



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

Experimento e aprendizagem: Uma aula introdutória à mecânica dos fluidos

Geraldo Claret Plaуска

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Vitorvani Soares

Rio de Janeiro
Janeiro de 2013

Experimento e aprendizagem: Uma aula introdutória à mecânica dos fluidos

Geraldo Claret Plauska

Orientador: Vitorvani Soares

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Vitorvani Soares

Prof. Carlos Eduardo Aguiar

Profa. Wania Wolff

Rio de Janeiro
Janeiro de 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

P696e Plauska, Geraldo Claret

Experimento e aprendizagem: Uma aula introdutória à mecânica dos fluidos / Geraldo Claret Plauska. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2013.

ix, 96 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Vitorvani Soares.

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2013.

Referências Bibliográficas: f. 83–87.

1. Ensino de Física. 2. Hidrodinâmica. 3. Experimento. I. Soares, Vitorvani. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. Experimento e aprendizagem: Uma aula introdutória à mecânica dos fluidos.

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a todos que me ajudaram a vencer mais esta etapa em minha vida.

The method, therefore, we propose to follow is neither strictly the analytic nor the synthetic but rather, as may best suit with a *didactic* composition. Our object is not to convince or refute opponents, nor to enquire, under the semblance of an assumed ignorance, for principles of which we are all the time in full possession—but simply to *teach* what we know.

— JOHN FREDERICK WILLIAM HERSCHEL, *A Treatise on Astronomy*, 1833,
p. 3.

RESUMO

Experimento e aprendizagem: Uma aula introdutória à mecânica dos fluidos

Geraldo Claret Plauska

Orientador: Vitorvani Soares

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Propomos neste trabalho o emprego de um experimento e da sua análise como principais ferramentas pedagógicas para a introdução dos conceitos de hidrodinâmica aos alunos do ensino médio e de graduação. O objetivo principal do nosso procedimento é a construção desses conceitos físicos partindo-se da observação e da análise do comportamento do fluxo de um líquido (água) através de um orifício no recipiente que o contém sob diferentes configurações e obter, deste modo, as equações básicas da hidrodinâmica apresentadas habitualmente nos livros didáticos. Inicialmente, realizamos a observação do fenômeno de escoamento, seguida então da aquisição e da análise dos dados experimentais relevantes ao problema. Ao final, à partir da análise gráfica e algébrica destes resultados experimentais, construímos a equação de Bernoulli, sem a necessidade de antecipar a apresentação de modelos teóricos relativos à dinâmica dos fluidos.

Palavras chave: Ensino de Física, Hidrodinâmica, Experimento.

Rio de Janeiro
Janeiro de 2013

ABSTRACT

Experiment and learning: an introductory class to fluid mechanics

Geraldo Claret Plauska

Supervisor: Vitorvani Soares

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

We propose in this work the adoption of an experiment and its analysis as the main pedagogical tools for the introduction of the concepts of hydrodynamics to the students of high school and undergraduate level. The main goal of our procedure is to establish these physical concepts from observation and analysis of the behavior of a liquid (water) flow through an orifice in the recipient which contains it under different configurations and obtain, in this way, the basic equations of the hydrodynamics usually introduced by textbooks. Initially, one observes the flux flow phenomenon, followed by the acquisition and analysis of the relevant experimental data associated to the problem. At last, from the graphical and algebraical analysis of these experimental results, we establish the Bernoulli's equation, with no need to anticipate any theoretical model whatsoever relative to the fluid dynamics.

Keywords: Physics education, Hydrodynamics, Experiment.

Rio de Janeiro
Janeiro de 2013

Sumário

1	Introdução	1
2	Fundamentação didática	5
3	Um pouco de História	13
3.1	A História da Ciência e o ensino de Física	14
3.2	Breve histórico da Mecânica dos Fluidos	16
4	A experiência do jato de água	23
4.1	Recipiente de diâmetro 6,0(1) cm	26
4.1.1	Alcances para uma dada altura H do orifício	26
4.1.2	Alcances para diferentes alturas H	32
4.2	Recipiente de diâmetro 15,0(1) cm	37
4.2.1	Alcances para diferentes alturas H	37
4.3	Recipiente de diâmetro 9,6(1) cm	44
4.3.1	Alcances para diferentes alturas H	45
4.4	Recipiente de seção 4,5(1) cm	52
4.4.1	Alcances para diferentes alturas H	52
4.5	Recipiente de seção 1,9(1) cm	60
4.5.1	Alcances para diferentes alturas H	60
4.6	Interpretando o experimento do jato de água	70
5	Considerações finais	80
	Referências bibliográficas	83

Capítulo 1

Introdução

Durante a nossa formação, aprendemos que o ensino de ciências nas escolas, para ser mais eficiente, precisa sempre se atualizar, procurar novas práticas pedagógicas, novos conteúdos e novas estratégias. Com este propósito, o ensino também deve sempre se adequar à realidade social, às novas tecnologias, aos novos hábitos e aos novos costumes dos estudantes. Deste modo, os professores necessitam mudar as suas práticas pedagógicas não somente para motivar-se profissionalmente mas, também, para formar alunos mais preparados para os estudos superiores e para a vida profissional que os aguarda: uma nova força de trabalho com capacidade de análise crítica, de percepção, de interpretação e de argumentação.

Para alcançar estes objetivos, portanto, é preciso que a escola desenvolva uma cultura científica, onde os alunos possam não somente conhecer ciências mas, de fato, praticar de fato as ciências: aprender a realizar as atividades científicas e os métodos utilizados pelos cientistas e passar a comportar-se e a raciocinar cientificamente. Dentro desta perspectiva, uma escola que pretende ser reconhecida por praticar o ensino também deve abranger na sua proposta pedagógica o desenvolvimento da cultura científica, além das culturas literária e artística.

Ensinar, entretanto, é uma tarefa muito complexa, que exige planejamento, experiência, atualização, perseverança, conhecimento da clientela e do assunto a ser apresentado a ela. Portanto, é sempre bom estar atualizado

não somente nos conteúdos, mas principalmente nas atuais práticas pedagógicas originadas de pesquisas na área do ensino–aprendizagem. O docente deve sempre procurar implantar diferentes metodologias no seu trabalho de ensinar, motivando-se e procurando motivar seus alunos de acordo com as suas necessidades.

Deste modo, a combinação entre um trabalho experimental e teórico em uma mesma proposta de aula pode ser uma estratégia a mais para motivar os alunos e despertá-los para a ciência ao revelar para eles como ela é trabalhada: conduzindo-os a descobrir e a investigar fenômenos, a estabelecer os parâmetros físicos relevantes do problema, a relacionar as grandezas físicas observadas através de análises gráficas e dimensionais e, por fim, a reconhecer e a aplicar as leis e princípios científicos já conhecidos. Apoiados nestas diretrizes, exploramos neste trabalho o emprego da experimentação e a sua análise por meio de gráficos e expressões algébricas simples como as ferramentas pedagógicas principais para o aprendizado dos conceitos físicos básicos de hidrodinâmica.

A proposta aqui apresentada difere do enfoque atual dado ao papel didático dos experimentos que, quase sempre, são empregados com o propósito de comprovar uma fórmula física, previamente apresentada ou deduzida pelo professor numa aula teórica e expositiva. Em vez disso, o que se pretende é utilizar a experimentação como um processo de investigação científica, de maneira a definir a equação física que norteia o fenômeno estudado sem nenhum conhecimento prévio do porquê daquele resultado.

Assim, ao realizar um experimento da forma que aqui apresentamos, em vez de buscar comprovações, o aluno desenvolveria um trabalho de investigação do fenômeno, descrevendo-o através do relacionamento entre as variáveis nele envolvidas e, por fim, determinando a equação que o rege. Desta forma, esperamos que o ambiente para o seu aprendizado possa se tornar mais motivador, instigante, desafiador e que os conhecimentos assim adquiridos na prática tornem-se mais consistentes.

Na maioria das vezes, os experimentos que tem por objetivo somente a comprovação de uma lei física não conseguem seu intento porque os resultados obtidos nas medidas, em geral, não coincidem com os dados previstos

pelo modelo empregado. Esta discrepância é muito comum e ocorre, como sabemos, pela escolha inadequada de um modelo para descrever o experimento real (atritos não desprezíveis, a presença do ar, as condições ambientais, etc). Esse fato, muitas vezes, frustra os alunos, deixando-os decepcionados com os resultados comparativos e muitos até não se convencem da veracidade das leis, princípios e fórmulas físicas consideradas no problema estudado.

Ao contrário, utilizando o experimento como uma ferramenta de investigação, esperamos que o aluno, para chegar a uma conclusão, seja conduzido a levar em consideração e a avaliar as variáveis do mundo do seu experimento no modelo mental que ele adotar durante a realização da prática, aprendendo e entendendo a complexidade e as nuances das ciências físicas e do trabalho de investigação.

Esperamos ainda, com este procedimento, fazer o aluno entender que as descobertas científicas não ocorrem por acaso e não brotam das mentes dos cientistas, como pensa a maioria não somente dos alunos, mas também da população. Desejamos mostrar-lhes que novas descobertas podem ser acessíveis a todos, motivando-os a investigar cada vez mais a natureza e suas manifestações.

Pretendemos também ajudar o aluno a compreender como os conceitos físicos se relacionam, como as leis da Física mantêm coerência, sejam elas aplicadas em universos diferentes (macro e micro) ou em distintas fases da matéria (sólidos, líquidos ou gases), sejam elas aplicadas em corpos individuais ou em um sistema de partículas.

Ao trabalhar a experimentação, na forma que propomos, esperamos também que o aluno desenvolva as suas habilidades e competências em diferentes partes do conhecimento tais como, por exemplo, a elaboração e análise de gráficos, o tratamento das incertezas nas medidas realizadas, o emprego do cálculo com pequenas diferenças e a utilização da análise dimensional para relacionar variáveis, auxiliando-o e reforçando a sua técnica no domínio desses tópicos.

Para a atividade proposta neste trabalho, consideramos que os alunos já tenham estudado a mecânica newtoniana da partícula e já se familiarizaram com os conceitos correspondentes: os lançamentos vertical e oblíquo,

a conservação de energia e o conceito de pressão (atmosférica e hidrostática). Devem também dominar o conteúdo básico de funções do 1º, do 2º grau e a elaboração dos gráficos correspondentes, além de noções de análise dimensional.

O tópico da física escolhido para esse trabalho é o do comportamento hidrodinâmico de uma coluna de água que escoar através de um orifício lateral no recipiente que a contém. O método consiste em construir, a partir de uma análise quantitativa do experimento e das variáveis físicas envolvidas, a expressão matemática do alcance do jato d'água, a equação de Bernoulli aplicada a líquidos em movimento, a equação da continuidade e o teorema de Stevin, além de constatar a aplicação da mecânica da partícula na mecânica dos fluidos através da dedução do princípio de conservação da energia para o movimento do líquido.

Também pretendemos resgatar e fortalecer o ensino da hidrodinâmica nos estudos do ensino médio, utilizando a experimentação como motivação para os alunos investigarem e concluírem sobre as leis e equações que regem os fenômenos envolvidos no tema. Atualmente, na maioria das grades curriculares do ensino médio, o estudo da hidrodinâmica não é contemplado, seja por falta de tempo devido a ser o último tópico da Mecânica, seja porque muitos livros didáticos não a incluem nos seus escopos, o que provavelmente faz com que os professores não a lecionem também por falta de apoio do recurso didático do livro adotado. Neste sentido, as monografias de final de curso de Souza (2005) e Neves (2010), do Curso de Licenciatura em Física aqui do IF-UFRJ, serviram de grande apoio e estímulo para o desenvolvimento do presente projeto.

Deste modo, para a apresentação do nosso trabalho, organizamos esta dissertação da seguinte maneira: No Capítulo 2, apresentamos a fundamentação didática e pedagógica do nosso procedimento; Como elemento incentivador para o desenvolvimento da cultura científica, histórica e social, apresentamos, no Capítulo 3, uma síntese do desenvolvimento histórico da Mecânica dos Fluidos; No Capítulo 4, apresentamos o nosso experimento do jato de água e discutimos a sua cinemática e a sua dinâmica à partir dos resultados obtidos; Ao final do trabalho, apresentamos as nossas conclusões.

Capítulo 2

Fundamentação didática

A fundamentação didática deste trabalho se apóia nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e no ensino por meio da investigação e da experimentação. No que concerne os PCNs, em geral, e os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), em particular, os elementos do novo perfil para o currículo do Ensino Médio, em decorrência das novas exigências da vida contemporânea, devem fazer referência ao mundo vivencial dos estudantes e professores, aos seus diversos contextos, à qualidade da informação, à História da Ciência, à experimentação, à construção do conhecimento passo a passo e à interdisciplinaridade (BRASIL, 1996, 2006, 2002b).

Os PCNEM também ressaltam, como dimensões para o ensino de Física, a dimensão conceitual/universal (investigações, abstrações e generalizações de objetos e fenômenos como pontos iniciais) e a local/aplicada (aplicação do conhecimento científico e tecnológico). Os PCNs ainda recomendam que o emprego de aulas expositivas não seja o único meio de ensino e que os estudantes devem ser estimulados a aprender, a avaliar e a se contrapor ao que está sendo lido (BRASIL, 1998, 2000, 2002a).

De fato, de acordo com Köhnlein e Peduzzi (2005), tem sido uma das preocupações de alguns pesquisadores dessa área a reivindicação da implantação de aspectos que também proporcionem ao estudante uma compreensão crítica da natureza da ciência e da construção do conhecimento científico. Esta preocupação se intensifica ainda mais quando também consideramos as

orientações dos PCNs já citados.

Além disso, Rezende, Ostermann e Ferraz (2009), em um estudo acerca da produção acadêmica nacional recente sobre o ensino de Física, assinalam que as metodologias de ensino têm sido influenciadas pelos PCNs, através de estratégias didáticas baseadas principalmente nas concepções dos alunos, na experimentação e na contextualização do conhecimento físico.

Estas autoras também relatam que a grande preocupação dos trabalhos sobre recursos didáticos foi e continua sendo, em geral, atender às propostas dos PCNs e que tal preocupação está presente na elaboração de experimentos, na análise de livros didáticos e na elaboração e utilização de textos sobre conteúdos de Física.

Foi também observado por essas autoras que o modelo tradicional, o ensino por transmissão-recepção, identificado nas concepções dos alunos no início da investigação por elas realizada, esta sendo substituído pela nova proposta de modelo metodológico para ensinar Ciências, onde o professor é um orientador que proporciona atividades questionadoras para a compreensão dos temas abordados. Desta forma, elas confirmam o que Delizoicov, Angotti e Pernanbuco (2002, p. 152) escrevem sobre o papel do professor:

“[Ele] é, em sala de aula, o porta-voz de um conteúdo escolar, que não é só um conjunto de fatos, nomes e equações, mas também uma forma de construir um conhecimento específico imbuído de sua produção histórica e de procedimento científico, é o mediador por excelência do processo de aprendizagem do aluno.”

Os PCNs também sugerem que os alunos devem ser estimulados a realizar abordagens qualitativas e quantitativas durante as aulas e propõem a contextualização sociocultural em Física, que consiste na percepção do saber científico e tecnológico como uma construção humana, histórica, social e cultural.

Outros referenciais teóricos considerados neste nosso trabalho estão de alguma forma associados ao ensino por meio da investigação e da experimentação realizada pelo aluno durante o seu processo de instrução. De fato, é consenso geral entre pesquisadores da área que o aluno deve participar do

seu aprendizado. É importante que o aluno deixe de ser um personagem passivo, que nas aulas teóricas apenas tenta receber a transmissão de conteúdos apresentados pelo professor e que nas aulas experimentais se limita à simples manipulação dos experimentos sugeridos ou a uma superficial verificação da lei física que o descreve. Segundo Carvalho (2007, p. 253), o ensino de Ciências

“precisa ser planejado para ir além do trabalho com conceitos e ideias científicas: é preciso que a escola ofereça condições para que a cultura da ciência seja conhecida pelos estudantes. É necessário introduzir os alunos no universo das Ciências, isto é, ensinar os alunos a construir conhecimento, fazendo com que eles, ao perceberem os fenômenos da natureza, sejam capazes de construir suas próprias hipóteses, elaborar suas próprias ideias, organizando-as e buscando explicações para os fenômenos.”

Portanto, a escola precisa ensinar aos alunos a aprender a investigar fenômenos e não simplesmente demonstrá-los através de aulas teóricas ou experimentais.

Para Wilsek e Tosin (2012), ensinar Ciências por investigação

“significa inovar, mudar o foco da dinâmica da aula, deixando de ser uma mera transmissão de conteúdo e, com a mudança, outras atitudes se farão necessárias, como um novo direcionamento no sentir, agir, refletir sobre as estratégias metodológicas utilizadas em sala e também rever os pressupostos teóricos que orientam a prática profissional atual bem como o planejamento do trabalho.”

Estes autores ainda acrescentam que

“é necessária uma (re)elaboração dos processos de ensino-aprendizagem que vai desde uma mudança dos papéis do professor (transmissor) e do aluno (receptor) até a utilização de novas metodologias que possibilitem o aluno a construir seu próprio conhecimento tendo o professor como mediador do processo.”

Para estes autores, os estudantes aprendem melhor quando participam ativamente das atividades de ensino: “o ensino de Ciências através de atividades investigativas pretende conduzir o aluno a ‘aprender a resolver e resolver para aprender’ ”.

Essa forma de trabalhar o aprendizado por investigação abre perspectivas para que o estudante possa se preparar para a vida social e profissional, tornando-se socialmente um ser crítico, consciente e, profissionalmente, apto a trabalhar em equipe, a raciocinar, a pesquisar e a investigar para resolver problemas.

A idéia dominante é que o aluno deve construir o seu conhecimento através de ações que envolvam experimentação, reflexão, relatos, discussões, ponderações e explicações, características de uma investigação científica, conforme descreve Carvalho et al. (1998, p. 21), no livro *Ciências no Ensino Fundamental*.

Ainda conforme estes autores, Kamil e Devries (1986) propuseram que essas ações também podem ser descritas através de formas ou níveis de atuação:

- Agir sobre os objetos e ver como eles reagem.
- Agir sobre os objetos para produzir um efeito desejado.
- Ter consciência de como se produziu o efeito desejado.
- Dar a explicação das causas.

De acordo com Carrasco (1991, p. 89), “a nova educação deve ser problematizadora, crítica, libertadora e o educando/educador deve ter uma postura reflexiva, crítica, transformadora e uma atitude que siga além do verbalismo, que chegue a uma ação”. Ele também afirma que “o aprendizado efetivo se logra mediante o trabalho, o descobrimento, a indagação e a solução de problemas”, e “quando se domina a estrutura de um assunto estudado, ou seja, o aprendizado dos princípios, das leis gerais e suas relações.”

Jimenez-Aleixandre (2010, p. 156) também defendem que

“deve ser criado um ambiente e uma comunidade de aprendizagem em sala de aula, que favoreçam a argumentação e o construtivismo, em que o aluno se converta em protagonista de seu próprio aprendizado e a aprendizagem não seja uma questão individual e sim uma tarefa de grupo, que resolve problemas em comum e reflete sobre o que aprende e como se aprende.”

Compreendemos então que essa mudança de enfoque no ensino – que envolve novas ideias e novas atitudes – deve se iniciar pelo professor. Ele deve romper com a atual postura educacional, se impor, conduzir o aprendizado dos alunos e não ser um simples observador desse aprendizado. De acordo com Carrasco (CARRASCO, op. cit.), “educar é dar meios e apresentar situações que levem o aprendiz a aprender a pensar, compreender e utilizar as ferramentas de apropriação do mundo, definindo seu próprio estilo de pensamento e ação”. Também para ele, “não é melhor professor quem recita mais a lição, mas sim quem guia, orienta, conduz o aluno ao trabalho, a investigação”.

Outrossim, Cachapuz (1989) nos lembra que

“o processo de investigação é uma oportunidade de o professor refletir sobre sua prática. No repensar a prática pedagógica, cabe ao professor pesquisar metodologias que se adaptem à realidade do educando e, a partir daí, promover atividades experimentais que possam estimular e ajudar o aluno na compreensão dos conceitos e no entendimento da ciência como construção histórica e saber prático, que despertem a curiosidade e a criatividade do aluno, que o torne capaz de fazer uso de informações e conhecimentos científicos para entender o mundo que o circunda e resolver problemas e questões que lhes são colocadas”(CACHAPUZ, 1989 apud WILSEK; TOSIN, 2012).

Capecchi e Carvalho (2006, p. 145) também confirmam que o professor mediador é fundamental e “a maneira como o professor faz a mediação entre os estudantes e a cultura na qual estão sendo inseridos é elemento decisivo”.

Evidentemente, para levar a cabo essa grande mudança, o professor tem que estar motivado, com boa remuneração e boas condições de trabalho.

Sobre o experimento como estratégia de ensino, lembramos ainda que, segundo Abib e Araújo (2003), o uso de atividades experimentais como método de aprendizagem de Física tem sido apontado por professores e alunos como uma das maneiras mais frutíferas de se minimizar as dificuldades de se aprender e de se ensinar Física de modo significativo e consistente. Nesse sentido, no campo das investigações nessa área, podemos concluir que pesquisadores têm apontado, na literatura nacional recente, a importância das atividades experimentais associadas às atividades didáticas.

Entretanto, embora seja praticamente consensual seu potencial para uma aprendizagem significativa, observa-se que a experimentação é proposta e discutida na literatura de maneira bastante diversa quanto ao significado que essas atividades podem assumir em diferentes contextos e em diferentes aspectos. A análise do papel das atividades experimentais desenvolvida amplamente nas últimas décadas revela que há uma variedade significativa de possibilidades e tendências de uso dessa estratégia de ensino de Física.

Evidentemente, essas atividades podem ser concebidas ainda como situações que focalizam a mera verificação de leis e teorias, mas queremos realizar situações que privilegiem as condições para os alunos refletirem, formularem questões e reverem suas idéias a respeito dos fenômenos e conceitos abordados, podendo assim atingir um nível de aprendizado que lhes permita efetuar uma reestruturação de seus modelos explicativos dos fenômenos, se necessário.

Como sabemos, é bastante reconhecido o papel das questões na construção do conhecimento. Ao longo da história, as descobertas científicas acontecem principalmente pelos questionamentos que os cientistas fazem sobre os aspectos do funcionamento da natureza.

Carvalho (CARVALHO, op. cit., p. 259) nos lembra que “o conteúdo (o problema) tem que ser significativo para o aluno construir seu conhecimento” e, citando Bachelard (1996), “como todo conhecimento é a resposta a uma questão, essa questão deve motivar o aluno, ser significativa para ele, sob pena de ele não construir o conteúdo desejado”. Deste modo, ao planejar

nossas aulas, devemos sempre partir de uma situação problema, experimental ou não, como uma motivação inicial da aula a ser desenvolvida. Para este autor, também é importante

“propor aos alunos situações problemáticas interessantes para que eles se motivem, se envolvam intelectualmente com a situação física apresentada, possam construir suas próprias hipóteses, possam testá-las experimentalmente e buscar as relações causais para a explicação científica do fenômeno. A proposta é transformar um conhecimento a ser adquirido pelos alunos em um problema que eles possam resolver.”

De fato, segundo Capecchi e Carvalho (CAPECCHI; CARVALHO, op. cit., p. 140), as atividades experimentais “objetivam aumentar a motivação dos estudantes, ensinar técnicas, desenvolver uma visão aceitável da natureza da atividade científica, melhorar a aprendizagem dos conhecimentos científicos e promover atitudes científicas”. Esse método levará o aluno a entender a física realmente como uma ciência experimental, em que as fórmulas e os princípios resultam de experimentação e do pensamento científico.

Vale lembrar ainda que o aluno, ao realizar uma medida, irá aprender a lidar com as incertezas dos valores obtidos, tema pouco ou quase nada trabalhado no ensino fundamental e médio. Ao incluir esta etapa no processo de aprendizagem, o estudante irá verificar que toda medida é incerta e entenderá o papel da propagação das incertezas na sua avaliação. Atualmente, a maioria dos alunos passa a adquirir essa visão experimental da disciplina e passa a ter noções da teoria dos erros somente ao ingressar em um curso de graduação.

Deste modo, após todas estas considerações, escolhemos orientar a atividade apresentada neste trabalho de forma a realizar um ensino por experimentação: investigar fenômenos, efetuar descobertas, solucionar problemas e fazer o aluno sentir-se como um cientista, deslumbrar-se desvendando os mistérios, a beleza e a complexidade da natureza.

Esperamos, com este procedimento, que o aluno, auxiliado pelo professor, desempenhe um papel ativo na aula de modo a agir, a planejar suas

ações, a levantar e testar hipóteses, a selecionar variáveis relevantes ao problema considerado, a verificar e considerar condições não ideais (reais) do seu experimento. Ao mesmo tempo, este aluno desenvolve suas habilidades e competências ao aprender a medir e a registrar as suas medidas, a elaborar tabelas e gráficos e a aplicar a análise dimensional para obter relações matemáticas entre as variáveis envolvidas no fenômeno. Ao final da atividade, esperamos que, ao trocar informações com seus colegas e com seu professor, ele, o aluno, também aprenda a argumentar, a relatar verbalmente e por escrito suas ações e conclusões e, enfim, a comportar-se como um verdadeiro investigador.

Capítulo 3

Um pouco de História

Como observamos no Capítulo 2, os PCNs consideram a inserção da História da Ciência como um elemento incentivador relevante para o desenvolvimento da cultura científica, histórica e social do aluno. Concordamos de alguma forma com esta proposta e, considerando que os modelos atuais dos currículos escolares não privilegiam esta associação. Também acreditamos ser importante elaborar uma relação entre as ciências e a sócio-história de maneira que as questões de âmbito social e tecnológico possam permitir que seja feita por nós, os “indivíduos” que compõem a nossa sociedade, uma avaliação e uma análise mais críticas dessa ciência.

De fato, existe atualmente uma grande discussão entre os acadêmicos sobre se este não seria um dos enfoques pedagógicos que mais contribuiria para um ensino de Física mais estimulante e eficiente, em termos de aprendizagem. Assim, apresentamos na seção seguinte alguns aspectos da relação entre História da Ciência e o ensino de Física, discutidos na literatura correspondente, que apresentam propostas de abordagem alternativas à maneira tradicional de apresentação da História da Ciência e que poderiam ser explorados em um trabalho interdisciplinar com os colegas professores de História.

Vale lembrar, entretanto, que a literatura em língua portuguesa sobre a história da mecânica dos fluidos é bastante escassa. Some-se a isso o fato da abordagem da História da Ciência consistir, na maioria das vezes, de pequenos textos que ou relatam a vida do cientista de forma sumária ou

descrevem a descoberta de um determinado fenômeno feita por ele sem fazer nenhuma menção às condições sociais e econômicas nas quais o personagem considerado desenvolveu o seu trabalho. Essa maneira de apresentação e de uso da História da Ciência perpetua a idéia de que a ciência é produzida por indivíduos de mentes brilhantes e privilegiadas e que quase nunca trabalham arduamente sobre seu objeto de pesquisa.

Considerando todas essas observações e a relevância do tema, apresentamos na segunda seção deste capítulo um resumo do desenvolvimento histórico da mecânica dos fluidos, apesar da inserção da história no ensino de Física não ser o nosso objetivo principal nesta dissertação. Esperamos que esta contribuição possa dar uma visão mais abrangente desta ciência e do seu desenvolvimento ao longo da nossa história e auxiliie os colegas em futuros trabalhos sobre este tópico.

Aproveitamos esta exposição para situar historicamente os aspectos científicos mais relevantes para o problema abordado em nosso trabalho, o escoamento de líquidos através de tubos, como considerados por Torricelli e os Bernoulli, e os conceitos físicos que dão suporte à formulação moderna da mecânica dos fluidos e das suas aplicações. A redação deste capítulo foi auxiliada pelos trabalhos de Rouse e Ince (1963), Vennard (1940), Durand (1933), Darrigol (2005), Neményi (1962) e Koertge (2008) mas, sempre que foi possível, também consultamos as fontes indicadas por esses autores.

3.1 A História da Ciência e o ensino de Física

Há uma corrente na literatura científica que considera uma das características das Ciências Físicas o desenvolvimento de modelos e princípios que, se analisados ou estudados em conjunto com a História da Ciência, podem nos ajudar a entender como a nossa sociedade modificou a sua visão de mundo. Segundo estes mesmos autores, ao falarmos de Física, não podemos deixar para trás a história dessa ciência: Quem foi o cientista? O que o influenciava? Como era a sociedade naquela época? São questões interessantes que nos ajudam a enfatizar a relação da Física com a cultura, com o desenvolvimento tecnológico e os aspectos sociais e econômicos.

Deste modo, segundo esta perspectiva, o papel da História da Ciência, no que se refere à formação cidadã, pode ter grande importância por não se restringir somente ao conhecimento específico deste ou daquele fenômeno ou teoria mas, sim, permitir que a formação do indivíduo seja muito mais efetiva, ao possibilitar as interpretações de fatos, de fenômenos, da sociedade, das transformações do meio social e das interações da ciência com este meio.

Conforme este ponto de vista, com o uso da História da Ciência, percebe-se que o conhecimento é produzido continuamente e que não está concluído da maneira que se apresenta nos livros didáticos. De acordo com Dias (2004, p. 11),

“não se trata apenas de se preocupar com novas metodologias, como formas de facilitar a aprendizagem dos conceitos físicos, mas de levar ao aluno o conhecimento do processo de fazer Ciência, bem como a compreensão dessa ciência como ferramenta útil para um diálogo com o mundo e com sua possível transformação.”

Deste modo, a História da Ciência possibilitaria ao aluno o desenvolvimento de um espírito crítico sobre o conhecimento científico, uma vez que permite a ele analisar o quanto é lenta a produção deste conhecimento e como ele sofre alterações de acordo com as suas limitações e as suas necessidades sociais, políticas e éticas.

Assim, a implementação da História da Ciência no ensino de Física contribuiria para a divulgação científica e cultural, bem como despertaria o aluno para as reflexões do universo científico e para a sociedade que está a sua volta. Para isso, uma breve inserção da História da Ciência poderia ser feita como incentivador para os aspectos científicos relacionados ao experimento.

Também sabemos que a História da Ciência – e, em particular, a História da Física – é repleta de surpresas e curiosidades. Tendo em vista que cada novo avanço científico se caracteriza pelo modelo de sociedade existente na sua respectiva época, acreditamos que, ao valorizarmos o contexto social, cultural, político e econômico daquelas sociedades, estas características da História da Ciência possam ser um auxiliar valioso para a compreensão dos conceitos envolvidos no ensino de Física.

3.2 Breve histórico da Mecânica dos Fluidos

Mesmo com um olhar superficial para a história da ciência, a leitura dos textos de Darrigol (2003) e dos outros autores já citados nos fazem perceber que a necessidade de produção, fornecimento e distribuição de água, combinados com a possibilidade de exploração do seu potencial em realizar trabalho mecânico foram, muito provavelmente, o grande estímulo para a compreensão da dinâmica dos fluidos e de suas características a partir do momento em que o homem se organizou em sociedade. De fato, podemos observar que, ao longo da nossa história, apenas com um conhecimento elementar das propriedades da física dos fluidos, desde o Egito antigo nós construímos poços, transferimos a água de um local para outro, operamos rodas d'água e fazemos funcionar bombas mecânicas.

Desde época remota, com o nosso aperfeiçoamento das técnicas de navegação, o desenvolvimento urbano e o crescimento das cidades em tamanho e população, nós planejamos e construímos barcos cada vez mais potentes e aquedutos cada vez maiores para a distribuição e abastecimento de água e que alcançam o seu auge ainda na época da Roma antiga. Curiosamente, entretanto, com exceção dos trabalhos de Arquimedes (250 a.C.) sobre o princípio do empuxo, quase nada do conhecimento grego antigo aparece na mecânica dos fluidos contemporânea. De fato, após a queda do Império Romano (476 d.C.) não registramos nenhum progresso realizado na mecânica dos fluidos até a época de Leonardo da Vinci (1452–1519). Com Rouse e Ince (1963), Durand (1933) e Neményi (1962) aprendemos que Leonardo pode ser considerado como um dos pioneiros da abordagem moderna da engenharia hidráulica. São dele os primeiros registros escritos de observações e análise do movimento da água, das ondas, dos turbilhões e, em particular, da formulação do princípio da continuidade, que vão permitir o desenvolvimento dessa ciência.

Após a época de da Vinci, graças às exigências nos planos de urbanização das cidades européias e do desenvolvimento marítimo europeu, o acúmulo de conhecimento sobre fluxo de águas e do movimento dos corpos sólidos em meios fluidos rapidamente ganha forma devido às contribuições excepcionais

de Galileu Galilei (1564–1642), de Simon Stevin (1548–1620), de Evangelista Torricelli (1608–1647), de Edmé Mariotte (1620–84), de Isaac Newton (1642–1716), de Johann Bernoulli (1667–1748) e seu filho Daniel Bernoulli (1700–1782), de Leonhard Euler (1707–1783), de Jean-Baptiste le Rond d’Alembert (1717–1783), de Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) e de Claude-Louis Navier (1785–1836), para nomear alguns personagens, e os fundamentos desta ciência começam a se cristalizar na forma científica moderna (DARRIGOL, 2005).

Entretanto, apesar dos esforços desses grandes cientistas, as teorias propostas por eles são, em geral, confirmadas somente em experimentos relativamente simples. Estas divergências significativas entre a teoria e as observações levam d’Alembert a afirmar, em 1768, que “a teoria dos fluidos deve necessariamente ser construída a partir da experiência” porque, de acordo com seus trabalhos teóricos, um fluido ideal (não-viscoso) em movimento estacionário não exerceria nenhuma força sobre um corpo nele imerso. Obviamente, esta afirmativa não pode ser válida para corpos imersos em um fluido real. A partir de então, esta discrepância entre teoria e prática é denominada o “paradoxo de d’Alembert” e serve de demonstração para as limitações da teoria então disponível para resolver problemas reais.

Este conflito entre teoria e prática dá origem às duas abordagens ainda atuais para o tratamento dos fluidos: a teoria “hidrodinâmica”, em que os físicos matemáticos consideram os aspectos teóricos da dinâmica do “fluido ideal”, e a arte da “hidráulica”, onde os engenheiros introduzem fatores de correção empíricos nos modelos físicos de modo a conciliar teoria e experiência.

A partir deste período, grandes quantidades de informações experimentais sobre a resistência dos meios fluidos, principalmente em tubos e canais abertos, foram resumidas em fórmulas propostas por personagens pouco ou nada comuns para nós da Física como Jean Louis Marie Poiseuille (1797–1869), Henry Philibert Gaspard Darcy (1803–1858) e Henri-Émile Bazin (1829–1917), para citar alguns nomes. De fato, desde então, devido à complexidade das fórmulas apresentadas pelos teóricos, é muito comum os engenheiros trabalharem somente com fórmulas empíricas, definidas a partir de um ajuste

dos dados observados ou simplesmente os publicando em forma tabular.

As demandas comerciais e industriais do século XIX exigem o emprego de fluidos com características muito diferentes daquelas do ar e da água, então conhecidas, e estas exigências impõem um desenvolvimento muito rápido do conhecimento sobre a dinâmica dos fluidos em geral. Deste modo, a mecânica dos fluidos sofre mais um grande impulso. Ainda nesse mesmo século, novos progressos científicos são realizados a partir dos trabalhos teóricos e experimentais de Osborne Reynolds (1842–1912) e do desenvolvimento da análise dimensional de Lord Rayleigh (1842–1919). Em 1843, George Gabriel Stokes (1819–1903) consegue dar um caráter mais abrangente às equações de Euler e Navier, que descrevem o movimento de um fluido ideal, de maneira a também descrever o movimento de um fluido viscoso. Deste modo, ele estabelece o começo da reconciliação da hidráulica e da hidrodinâmica com a formulação das equações de Navier-Stokes.

Com a passagem para o século XX, a aeronáutica experimenta um rápido progresso teórico e experimental com os trabalhos de, entre outros, Martin Wilhelm Kutta (1867–1944) e Nikolay Yegorovich Zhukovsky (1847–1921). Finalmente, através dos trabalhos de William F. Durand (1859–1958), Thomas Edward Stanton (1865–1931), Theodore von Kármán (1881–1963), Richard Heinrich Blasius (1883–1970) e Geoffrey Ingram Taylor (1886–1975), o empirismo cede o lugar a métodos matemáticos cada vez mais potentes e estes progressos servem de base para a moderna formulação da mecânica dos fluidos: uma disciplina apoiada nas leis fundamentais do movimento da Mecânica e intimamente relacionada com as observações experimentais.

Nesta nossa dissertação nos deteremos em particular no trabalho dos precursores da moderna mecânica dos fluidos: Leonardo, Torricelli, Johann e Daniel Bernoulli e Euler. Como citamos anteriormente, Neményi (1962) classifica os trabalhos de Leonardo como um marco para a abordagem moderna da engenharia hidráulica e, portanto, coloca o florentino como um precursor da dinâmica newtoniana e do conceito de resistência ao movimento do fluido. De fato, Nemenyi também nos revela que apesar dos cadernos de Leonardo terem sido publicados somente em 1797, muitas das suas idéias sobre a dinâmica dos fluidos não estavam ainda ultrapassadas nesse período.

Os cadernos de Leonardo nos revelam ainda que, apesar de seus resultados não terem sido publicados, várias de suas ideias se difundiram pela Europa, influenciando vários pesquisadores com as suas informações científicas e com o seu particular método de trabalho. Uma das peculiaridades de todos os trabalhos de Leonardo consiste na integração do método observacional e experimental e do raciocínio lógico com aplicações. Segundo Nemenyi, é nos cadernos de Leonardo que vamos encontrar o primeiro registro da descrição da lei de continuidade dos fluidos, por exemplo, e o planejamento, a descrição e a realização de vários experimentos em mecânica dos fluidos em situação controlada.

Aprendemos também com Nemenyi que um dos pesquisadores mais influenciados pelos trabalhos de Leonardo sobre a mecânica dos fluidos foi o monge beneditino Benedetto Castelli (1577–1644), grande amigo de Galileu e professor de Torricelli. A influência dos trabalhos de Leonardo em hidrodinâmica e hidráulica sobre as gerações que o sucederam são ainda mais reforçadas quando aprendemos que o padre dominicano Francesco Arconati (1592?–1648?) – um grande admirador de Leonardo e proprietário de 12 dos seus cadernos, incluindo o famoso *Codex Atlanticus* que ele doou para a Biblioteca Ambrosiana, em 1637 – preparou uma compilação das contribuições do florentino para esta ciência. Este trabalho foi finalmente publicado por Cardinali (1826), recebeu uma nova edição em 1923 e uma outra em 1934, feita por Carusi et al. (CARUSI et al., 1923, 1934).

Podemos concluir então que Galileu seguramente também foi influenciado pelos trabalhos de Leonardo, assim como Torricelli, estudante de Castelli e assistente de Galileu durante os seus últimos meses de vida. Torricelli sucede a Galileu como filósofo e matemático no ducado da Toscana, reinvestiga e confirma os resultados de Galileu sobre a trajetória parabólica dos projéteis se ignorarmos a resistência do ar. Ele ainda acrescenta às conclusões obtidas o seguinte corolário remarcável afirmando que as trajetórias do projéteis que seguiriam diferentes direções mas com velocidade inicial de mesmo módulo seriam envoltas por uma outra parábola, a denominada parábola de segurança.

Após seus trabalhos sobre os princípios do barômetro e de suas aplica-

ções na determinação das variações da pressão atmosférica, Torricelli aplica a dinâmica de Galileu para um ponto material na descrição dos jatos dos líquidos ejetados a partir de pequenos orifícios em grandes recipientes. Ele considera inicialmente que, em tradução livre, “a água ejetada através do orifício possui o mesmo ímpeto que um corpo de mesmo peso que cai livremente da mesma altura” e conclui, após realizar os experimentos, que “a experiência parece confirmar a hipótese, mas não totalmente”(TORRICELLI, 1644, p. 101)(NEMÉNYI, 1962).

Torricelli, em seus estudos, considera vasos cilíndricos com um pequeno orifício na parede lateral e descobre que a velocidade da água ejetada, v , é proporcional à raiz quadrada da altura h da superfície da água acima do orifício ($v \propto h^2$). Combinando este resultado com os resultados de Galileu sobre o movimento parabólico de um ponto material lançado com velocidade paralela à direção horizontal, Torricelli determina que o alcance do jato d’água, A , a partir da base do recipiente é proporcional à média geométrica das medidas da altura do orifício em relação a base do recipiente, H , e da altura h da superfície da água no recipiente: $A \propto \sqrt{H \times h}$.

Em 1586, temos a contribuição de Stevin para a hidrostática: a força exercida pelo líquido na base do recipiente que o contém é igual ao peso da coluna do líquido entre esta base e a sua superfície livre. Stevin também determina que esta força não depende da forma do recipiente, o chamado paradoxo da hidrostática.

Temos que aguardar até 1687, quando são publicadas as contribuições de Newton para a descrição do movimento sob ação resistiva. No segundo livro dos seus *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* (NEWTON, 2010), intitulado *O movimento dos corpos em meios resistivos*, Newton discute este movimento de maneira a concluir que o espaço interplanetário é vazio. Por meio de experimentos e da sua teoria ele estabelece que a resistência que um fluido oferece a um corpo em movimento em seu interior é proporcional à sua seção transversal, à densidade do fluido e ao quadrado da sua velocidade. Entretanto, para parafrasear as palavras de Torricelli, “a experiência parece confirmar a hipótese, mas (ainda) não totalmente”.

Em 1738, em contraste com as ideias de Newton, que emprega em sua

análise matemática o balanço entre o momento perdido pelo objeto e aquele adquirido pelo fluido, Daniel Bernoulli vai redigir a sua *Hydrodynamica*, baseada na conservação da *vis viva* (o dobro da energia cinética) de Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) (LEIBNIZ, 1686). Daniel Bernoulli realiza neste trabalho um estudo experimental da propulsão de jatos de líquidos e gases por meio de manômetros e apresenta uma teoria correspondente onde ele estabelece o princípio que leva seu nome. Entretanto, a *equação de Bernoulli* na forma como a conhecemos hoje – uma expressão algébrica entre a pressão, a velocidade e a altura da coluna da água – não está presente neste livro.

Poucos anos mais tarde, em 1742, Johann Bernoulli, pai de Daniel, publica o seu livro *Hydraulica*, chegando mesmo a falsificar a data da edição para 1732 e, assim, ter a prioridade nas suas descobertas teóricas. Usando da sua experiência como um pioneiro do cálculo diferencial e integral, Johann substitui a abordagem de seu filho em descrever a pressão em termos das alturas dos manômetros pela adoção do conceito de força atuando sobre uma área determinada (BERNOULLI; BERNOULLI, 1968). Entretanto, o princípio de Bernoulli, na sua forma algébrica atual, também não está presente na *Hydraulica* de Johann.

Em 1744 e 1752, d’Alembert publica dois tratados, onde ele apresenta a dinâmica para um fluido em movimento e descreve a situação paradoxal da falta de resistência ao movimento de um sólido imerso em um fluido perfeito (D’ALEMBERT, 1744, 1752). Neste mesmo período, Euler explora o conceito de pressão adotado por Johann e discute os resultados de Daniel Bernoulli e de d’Alembert. Finalmente, em 1755, Euler publica uma equação diferencial parcial para o movimento do fluido em condições de movimento irrotacional, estacionário e sob a ação gravitacional e que incorpora o gradiente da pressão, no artigo “Principes généraux du mouvement des fluides”, *Mémoires de l’Académie Royale des Sciences*, Berlin, 11(1755), 274-315 (1757). Em seguida, ele aplica a sua equação nos diferentes experimentos de Daniel, descritos na *Hydrodynamica*, e reobtem de uma forma rigorosa a equação de (Daniel) Bernoulli como a conhecemos hoje (BERNOULLI; BERNOULLI, 1968; EULER, 1755a, 1755b, 1755c).

Terminamos este capítulo observando que nas Ciências, mais uma vez, vale a lei de Stigler da eponímia: “nenhuma descoberta científica é denominada com o nome do seu descobridor original”¹(STIGLER, 1980) e, deste modo, também não poderia ser diferente com a história dos pioneiros da mecânica dos fluidos.

¹Stephen Stigler, professor de Estatística da University of Chicago. Curiosamente, o próprio Stigler atribui a descoberta desta “lei” ao sociólogo Robert K. Merton, de maneira que a “lei de Stigler” é um exemplo de si mesma.

Capítulo 4

A experiência do jato de água

Apresentamos, a seguir, a atividade que denominamos *A experiência do jato de água*. Esta atividade é desenvolvida a partir da observação do fluxo de uma coluna de água na forma de um jato que escoar através de um orifício na superfície lateral do recipiente. Percebemos então que o alcance A que a água ejetada realiza varia com a altura h da coluna de água em relação ao orifício. Observamos também que se elevarmos a altura H do orifício em relação ao fundo do recipiente que recolhe a água ejetada, ocorre também uma variação do alcance realizado pelo jato.

Deste modo, as variáveis a serem trabalhadas são a altura h da coluna de água, a altura H do orifício e o alcance A do jato de água, e procuramos determinar uma relação algébrica entre elas através da análise dimensional e da análise de gráficos que relacionem estes parâmetros físicos. Através do experimento e da sua análise pretendemos também discutir os fenômenos relacionados à pressão hidrostática e, em particular, a equação de Bernoulli.

Para essa atividade, consideramos que os alunos já tenham estudado a mecânica newtoniana da partícula, aprendido sobre os lançamentos vertical e oblíquo, a conservação de energia e o conceito de pressão (atmosférica e hidrostática). Eles devem também dominar o conteúdo básico de funções do 1º, do 2º grau, de elaboração dos gráficos correspondentes, além de noções de análise dimensional, de construção geométrica e de propagação de erros.

A experiência é realizada com o auxílio de recipientes plásticos (do tipo

utilizado para guardar mantimentos) e um recipiente plástico de base retangular (tipo bacia) conforme ilustrado na figura 4.1. Também podem ser utilizadas garrafas PET (politereflato de etileno) de seção circular razoavelmente bem definida, apoiadas em suportes convenientes. Também utilizamos tubos cilíndricos em acrílico, de diâmetros variados, que podem ser encontrados nas casas do ramo a um preço razoável.



Figura 4.1: Recipientes típicos para o experimento.

Após construir o arranjo ilustrado na figura 4.1, preenchemos com água o recipiente e permitimos que o líquido escoe através de um pequeno orifício feito na parte lateral inferior deste mesmo recipiente, como ilustrado na figura 4.2. No nosso experimento o diâmetro do orifício foi constante e igual a $4,0(1)$ mm.

Para indicar as incertezas absolutas, empregamos a notação sobre os últimos algarismos incertos da medida entre parênteses. Deste modo, por exemplo, a medida $1,0(1)$ cm corresponde a $(1,0 \pm 0,1)$ cm e a medida $1,03(12)$ cm corresponde a $(1,03 \pm 0,12)$ cm. Sempre que possível, reduzimos a incerteza à somente um algarismo significativo, como indicado na medida do diâmetro do orifício.

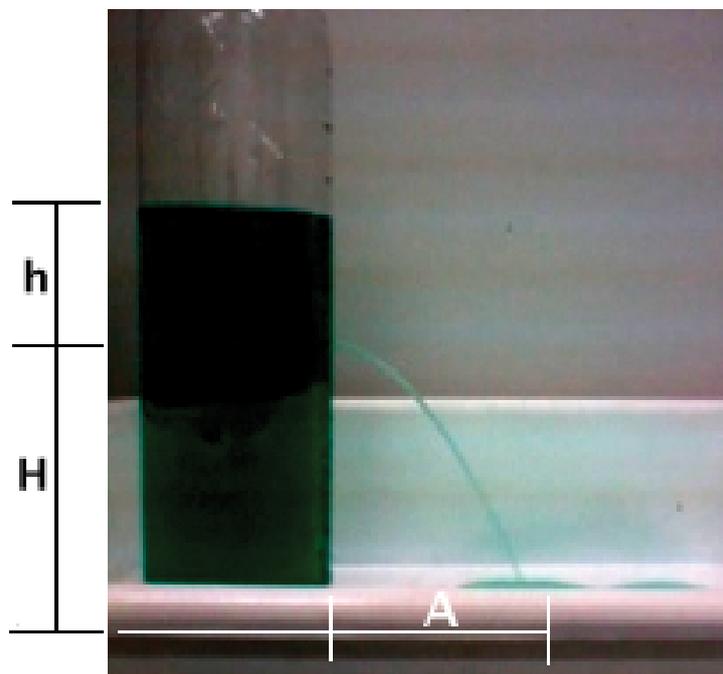


Figura 4.2: Alcance A do jato de água para uma coluna de água a uma altura h e para um orifício a uma altura H em relação à base definida pelo recipiente que recolhe a água.

O professor pode estimular os alunos a experimentar com um mesmo vasilhame com o orifício em diferentes alturas, vasilhames de mesma forma mas seções diferentes e até mesmo vasilhames de diferentes formas e seções. Em nosso experimento tivemos a nossa disposição dois tipos de vasilhames: um em forma de garrafa PET (cilíndrico) e um segundo na forma de tubo cilíndrico em acrílico, para pequenos diâmetros.

Ao trabalharmos junto com os alunos, observamos de forma qualitativa que o alcance que o jato realiza depende da altura da coluna de água no interior do vasilhame. Procuramos então estabelecer uma relação entre o alcance A da água e a altura h da coluna formada por ela no interior do recipiente. Para este propósito, fixamos o valor da altura H do orifício em relação ao fundo do recipiente que recebe a água e onde marcamos o alcance realizado pelo jato, como ilustrado na figura 4.2. As medidas do alcance podem ser feitas com uma simples régua, fixada ao fundo da cuba, como

ilustrado na figura 4.1, ou feitas por meio das linhas paralelas traçadas na parte inferior da cuba em intervalos de 1,0(1) cm e definindo, assim, uma superfície “centimetrada” no seu interior, não visíveis nesta figura.

4.1 Recipiente de diâmetro 6,0(1) cm

Inicialmente descrevemos o alcance A realizado pelo jato de água, para uma coluna de água no recipiente cilíndrico de diâmetro D igual a 6,0(1) cm, a partir de diferentes alturas h , e para um orifício de diâmetro igual a 4,0(1) mm a uma altura H em relação à base igual a 5,0(3) cm.

4.1.1 Alcances para uma dada altura H do orifício

Os resultados obtidos relacionando o alcance A do jato de água com a altura h da coluna de água no interior do recipiente, a partir de um orifício lateral a uma altura $H = 5,0(3)$ cm, estão representados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Alcance realizado pelo jato de água (A) vs. altura da coluna de água (h), para um orifício lateral a uma altura $H = 5,0(3)$ cm.

altura h (cm)	alcance A (cm)
2,0(3)	4,0(3)
4,0(3)	6,5(3)
6,0(3)	8,5(3)
8,0(3)	10,5(3)
10,0(3)	12,0(3)
12,0(3)	13,5(3)

A partir da Tabela 4.1, observamos que, ao variar a altura h , o alcance A também varia. Para investigarmos qual é a relação ente estas duas grandezas físicas, representamos na figura 4.3 os dados obtidos para o alcance A vs. altura h arbitrada. Este é um bom momento para lembrar ao aluno que já nos encontramos diversas vezes, ao longo da sua formação, com gráficos similares

a este, particularmente na cinemática do movimento de corpos acelerados como, por exemplo, na cinemática de corpos em queda livre. Para este propósito, para uma discussão deste tipo de gráfico aplicado à cinemática do movimento, ver o trabalho de final de curso de Brito (2008).

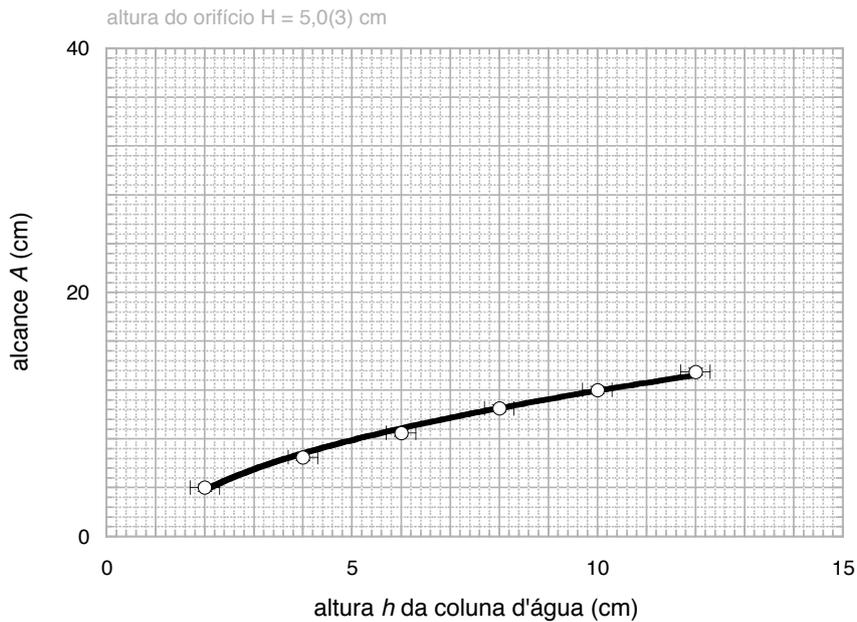


Figura 4.3: Alcance A vs. altura h da coluna de água. O orifício de diâmetro igual a $4,0(1)$ mm se encontra a uma altura $H = 5,0(3)$ cm a partir do fundo do recipiente que recebe a água. A curva traçada é somente um guia e revela a relação não linear entre os parâmetros físicos envolvidos.

Do gráfico obtido na figura 4.3, fica evidente que não existe uma relação linear entre as grandezas envolvidas no problema. Esta seria uma boa oportunidade para empregarmos a análise dimensional para estabelecer uma relação funcional entre o alcance A , a altura do líquido h e a altura do orifício H :

$$[A] = [H]^p [h]^q, \quad (4.1)$$

e temos então várias possibilidades matemáticas. Dentre elas, temos, por

exemplo,

$$p = 0 \quad \text{e} \quad q = 1. \quad (4.2)$$

Esta opção pode ser descartada porque, do gráfico, não há linearidade entre os parâmetros físicos A e h . Outra possibilidade, que vai se mostrar bastante frutífera, é a escolha

$$p = 1/2 \quad \text{e} \quad q = 1/2. \quad (4.3)$$

Podemos enfatizar junto aos alunos que estas possíveis representações gráficas apresentadas são apenas tentativas geométricas (hipóteses) para uma possível representação algébrica dos parâmetros envolvidos no problema.

Evidentemente, poderíamos tentar outras relações como, por exemplo, a razão entre os parâmetros ou o produto entre eles, respeitando a análise dimensional. Ao final, ficaremos sempre com aquela representação que for a mais simples que encontrarmos. Portanto, seguindo este procedimento, determinamos o quadrado dos alcances obtidos, como indicado na Tabela 4.2,

Tabela 4.2: Alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) vs. altura da coluna de água (h), para um orifício lateral a uma altura $H = 5,0(3)$ cm.

$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	4,0(3)	16(2)
4,0(3)	6,5(3)	42(4)
6,0(3)	8,5(3)	72(5)
8,0(3)	10,5(3)	110(6)
10,0(3)	12,0(3)	144(7)
12,0(3)	13,5(3)	182(8)

e representamos, na figura 4.4, o quadrado do alcance realizado pela água em função da altura da coluna do líquido.

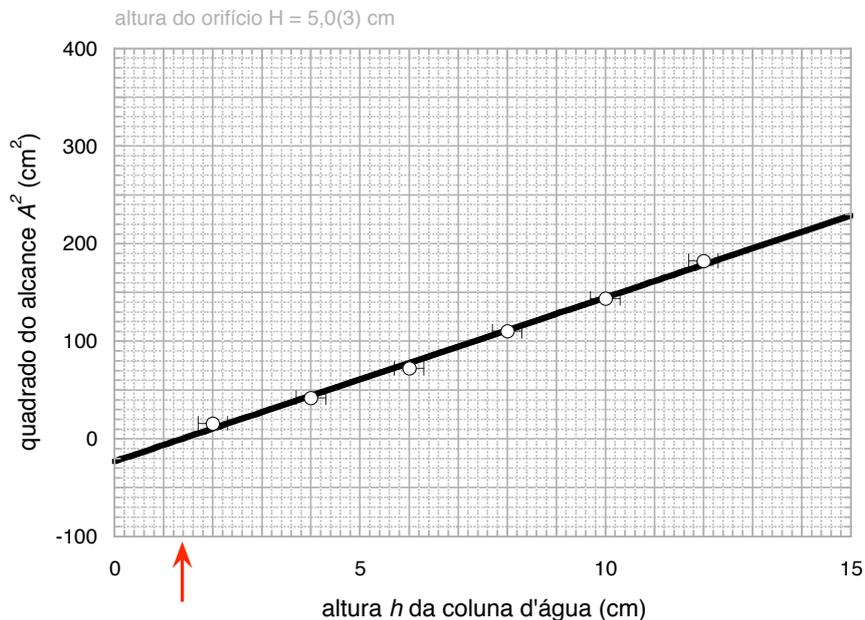


Figura 4.4: Quadrado do alcance A vs. altura h da coluna de água. O orifício de diâmetro igual a $4,0(1)$ mm se encontra a uma altura $H = 5,0(3)$ cm. A flecha indica que para uma altura $h_0 \approx 1,4(4)$ cm não há fluxo de água no recipiente.

Ao analisarmos o gráfico da figura 4.4 com o auxílio da figura 4.5, observamos que, de fato, obtemos uma relação linear entre os parâmetros envolvidos:

$$A^2 = bh + a, \quad (4.4)$$

onde a e b são constantes de valor aproximado

$$a \approx -23(5) \text{ cm}^2 \quad (4.5)$$

e

$$b = \frac{250(10) \text{ cm}^2}{15,0(6) \text{ cm}} \approx 17(1) \text{ cm}. \quad (4.6)$$

Estas constantes e suas incertezas são, respectivamente, o coeficiente linear

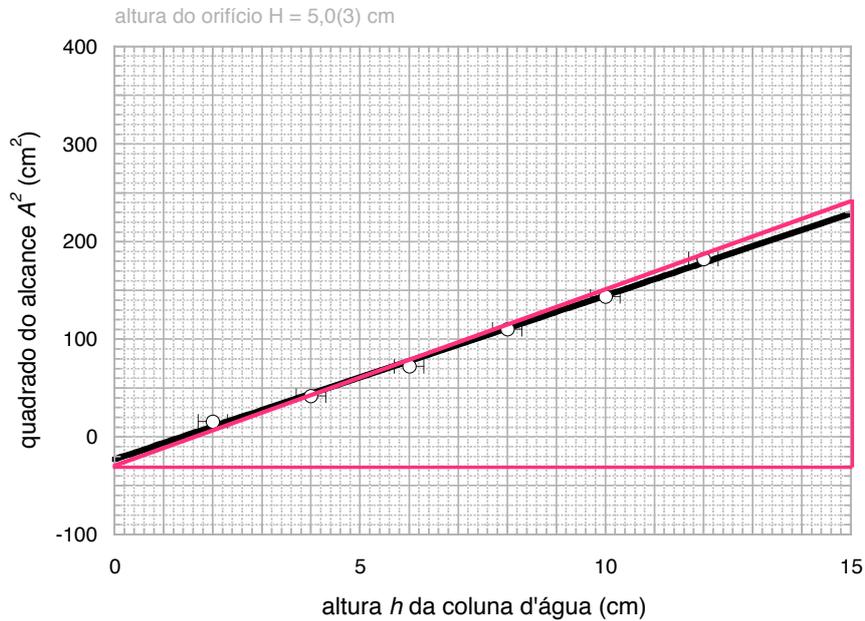


Figura 4.5: Quadrado do alcance A vs. altura h da coluna de água. Os coeficientes linear a e angular b da reta são determinados por triangulação.

e angular da reta determinados por triangulação a partir dos gráficos das figuras 4.4 e 4.5. Portanto, esta análise revela que o alcance A que o jato de água realiza obedece a uma lei polinomial com a altura h da coluna de água:

$$A = \alpha (h - h_0)^{1/2} \quad (4.7)$$

onde, agora, escrevemos

$$\alpha = b^{1/2} \quad (4.8)$$

e

$$h_0 = -\frac{a}{b}, \quad (4.9)$$

uma constante que corresponde a uma altura limite para a coluna de água: para alturas menores do que este valor, não deve ocorrer mais nenhum jato de água. Se não fosse deste modo, o quadrado do alcance teria um valor

negativo! Substituindo-se os valores de a e b , obtemos

$$\alpha \approx 4,8(5) \text{ cm}^{1/2} \quad (4.10)$$

e

$$h_0 \approx 1,4(4) \text{ cm.} \quad (4.11)$$

Este último resultado pode ser verificado imediatamente pelo experimenter.

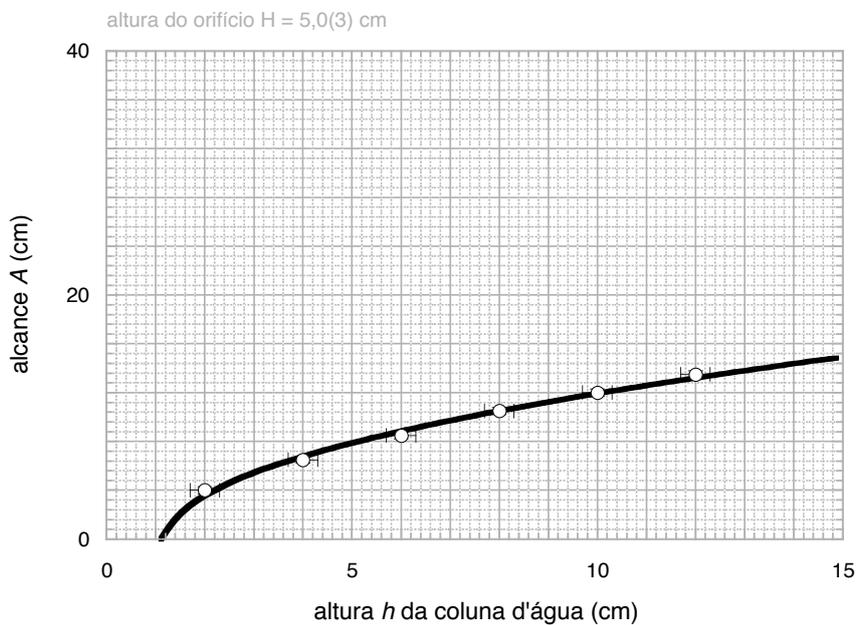


Figura 4.6: Alcance A vs. altura h da coluna de água. A linha contínua representa a equação (4.7) ajustada a partir da análise dos dados.

Finalmente, o alcance A vs. altura h da coluna de água está representado na figura 4.6, para um orifício na superfície lateral do recipiente de diâmetro igual a 4,0(1) mm e a uma altura $H = 5,0(3)$ cm a partir do fundo do recipiente que recebe a água. A linha contínua representa a equação (4.7) ajustada a partir da análise dos dados.

Com o propósito de verificar se o padrão obtido persiste para diferentes

alturas H do orifício em relação ao fundo da cuba, fazemos novas medições onde, desta vez, variamos este parâmetro.

4.1.2 Alcances para diferentes alturas H

As Tabelas 4.3 e 4.4 representam o alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) vs. altura da coluna de água (h), para um orifício lateral a diferentes alturas H em relação à base.

Tabela 4.3: Alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) vs. altura da coluna de água (h), para um orifício lateral a uma altura H .

H		9,9(3) cm		12,9(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	
2,0(3)	6,0(1)	36(4)	6,5(3)	42(4)	
4,0(3)	10,0(3)	100(6)	11,0(3)	121(7)	
6,0(3)	13,0(3)	169(8)	14,0(3)	196(8)	
8,0(3)	15,0(3)	225(9)	16,5(3)	272(10)	
10,0(3)	16,5(3)	272(10)	18,5(3)	342(11)	
12,0(3)	18,5(3)	342(10)	20,5(3)	420(12)	

Tabela 4.4: Alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) vs. altura da coluna de água (h), para um orifício lateral a uma altura H .

H		16,4(3) cm		21,0(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	
2,0(3)	7,5(3)	56(4)	9,0(3)	81(5)	
4,0(3)	13,0(3)	169(8)	15,0(1)	225(9)	
6,0(3)	16,5(3)	272(10)	18,0(3)	324(11)	
8,0(3)	20,0(3)	400(12)	21,5(3)	462(13)	
10,0(3)	21,5(3)	462(13)	24,0(3)	576(14)	
12,0(3)	24,5(1)	600(15)	27,0(3)	729(16)	

Os quadrados dos alcances das Tabelas 4.2, 4.3 e 4.4 estão representados na figura 4.7 em função da altura h da coluna de água.

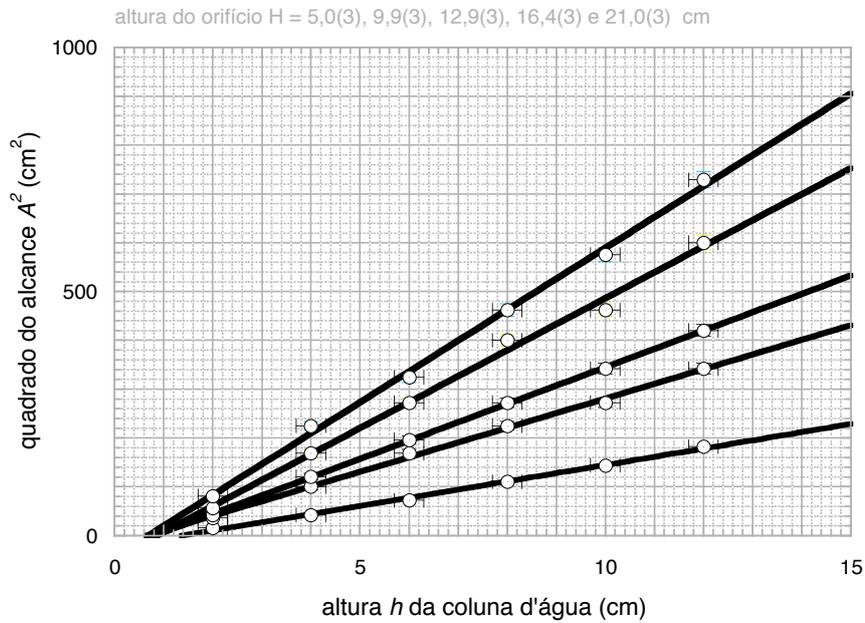


Figura 4.7: Quadrado do alcance A vs. altura h da coluna de água, para diferentes alturas H do orifício.

Tabela 4.5: Coeficientes a e b para diferentes alturas H do orifício.

H (cm)	a (cm ²)	b (cm)	α (cm ^{1/2})	h_0 (cm)
5,0(3)	-23(3)	17(1)	4,1(1)	1,4(4)
9,9(3)	-25(5)	32(1)	5,7(6)	0,8(2)
12,9(3)	-30(5)	38(1)	6,1(6)	0,8(1)
16,4(3)	-45(15)	53(2)	7,2(1)	0,8(3)
21,0(3)	-45(13)	63(2)	7,9(1)	0,7(3)

A partir do gráfico da figura 4.7, podemos concluir que, para a região considerada para as alturas h , existe sempre uma relação linear entre o quadrado do alcance e a altura da coluna de água. Podemos então obter os coeficientes

linear a e angular b das respectivas retas associadas às diferentes alturas H do orifício, como indicado na Tabela 4.5. Considerando as incertezas das medidas, podemos observar, a partir desta tabela, que o valor do parâmetro h_0 é, exceto para o seu primeiro valor, praticamente constante e podemos concluir também que o coeficiente angular b aumenta ao aumentarmos a altura H .

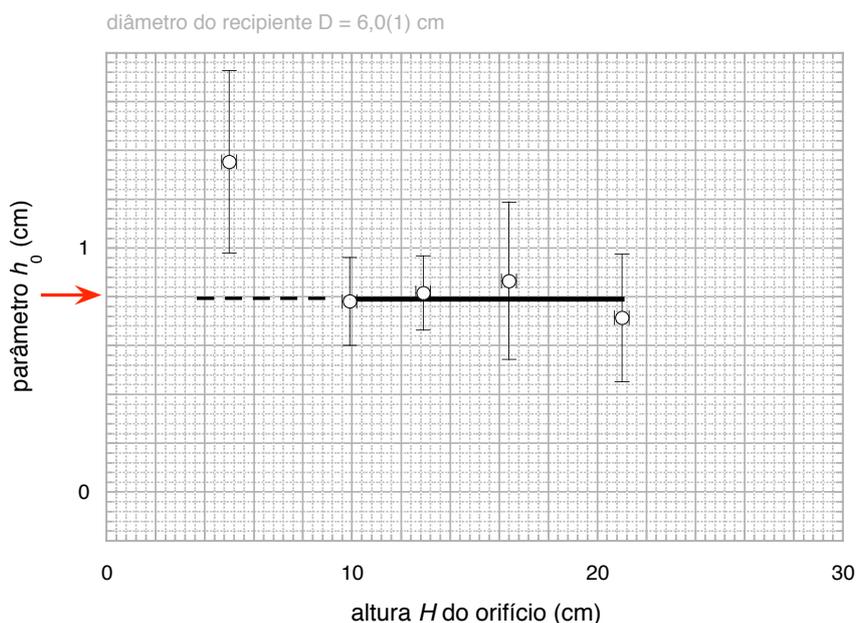


Figura 4.8: Parâmetro h_0 para os diferentes experimentos. Observamos desta figura que, se não considerarmos a primeira medida de h_0 , para $H = 5,0(3)$ cm, (linha tracejada) o valor deste parâmetro é praticamente constante (linha contínua) e de valor médio $\bar{h}_0 \approx 0,8(2)$ cm.

A primeira observação pode ser verificada com a construção do gráfico representado na figura 4.8. Observamos desta figura que, se não considerarmos a primeira medida de h_0 , para $H = 5,0(3)$ cm, (linha tracejada, na figura) o valor deste parâmetro é praticamente independente do valor que estabelecemos para a altura H do orifício no recipiente por onde flui a água (linha contínua, na mesma figura). Determinando a média aritmética dos quatro últimos valores de h_0 , obtemos um valor médio igual a $0,8(2)$ cm.

Podemos analisar a segunda observação, a variação do coeficiente angular

b com a variação da altura H , através da construção do gráfico representado na figura 4.9.

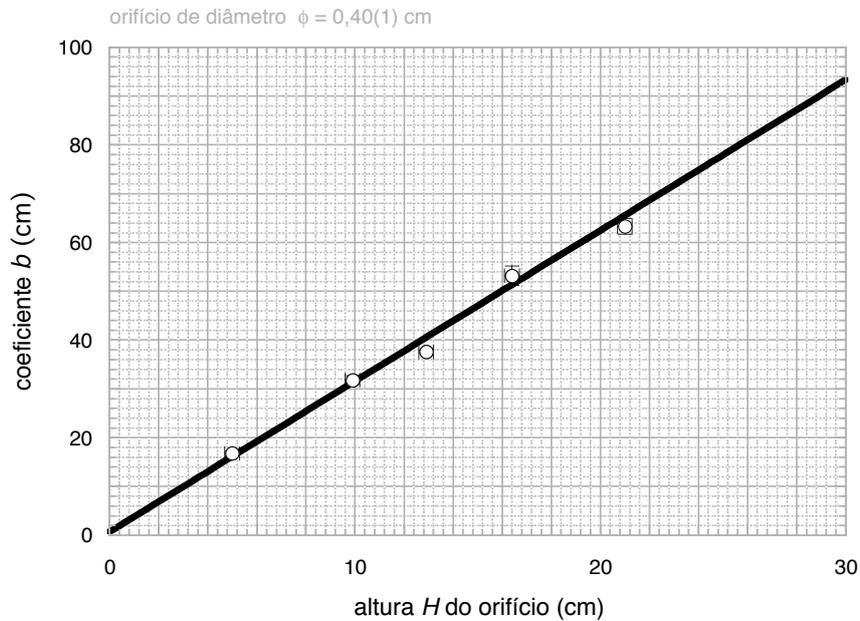


Figura 4.9: Gráfico do coeficiente angular b vs. altura H do orifício no recipiente de diâmetro $D = 6,0(1)$ cm.

Do gráfico da figura 4.9 observamos que o coeficiente angular b é linearmente proporcional à altura H do orifício:

$$b = cH, \quad (4.12)$$

onde c é o coeficiente angular da reta na figura:

$$c = \frac{94(4) \text{ cm}}{30,0(8) \text{ cm}} \approx 3,1(2). \quad (4.13)$$

Então, podemos concluir que $\alpha = \sqrt{cH}$. Deste modo, fazendo $\kappa = \sqrt{c}$, podemos também escrever que

$$\alpha = \kappa\sqrt{H}. \quad (4.14)$$

Substituindo a equação (4.14) em (4.7) obtemos, finalmente, que

$$A = \kappa\sqrt{H}\sqrt{h - h_0}, \quad (4.15)$$

onde $\kappa \approx \sqrt{3,1(2)} \approx 1,76(6)$.

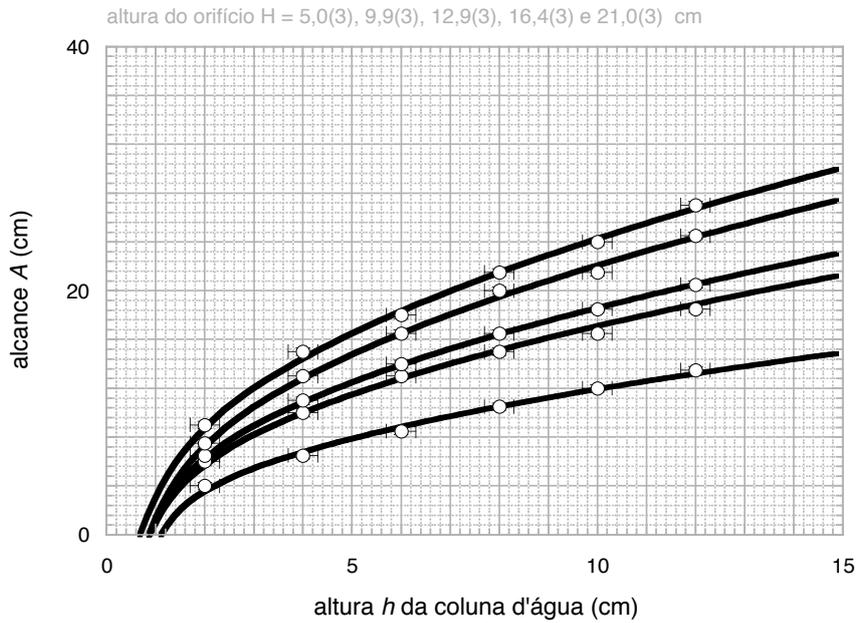


Figura 4.10: Alcance A vs. altura h da coluna de água. O orifício está a uma altura H a partir do fundo do recipiente que recebe a água.

A figura 4.10 representa o gráfico do alcance A vs. altura h da coluna de água, conforme definido pela equação (4.15). O orifício de diâmetro igual a 4,0(1) mm se encontra a uma altura $H = 5,0(3), 9,9(3), 12,9(3), 16,4(3)$ e 21,0(3) cm, a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Observamos ainda que, para alturas da coluna de água h muito maiores do que h_0 , reobtemos o resultado de Torricelli:

$$A \approx \kappa\sqrt{Hh}, \quad (4.16)$$

o alcance do jato de água é proporcional à média geométrica da altura H do

orifício e da altura h da coluna de água.

Este é um bom momento para recordar os estudos de Galileu e Torricelli sobre o movimento parabólico de um ponto material lançado com velocidade v paralela à direção horizontal de uma altura H . Eliminando a duração da queda $t = \sqrt{2H/g}$ na expressão do alcance do jato d'água, $A = vt$ e comparando o resultado obtido com a equação (4.16), podemos conjecturar que o quadrado da velocidade de saída da água v é proporcional à altura h da sua coluna no recipiente que a contém.

Observamos também que uma questão natural que se apresenta é se o peso da coluna de água influi no alcance realizado. Podemos investigar o papel do peso variando a seção do recipiente que contém uma coluna de água de mesma altura h . Discutimos os resultados obtidos nas seções seguintes.

4.2 Recipiente de diâmetro 15,0(1) cm

Descrevemos agora o alcance A realizado pelo jato de água, para uma coluna de água no recipiente de diâmetro D igual a 15,0(1) cm, a partir de diferentes alturas h , quando o orifício de diâmetro 4,0(1) mm se encontra a uma altura $H = 5,0(3)$, 9,9(3), 12,9(3), 16,4(3) e 21,0(3) cm a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Os resultados obtidos estão representados e discutidos nos parágrafos seguintes.

4.2.1 Alcances para diferentes alturas H

As Tabelas 4.6 e 4.7 representam o alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) em função da altura da coluna de água (h), para um orifício lateral de diâmetro igual a 4,0(1) mm a uma altura $H = 5,0(3)$, 9,9(3), 12,9(3), 16,4(3) e 21,0(3) cm. Em seguida, representamos na figura 4.11 os dados obtidos para o alcance A .

Tabela 4.6: Alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) vs. altura da coluna de água (h), para um orifício lateral a uma altura H .

H	5,0(3) cm		9,9(3) cm		12,9(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	4,0(3)	16(2)	6,0(1)	36(4)	6,5(3)	42(4)
4,0(3)	7,0(3)	49(4)	10,0(3)	100(6)	11,5(3)	132(7)
6,0(3)	9,0(3)	81(5)	12,5(3)	156(8)	15,0(1)	225(9)
8,0(3)	11,0(3)	121(7)	15,5(3)	240(9)	17,5(3)	306(10)
10,0(3)	12,5(3)	156(8)	17,5(3)	306(11)	20,5(3)	420(12)
12,0(3)	14,0(3)	196(8)	19,5(3)	380(12)	22,5(3)	506(14)

Tabela 4.7: Alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) vs. altura da coluna de água (h), para um orifício lateral a uma altura H .

H	16,4(3) cm		21,0(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	8,5(3)	72(5)	9,0(3)	81(5)
4,0(3)	13,5(3)	182(8)	15,0(1)	225(9)
6,0(3)	17,5(3)	306(10)	19,5(3)	380(12)
8,0(3)	21,0(3)	441(13)	22,5(3)	506(14)
10,0(3)	23,5(3)	552(14)	25,5(3)	650(15)
12,0(3)	25,5(3)	650(15)	28,5(3)	812(17)

Seguindo o procedimento estabelecido na seção 4.1, o gráfico da figura 4.11 nos revela mais uma vez a não linearidade entre o alcance realizado e a altura da coluna de água. Este comportamento nos sugere que representemos o quadrado do alcance realizado pela água em função da altura da sua coluna no interior do recipiente.

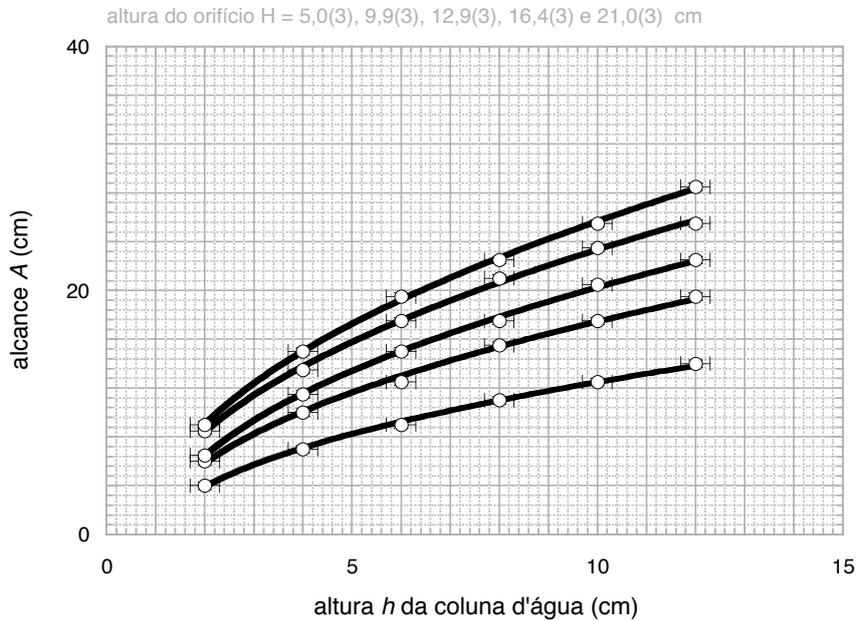


Figura 4.11: Alcance A vs. altura h da coluna de água. O orifício está a diferentes alturas H , como indicado no gráfico. As curvas traçadas são somente um guia para os olhos.

Os quadrados dos alcances das Tabelas 4.6 e 4.7 estão representados na figura 4.12 em função da altura h da coluna de água.

A partir do gráfico da figura 4.12, podemos concluir que, para a região considerada para as alturas h , existe sempre uma relação linear entre o quadrado do alcance e a altura da coluna de água. Podemos então obter os coeficientes linear a e angular b das respectivas retas associadas às diferentes alturas H do orifício, como indicado na Tabela 4.8. Considerando as incertezas das medidas, podemos observar, a partir desta tabela, que o valor do parâmetro h_0 não varia substancialmente com a variação da altura H e podemos concluir também que o coeficiente angular b aumenta ao aumentarmos a altura H .

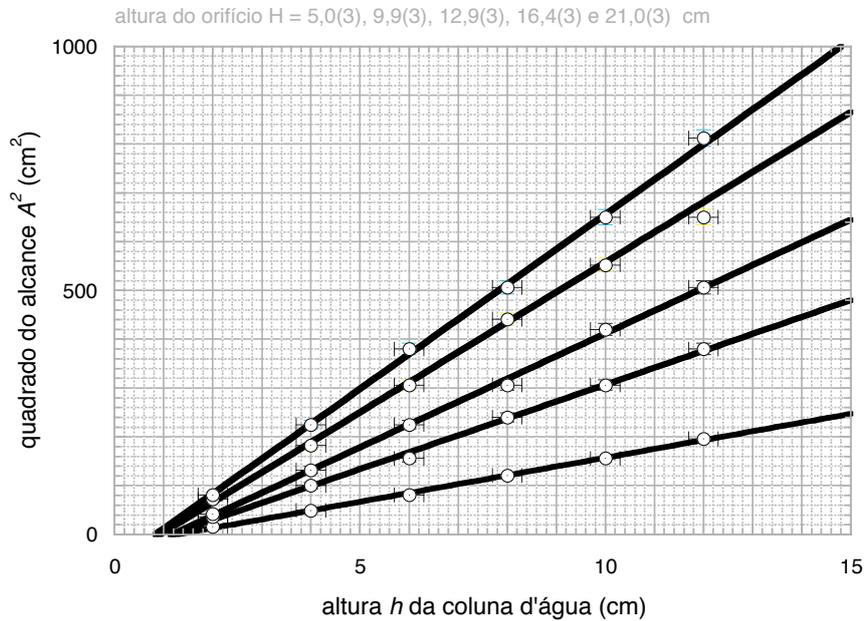


Figura 4.12: Quadrado do alcance A vs. altura h da coluna de água, para diferentes alturas H do orifício. Observamos que existe uma altura h_0 a partir da qual não há fluxo de água no recipiente.

Tabela 4.8: Coeficientes a e b para diferentes alturas H do orifício.

H (cm)	a (cm ²)	b (cm)	α (cm ^{1/2})	h_0 (cm)
5,0(3)	-23(4)	18(1)	4,2(1)	1,3(3)
9,9(3)	-40(8)	35(1)	5,9(1)	1,1(3)
12,9(3)	-55(8)	37(1)	6,1(1)	1,5(3)
16,4(3)	-57(12)	62(2)	7,9(1)	0,9(2)
21,0(3)	-57(12)	72(2)	8,5(1)	0,8(2)

A primeira observação pode ser verificada com a construção do gráfico representado na figura 4.13. Observamos desta figura que, considerando as incertezas das medidas, o valor de h_0 é praticamente constante. Determinando a média aritmética dos valores de h_0 considerados, obtemos um valor

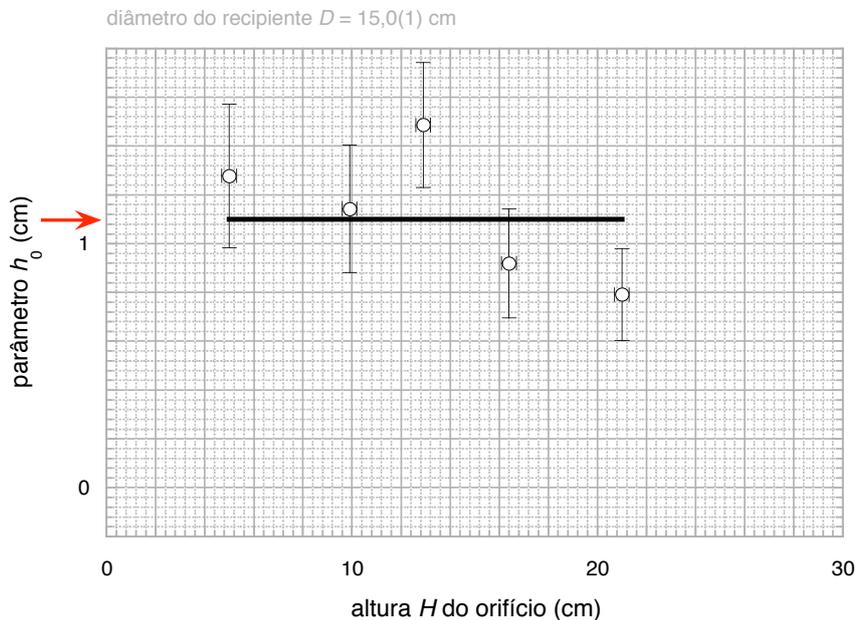


Figura 4.13: Parâmetro h_0 para os diferentes experimentos. Observamos desta figura que, dentro da margem de incertezas das medidas, o valor deste parâmetro é praticamente constante (linha contínua) e de valor médio $\bar{h}_0 \approx 1,1(3)$ cm.

médio igual a $1,1(3)$ cm.

Podemos analisar a segunda observação, a variação do coeficiente angular b com a variação da altura H , através da construção do gráfico representado na figura 4.14.

Do gráfico da figura 4.14 observamos que o coeficiente angular b é linearmente proporcional à altura H do orifício:

$$b = cH, \quad (4.17)$$

onde c é o coeficiente angular da reta na figura:

$$c = \frac{100(4) \text{ cm}}{28,0(8) \text{ cm}} \approx 3,6(2). \quad (4.18)$$

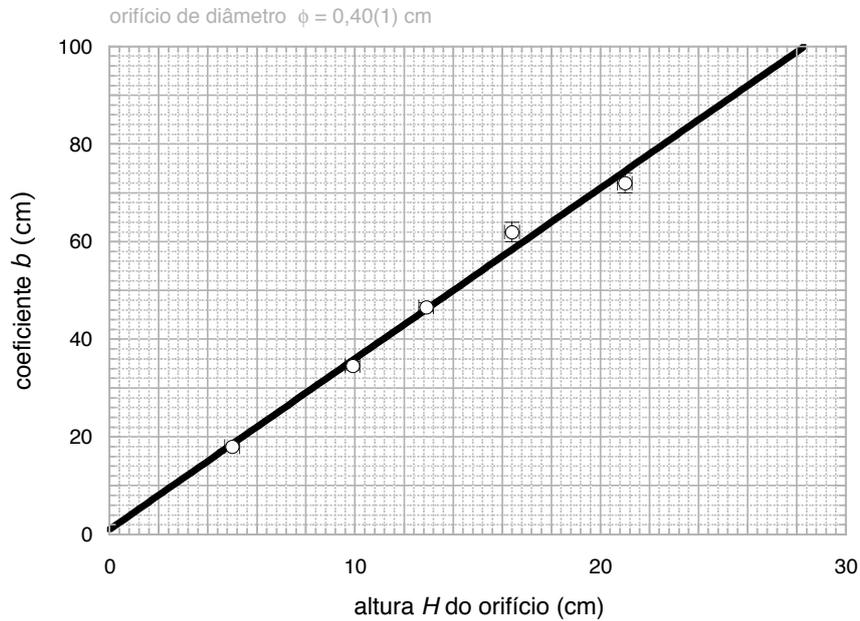


Figura 4.14: Coeficiente angular b vs. altura H do orifício no recipiente de diâmetro $D = 15,0(1)$ cm.

Então, podemos concluir que $\alpha = \sqrt{cH}$. Deste modo, fazendo $\kappa = \sqrt{c}$, podemos também escrever que

$$\alpha = \kappa\sqrt{H}. \quad (4.19)$$

Substituindo a equação (4.19) em (4.7) obtemos, finalmente, que

$$A = \kappa\sqrt{H}\sqrt{h - h_0}, \quad (4.20)$$

onde agora temos $\kappa \approx \sqrt{3,6(2)} \approx 1,90(5)$.

A figura 4.15 representa o gráfico do alcance A vs. altura h da coluna de água, conforme definido pela equação (4.20). O orifício de diâmetro igual a 4,0(1) mm se encontra a uma altura $H = 5,0(3)$, 9,9(3), 12,9(3), 16,4(3) e 21,0(3) cm, a partir do fundo do recipiente que recebe a água.

Observamos ainda que, para alturas da coluna de água h muito maiores

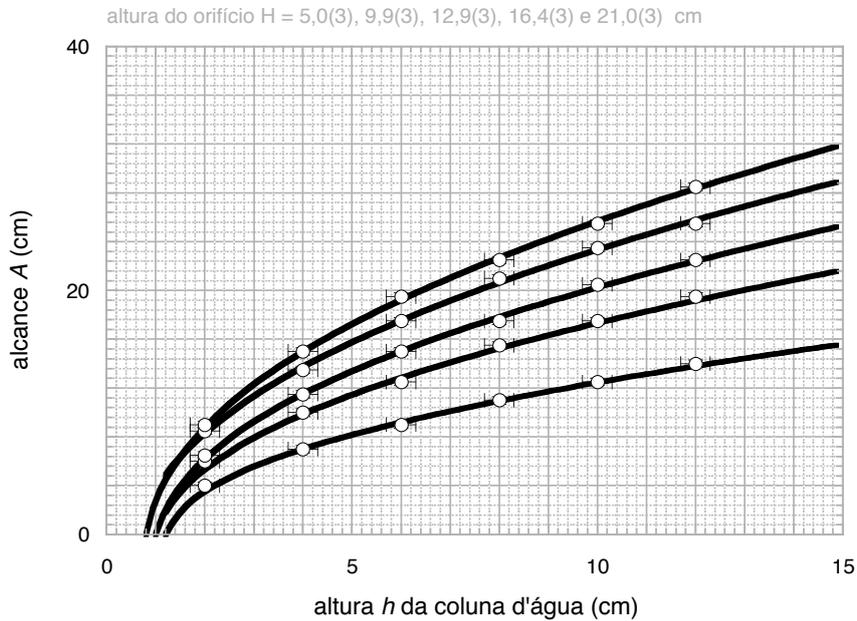


Figura 4.15: Alcance A vs. altura h da coluna de água. O orifício está a uma altura H a partir do fundo do recipiente que recebe a água.

do que h_0 , reobtemos o resultado de Torricelli:

$$A \approx \kappa \sqrt{Hh}, \quad (4.21)$$

o alcance do jato de água é proporcional à média geométrica da altura H do orifício e da altura h da coluna de água.

Podemos comparar o resultado para o valor de κ , para o recipiente de diâmetro $D = 15,0(1)$ cm, com o resultado obtido para este mesmo parâmetro com o recipiente de diâmetro $D = 6,0(1)$ cm, como ilustrado na figura 4.16.

A partir desta figura, podemos concluir que o valor do coeficiente c e, deste modo, κ , parece ser independente da seção do recipiente, para a região de valores considerada, e de valor médio $\kappa \approx 3,4(2)$. Entretanto, a discrepância entre este valor médio e os valores medidos é maior do que as incertezas associadas às medidas. Este comportamento sugere uma investigação mais detalhada do comportamento deste parâmetro em função do diâmetro do

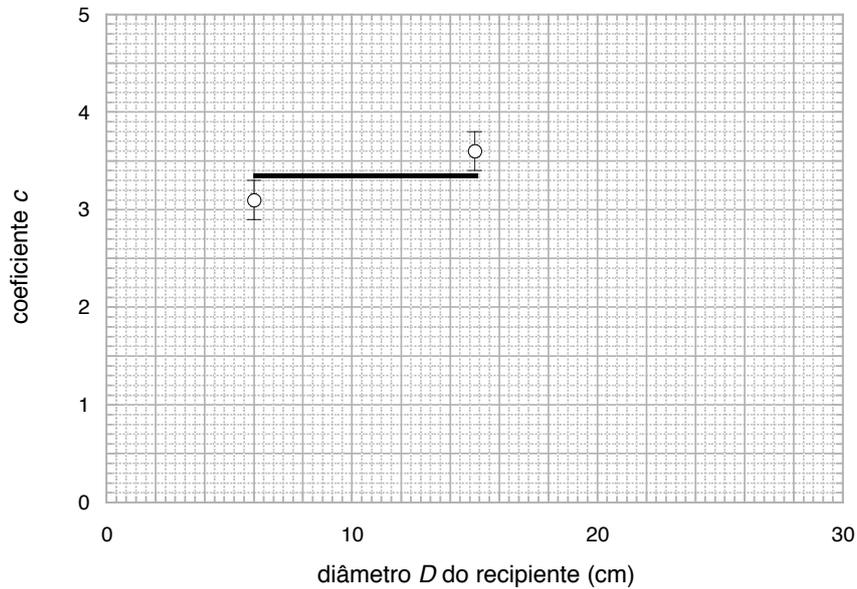


Figura 4.16: Coeficiente $c = \kappa^2$ vs. diâmetro D do recipiente que contém a coluna de água.

recipiente considerado. Na seção 4.3 analisamos tal possibilidade realizando o experimento com um recipiente de diâmetro igual a 9,6(1) cm.

4.3 Recipiente de diâmetro 9,6(1) cm

Descrevemos agora o alcance A realizado pelo jato de água, para uma coluna de água no recipiente de diâmetro D igual a 9,6(1) cm, a partir de diferentes alturas h , quando o orifício de diâmetro 4,0(1) mm se encontra a uma altura $H = 5,0(3)$, 9,9(3), 12,9(3), 16,4(3) e 21,0(3) cm a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Os resultados obtidos estão representados e discutidos nos parágrafos seguintes.

4.3.1 Alcances para diferentes alturas H

As Tabelas 4.9 e 4.10 representam o alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) em função da altura da coluna de água (h), para um orifício lateral de diâmetro igual a 4,0(1) mm a uma altura $H = 5,0(3), 9,9(3), 12,9(3)$ cm, 16,4(3) e 21,0(3) cm. Em seguida, representamos na figura 4.17 os dados obtidos para o alcance A .

Tabela 4.9: Alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) vs. altura da coluna de água (h), para um orifício lateral a uma altura H .

H	5,0(3) cm		9,9(3) cm		12,9(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	3,0(3)	9(2)	4,5(1)	20(3)	6,0(1)	36(4)
4,0(3)	6,5(3)	42(4)	9,0(3)	81(5)	10,0(3)	100(6)
6,0(3)	8,5(3)	72(5)	12,0(3)	144(7)	13,5(3)	182(8)
8,0(3)	10,0(3)	100(6)	14,5(1)	210(9)	16,0(1)	256(10)
10,0(3)	11,5(3)	132(7)	15,5(3)	240(9)	18,0(3)	324(11)
12,0(3)	12,5(3)	156(8)	17,5(3)	306(10)	21,0(3)	441(13)

Tabela 4.10: Alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) vs. altura da coluna de água (h), para um orifício lateral a uma altura H .

H	16,4(3) cm		21,0(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	6,5(3)	42(5)	8,0(3)	64(5)
4,0(3)	12,5(3)	156(8)	13,0(3)	169(8)
6,0(3)	16,5(3)	272(10)	18,0(3)	324(11)
8,0(3)	19,0(3)	361(11)	21,0(3)	441(13)
10,0(3)	21,5(3)	462(13)	24,0(3)	576(14)
12,0(3)	24,0(3)	576(14)	26,5(3)	702(16)

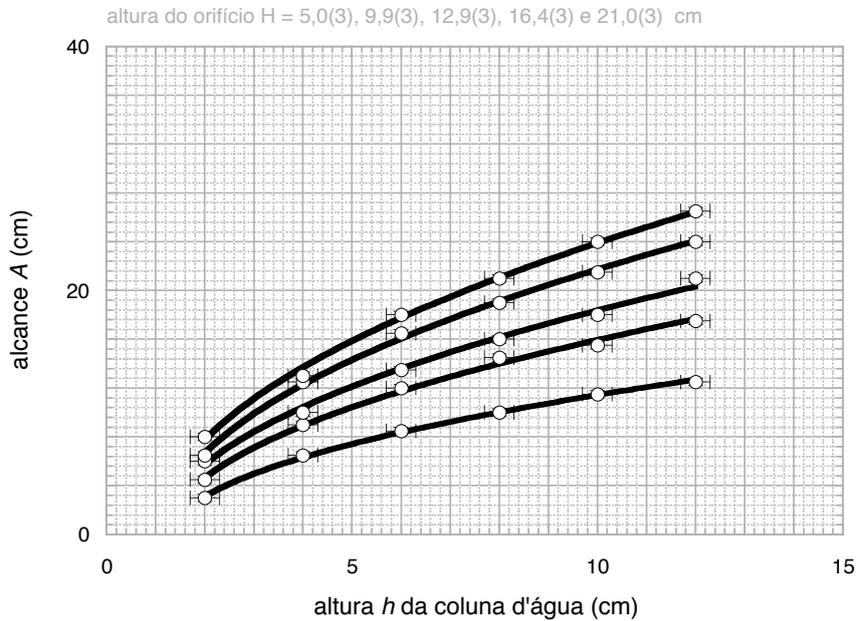


Figura 4.17: Alcance A vs. altura h da coluna de água. O orifício está a diferentes alturas H , indicadas no gráfico. A curva traçada é somente um guia para os olhos.

Seguindo o procedimento estabelecido na seção 4.1, o gráfico da figura 4.17 nos revela mais uma vez a não linearidade entre o alcance realizado e a altura da coluna de água. Este comportamento nos sugere que representemos o quadrado do alcance realizado pela água em função da altura da sua coluna no interior do recipiente.

Os quadrados dos alcances das Tabelas 4.9 e 4.10 estão representados na figura 4.18 em função da altura h da coluna de água.

A partir do gráfico da figura 4.18, podemos concluir que, para a região considerada para as alturas h , existe sempre uma relação linear entre o quadrado do alcance e a altura da coluna de água. Podemos então obter os coeficientes linear a e angular b das respectivas retas associadas às diferentes alturas H do orifício, como indicado na Tabela 4.11.

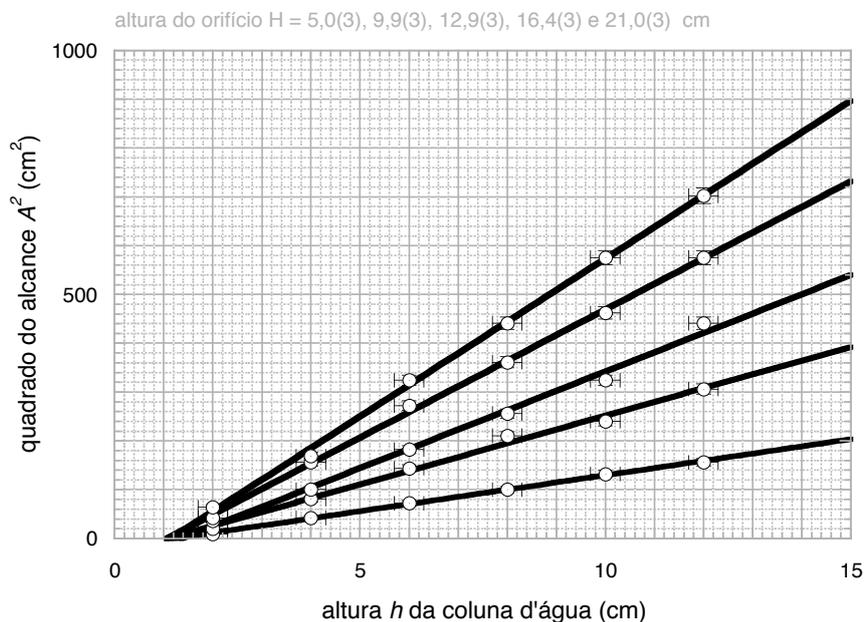


Figura 4.18: Quadrado do alcance A vs. altura h da coluna de água, para diferentes alturas H do orifício. Observamos que existe uma altura h_0 a partir da qual não há fluxo de água no recipiente.

Tabela 4.11: Coeficientes a e b para diferentes alturas H do orifício.

H (cm)	a (cm ²)	b (cm)	α (cm ^{1/2})	h_0 (cm)
5,0(3)	-18(4)	15(1)	3,9(1)	1,2(3)
9,9(3)	-30(8)	28(1)	5,3(1)	1,1(3)
12,9(3)	-55(8)	40(1)	6,3(1)	1,4(2)
16,4(3)	-55(12)	52(1)	7,2(1)	1,1(3)
21,0(3)	-75(12)	65(1)	8,1(1)	1,2(2)

Considerando as incertezas das medidas, podemos observar, a partir desta tabela, que o valor do parâmetro h_0 é praticamente constante e podemos concluir também que o coeficiente angular b aumenta ao aumentarmos a altura H .

A primeira observação pode ser verificada com a construção do gráfico representado na figura 4.19.

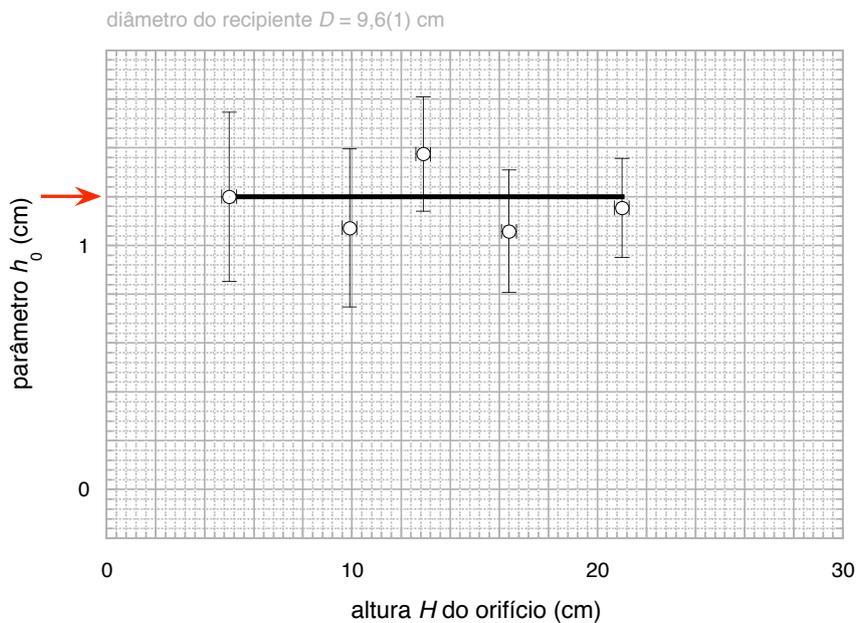


Figura 4.19: Parâmetro h_0 para os diferentes experimentos. Observamos desta figura que, dentro da margem de incertezas das medidas, o valor deste parâmetro é praticamente constante (linha contínua) e de valor médio $\bar{h}_0 \approx 1,2(3)$ cm.

Observamos desta figura que o valor de h_0 é praticamente constante. Determinando a média aritmética dos valores de h_0 , obtemos um valor médio igual a $1,2(3)$ cm.

Podemos analisar a segunda observação, a variação do coeficiente angular b com a variação da altura H , através da construção do gráfico representado na figura 4.20.

Do gráfico da figura 4.20 observamos que o coeficiente angular b é linearmente proporcional à altura H do orifício:

$$b = cH, \quad (4.22)$$

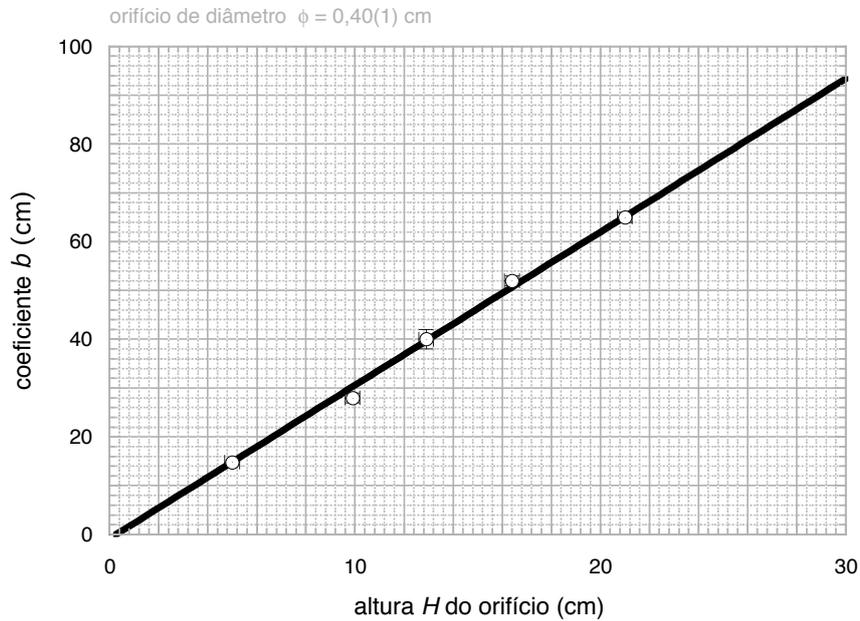


Figura 4.20: Coeficiente angular b vs. altura H do orifício no recipiente de diâmetro $D = 9,6(1)$ cm.

onde c é o coeficiente angular da reta na figura:

$$c = \frac{94(4) \text{ cm}}{30,0(8) \text{ cm}} \approx 3,1(2). \quad (4.23)$$

Então, podemos concluir que $\alpha = \sqrt{cH}$. Deste modo, fazendo $\kappa = \sqrt{c}$, podemos também escrever que

$$\alpha = \kappa\sqrt{H}. \quad (4.24)$$

Substituindo a equação (4.24) em (4.7) obtemos, finalmente, que

$$A = \kappa\sqrt{H}\sqrt{h - h_0}, \quad (4.25)$$

onde $\kappa \approx \sqrt{3,1(2)} \approx 1,76(6)$.

A figura 4.21 representa o gráfico do alcance A vs. altura h da coluna de

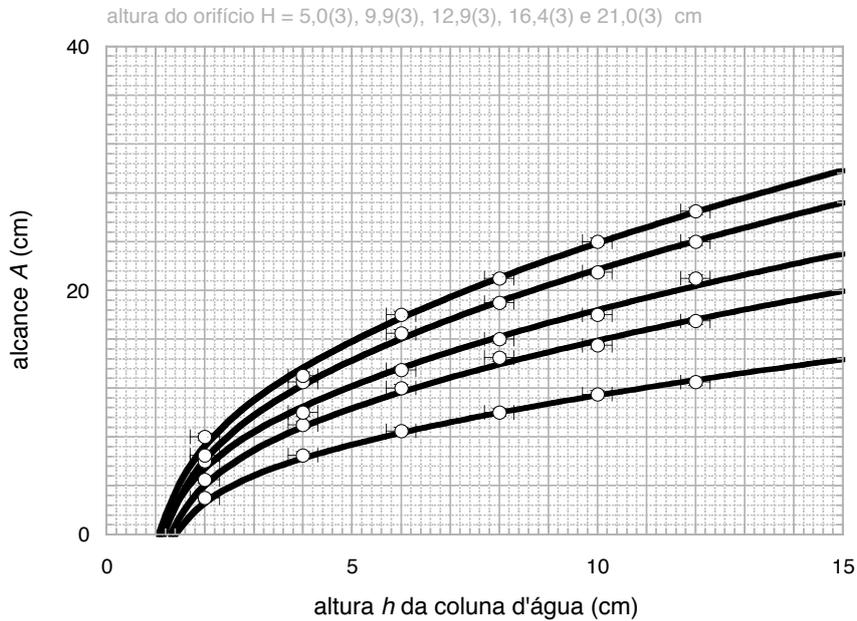


Figura 4.21: Alcançe A vs. altura h da coluna de água. O orifício está a uma altura H a partir do fundo do recipiente que recebe a água.

água, conforme definido pela equação (4.25). O orifício de diâmetro igual a $4,0(1)$ mm se encontra a uma altura $H = 5,0(3), 9,9(3), 12,9(3), 16,4(3)$ e $21,0(3)$ cm, a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Observamos ainda que, para alturas da coluna de água h muito maiores do que h_0 , reobtemos o resultado de Torricelli:

$$A \approx \kappa \sqrt{Hh}, \quad (4.26)$$

o alcance do jato de água é proporcional à média geométrica da altura H do orifício e da altura h da coluna de água.

Podemos comparar o resultado para o valor de κ , para o recipiente de diâmetro $D = 9,6(1)$ cm, com os resultados obtido para este mesmo parâmetro com os recipientes de diâmetro $D = 6,0(1)$ e $15,0(1)$ cm, respectivamente, como ilustrado na figura 4.22.

A partir desta figura, podemos concluir que o valor do coeficiente c e,

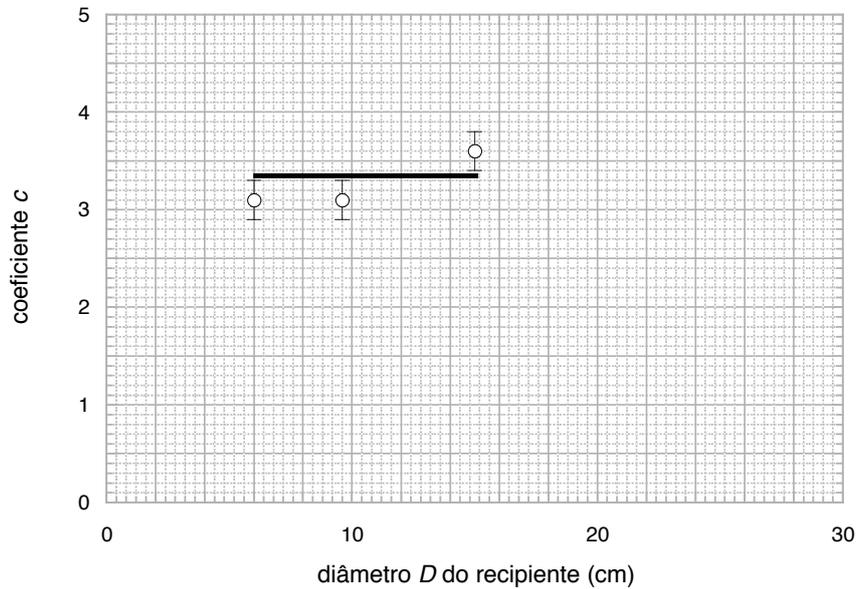


Figura 4.22: Coeficiente $c = \kappa^2$ vs. diâmetro D do recipiente que contém a coluna de água.

deste modo, κ , parece ser independente da seção do recipiente, para a região de valores considerada. Entretanto, este resultado é bastante intrigante. Um observador mais atento poderia se perguntar que se este comportamento se mantivesse mesmo para pequenos diâmetros, teríamos um coeficiente c diferente de zero mesmo para um diâmetro nulo, como indicado na figura 4.23, o que não parece ser fisicamente plausível.

Na seção 4.4 continuamos a investigar o comportamento do parâmetro c realizando o experimento com um recipiente de diâmetro igual a 4,5(1) cm. Vale lembrar que garrafas PET de seções cilíndricas bem definidas com dimensões inferiores a 6,0(1) cm não são facilmente disponíveis. Neste caso, os tubos cilíndricos em acrílico do mercado se tornam de grande valia.

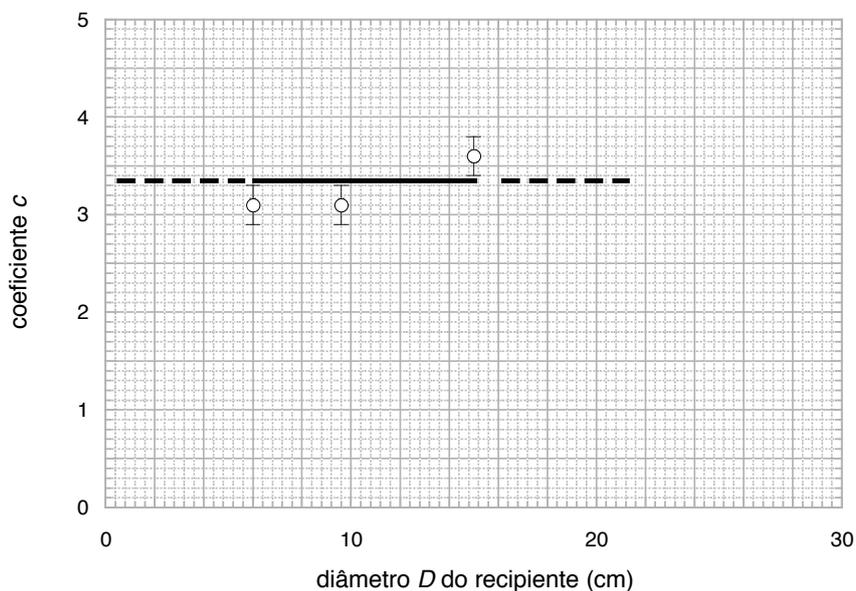


Figura 4.23: Extrapolação do comportamento do coeficiente $c = \kappa^2$ vs. diâmetro D do recipiente que contém a coluna de água.

4.4 Recipiente de seção 4,5(1) cm

Descrevemos agora o alcance A realizado pelo jato de água, para uma coluna de água no recipiente de diâmetro D igual a 4,5(1) cm, a partir de diferentes alturas h , quando o orifício de diâmetro 4,5(1) mm se encontra a uma altura $H = 5,9(3)$, 9,4(3), 13,2(3), 16,7(3) e 21,5(3) cm a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Os resultados obtidos estão representados e discutidos nos parágrafos seguintes.

4.4.1 Alcances para diferentes alturas H

As Tabelas 4.12 e 4.13 representam o alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) em função da altura da coluna de água (h), para um orifício lateral de diâmetro igual a 4,0(1) mm a uma altura $H = 5,9(3)$, 9,4(3), 13,2(3), 16,7(3) e 21,5(3) cm. Em seguida, representamos na figura 4.24 os

dados obtidos para o alcance A .

Tabela 4.12: Alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) vs. altura da coluna de água (h), para um orifício lateral a uma altura H .

H	5,9(3) cm		9,4(3) cm		13,2(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	4,4(3)	19,4(3)	5,7(3)	32(3)	6,3(3)	40(4)
4,0(3)	7,7(3)	59(5)	9,8(3)	96(6)	10,4(3)	108(6)
6,0(3)	9,5(3)	90(6)	12,5(3)	156(8)	13,7(3)	188(8)
8,0(3)	11,4(3)	130(7)	14,3(3)	204(9)	16,3(3)	267(10)
10,0(3)	12,8(3)	164(8)	15,8(3)	250(9)	18,2(3)	331(11)
12,0(3)	14,4(3)	207(9)	18,0(3)	324(11)	20,4(3)	416(12)

Tabela 4.13: Alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) vs. altura da coluna de água (h), para um orifício lateral a uma altura H .

H	16,7(3) cm		21,5(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	7,4(3)	54(4)	9,0(3)	81(5)
4,0(3)	12,6(3)	159(8)	15,0(1)	225(9)
6,0(3)	16,0(1)	256(9)	18,0(3)	324(11)
8,0(3)	18,6(3)	346(11)	21,5(3)	462(13)
10,0(3)	21,2(3)	449(13)	24,0(3)	576(14)
12,0(3)	23,2(3)	530(14)	26,5(3)	702(16)

Seguindo o procedimento estabelecido na seção 4.1, o gráfico da figura 4.24 nos revela mais uma vez a não linearidade entre o alcance realizado e a altura da coluna de água. Este comportamento nos sugere que representemos o quadrado do alcance realizado pela água em função da altura da sua coluna no interior do recipiente.

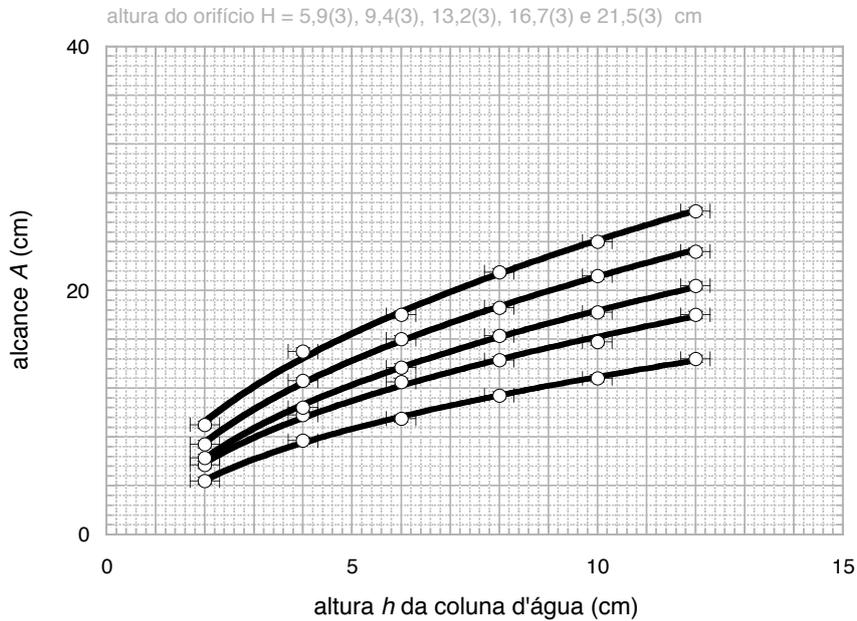


Figura 4.24: Alcance A vs. altura h da coluna de água. O orifício está a diferentes alturas H , indicadas no gráfico. A curva traçada é somente um guia para os olhos.

Os quadrados dos alcances das Tabelas 4.12 e 4.13 estão representados na figura 4.25 em função da altura h da coluna de água.

A partir do gráfico da figura 4.25, podemos concluir que, para a região considerada para as alturas h , existe sempre uma relação linear entre o quadrado do alcance e a altura da coluna de água. Podemos então obter os coeficientes linear a e angular b das respectivas retas associadas às diferentes alturas H do orifício, como indicado na Tabela 4.14.

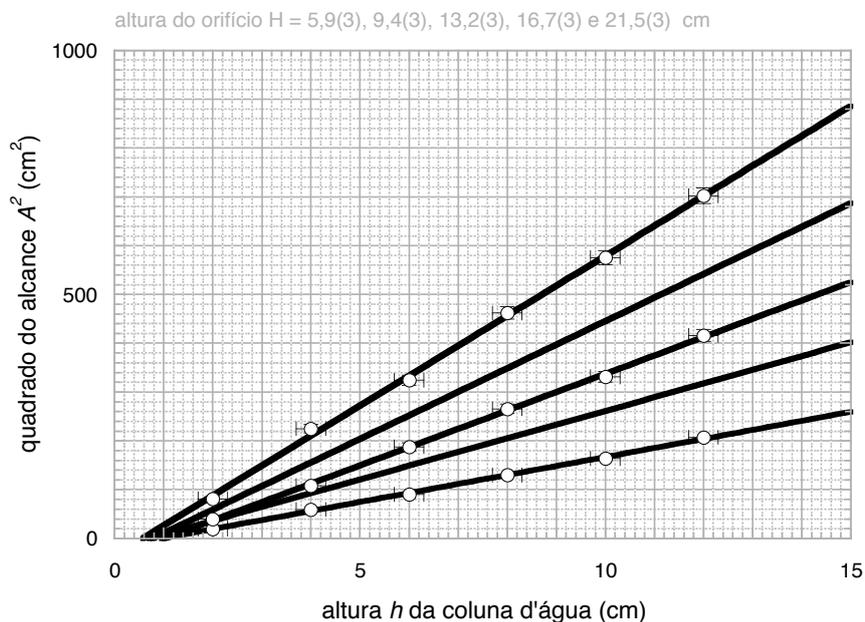


Figura 4.25: Quadrado do alcance A vs. altura h da coluna de água, para diferentes alturas H do orifício. Observamos que existe uma altura h_0 a partir da qual não há fluxo de água no recipiente.

Tabela 4.14: Coeficientes a e b para diferentes alturas H do orifício.

H (cm)	a (cm ²)	b (cm)	α (cm ^{1/2})	h_0 (cm)
5,0(3)	-18(4)	18(1)	4,2(1)	1,0(2)
9,9(3)	-20(8)	28(1)	5,3(1)	0,7(3)
12,9(3)	-38(4)	38(1)	6,2(1)	1,0(1)
16,4(3)	-38(4)	48(1)	6,9(1)	0,8(1)
21,0(3)	-35(10)	61(1)	7,8(1)	0,6(2)

Considerando as incertezas das medidas, podemos observar, a partir desta tabela, que o valor do parâmetro h_0 é praticamente constante e podemos concluir também que o coeficiente angular b aumenta ao aumentarmos a altura H .

A primeira observação pode ser verificada com a construção do gráfico representado na figura 4.26.

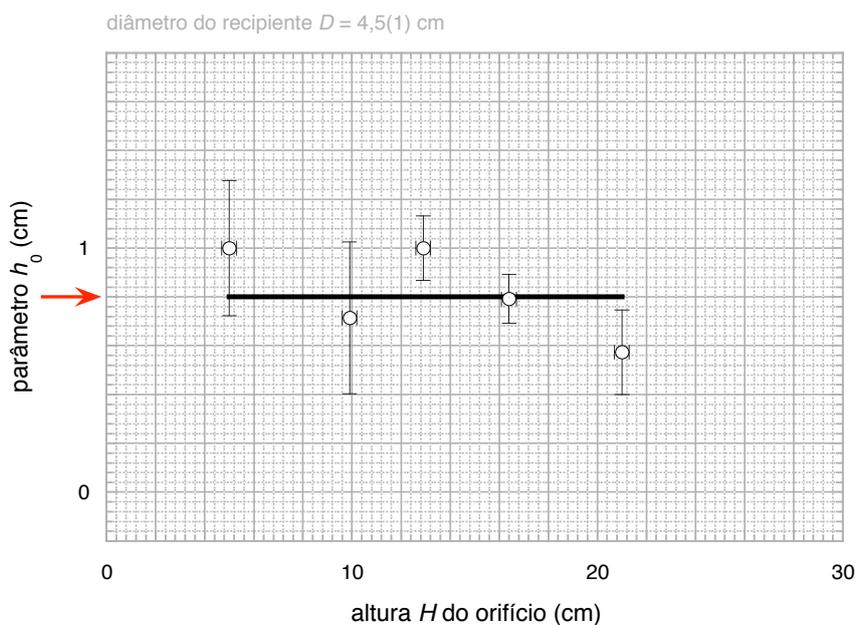


Figura 4.26: Parâmetro h_0 para os diferentes experimentos. Observamos desta figura que, dentro da margem de incertezas das medidas, o valor deste parâmetro é praticamente constante (linha contínua) e de valor médio $\bar{h}_0 \approx 0,8(2)$ cm.

Observamos desta figura que o valor de h_0 é praticamente independente do valor que estabelecemos para a altura H do orifício no recipiente por onde flui a água (linha contínua, na mesma figura). Determinando a média aritmética dos valores de h_0 , obtemos um valor médio igual a $0,8(2)$ cm.

Podemos analisar a segunda observação, a variação do coeficiente angular b com a variação da altura H , através da construção do gráfico representado na figura 4.27.

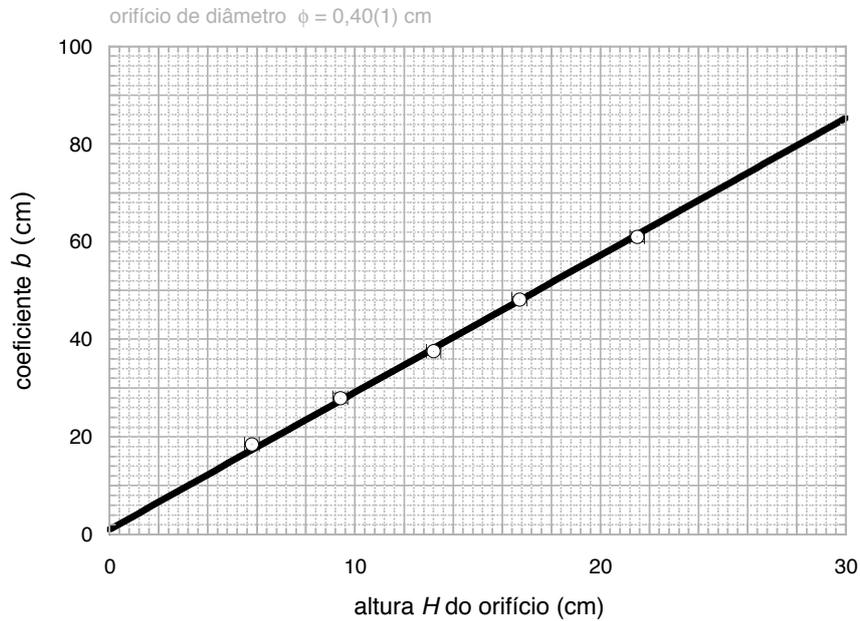


Figura 4.27: Coeficiente angular b vs. altura H do orifício no recipiente de diâmetro $D = 4,5(1)$ cm.

Do gráfico da figura 4.27 observamos que o coeficiente angular b é linearmente proporcional à altura H do orifício:

$$b = cH, \quad (4.27)$$

onde c é o coeficiente angular da reta na figura:

$$c = \frac{84(4) \text{ cm}}{30,0(8) \text{ cm}} \approx 2,8(2). \quad (4.28)$$

Então, podemos concluir que $\alpha = \sqrt{cH}$. Deste modo, fazendo $\kappa = \sqrt{c}$, podemos também escrever que

$$\alpha = \kappa\sqrt{H}. \quad (4.29)$$

Substituindo a equação (4.29) em (4.7) obtemos, finalmente, que

$$A = \kappa\sqrt{H}\sqrt{h - h_0}, \quad (4.30)$$

onde $\kappa \approx \sqrt{2,8(2)} \approx 1,67(3)$.

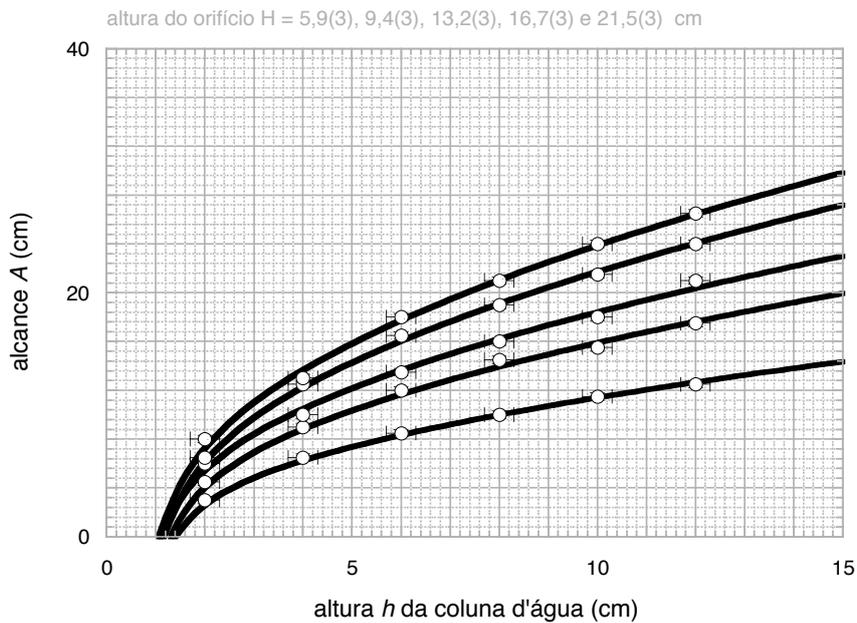


Figura 4.28: Alcance A vs. altura h da coluna de água. O orifício está a uma altura H a partir do fundo do recipiente que recebe a água.

A figura 4.28 representa o gráfico do alcance A vs. altura h da coluna de água, conforme definido pela equação (4.30). O orifício de diâmetro igual a 4,5(1) mm se encontra a uma altura $H = 5,9(3), 9,4(3), 13,2(3), 16,7(3)$ e 21,5(3) cm, a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Observamos ainda que, para alturas da coluna de água h muito maiores do que h_0 , reobtemos o resultado de Torricelli:

$$A \approx \kappa\sqrt{Hh}, \quad (4.31)$$

o alcance do jato de água é proporcional à média geométrica da altura H do

orifício e da altura h da coluna de água.

Podemos comparar o resultado para o valor de κ , para o recipiente de diâmetro $D = 4,5(1)$ cm, com o resultado obtido para este mesmo parâmetro com o recipiente de diâmetro $D = 6,0(1)$, $9,6(1)$ e $15,0(1)$ cm, como ilustrado na figura 4.29.

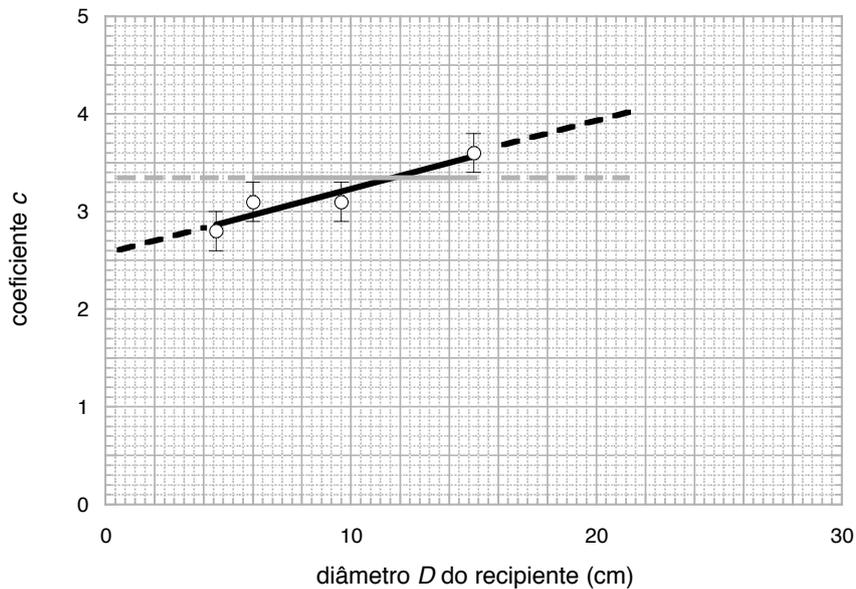


Figura 4.29: Coeficiente $c = \kappa^2$ vs. diâmetro D do recipiente que contém a coluna de água.

A partir desta figura, podemos concluir que o valor do coeficiente c e, deste modo, κ , não parece mais ser independente do diâmetro do recipiente, para a região de valores considerada (linha preta contínua, no gráfico da figura). Entretanto, a relação linear sugerida no gráfico ainda não esclarece o problema: segundo esta solução, ainda teríamos fluxo, mesmo para um tubo ínfimo! Na seção 4.5 continuamos a investigar o comportamento do parâmetro c realizando o experimento com um recipiente de diâmetro igual a $1,9(1)$ cm.

4.5 Recipiente de seção 1,9(1) cm

Descrevemos agora o alcance A realizado pelo jato de água, para uma coluna de água no recipiente de diâmetro D igual a 1,9(1) cm, a partir de diferentes alturas h , quando o orifício de diâmetro 4,0(1) mm se encontra a uma altura $H = 5,9(3), 9,4(3), 13,2(3), 16,7(3)$ e $21,5(3)$ cm a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Os resultados obtidos estão representados e discutidos nos parágrafos seguintes.

4.5.1 Alcances para diferentes alturas H

As Tabelas 4.15 e 4.16 representam o alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) em função da altura da coluna de água (h), para um orifício lateral de diâmetro igual a 4,0(1) mm a uma altura $H = 5,9(3), 9,4(3), 13,2(3), 16,7(3)$ e $21,5(3)$ cm. Em seguida, representamos na figura 4.30 os dados obtidos para o alcance A .

Tabela 4.15: Alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) vs. altura da coluna de água (h), para um orifício lateral a uma altura H .

H	5,9(3) cm		9,4(3) cm		13,2(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	4,3(3)	18(3)	5,7(3)	27(3)	6,1(3)	37(4)
4,0(3)	6,7(3)	50(5)	8,8(3)	77(5)	10,5(3)	110(6)
6,0(3)	8,8(3)	77(5)	11,5(3)	132(7)	13,8(3)	190(8)
8,0(3)	10,4(3)	108(6)	13,5(3)	182(8)	15,9(3)	253(9)
10,0(3)	11,6(3)	135(7)	15,0(1)	225(9)	18,4(3)	339(11)
12,0(3)	12,7(3)	161(8)	16,5(3)	272(10)	19,5(3)	380(12)

Tabela 4.16: Alcance realizado pelo jato de água (A) e seu quadrado (A^2) vs. altura da coluna de água (h), para um orifício lateral a uma altura H .

H	16,7(3) cm		21,5(3) cm	
$h(\text{cm})$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$	$A(\text{cm})$	$A^2(\text{cm}^2)$
2,0(3)	6,3(3)	40(4)	8,2(3)	67(5)
4,0(3)	11,4(3)	130(7)	13,4(3)	180(8)
6,0(3)	14,5(3)	210(9)	16,9(3)	286(10)
8,0(3)	17,5(3)	306(10)	19,4(3)	376(12)
10,0(3)	19,5(3)	380(12)	22,3(3)	497(13)
12,0(3)	21,6(3)	467(13)	25,1(3)	630(15)

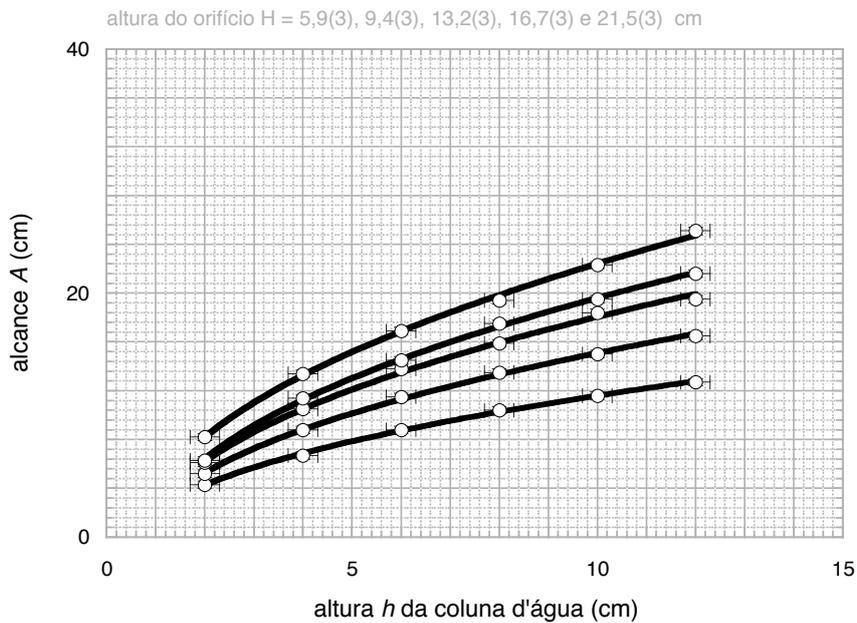


Figura 4.30: Alcance A vs. altura h da coluna de água. O orifício está a diferentes alturas H , indicadas no gráfico. A curva traçada é somente um guia para os olhos.

Seguindo o procedimento estabelecido na seção 4.1, o gráfico da figura 4.30

nos revela mais uma vez a não linearidade entre o alcance realizado e a altura da coluna de água. Este comportamento nos sugere que representemos o quadrado do alcance realizado pela água em função da altura da sua coluna no interior do recipiente.

Os quadrados dos alcances das Tabelas 4.15 e 4.16 estão representados na figura 4.31 em função da altura h da coluna de água.

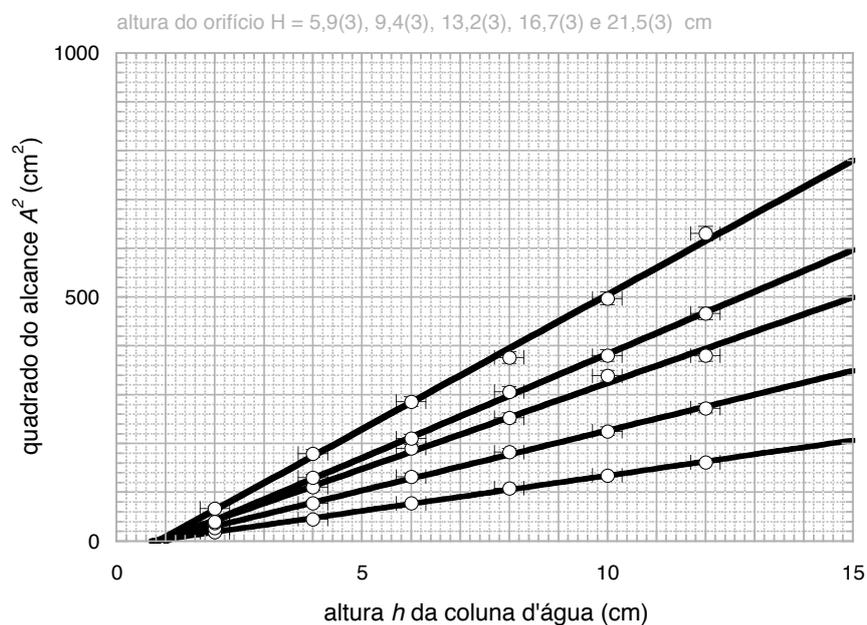


Figura 4.31: Quadrado do alcance A vs. altura h da coluna de água, para diferentes alturas H do orifício. Observamos que existe uma altura h_0 a partir da qual não há fluxo de água no recipiente.

A partir do gráfico da figura 4.31, podemos concluir que, para a região considerada para as alturas h , existe sempre uma relação linear entre o quadrado do alcance e a altura da coluna de água. Podemos então obter os coeficientes linear a e angular b das respectivas retas associadas às diferentes alturas H do orifício, como indicado na Tabela 4.17.

Tabela 4.17: Coeficientes a e b para diferentes alturas H do orifício.

$H(\text{cm})$	$a(\text{cm}^2)$	$b(\text{cm})$	$\alpha(\text{cm}^{1/2})$	$h_0(\text{cm})$
5,9(3)	-10(4)	14(1)	3,7(1)	0,7(3)
9,4(3)	-20(4)	25(1)	5,0(1)	0,8(2)
13,2(3)	-28(10)	35(1)	5,9(1)	0,8(3)
16,7(3)	-42(8)	43(1)	6,6(1)	1,0(2)
21,5(3)	-46(12)	55(2)	7,4(1)	0,8(2)

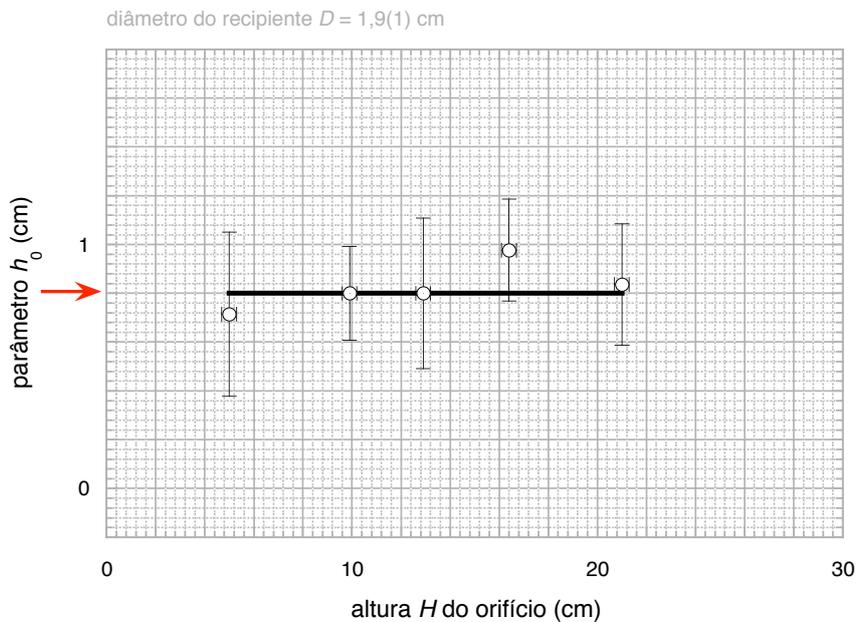


Figura 4.32: Parâmetro h_0 para os diferentes experimentos. Observamos desta figura que, dentro da margem de incertezas das medidas, o valor deste parâmetro é praticamente constante (linha contínua) e de valor médio $\bar{h}_0 \approx 0,8(2)$ cm.

De fato, considerando as incertezas das medidas, podemos observar, a partir desta tabela, que o valor do parâmetro h_0 é praticamente constante,

de valor médio $0,8(2)$ cm, o pode ser verificado com a construção do gráfico representado na figura 4.32.

Podemos analisar a segunda observação, a variação do coeficiente angular b com a variação da altura H , através da construção do gráfico representado na figura 4.33.

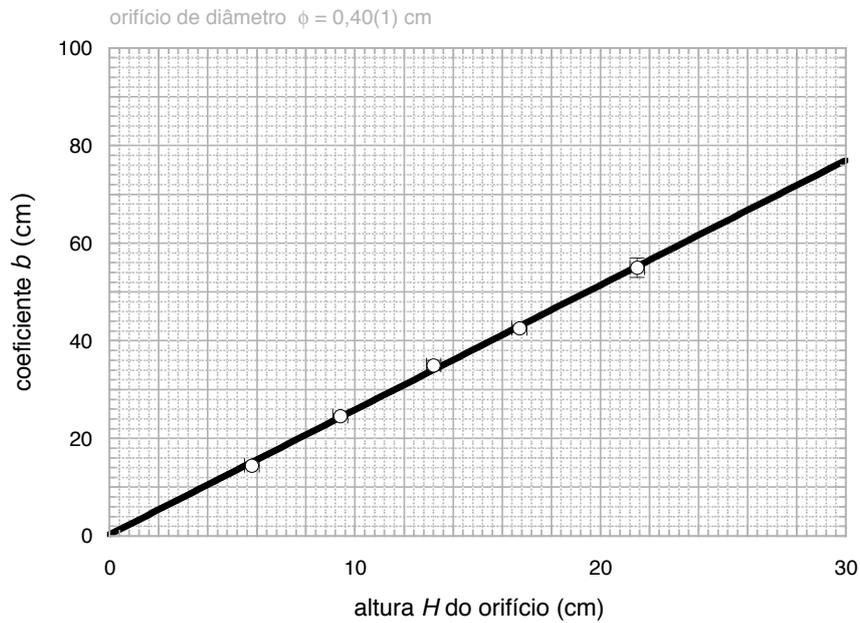


Figura 4.33: Coeficiente angular b vs. altura H do orifício no recipiente de diâmetro $D = 1,9(1)$ cm.

Do gráfico da figura 4.33 observamos que o coeficiente angular b é linearmente proporcional à altura H do orifício:

$$b = cH, \quad (4.32)$$

onde c é o coeficiente angular da reta na figura:

$$c = \frac{78(4) \text{ cm}}{30,0(8) \text{ cm}} \approx 2,6(2). \quad (4.33)$$

Então, podemos concluir que $\alpha = \sqrt{cH}$. Deste modo, fazendo $\kappa = \sqrt{c}$, podemos também escrever que

$$\alpha = \kappa\sqrt{H}. \quad (4.34)$$

Substituindo a equação (4.34) em (4.7) obtemos, finalmente, que

$$A = \kappa\sqrt{H}\sqrt{h - h_0}, \quad (4.35)$$

onde $\kappa \approx \sqrt{2,6(2)} \approx 1,61(3)$.

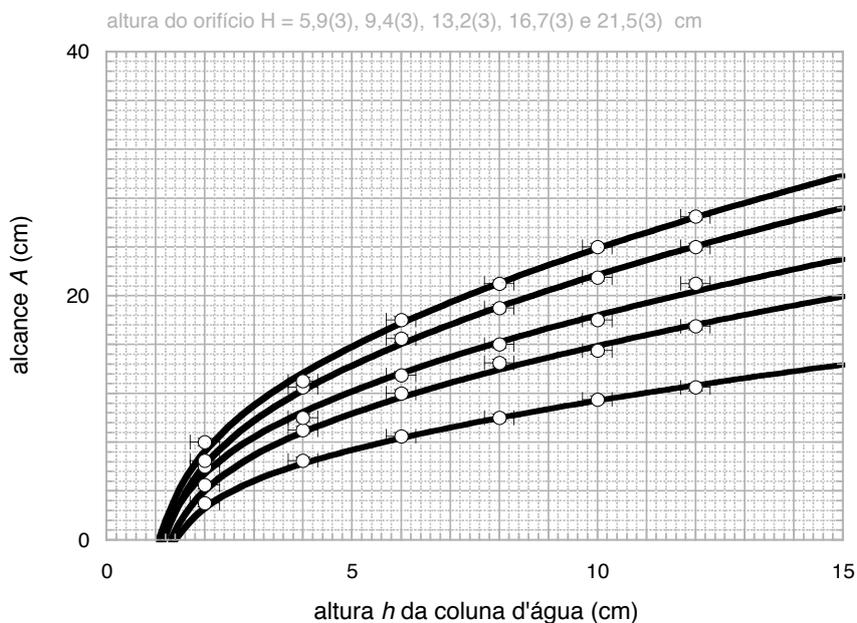


Figura 4.34: Alcance A vs. altura h da coluna de água. O orifício está a uma altura H a partir do fundo do recipiente que recebe a água.

A figura 4.34 representa o gráfico do alcance A vs. altura h da coluna de água, conforme definido pela equação (4.35). O orifício de diâmetro igual a 4,0(1) mm se encontra a uma altura $H = 5,9(3), 9,4(3), 13,2(3), 16,7(3)$ e 21,5(3) cm, a partir do fundo do recipiente que recebe a água. Observamos ainda que, para alturas da coluna de água h muito maiores do que h_0 ,

reobtemos o resultado de Torricelli:

$$A \approx \kappa \sqrt{Hh}, \quad (4.36)$$

o alcance do jato de água é proporcional à média geométrica da altura H do orifício e da altura h da coluna de água.

Podemos comparar o resultado para o valor de κ , para o recipiente de diâmetro $D = 1,9(1)$ cm, com o resultado obtido para este mesmo parâmetro com os recipientes de diâmetro $D = 4,5(1)$, $6,0(1)$, $9,6(1)$ e $15,0(1)$ cm, como ilustrado na figura 4.35.

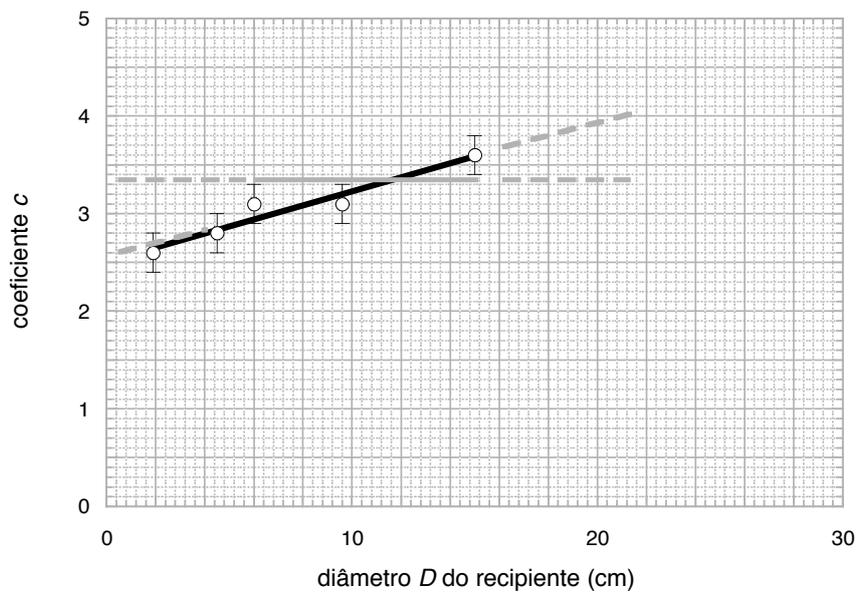


Figura 4.35: Coeficiente $c = \kappa^2$ vs. diâmetro D do recipiente que contém a coluna de água.

A partir desta figura, podemos concluir que o valor do coeficiente c e, deste modo, κ , é dependente da diâmetro do recipiente, para a região de valores considerada e esta dependência deve ser uma função não linear do diâmetro do tubo pois se considerarmos somente as três medidas para os diâmetros menores teremos um segmento de reta de maior inclinação do que

o segmento de reta considerando todas as medidas. Procuramos, portanto, uma curva que deve ter a forma aproximada da curva ilustrada na figura 4.36.

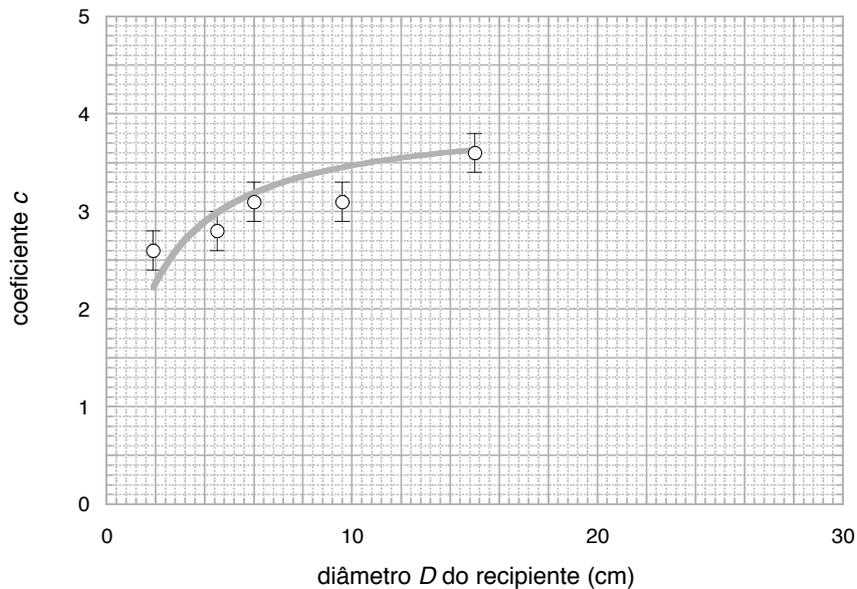


Figura 4.36: Coeficiente $c = \kappa^2$ vs. diâmetro D do recipiente que contém a coluna de água. A curva é somente um guia para descrever o comportamento do parâmetro.

De fato, observando que a variação do coeficiente c não é linearmente proporcional à variação do diâmetro D , podemos construir um novo gráfico para estudarmos o comportamento da razão entre estes dois parâmetros em função do parâmetro c ou em função do diâmetro D do recipiente. A segunda opção é muito mais esclarecedora para o comportamento do fluido no tubo e está ilustrada na figura 4.37 a partir dos dados da Tabela 4.18.

Tabela 4.18: Coeficientes c , \bar{h}_0 e D/c para diferentes diâmetros D do recipiente.

$D(\text{cm})$	c	$\bar{h}_0(\text{cm})$	$D/c(\text{cm})$
1,9(1)	2,6(2)	0,8(2)	0,7(1)
4,5(1)	2,8(2)	0,8(2)	1,6(2)
6,0(1)	3,1(2)	0,8(2)	1,9(2)
9,6(1)	3,1(2)	1,2(3)	3,1(2)
15,0(1)	3,6(2)	1,1(3)	4,2(3)

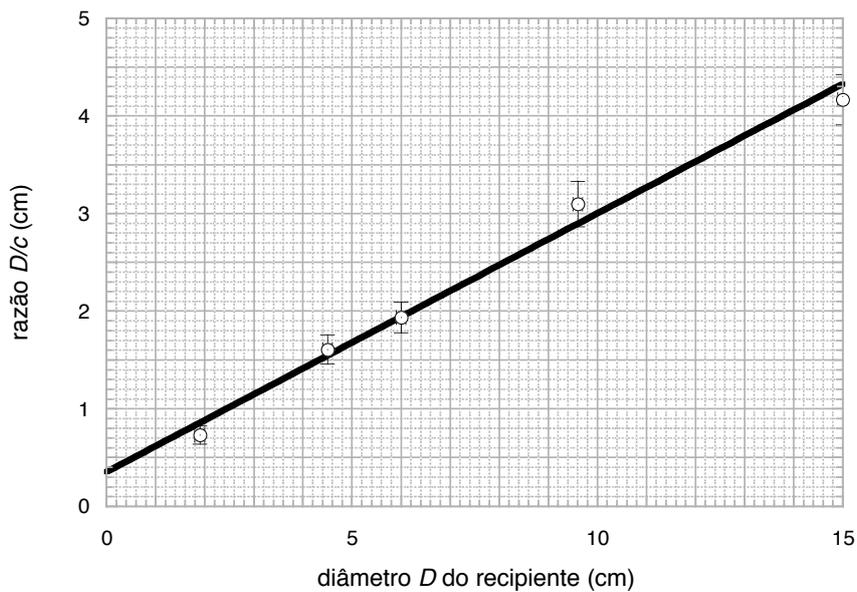


Figura 4.37: Razão entre o diâmetro D do recipiente e o coeficiente c vs. diâmetro D do recipiente.

Como podemos observar da figura 4.37, se considerarmos a margem de incertezas das medidas, a razão D/c obedece a uma relação linear com o

valor do diâmetro D do recipiente. Deste modo, podemos concluir que

$$\frac{D}{c} = \alpha + \beta D, \quad (4.37)$$

onde α é o coeficiente linear da reta da figura

$$\alpha \approx 0,4(1) \text{ cm} \quad (4.38)$$

e β é o seu coeficiente angular:

$$\beta = \frac{3,9(2)}{15,0(4)} \approx 0,26(2). \quad (4.39)$$

Então, resolvendo a equação (4.37) para c , podemos escrever que

$$c = \frac{\omega}{1 + d/D}. \quad (4.40)$$

onde

$$\omega = 1/\beta \approx 3,8(2) \quad (4.41)$$

e

$$d = \frac{\alpha}{\beta} \approx 1,5(2) \text{ cm}. \quad (4.42)$$

Portanto, o coeficiente κ é uma função do diâmetro do recipiente na forma

$$\kappa = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{1 + d/D}}. \quad (4.43)$$

A figura 4.38 representa o gráfico do coeficiente c vs. diâmetro D do recipiente que sustenta a coluna de água, conforme definido pela equação (4.40).

Da Tabela 4.18, podemos determinar o valor mais provável de h_0 :

$$h_0 = 0,9(1) \text{ cm}. \quad (4.44)$$

Substituindo (4.43) e (4.44) em (4.35) obtemos, finalmente, o alcance A em função do diâmetro D do recipiente, da altura de queda H e da altura h

da coluna de água:

$$A = \frac{\sqrt{\omega}\sqrt{H}}{\sqrt{1+d/D}}\sqrt{h-h_0}. \quad (4.45)$$

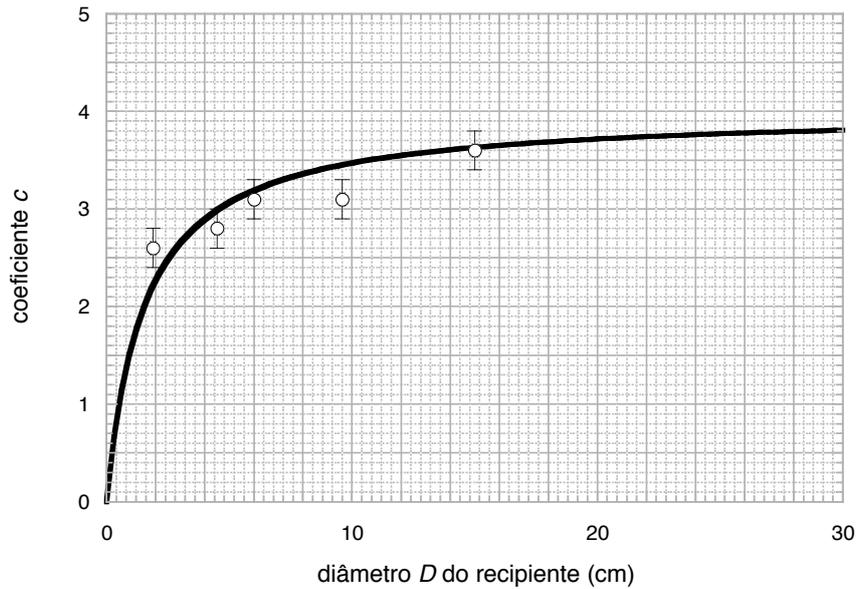


Figura 4.38: Coeficiente $c = \kappa^2$ vs. diâmetro D do recipiente que contém a coluna de água. A curva contínua é definida pela equação (4.45).

Observamos ainda que, para diâmetros muito maiores do que d e para alturas da coluna de água h muito maiores do que h_0 , reobtemos o resultado de Torricelli:

$$A \approx \sqrt{\omega}\sqrt{Hh} \approx 1,95(5)\sqrt{Hh}, \quad (4.46)$$

o alcance do jato de água é proporcional à média geométrica da altura H do orifício e da altura h da coluna de água.

4.6 Interpretando o experimento do jato de água

A imagem do jato de água jorrando através do orifício nos lembra fortemente a imagem de uma partícula de massa Δm sendo lançada de uma altura H a

partir do solo, após uma queda de uma altura igual a $h - h_0$.

Se a saída da água é perfeitamente paralela ao plano horizontal, a massa Δm realiza um alcance A dado por

$$A = vt \tag{4.47}$$

e cai de uma altura H definida por

$$H = \frac{1}{2}gt^2, \tag{4.48}$$

onde t corresponde a duração da queda. De fato, determinando-se a duração da queda com a equação (4.48) e substituindo-se este resultado na equação (4.47), obtemos o alcance realizado pela partícula em função da sua altura de queda H e da sua velocidade de saída v :

$$A = v\sqrt{\frac{2H}{g}}. \tag{4.49}$$

Considerando-se também que a partícula de massa de água igual a Δm , partindo do repouso, caia de uma altura no interior recipiente dada por $h - h_0$, então, neste caso, ela adquire uma energia cinética

$$\frac{1}{2}\Delta mv^2 = \Delta mg(h - h_0). \tag{4.50}$$

Deste modo, podemos determinar a velocidade v adquirida na posição h_0 :

$$v = \sqrt{2g(h - h_0)}. \tag{4.51}$$

Portanto, conhecendo-se H e $h - h_0$, podemos determinar o alcance da água ao ser ejetada do recipiente:

$$A = 2\sqrt{H}\sqrt{(h - h_0)}. \tag{4.52}$$

Observamos, da expressão (4.52), que o alcance A não depende da forma da massa Δm considerada. A única exigência é que a saída da água seja

paralela à horizontal e que a porção de líquido ejetado “caia livremente” de uma altura $h - h_0$.

Da nossa experiência, observamos que, para tubos de diâmetros D muito maiores do que d e para alturas da coluna de água h muito maiores do que h_0 , temos

$$A \approx \sqrt{\omega} \sqrt{Hh} \approx 1,95(5) \sqrt{Hh}. \quad (4.53)$$

O modelo de Torricelli nos dá um resultado muito próximo ao comportamento observado:

$$\kappa \leq \sqrt{3,8} \approx 1,95 \lesssim 2. \quad (4.54)$$

A figura 4.39 ilustra este comportamento. Na figura, a curva contínua é definida pela equação (4.45). A linha horizontal superior mostra as condições limite de Torricelli e a linha horizontal inferior mostra as condições limite para a equação (4.45).

Entretanto, para situações fora do limite de Torricelli, há uma discrepância significativa. Nas próprias palavras de Torricelli, como observamos no Capítulo 3, “a água ejetada através do orifício possui o mesmo ímpeto que um corpo de mesmo peso que cai livremente da mesma altura”, entretanto “a experiência parece confirmar a hipótese, mas não totalmente”.

Para discutirmos esta discrepância entre o modelo de Torricelli e a experiência, empregamos a técnica de análise de dos Bernoulli e de Euler. Dividimos virtualmente a altura no recipiente, dada por $h_f - h_i$, em N intervalos Δz na direção vertical z , conforme a ilustração da figura 4.40.

Consideramos também que, a uma dada altura z , toda a camada apresenta a mesma velocidade v . Podemos observar também que a massa do líquido que atravessa a seção da coluna de água, por unidade de tempo, deve ser a mesma em qualquer altura.

Deste modo, podemos expressar a lei de conservação da massa através da equação de continuidade:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho S \frac{\Delta z}{\Delta t} = \rho S v = \text{const.} \quad (4.55)$$

onde S é a área da seção da coluna, e ρ e v são, respectivamente, a densidade

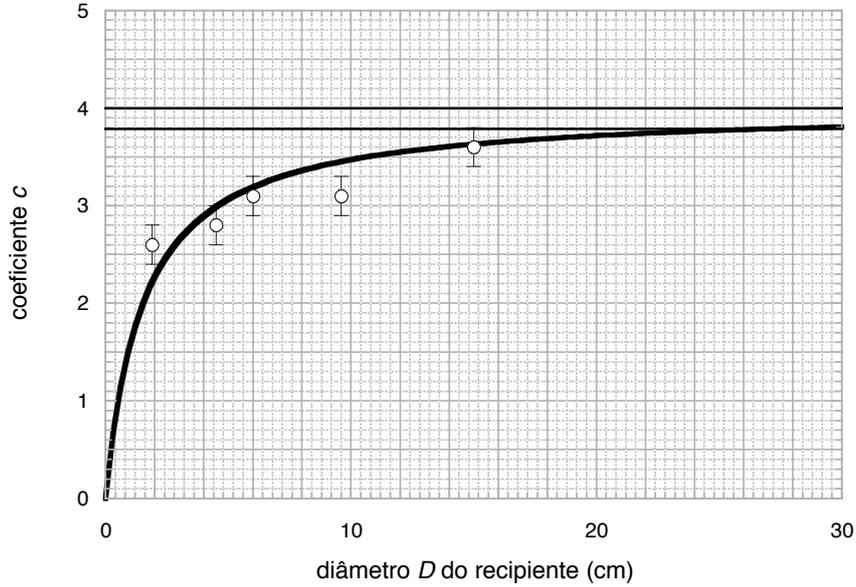


Figura 4.39: Coeficiente $c = \kappa^2$ vs. diâmetro D do recipiente que contém a coluna de água. A curva contínua é definida pela equação (4.45). A linha horizontal superior mostra as condições limite de Torricelli e a linha horizontal inferior mostra as condições limite para a equação (4.45).

e a velocidade do líquido que flui através da seção S . A quantidade de massa Δm da n -ésima camada de líquido sofre a ação de forças tais que esta camada de massa é acelerada e temos então

$$F_n + \Delta m g - F_{n+1} = \Delta m \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (4.56)$$

Podemos calcular o trabalho para deslocar a camada de massa Δm de uma altura definida pelos pontos n e $n + 1$:

$$F_n \Delta z + \Delta m g \Delta z - F_{n+1} \Delta z = \Delta m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta z. \quad (4.57)$$

Reescrevendo a equação (4.57) em termos das pressões sobre a camada de

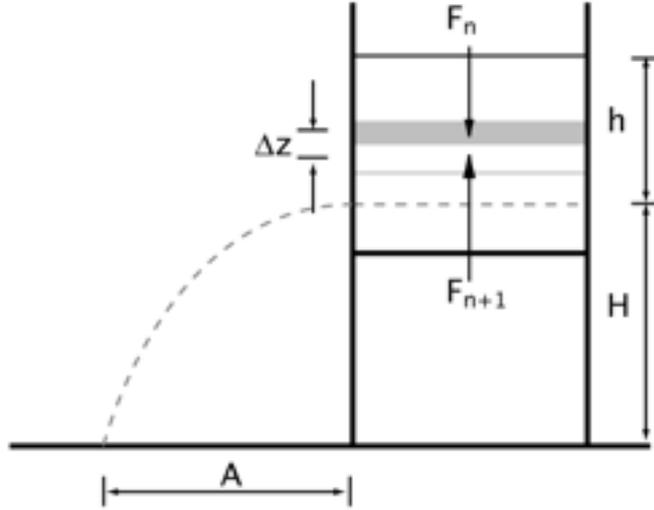


Figura 4.40: Alcance A do jato de água para uma coluna de água a uma altura h e para um orifício a uma altura H . Dividimos a coluna de água em N camadas e sobre a n -ésima camada (em cinza) indicamos as forças atuando sobre ela

líquido Δm , temos então

$$P_n \Delta z + \rho g \Delta z \Delta z - P_{n+1} \Delta z = \rho \Delta z \frac{\Delta z}{\Delta t} \Delta v. \quad (4.58)$$

Esta equação ainda pode ser simplificada para

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\Delta P}{\Delta z} + g = v_m \frac{\Delta v}{\Delta z}, \quad (4.59)$$

onde $v_m = \Delta z / \Delta t$ corresponde ao valor médio de v entre os instantes t e $t + \Delta t$. A expressão $v_m \Delta v$ pode ser reescrita na forma

$$v_m \Delta v = \frac{1}{2} (v_{n+1} + v_n) (v_{n+1} - v_n) = \frac{1}{2} (v_{n+1}^2 - v_n^2). \quad (4.60)$$

e, deste modo, a equação (4.58) pode ser reescrita em termos das velocidades nos respectivos pontos considerados:

$$P_n - P_{n+1} + g \rho \Delta z = \frac{1}{2} \rho (v_{n+1}^2 - v_n^2). \quad (4.61)$$

Ao determinarmos a diferença entre as pressões das N camadas obtemos

$$\sum_{n=1}^N (P_n - P_{n+1}) + g\rho \sum_{n=1}^N (\Delta z) = \frac{1}{2}\rho \sum_{n=1}^N (v_{n+1}^2 - v_n^2). \quad (4.62)$$

Fazendo as substituições

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N P_n - P_{n+1} &= (P_i - P_{i+1}) + (P_{i+1} - P_{i+2}) + \dots \\ &\quad + (P_{f-2} - P_{f-1}) + (P_{f-1} - P_f) \\ &= P_i - P_f, \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N z_n - z_{n+1} &= (z_i - z_{i+1}) + (z_{i+1} - z_{i+2}) + \dots \\ &\quad + (z_{f-2} - z_{f-1}) + (z_{f-1} - z_f) \\ &= z_i - z_f \\ &= h_i - h_f, \end{aligned} \quad (4.64)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N v_n^2 - v_{n+1}^2 &= (v_i^2 - v_{i+1}^2) + (v_{i+1}^2 - v_{i+2}^2) + \dots \\ &\quad + (v_{f-2}^2 - v_{f-1}^2) + (v_{f-1}^2 - v_f^2) \\ &= v_i^2 - v_f^2 \end{aligned} \quad (4.65)$$

na equação (4.62), relacionamos a pressão entre dois pontos do fluido incompressível e suas respectivas velocidades:

$$P_i - P_f + \rho g (h_i - h_f) = \frac{1}{2}\rho (v_f^2 - v_i^2). \quad (4.66)$$

A equação (4.66) expressa a lei de Bernoulli, que traduz o balanço energético

do movimento do fluido, e é mais tradicionalmente conhecida nas formas

$$P_i + \rho gh_i + \frac{1}{2}\rho v_f^2 = P_f + \rho gh_f + \frac{1}{2}\rho v_f^2 \quad (4.67)$$

e

$$\frac{P_i}{\rho g} + h_i + \frac{v_i^2}{2g} = \frac{P_f}{\rho g} + h_f + \frac{v_f^2}{2g} \quad (4.68)$$

onde, nesta última expressão, cada parcela tem dimensão de comprimento. Esta representação é muito empregada pelos engenheiros. Ela é denominada “cabeça da pressão” e, como vimos, é uma medida do comprimento que pode ser convertida às unidades da pressão se soubermos qual a densidade do líquido considerado na medida e qual o valor local da gravidade.

Podemos ainda observar da equação (4.68) que, se o fluido flui horizontalmente, teremos $h_i = h_f$ e podemos concluir que, neste caso, na posição de velocidade maior teremos a menor valor de pressão.

Quando $P_i = P_f$ e $v_i \approx 0$ temos a velocidade final do fluido dada por

$$v \approx \sqrt{2g(h_f - h_i)}, \quad (4.69)$$

expressão similar à velocidade de uma partícula que cai em queda livre de uma altura $(h_f - h_i)$. Se atribuímos esta velocidade à velocidade de escoamento no orifício do recipiente, reobtemos a expressão para o alcance A , dada pela equação (4.52), o que não está em acordo com a experiência para tubos com pequeno diâmetro.

Esta é uma boa oportunidade para colocar em discussão as aproximações feitas na construção ou na aplicação de um modelo. De fato, pela equação da continuidade, temos que a velocidade na superfície do fluido, v_i , está relacionada com a velocidade final, v , pela razão

$$v_i = v \frac{S_f}{S_i}, \quad (4.70)$$

onde S_i e S_f são as seções na superfície da coluna de água e no orifício de saída, respectivamente.

Ao substituímos esta expressão na equação de Bernoulli, ainda conside-

rando $P_i = P_f$, obtemos agora a seguinte expressão para a velocidade v na saída do recipiente:

$$v = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1 - (S_f/S_i)^2}} \sqrt{h_f - h_i}. \quad (4.71)$$

Observamos então que o efeito na redução da seção aumenta a velocidade de saída e, por conseqüência, aumenta o alcance realizado, e não o contrário, como observado em nosso experimento.

Devemos procurar outras razões para a tentar compreender o ocorrido em nosso trabalho. Lembramos que, ao construir o modelo, admitimos que a camada de massa Δm , na altura z teria a mesma velocidade ao longo de toda a seção. Entretanto, no balanço energético que realizamos, ignoramos os efeitos resistivos no movimento do líquido ao longo do recipiente, até alcançar o orifício. Fazendo $P_i = P_f$, $v_i = 0$ e incluindo no balanço energético a perda de energia, então a equação (4.68) se reduz a

$$h = h_0 + \frac{v^2}{2g} + \frac{E_f}{\rho g}, \quad (4.72)$$

onde $E_f/(\rho g)$ deve corresponder à perda de energia durante o fluxo do fluido em seu movimento ao longo da altura $h - h_0$.

Se considerarmos esta perda de energia E_f como uma fração ϵ da energia cinética adquirida na presença de resistência, podemos então escrever que

$$E_f = \frac{\epsilon}{2} \rho v^2 \quad (4.73)$$

e o balanço energético pode ser reescrito na forma

$$\rho g h = \rho g h_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\epsilon}{2} \rho v^2. \quad (4.74)$$

Neste caso, a velocidade de saída do recipiente é dada por

$$v^2 = \frac{2g}{1 + \epsilon} (h - h_0) \quad (4.75)$$

e o novo alcance A será menor do que no caso sem o termo resistivo:

$$A = \frac{\sqrt{4}\sqrt{H}}{\sqrt{1 + \epsilon}} \sqrt{h - h_0}. \quad (4.76)$$

Observamos que o coeficiente ϵ deste modelo corresponde à razão d/D da nossa experiência. Deste modo, podemos concluir que o coeficiente de perda de energia ao longo do movimento diminui com o aumento do diâmetro do recipiente. Esta é a lei de Darcy para o fluxo de um fluido em tubos cilíndricos, formulada por Henry Darcy em 1856 (VENNARD, 1940; DARCY, 1856). Evidentemente, tal análise detalhada escapa ao programa do ensino médio e, neste caso, nos restringimos a uma análise semi-quantitativa do experimento.

Como podemos observar, o procedimento que apresentamos neste trabalho nos permite fazer uma integração das leis da mecânica clássica com o fluido em movimento e, por conseqüência, dar uma imagem mecânica ao fenômeno observado.

Também observamos que o alcance A do jato de água é nulo quando a coluna do líquido é igual ou menor do que um certo valor h_0 , como foi indicado pelos resultados analisados para as diferentes configurações do experimento e indicado na figura 4.41. Podemos relacionar esse fato à tensão superficial, que equilibra a pressão da coluna líquida acima do orifício. A análise deste fenômeno fica como sugestão para futuros trabalhos.

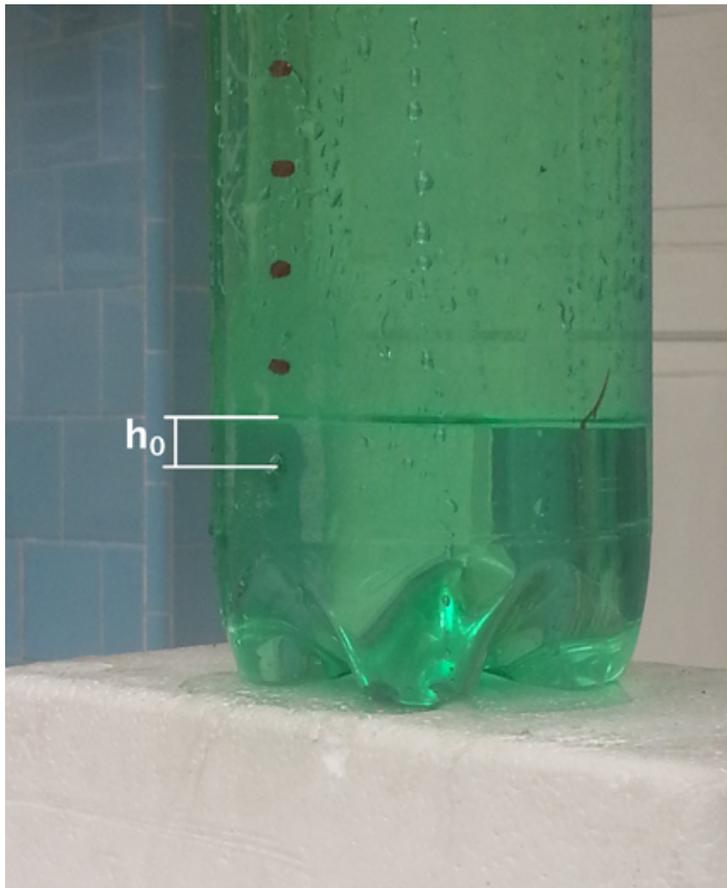


Figura 4.41: A pressão da coluna líquida de altura h_0 é insuficiente para vencer a tensão superficial no orifício.

Capítulo 5

Considerações finais

Apresentamos neste trabalho um atividade didática envolvendo o emprego de um experimento e da sua análise como principais ferramentas pedagógicas para a introdução dos conceitos de hidrodinâmica aos alunos do ensino médio e de graduação. A proposta de ensino que discutimos nessa dissertação se desenvolve em uma série de ações investigativas, onde os alunos se comportam como “cientistas”, buscando sintetizar os seus resultados experimentais em uma expressão algébrica, sem nenhum conhecimento prévio das equações envolvidas no experimento.

Com a atividade aqui discutida pretendemos oferecer ao aluno uma oportunidade para aprender a lidar com esta ou outras situações similares do seu cotidiano que venham a exigir dele soluções ou elaboração de estratégias e planos de ação para resolvê-las. Dessa forma, procuramos preparar o aluno a aprender como se comportar diante de um novo problema. Com esta prática, esperamos também que eles adquiram habilidades e competências para agir de forma objetiva na busca de uma solução para um desafio original dentro ou fora do contexto escolar.

O objetivo principal da nossa atividade é construir os conceitos físicos envolvidos em um problema partindo-se da observação e da análise dos parâmetros físicos relevantes na questão, sem nenhum conhecimento antecipado dos modelos teóricos correspondentes. Iniciamos a atividade com a observação do fenômeno, seguida então da caracterização, aquisição e da análise dos

dados experimentais relevantes ao problema. Ao final, à partir da análise gráfica e algébrica destes resultados experimentais, construímos a equação física característica do problema, sem a necessidade de antecipar a apresentação de leis científicas relacionadas ao problema considerado.

Esta forma de abordagem pode ser adaptada para outros tópicos de Física, através de um planejamento detalhado da atividade experimental sobre o fenômeno considerado, adequando-o ao tempo e ao espaço disponíveis em sala de aula. Evidentemente, por exigir uma duração maior para o seu desenvolvimento, a implantação da proposta que aqui apresentamos acarreta uma reestruturação na grade curricular atual. Esperamos, porém, que tal iniciativa resulte em um maior benefício para a aprendizagem do aluno, que deixa de receber passivamente uma quantidade maior de informações – muitas delas não assimiladas e/ou descontextualizadas do seu dia a dia – mas, em compensação, ganha em qualidade no conhecimento efetivo do como fazer Ciências.

Desejamos também, com este trabalho, resgatar o papel da experimentação científica na formação do estudante. Como Gibbings nos chama a atenção (BAKER et al., 1986), “experimentar, em Ciências, é uma exploração, uma pesquisa no desconhecido” e “esta característica da atividade experimental a torna ainda mais prazerosa quando os resultados obtidos pelo pesquisador fazem avançar a fronteira do conhecimento, por menor que seja este avanço”. Evidentemente, apenas com o exercício das atividades que propomos neste trabalho, não esperamos que o estudante vá realizar alguma descoberta original. O objetivo do trabalho é permitir que o estudante desenvolva as suas habilidades durante o desenrolar do experimento: que ele perceba a importância da atividade experimental para o desenvolvimento científico e, não menos importante, que ele entenda que esta atividade está ao seu alcance.

Para concluir, esperamos também que, ao terminar a atividade, o aluno compreenda que o nosso conhecimento científico é baseado em observações mas a atividade experimental não termina simplesmente com a organização das medidas efetuadas. Devemos ir além e incluir, sempre que possível, uma dedução lógica na forma de uma expressão algébrica que represente o conjunto destas observações. Mais ainda, esperamos que o aluno também

perceba que as leis científicas e os modelos analíticos adotados pela comunidade científica são formulados com base na observação. Entretanto, eles devem ser continuamente testados para sabermos os limites de validade de tais representações.

Referências Bibliográficas

- ABIB, M. L. V. dos S.; ARAÚJO, M. S. T. d. Atividades experimentais no ensino de física: Diferentes enfoques, diferentes finalidades. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 25, n. 2, p. 176–194, 2003.
- BACHELARD, G. *A Formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BAKER, A. G. et al. *The Systematic Experiment*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- BERNOULLI, D.; BERNOULLI, J. *Hydrodynamics–Hydraulics*. New York: Dover Publications, 1968.
- BRASIL. Lei de diretrizes e bases da educação nacional. Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996. 1996.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio*. Brasília: SEMTEC/MEC, 2000.
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais; Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BRASIL. *PCN+Física: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/Semtec, 2006.

BRITO, L. S. *Uma aula sobre a cinemática do plano inclinado*. Dissertação (Monografia de final de Curso de Licenciatura) — Instituto de Física — UFRJ, Rio de Janeiro – RJ, Agosto 2008.

CACHAPUZ, A. Linguagem metafórica e o ensino das ciências. *Revista Portuguesa de Educação*, v. 2, n. 3, p. 117–129, 1989.

CAPECCHI, M. C. V. M.; CARVALHO, A. M. P. Atividade de laboratório como instrumento para a abordagem de aspectos da cultura científica em sala de aula. *Revista Pro-Posições (Faculdade de Educação da Unicamp)*, v. 17, n. 1, p. 137–153, 2006.

CARDINALI, F. *Raccola d'autori italiani che trattano del motto dell'acque – arricchita di molte cose inedite, e d'alcuni schiarimenti*. 4. ed. Bologna: Tipografia Cardinali e Frulli, 1826.

CARRASCO, H. J. Experimentos de laboratorio; un enfoque sistémico y problematizador (laboratory experiments: a systemic and problemizing approach). *Revista de Ensino de Física*, v. 13, p. 86–96, 1991.

CARUSI, E. et al. *Leonardo da Vinci*. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana, 1923.

CARUSI, E. et al. *Leonardo da Vinci*. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana, 1934. (Collana della Enciclopedia Italiana : Serie seconda).

CARVALHO, A. de et al. *Ciências no ensino fundamental: o conhecimento físico*. São Paulo: Scipione, 1998. (Pensamento e ação no magistério).

CARVALHO, A. M. P.; CAPECHI, M. C. V. M. Aspectos da cultura científica numa atividade de laboratório aberto de física. In: *Anais do IX Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Física*. Jaboticatubas, MG: [s.n.], 2004.

CARVALHO, A. M. P. de. Habilidades de professores para promover a enculturação científica. *Contexto & Educação*, v. 22, n. 77, p. 25–49, jan./jun. 2007.

D'ALEMBERT, J. le R. *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*. Paris: [s.n.], 1744.

D'ALEMBERT, J. le R. *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance ds fluides*. Paris: [s.n.], 1752.

- DARCY, H. *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Paris: Dalmont, 1856.
- DARRIGOL, O. Hydrodynamics and hydraulics. In: HEILBRON, J. L. (Ed.). *The Oxford Companion to the History of Modern Science*. Oxford: Oxford University Press, 2003. p. 389–391.
- DARRIGOL, O. *Worlds of Flow: A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. Oxford: Oxford University Press, 2005.
- DAUBEN, J. W.; SCRIBA, C. J. (Ed.). *Writing the History of Mathematics – Its Historical Development*. 1. ed. Basel: Birkhäuser, 2002. (Science Networks. Historical Studies, v. 27).
- DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A.; PERNANBUCO, M. *Ensino de Ciências: fundamentos e métodos*. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2002.
- DIAS, V. S. *Michael Faraday; subsidios para metodologia de trabalho experimental*. 156 p. Dissertação (Mestrado) — USP, São Paulo, 2004.
- DURAND, W. F. The development of our knowledge of the laws of fluid mechanics. *Science*, v. 78, n. 2025, p. 343–351, 1933.
- EULER, L. *Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides*. Berlin: Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belle-Lettres de Berlin, 1755. Disponível em: <http://bibliothek.bbaw.de/bbaw/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index_html?band=02-hist/1755&inhalt:int=1&seite:int=55>. Acesso em: dezembro de 2012.
- EULER, L. *Principes généraux de l'état d'équilibre d'un fluide*. Berlin: Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belle-Lettres de Berlin, 1755. Disponível em: <http://bibliothek.bbaw.de/bbaw/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index_html?band=02-hist/1755&inhalt:int=1&seite:int=55>. Acesso em: dezembro de 2012.
- EULER, L. *Principes généraux du mouvement des fluides*. Berlin: Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belle-Lettres de Berlin, 1755. Disponível em: <http://bibliothek.bbaw.de/bbaw/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige/index_html?band=02-hist/1755&inhalt:int=1&seite:int=55>. Acesso em: dezembro de 2012.

- HEILBRON, J. L. (Ed.). *The Oxford Companion to the History of Modern Science*. Oxford: Oxford University Press, 2003.
- HERSCHEL, J. F. W. *A Treatise on Astronomy*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- JIMENEZ-ALEIXANDRE, M. P. 10 ideas clave. competencias en argumentación y uso de pruebas. In: . Barcelona: Editorial Graó, 2010, (Ideas Claves).
- KAMIL, C.; DEVRIES, R. *O conhecimento físico na educação pré-escolar: implicações da teoria de Piaget*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1986.
- KOERTGE, N. (Ed.). *New Dictionary of Scientific Biography*. 1. ed. New York: Charles Scribners & Sons, 2008.
- KÖHNLEIN, F. K.; PEDUZZI, L. O. Q. Uma discussão sobre a natureza da ciência no ensino médio: um exemplo com a teoria da relatividade restrita. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 2, n. 1, p. 36–70, 2005.
- LEIBNIZ, G. W. von. Brevis demonstratio erroris memorabilis cartesiani et aliorum circa legem naturalem, secundum quam volunt a deo eandem semper quantitatem motus conservari, qua in re mechanica abutuntur. *Acta Eruditorum*, p. 161–163, 1686. Reproduzido in A.VI.iv: 2027-30/GM.vi.117-19/L 296-98. Versão em francês in Nouvelles de la République des Lettres 1686, 996-99.
- NEMÉNYI, P. F. The main concepts and ideas of fluid dynamics in their historical development. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 2, n. 1, p. 52–86, 1962.
- NEVES, J. M. da S. *Uma aula alternativa sobre a hidrodinâmica dos fluidos e a tensão superficial das substâncias*. Dissertação (Monografia de final de Curso de Licenciatura) — Instituto de Física — UFRJ, Rio de Janeiro — RJ, Agosto 2010.
- NEWTON, I. *Principia – Princípios matemáticos de filosofia natural*. São Paulo: EDUSP, 2010.
- REZENDE, F.; OSTERMANN, F.; FERRAZ, G. Ensino–aprendizagem de física no nível médio: o estado da arte da produção acadêmica no século xxi. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2009.
- ROUSE, H.; INCE, S. *History of Hydraulics*. New York: Dover, 1963. (Institute of Hydraulic Research, 1957).

SOUZA, J. R. M. de. *A experiência da fonte de Heron no Ensino Médio*. Dissertação (Monografia de final de Curso de Licenciatura) — Instituto de Física — UFRJ, Rio de Janeiro – RJ, Agosto 2005.

STIGLER, S. In: GIERYN, T. F. (Ed.). *Science and social structure: a festschrift for Robert K. Merton*. New York: NY Academy of Sciences, 1980. p. 147–157.

TORRICELLI, E. *De motu gravium naturaliter descendentium, et proiectorum*. *Opera Geometrica*. Florença: [s.n.], 1644.

VENNARD, J. K. *Elementary Fluid Dynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1940.

WILSEK, M.; TOSIN, J. Ensinar e aprender ciências no ensino fundamental com atividades investigativas através da resolução de problemas. Estado do Paraná, v. 3, n. 5, 2012. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos>>. Acesso em: dezembro de 2012.