade  $v$ . Podemos observar também que a massa do líquido que atravessa a seção da coluna de água, por unidade de tempo, deve ser a mesma em qualquer altura.

Deste modo, podemos expressar a lei de conservação da massa através da equação de continuidade:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho S \frac{\Delta z}{\Delta t} = \rho S v = \text{const.} \quad (2.55)$$

onde  $S$  é a área da seção da coluna, e  $\rho$  e  $v$  são, respectivamente, a densidade e a velocidade do líquido que flui através da seção  $S$ . A quantidade de massa  $\Delta m$  da  $n$ -ésima camada de líquido sofre a ação de forças tais que esta camada de massa é acelerada e temos então

$$F_n + \Delta m g - F_{n+1} = \Delta m \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (2.56)$$

Podemos calcular o trabalho para deslocar a camada de massa  $\Delta m$  de uma altura definida pelos pontos  $n$  e  $n + 1$ :

$$F_n \Delta z + \Delta m g \Delta z - F_{n+1} \Delta z = \Delta m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta z. \quad (2.57)$$

Reescrevendo a equação (2.57) em termos das pressões sobre a camada de líquido  $\Delta m$ ,

temos então

$$P_n \Delta z + \rho g \Delta z \Delta z - P_{n+1} \Delta z = \rho \Delta z \frac{\Delta z}{\Delta t} \Delta v. \quad (2.58)$$

Esta equação ainda pode ser simplificada para

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} + g = v_m \frac{\Delta v}{\Delta z}, \quad (2.59)$$

onde  $v_m = \Delta z / \Delta t$  corresponde ao valor médio de  $v$  entre os instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ . A expressão  $v_m \Delta v$  pode ser reescrita na forma

$$v_m \Delta v = \frac{1}{2} (v_{n+1} + v_n) (v_{n+1} - v_n) = \frac{1}{2} (v_{n+1}^2 - v_n^2). \quad (2.60)$$

e, deste modo, a equação (2.58) pode ser reescrita em termos das velocidades nos respectivos pontos considerados:

$$P_n - P_{n+1} + g \rho \Delta z = \frac{1}{2} \rho (v_{n+1}^2 - v_n^2). \quad (2.61)$$

Ao determinarmos a diferença entre as pressões das  $N$  camadas obtemos

$$\sum_{n=1}^N (P_n - P_{n+1}) + g \rho \sum_{n=1}^N (\Delta z) = \frac{1}{2} \rho \sum_{n=1}^N (v_{n+1}^2 - v_n^2). \quad (2.62)$$

Fazendo as substituições

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N P_n - P_{n+1} &= (P_i - P_{i+1}) + (P_{i+1} - P_{i+2}) + \dots \\ &\quad + (P_{f-2} - P_{f-1}) + (P_{f-1} - P_f) \\ &= P_i - P_f, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N z_n - z_{n+1} &= (z_i - z_{i+1}) + (z_{i+1} - z_{i+2}) + \dots \\ &\quad + (z_{f-2} - z_{f-1}) + (z_{f-1} - z_f) \\ &= z_i - z_f \\ &= h_i - h_f, \end{aligned} \quad (2.64)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N v_n^2 - v_{n+1}^2 &= (v_i^2 - v_{i+1}^2) + (v_{i+1}^2 - v_{i+2}^2) + \dots \\ &\quad + (v_{f-2}^2 - v_{f-1}^2) + (v_{f-1}^2 - v_f^2) \\ &= v_i^2 - v_f^2 \end{aligned} \quad (2.65)$$

na equação (2.62), relacionamos a pressão entre dois pontos do fluido incompressível e suas respectivas velocidades:

$$P_i - P_f + \rho g (h_i - h_f) = \frac{1}{2} \rho (v_f^2 - v_i^2). \quad (2.66)$$

A equação (2.66) expressa a lei de Bernoulli, que traduz o balanço energético do movimento do fluido, e é mais tradicionalmente conhecida nas formas

$$P_i + \rho g h_i + \frac{1}{2} \rho v_i^2 = P_f + \rho g h_f + \frac{1}{2} \rho v_f^2 \quad (2.67)$$

e

$$\frac{P_i}{\rho g} + h_i + \frac{v_i^2}{2g} = \frac{P_f}{\rho g} + h_f + \frac{v_f^2}{2g} \quad (2.68)$$

onde, nesta última expressão, cada parcela tem dimensão de comprimento. Esta representação é muito empregada pelos engenheiros. Ela é denominada “cabeça da pressão” e, como vimos, é uma medida do comprimento que pode ser convertida às unidades da pressão se soubermos qual a densidade do líquido considerado na medida e qual o valor local da gravidade.

Podemos ainda observar da equação (2.68) que, se o fluido flui horizontalmente, teremos  $h_i = h_f$  e podemos concluir que, neste caso, na posição de velocidade maior teremos a menor valor de pressão.

Quando  $P_i = P_f$  e  $v_i \approx 0$  temos a velocidade final do fluido dada por

$$v \approx \sqrt{2g (h_f - h_i)}, \quad (2.69)$$

expressão similar à velocidade de uma partícula que cai em queda livre de uma altura  $(h_f - h_i)$ . Se atribuirmos esta velocidade à velocidade de escoamento no orifício do recipiente, reobtemos a expressão para o alcance  $A$ , dada pela equação (2.52), o que não está em acordo com a experiência para tubos com pequeno diâmetro.

Esta é uma boa oportunidade para colocar em discussão as aproximações feitas na construção ou na aplicação de um modelo. De fato, pela equação da continuidade,

temos que a velocidade na superfície do fluido,  $v_i$ , está relacionada com a velocidade final,  $v$ , pela razão

$$v_i = v \frac{S_f}{S_i}, \quad (2.70)$$

onde  $S_i$  e  $S_f$  são as seções na superfície da coluna de água e no orifício de saída, respectivamente.

Ao substituímos esta expressão na equação de Bernoulli, ainda considerando  $P_i = P_f$ , obtemos agora a seguinte expressão para a velocidade  $v$  na saída do recipiente:

$$v = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1 - (S_f/S_i)^2}} \sqrt{h_f - h_i}. \quad (2.71)$$

Observamos então que o efeito na redução da seção aumenta a velocidade de saída e, por conseqüência, aumenta o alcance realizado, e não o contrário, como observado em nosso experimento.

Devemos procurar outras razões para a tentar compreender o ocorrido em nosso trabalho. Lembramos que, ao construir o modelo, admitimos que a camada de massa  $\Delta m$ , na altura  $z$  teria a mesma velocidade ao longo de toda a seção. Entretanto, no balanço energético que realizamos, ignoramos os efeitos resistivos no movimento do líquido ao longo do recipiente, até alcançar o orifício. Fazendo  $P_i = P_f$ ,  $v_i = 0$  e incluindo no balanço energético a perda de energia, então a equação (2.68) se reduz a

$$h = h_0 + \frac{v^2}{2g} + \frac{E_f}{\rho g}, \quad (2.72)$$

onde  $E_f/(\rho g)$  deve corresponder à perda de energia durante o fluxo do fluido em seu movimento ao longo da altura  $h - h_0$ .

Se considerarmos esta perda de energia  $E_f$  como uma fração  $\epsilon$  da energia cinética adquirida na presença de resistência, podemos então escrever que

$$E_f = \frac{\epsilon}{2} \rho v^2 \quad (2.73)$$

e o balanço energético pode ser reescrito na forma

$$\rho g h = \rho g h_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\epsilon}{2} \rho v^2. \quad (2.74)$$

Neste caso, a velocidade de saída do recipiente é dada por

$$v^2 = \frac{2g}{1 + \epsilon} (h - h_0) \quad (2.75)$$

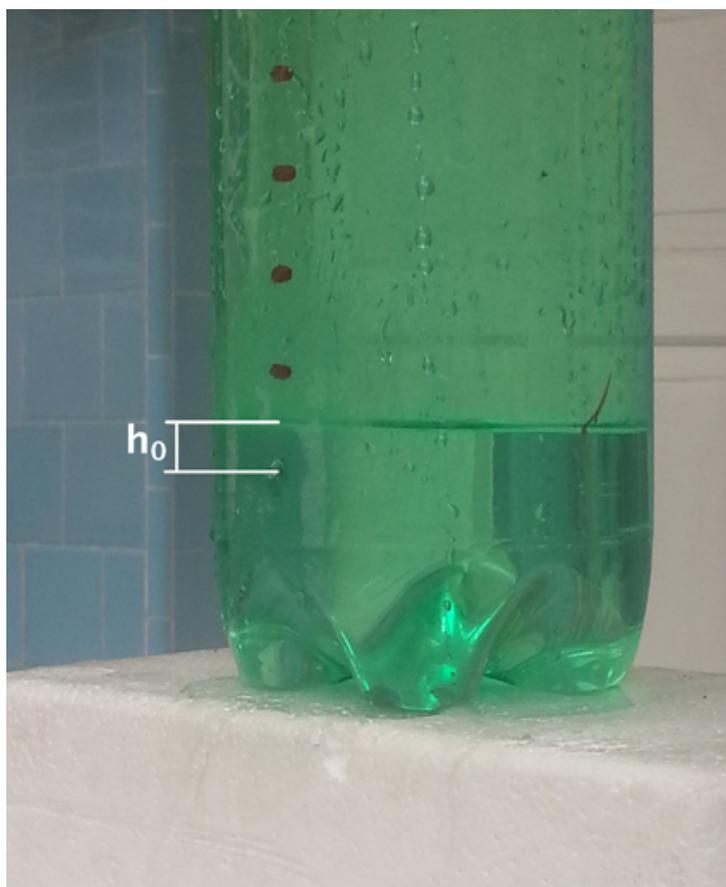
e o novo alcance  $A$  será menor do que no caso sem o termo resistivo:

$$A = \frac{\sqrt{4}\sqrt{H}}{\sqrt{1 + \epsilon}} \sqrt{h - h_0}. \quad (2.76)$$

Observamos que o coeficiente  $\epsilon$  deste modelo corresponde à razão  $d/D$  da nossa experiência. Deste modo, podemos concluir que o coeficiente de perda de energia ao longo do movimento diminui com o aumento do diâmetro do recipiente. Esta é a lei de Darcy para o fluxo de um fluido em tubos cilíndricos, formulada por Henry Darcy em 1856 (VENNARD, 1940; DARCY, 1856). Evidentemente, tal análise detalhada escapa ao programa do ensino médio e, neste caso, nos restringimos a uma análise semi-quantitativa do experimento.

Como podemos observar, o procedimento apresentado neste trabalho nos permite fazer uma integração das leis da mecânica clássica com o fluido em movimento e, por consequência, dar uma imagem mecânica ao fenômeno observado.

Também observamos que o alcance  $A$  do jato de água é nulo quando a coluna do líquido é igual ou menor do que um certo valor  $h_0$ , como foi indicado pelos resultados analisados para as diferentes configurações do experimento e indicado na figura 41. Podemos relacionar esse fato à tensão superficial, que equilibra a pressão da coluna líquida acima do orifício. A análise deste fenômeno fica como sugestão para futuros trabalhos.



**Figura 41:** A pressão da coluna líquida de altura  $h_0$  é insuficiente para vencer a tensão superficial no orifício.

## *Referências*

- ABIB, M. L. V. dos S.; ARAÚJO, M. S. T. d. Atividades experimentais no ensino de física: Diferentes enfoques, diferentes finalidades. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 25, n. 2, p. 176–194, 2003.
- BACHELARD, G. *A Formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BAKER, A. G. et al. *The Systematic Experiment*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- BERNOULLI, D.; BERNOULLI, J. *Hydrodynamics–Hydraulics*. New York: Dover Publications, 1968.
- BRASIL. Lei de diretrizes e bases da educação nacional. Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996. 1996.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio*. Brasília: SEMTEC/MEC, 2000.
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais; Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BRASIL. *PCN+Física: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/Semtec, 2006.
- BRITO, L. S. *Uma aula sobre a cinemática do plano inclinado*. Dissertação (Monografia de final de Curso de Licenciatura) — Instituto de Física — UFRJ, Rio de Janeiro – RJ, Agosto 2008.
- CACHAPUZ, A. Linguagem metafórica e o ensino das ciências. *Revista Portuguesa de Educação*, v. 2, n. 3, p. 117–129, 1989.
- CAPECCHI, M. C. V. M.; CARVALHO, A. M. P. Atividade de laboratório como instrumento para a abordagem de aspectos da cultura científica em sala de aula. *Revista Pro-Posições (Faculdade de Educação da Unicamp)*, v. 17, n. 1, p. 137–153, 2006.

- CARDINALI, F. *Raccola d'autori italiani che trattano del motto dell'acque – arricchita di molte cose inedite, e d'alcuni schiarimenti*. 4. ed. Bologna: Tipografia Cardinali e Frulli, 1826.
- CARRASCO, H. J. Experimentos de laboratorio; un enfoque sistemico y problematizador (laboratory experiments: a systemic and problemizing approach). *Revista de Ensino de Física*, v. 13, p. 86–96, 1991.
- CARUSI, E. et al. *Leonardo da Vinci*. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana, 1923.
- CARUSI, E. et al. *Leonardo da Vinci*. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana, 1934. (Collana della Enciclopedia Italiana : Serie seconda).
- CARVALHO, A. de et al. *Ciências no ensino fundamental: o conhecimento físico*. São Paulo: Scipione, 1998. (Pensamento e ação no magistério).
- CARVALHO, A. M. P.; CAPECHI, M. C. V. M. Aspectos da cultura científica numa atividade de laboratório aberto de física. In: *Anais do IX Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Física*. Jaboticatubas, MG: [s.n.], 2004.
- CARVALHO, A. M. P. de. Habilidades de professores para promover a enculturação científica. *Contexto & Educação*, v. 22, n. 77, p. 25–49, jan./jun. 2007.
- D'ALEMBERT, J. le R. *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*. Paris: [s.n.], 1744.
- D'ALEMBERT, J. le R. *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance ds fluides*. Paris: [s.n.], 1752.
- DARCY, H. *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Paris: Dalmont, 1856.
- DARRIGOL, O. Hydrodynamics and hydraulics. In: HEILBRON, J. L. (Ed.). *The Oxford Companion to the History of Modern Science*. Oxford: Oxford University Press, 2003. p. 389–391.
- DARRIGOL, O. *Worlds of Flow: A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. Oxford: Oxford University Press, 2005.
- DAUBEN, J. W.; SCRIBA, C. J. (Ed.). *Writing the History of Mathematics – Its Historical Development*. 1. ed. Basel: Birkhäuser, 2002. (Science Networks. Historical Studies, v. 27).
- DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A.; PERNANBUCO, M. *Ensino de Ciências: fundamentos e métodos*. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2002.
- DIAS, V. S. *Michael Faraday; subsidios para metodologia de trabalho experimental*. 156 p. Dissertação (Mestrado) — USP, São Paulo, 2004.
- DURAND, W. F. The development of our knowledge of the laws of fluid mechanics. *Science*, v. 78, n. 2025, p. 343–351, 1933.
- EULER, L. *Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides*. Berlin: Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belle-Lettres de Berlin, 1755. Disponível em: <[http://bibliothek.bbaw.de/bbaw/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index\\_html?band=02-hist/1755&inhalt:int=1&seite:int=55](http://bibliothek.bbaw.de/bbaw/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index_html?band=02-hist/1755&inhalt:int=1&seite:int=55)>. Acesso em: dezembro de 2012.

- EULER, L. *Principes généraux de l'état d'équilibre d'un fluide*. Berlin: Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belle-Lettres de Berlin, 1755. Disponível em: <[http://bibliothek.bbaw.de/bbaw/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index\\_html?band=02-hist/1755&inhalt:int=1&seite:int=55](http://bibliothek.bbaw.de/bbaw/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index_html?band=02-hist/1755&inhalt:int=1&seite:int=55)>. Acesso em: dezembro de 2012.
- EULER, L. *Principes généraux du mouvement des fluides*. Berlin: Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belle-Lettres de Berlin, 1755. Disponível em: <[http://bibliothek.bbaw.de/bbaw/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index\\_html?band=02-hist/1755&inhalt:int=1&seite:int=55](http://bibliothek.bbaw.de/bbaw/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index_html?band=02-hist/1755&inhalt:int=1&seite:int=55)>. Acesso em: dezembro de 2012.
- HEILBRON, J. L. (Ed.). *The Oxford Companion to the History of Modern Science*. Oxford: Oxford University Press, 2003.
- HERSCHEL, J. F. W. *A Treatise on Astronomy*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- JIMENEZ-ALEIXANDRE, M. P. 10 ideas clave. competencias en argumentación y uso de pruebas. In: . Barcelona: Editorial Graó, 2010, (Ideas Claves).
- KAMIL, C.; DEVRIES, R. *O conhecimento físico na educação pré-escolar: implicações da teoria de Piaget*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1986.
- KOERTGE, N. (Ed.). *New Dictionary of Scientific Biography*. 1. ed. New York: Charles Scribners & Sons, 2008.
- KÖHNLEIN, F. K.; PEDUZZI, L. O. Q. Uma discussão sobre a natureza da ciência no ensino médio: um exemplo com a teoria da relatividade restrita. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 2, n. 1, p. 36–70, 2005.
- LEIBNIZ, G. W. von. Brevis demonstratio erroris memorabilis cartesiani et aliorum circa legem naturalem, secundum quam volunt a deo eandem semper quantitatem motus conservari, qua in re mechanica abutuntur. *Acta Eruditorum*, p. 161–163, 1686. Reproduzido in A.VI.iv: 2027-30/GM.vi.117-19/L 296-98. Versão em francês in *Nouvelles de la République des Lettres* 1686, 996-99.
- NEMÉNYI, P. F. The main concepts and ideas of fluid dynamics in their historical development. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 2, n. 1, p. 52–86, 1962.
- NEVES, J. M. da S. *Uma aula alternativa sobre a hidrodinâmica dos fluidos e a tensão superficial das substâncias*. Dissertação (Monografia de final de Curso de Licenciatura) — Instituto de Física — UFRJ, Rio de Janeiro – RJ, Agosto 2010.
- NEWTON, I. *Principia – Princípios matemáticos de filosofia natural*. São Paulo: EDUSP, 2010.
- REZENDE, F.; OSTERMANN, F.; FERRAZ, G. Ensino–aprendizagem de física no nível médio: o estado da arte da produção acadêmica no século xxi. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2009.
- ROUSE, H.; INCE, S. *History of Hydraulics*. New York: Dover, 1963. (Institute of Hydraulic Research, 1957).

- SOUZA, J. R. M. de. *A experiência da fonte de Heron no Ensino Médio*. Dissertação (Monografia de final de Curso de Licenciatura) — Instituto de Física — UFRJ, Rio de Janeiro – RJ, Agosto 2005.
- STIGLER, S. In: GIERYN, T. F. (Ed.). *Science and social structure: a festschrift for Robert K. Merton*. New York: NY Academy of Sciences, 1980. p. 147–157.
- TORRICELLI, E. *De motu gravium naturaliter descendentium, et proiectorum. Opera Geometrica*. Florença: [s.n.], 1644.
- VENNARD, J. K. *Elementary Fluid Dynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1940.
- WILSEK, M.; TOSIN, J. Ensinar e aprender ciências no ensino fundamental com atividades investigativas através da resolução de problemas. *Estado do Paraná*, v. 3, n. 5, 2012. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos>>. Acesso em: dezembro de 2012.