



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física
Mestrado Profissional em Ensino de Física

O ROLAMENTO DE UM CARRETEL

José Fernando Rodrigues de Sousa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientadora:
Marta Feijó Barroso

Rio de Janeiro
Outubro de 2012

O ROLAMENTO DE UM CARRETEL

José Fernando Rodrigues de Sousa

Orientadora:
Marta Feijó Barroso

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

Dra. Marta Feijó Barroso (Presidente)

Dr. Hélio Salim de Amorim

Dr. Marcelo Shoey de Oliveira Massunaga

Rio de Janeiro
Outubro de 2012

FICHA CATALOGRÁFICA

S725r Sousa, José Fernando Rodrigues de
O Rolamento de um Carretel / José Fernando Rodrigues de
Sousa - Rio de Janeiro: UFRJ / IF, 2012.
viii, 53 f.: il.;30cm.
Orientadora: Marta Feijó Barroso
Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física /
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2012.
Referências Bibliográficas: f. 52.
1. Ensino de Física. 2. Rotação. 3. Força de Atrito. I. Barroso,
Marta Feijó. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de
Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. O
Rolamento de um Carretel.

À minha esposa Zelina e aos meus filhos

Agradecimentos

Em primeiro lugar, à minha família pelo apoio e compreensão durante a realização do curso em especial à minha esposa pela dedicação, incentivo e contribuições durante todo este percurso.

À Professora Marta Feijó Barroso, minha orientadora, que com sua experiência, conselhos e paciência me ajudaram no aprofundamento dos conceitos Físicos permitindo, dessa forma, o desenvolvimento da dissertação de mestrado.

Ao Gustavo Rubini pela ajuda oferecida durante o processo de coleta de dados para a dissertação.

Aos Professores do Mestrado Profissional em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) pela contribuição inestimável oferecida durante o curso para o meu aprendizado.

Ao Professor Joaquim Pereira Neto do Colégio Pedro II – Campus Tijuca II por sua participação na construção do carretel e contribuições na análise matemática da dissertação.

Ao Professor Carlos Eduardo Magalhães de Aguiar pelas suas palavras de estímulo e apoio durante todo o processo de recuperação da minha saúde.

E finalmente aos colegas que comigo estudaram e com quem tive a rara oportunidade de compartilhar as alegrias, expectativas e tensões durante esses anos.

RESUMO

O ROLAMENTO DE UM CARRETEL

José Fernando Rodrigues de Sousa

Orientadora:
Marta Feijó Barroso

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

O tema rotações é pouco discutido e trabalhado no Ensino Médio. Há pouco material didático que trate do movimento de rolamento, como por exemplo, movimento de rodas, com enfoque quantitativo, da mesma forma que é feito com os movimentos de translação. Há muita dificuldade entre os estudantes na apreensão dos conceitos básicos relativos aos movimentos de rotação e rolamento, em particular na discussão da dinâmica desse movimento, na qual se encontram inúmeras concepções não científicas sobre o atrito. A ausência de laboratórios e atividades experimentais na maior parte das escolas representa um obstáculo para a abordagem concreta do tema. Neste trabalho, discutimos o movimento de rotação e o rolamento dos corpos com uma proposta de abordagem voltada para o Ensino Médio. O desafio encontrado foi apresentar o tema de forma a facilitar a sua compreensão, utilizando recursos visuais e experimentais. Para isso, montou-se um experimento, cujo vídeo e posterior análise podem ser utilizados como ferramenta em sala de aula, capaz de revelar e auxiliar a discussão dos conceitos básicos envolvidos com a rotação e os movimentos de rolamento. Complementa este trabalho uma animação com os dados obtidos, visando a utilização em sala de aula do material produzido com o experimento.

Palavras-chave: Ensino de Física, Rotações, Força de Atrito.

Rio de Janeiro
Outubro de 2012

ABSTRACT

ROLLING OF A REEL

José Fernando Rodrigues de Sousa

Orientadora:
Marta Feijó Barroso

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

Rotations are barely discussed in high school physics. Only a few texts and materials contain discussions on wheel rotation, especially in its quantitative approach. The basic concepts of rotation and rolling are difficult to students, and in particular the dynamics of such motion is the source of a great number of misconceptions. The lack of laboratories and experimental activities in most schools tend to turn the subject into an abstract one. In this work, we discuss the rotation and rolling motion of rigid bodies, in particular to high school students. The subject is presented with visual and experimental resources. An experiment was realized, and its video was analysed so that the data could be used in classes. The text is presented together with visual resources so that it can be used by teachers.

Keywords: Physics Education, Rotations, Frictional Force

Rio de Janeiro
October 2012

Sumário

Capítulo 1	Introdução	1
Capítulo 2	Uma breve história do atrito	3
2.1	Uma breve história da roda na antiguidade	3
2.2	Leonardo di Ser Piero da Vinci.....	9
2.3	Guilherme Amontons	11
2.4	Charles Augustin Coulomb	12
2.5	O ensino do atrito.....	13
Capítulo 3	O movimento de rolamento como superposição de translação e rotação	14
3.1	Breve comentário	14
3.2	Sistemas de referência inerciais.....	17
3.3	A descrição do movimento de uma partícula: conceitos básicos	18
3.4	Coordenadas cartesianas e polares da velocidade e aceleração no movimento de rolamento	20
3.5	Movimento do carretel: corpo rígido em translação e rotação	23
3.6	A dinâmica do movimento do carretel	26
3.7	O atrito no rolamento.....	27
3.8	Finalização do capítulo.....	29
Capítulo 4	Descrição do experimento	30
4.1	O carretel	30
4.2	A montagem do experimento	31
4.3	O experimento	32
4.4	Os dados obtidos	34
Capítulo 5	Análise do experimento	37
5.1	A leitura dos dados	37
5.2	O movimento do centro de massa do carretel	39
5.3	O movimento do ponto 3 na extremidade do carretel	42
5.4	Resultados	48
Capítulo 6	Considerações finais	50
	Referências Bibliográficas	52
	Apêndice A CD – Movimento de um carretel.....	53

Capítulo 1

Introdução

Abordar rotações, movimentos de rolamento e as questões relativas à energia nos movimentos envolvendo “rodas” no ensino médio são temas pouco comuns.

Escolheu-se esse tópico pois ele é um tema pouco discutido e trabalhado no Ensino Médio. Como consequência, existe pouco material para tratar deste assunto com enfoque quantitativo, no mesmo status do movimento de translação. A maioria das propostas encontradas concentra seus esforços na apresentação qualitativa da ideia de conservação do movimento.

Mesmo no ciclo básico do Ensino Superior, os estudantes apresentam muita dificuldade em aprender os conceitos básicos relativos aos movimentos de rotação e de rolamento. Em particular, a dinâmica do movimento de rolamento sem deslizamento é fonte de um grande número de dificuldades conceituais e da presença de inúmeras concepções não científicas sobre o atrito aplicadas neste movimento.

O ensino de Física, de forma geral, esbarra no fato de muitas escolas, principalmente as públicas, não disporem de laboratórios didáticos para um processo de ensino-aprendizagem adequado. Portanto, ministrar aulas que envolvam conceitos relacionados ao movimento de rotação e rolamento representa um obstáculo não só para professores como também para os alunos devido às dificuldades de uma construção concreta a respeito do tema.

Com relação aos livros didáticos verifica-se que neles o desenvolvimento deste tópico ocorre, na maior parte das vezes, de forma superficial. Com isto, uma boa parte dos fenômenos do dia a dia fica afastado da sala de aula, pelas dificuldades conceituais apresentadas.

Neste trabalho, discutimos o movimento de rotação e o rolamento dos corpos com uma proposta de abordagem voltada para o Ensino Médio. O desafio encontrado foi apresentar o tema de forma a facilitar a sua compreensão, utilizando-se de recursos visuais e experimentais. Para isso,

realizou-se um experimento – cujo vídeo e posterior análise podem ser utilizados como ferramenta em sala de aula – capaz de revelar e discutir os conceitos básicos envolvidos com a rotação e os movimentos de rolamento.

No Capítulo 2, apresenta-se a primeira parte dos fundamentos da Física necessários para a descrição do experimento: algumas considerações sobre forças de atrito.

No Capítulo 3, faz-se a discussão sobre a mudança de sistemas de referência, fundamental para a análise dos dados que será apresentada em seguida.

No Capítulo 4, descreve-se a montagem do experimento: um carretel girando sobre uma mesa horizontal, com o movimento sendo filmado. São descritos o material utilizado e sua construção. O passo seguinte é descrever o experimento em si: montagem, instrumentos utilizados, softwares de uso livre e a descrição do local onde o experimento foi realizado, entre outros.

A partir das medidas, apresenta-se no Capítulo 5 a análise dos dados obtidos. Neste capítulo, utilizando gráficos, está feita a determinação da velocidade de translação do centro de massa e a velocidade de rotação do carretel em torno do centro de massa. Observa-se que a velocidade do centro de massa é constante, o que permite a análise da dinâmica do movimento do carretel e o estabelecimento do valor nulo da força de atrito no período em que há rolamento sem deslizamento, o que é sempre uma surpresa para professores e alunos.

E finalmente apresentam-se as considerações finais sobre o trabalho no Capítulo 6.

Como produto final, complementando o trabalho, apresenta-se uma animação com os dados obtidos, visando a utilização em sala de aula do material produzido com o experimento.

Capítulo 2

Uma breve história do atrito

Nesta seção, apresenta-se um pequeno histórico das ideias sobre atrito. O ponto importante para o trabalho aqui apresentado é o atrito que permite a transformação de movimentos de translação em movimentos de rotação e vice-versa. Estuda-se, em particular, o movimento de rolamento sem deslizamento – o movimento idealizado de uma roda.

2.1 – Uma breve história da roda na antiguidade

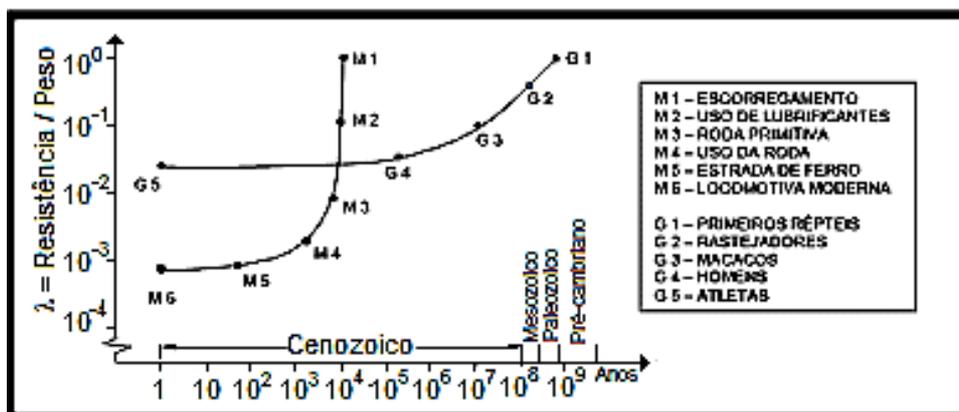
A origem do atrito, no âmbito da Física, envolve o encontro de pelo menos dois objetos. Seus estudos surgem nos primórdios da humanidade. A invenção da roda é um dos primeiros dispositivos elaborados pelo homem com o intuito de facilitar o deslocamento e, portanto reduzir o atrito na translação. Na realidade é uma tentativa de produzir o mesmo desempenho procurando economizar o máximo de energia. Assim, busca o homem resolver problemas relativos à fricção, isto é, o desgaste mecânico de peças colocadas em contato como, por exemplo, em uma engrenagem. É interessante notar que o estudo do atrito envolve não só questões relativas às máquinas como também outras questões, por exemplo, de ordem médica: doenças como a artrite.

Na época moderna podemos identificar a necessidade de controlar o atrito em situações simples como escovar os dentes e a maneira de proteger, na medida do possível, o esmalte do dente. A simples atividade de caminhar envolve o domínio do atrito para trazer conforto e um melhor desempenho para a pessoa.

A presença do atrito na evolução humana, considerando o movimento de translação sobre a superfície terrestre, pode ser observada a partir do esquema apresentado na Figura 2.1, onde a resistência à translação é representada no

eixo vertical pela relação resistência/peso, que pode ser considerada um coeficiente de atrito λ .

Figura 2.1 – Desenvolvimento da locomoção através da história [Halling, 1983 *apud* Magalhães, 2002].

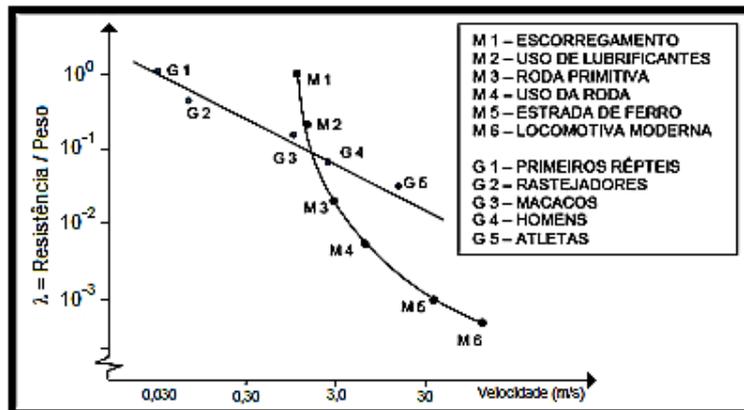


Analisando o gráfico, pode-se verificar ao longo da linha G a evolução da translação em função do tempo, desde os movimentos ditos rastejantes até os atletas modernos. As escalas no gráfico são logarítmicas. Na linha M fica caracterizado o uso da inventividade e de princípios científicos no desempenho humano se comparando com a linha G, onde está presente a evolução natural animal. Podemos, assim, verificar a interferência do conhecimento humano nesse processo evolutivo.

O homem moderno, a partir de cerca de 10.000 anos atrás, usou sua inventividade para obter melhores desempenhos do que o permitido pelo desenvolvimento fisiológico dos animais. O uso de lubrificantes e o desenvolvimento da roda mostraram-se muito vantajosos, como pode ser verificado pela linha M.

Na Figura 2.2 é apresentada a importância do conhecimento científico no desempenho (velocidade) do ser humano, ao longo da história. Caso tivesse se limitado a evolução animal, a capacidade do homem estaria representada pela curva G. Com o uso de preceitos científicos e diferentes materiais consegue superar suas limitações – curva M.

Figura 2.2 – Evolução das velocidades alcançadas pelo ser humano ao longo da história [Halling, 1983 *apud* Magalhães, 2002].



O estudo do atrito introduz, em nosso vernáculo, a palavra tribologia, que é derivada do grego τριβω (tribo – esfregar, atritar) e λόγος (logos – estudo). Durante a década de 60 surgem publicações, na Inglaterra, constatando um aumento nas falhas em plantas de fábricas e máquinas, causadas principalmente por desgaste nos seus componentes, o que tornava a produção mais onerosa. Assim, surge a necessidade de um estudo sobre a situação, com o objetivo de melhorar a educação e estabelecer uma pesquisa coordenada em escala nacional. A partir deste fato, foi instituído um grupo de trabalho com objetivo de investigar e propor soluções para o ensino em lubrificação e, também, nortear as diversas pesquisas desenvolvidas na Inglaterra que buscavam atender às necessidades da indústria.

Em março de 1966 sob a orientação de Peter H. Jost foi apresentado o *Relatório Jost* (onde o uso do termo tribologia foi usado pela primeira vez) ao Departamento de Educação e Ciência. O governo inglês publica o relatório consolidando a análise feita indicando uma correlação direta entre a tribologia e o progresso e desenvolvimento da indústria.

O estudo da tribologia é diversificado, atingindo diversas áreas: dinâmica dos fluidos, ciências dos materiais, mecânica de contato, dinâmica da transferência de calor, caracterização de superfícies e muito mais. Quando aplicada aos organismos vivos ela é designada de biotribologia onde incorpora princípios de medicina e ciências biológicas.

Os registros mais antigos demonstrando preocupação com o atrito datam de 3500 aC, na antiga Babilônia, onde a abertura de tumbas mostrou o uso de óleo lubrificante animal nos mancais das rodas.

A preocupação e aplicação dos princípios tribológicos na redução do atrito nos movimentos lineares foram, também, encontrados no antigo Egito. O transporte de grandes estátuas de pedra, sobre trenós, puxados por escravos foi registrado em uma pintura na gruta localizada em El-Bershed (Figura 2.3), realizada em torno de 1800 aC. De acordo com a figura pode-se ver um processo de transporte onde 172 escravos são utilizados para puxar uma estátua de peso aproximado $6,0 \times 10^5$ newtons (\cong 60 toneladas).

Figura 2.3 – Reprodução do transporte de um colosso egípcio a cerca de 1800 aC [Halling, 1983 *apud* Magalhães, 2002].



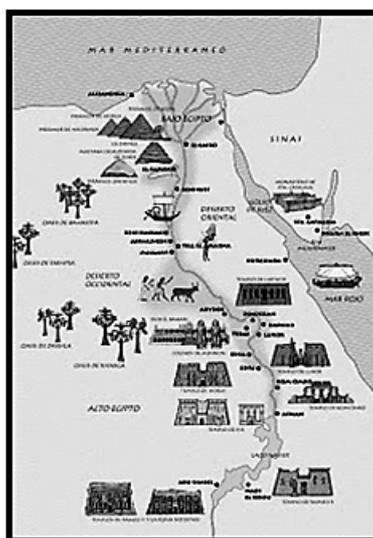
A figura apresenta, também, um homem sobre um trenó colocando um líquido à sua frente demonstrando uma preocupação com a lubrificação. Podem-se notar diversos homens carregando pranchas planas e jarros contendo possivelmente lubrificantes. Na Figura 2.4 podemos verificar a configuração geográfica da época mencionada.

Para um calculo aproximado do chamado coeficiente de atrito λ , vamos admitir que cada escravo tivesse exercido uma força de 800N e considerando a definição de coeficiente apresentado anteriormente (a relação resistência/peso), pode-se escrever:

$$\lambda = \frac{172 \times 800}{6 \times 10^5} \Rightarrow \lambda = 0,23$$

Figura 2.4 – Localização geográfica do Egito em 1800 aC.

(<http://agustinaramirez.blogspot.com.br/2008/01/mesopotamia-egipto-y-persia.html>)



De acordo com os trabalhos de Bowden e Tabor datados de 1950 [Bowden e Taylor, 1950 *apud* Magalhães, 2002] os valores para os coeficientes de atrito entre madeira e madeira são:

- Para madeira molhada $\Rightarrow \lambda \cong 0,20$;
- Para madeira seca e limpa $\Rightarrow \lambda \cong [0,25; 0,50]$.

É possível então inferir que o trenó estivesse deslizando sobre pranchas de madeiras lubrificadas.

Outro exemplo, citado por Harris [Harris, 1966 *apud* Magalhães, 2002] em seu livro sobre mancais de *rolamento*, refere-se à ilustração, representada na Figura 2.5, onde assírios movimentam um bloco de pedra apoiado em pranchas dispostas sobre *roletes*, em torno de 1100 aC. O peso do trenó e do bloco é estimado em $7,0 \times 10^4 \text{N}$ ($\cong 7,0$ toneladas) e o número de escravos utilizado, na tarefa, são iguais a quatro grupos de oito. Na Figura 2.6 pode-se verificar a configuração geográfica da época mencionada.

Figura 2.5 – Reprodução do transporte de um colosso assírio a cerca de 1100 aC (Halling, 1983 *apud* Magalhães, 2002)

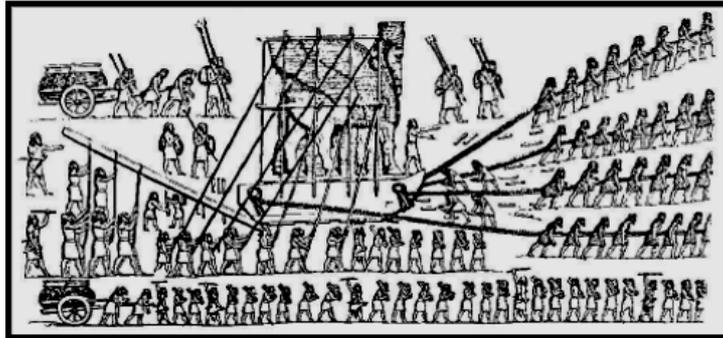
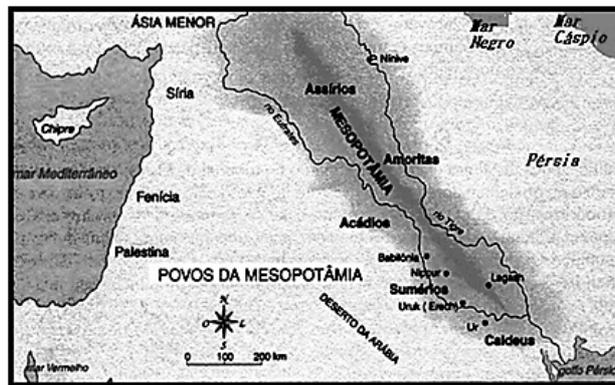


Figura 2.6 – Localização geográfica da Mesopotâmia na época.

(<http://agustinaramirez.blogspot.com.br/2008/01/mesopotamia-egipto-y-persia.html>)



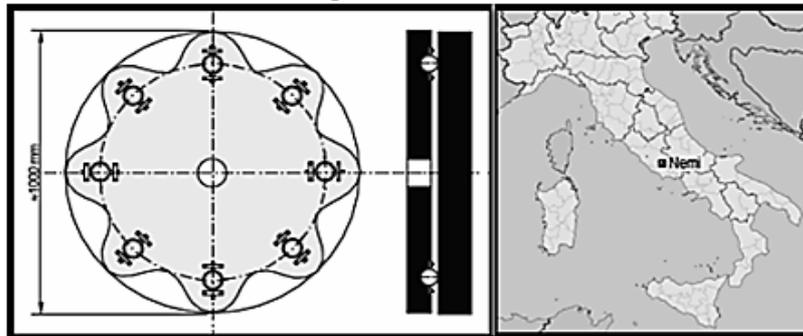
Considerando que cada escravo pudesse exercer uma força de 800N, o coeficiente de *atrito de rolamento* pode ser calculado como:

$$\lambda = \frac{4 \times 8 \times 800}{7 \times 10^4} \Rightarrow \lambda = 0,37$$

Os valores encontrados para o coeficiente de atrito, nos dois exemplos, sugerem um desenvolvimento tribológico considerável *representado pela mudança do movimento de deslizamento para rolamento*.

Em 1928 foram encontrados no lago Nemi, próximo a Roma, fragmentos do que seria um mancal axial de esferas, provavelmente em 40 aC, apresentado na Figura 2.7, desenvolvido supostamente para suportar uma estátua, facilitando seu giro durante o trabalho de escultura.

Figura 2.6 – Detalhe da reconstrução teórica do mancal encontrado no lago Nemi.



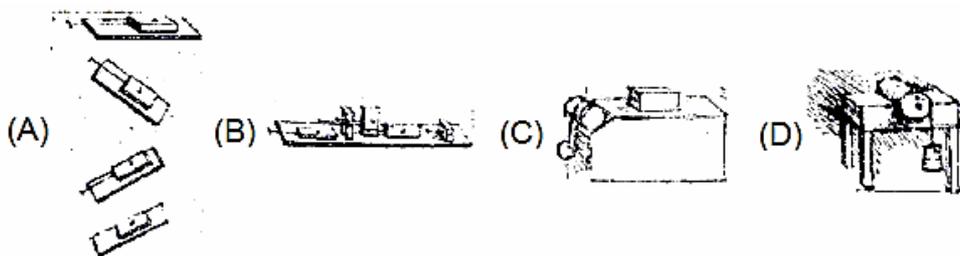
2.2 – Leonardo di Ser Piero da Vinci

O estudo experimental e controlado mais antigo sobre o atrito que se tem notícia é devido ao italiano Leonardo da Vinci (1452 – 1519), que procura estudar de forma detalhada o atrito e estabelecer regras para o seu estudo, utilizando um bloco retangular deslizando de diferentes maneiras sobre uma superfície plana, como foi ilustrado em folhas de seu caderno hoje reunidas no “Codex Atlanticus” [McCurdy, 1904]. Em suas conclusões afirma que:

1. *O atrito provocado pelo mesmo peso terá a mesma resistência no início do movimento, embora as áreas ou comprimento de contato sejam diferentes;*
2. *O atrito provoca o dobro do esforço se o peso for dobrado;*

Na Figura 2.8, estão representados os instrumentos utilizados por Leonardo da Vinci no estudo do atrito. Podemos considerar esses instrumentos, os primeiros tribômetros desenvolvidos.

Figura 2.8 – Figura dos instrumentos de Leonardo da Vinci [Codex Atlanticus].



Nesta figura, as situações representam:

1. Em (A) – estudo do atrito em superfícies horizontais e inclinadas;
2. Em (B) – estudo do atrito considerando a área aparente;
3. Em (C) – estudo do atrito utilizando polias;
4. Em (D) – estudo do atrito no torque de um cilindro.

As duas afirmações mencionadas acima [McCurdy, 1904] sobre o atrito são basicamente empíricas e que podem ser resumidas da seguinte forma:

1. O módulo da força de atrito é proporcional ao módulo da força normal;
2. A força de atrito não depende da área aparente de contato entre as superfícies.

Leonardo da Vinci foi, ao que parece, o primeiro a introduzir o conceito de coeficiente de atrito como razão entre o módulo da força de atrito e o módulo da força normal. Escreve [McCurdy, 1904]:

“Todo corpo em atrito tem uma resistência de atrito igual a um quarto de seu peso.”

Os trabalhos de Leonardo da Vinci, sobre este e muitos outros assuntos, só foram reunidos e publicados muitos anos depois de sua morte e, portanto tiveram reduzida repercussão na construção da mecânica e da teoria das máquinas dos séculos seguintes [Krim, 1996].

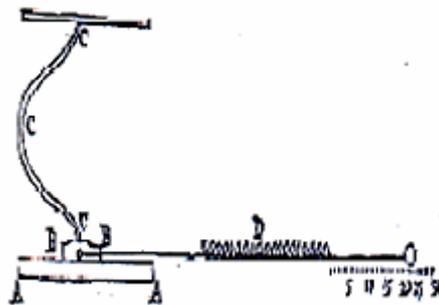
2.3 – Guillaume Amontons

O interessante é que estas conclusões ocorrem 200 anos antes que tais leis fossem divulgadas pelo físico e inventor francês Guillaume Amontons (1663–1705) que postula suas leis no ano de 1699 e as apresenta no artigo *“De la resistance cause dans les machines”* [Palmer, 1949], independente das conclusões de Leonardo da Vinci.

A experiência de Guillaume Amontons (Figura 2.9) consistia de uma mola vertical (CCC) que pressionava um bloco (BB) capaz de deslizar sobre uma superfície horizontal plana (AA) e uma mola que media a força horizontal

necessária para fazer o bloco deslizar. Os materiais das superfícies variavam entre: cobre, ferro, chumbo e madeira, revestidos com gordura de porco. A área aparente de contato também era variável durante o experimento.

Figura 2.9 – Figura do instrumento para medir o atrito [Amontons, 1699 *apud* Magalhães, 2002].



Depois de testar todas as combinações possíveis (por exemplo: AA feito de cobre e BB de ferro) Amontons apresentou suas conclusões a respeito da resistência causada pelo atrito:

1. *A resistência causada por fricção aumenta ou diminui apenas na proporção maior ou menor pressão [carga] e não de acordo com a extensão maior ou menor das superfícies;*
2. *A resistência causada por fricção é mais ou menos a mesma para o ferro, cobre, chumbo e de madeira, em qualquer combinação, se as superfícies são revestidas com gordura de porco;*
3. *A resistência é mais ou menos igual a um terço da pressão [carga];*
4. *A estas observações é conveniente adicionar uma quarta, que estas resistências estão na razão de composição dos pesos ou pressões das peças esfregando e da velocidade dos seus movimentos.*

Amontons não fez distinção entre atrito cinético e atrito estático. Coube ao matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783) encontrar uma solução analítica após estudos do mecanismo de deslizamento de um corpo em um plano inclinado, baseado nos experimentos de Leonardo da Vinci, onde atribuiu à rugosidade das superfícies a causa da existência do atrito.

Ao colocar um bloco sobre um plano inclinado, Euler imaginava que o “emaranhamento” entre as superfícies impedia que o bloco deslizesse. Ele pode estabelecer as condições para a iminência do deslizamento através de uma relação do ângulo de inclinação máximo da superfície para o qual o corpo fica em repouso. Com seus estudos, Euler foi a primeira pessoa a concluir que deveria existir uma distinção entre atrito estático e atrito cinético, sendo que o estático era maior que o cinético.

2.4 – Charles Augustin Coulomb

Nos séculos XVIII e XIX assistiu-se à revolução industrial e consideráveis desenvolvimentos tribológicos junto com as novas máquinas. Em torno de 1780, Charles Augustin de Coulomb (1736–1806), físico francês, confirma as leis do atrito de Amontons e estabelece a terceira lei, em que a força de atrito é independente da velocidade. Tais leis são utilizadas até hoje na engenharia e na física no estudo sobre o atrito.

Ocorrem outros desenvolvimentos adicionais associados ao crescimento da industrialização na última década do século XVIII com, por exemplo, Robert Hooke (1635–1703), filósofo inglês, arquiteto e físico, no desenvolvimento de eixos de aço com buchas de materiais usados em sinos de bronze no lugar de suportes de madeira com ferro.

Embora as leis do fluxo viscoso só tivessem sido postuladas por Issac Newton (1642–1727) em data anterior, a compreensão científica com mancais lubrificados não ocorre antes do fim do século XIX. Os princípios de lubrificação hidrodinâmica datam de 1883 com Beauchamp Tower (1845–1904) atendendo às máquinas ferroviárias. Seus trabalhos foram aperfeiçoados por Osborn Reynolds (1842–1912), matemático e engenheiro inglês, que em seus estudos sobre lubrificação, publica suas equações: *Reynolds Average Navier – Stokes* que hoje sustentam a maior parte dos modelos turbulentos em Fluidodinâmica computacional, e posteriormente por Nikolai Petrov Pavlovich (1836–1920), cientista russo Presidente do Conselho de Engenharia Ferroviária Ministerial ligado ao desenvolvimento de locomotivas a vapor. Todavia, foi o físico britânico Osborn Reynolds que traduziu os resultados experimentais em

linguagem matemática, desenvolvendo uma equação de derivadas parciais, também chamada de equação de Reynolds em sua homenagem, que tem sido a base para a grande maioria dos desenvolvimentos nesta área, gerando um grande número de pesquisas até os dias atuais.

2.5 – O ensino do atrito

O estudo do movimento dos corpos, em particular aqueles que podem ser tratados como partícula, é um assunto desenvolvido no Ensino Médio e nos anos iniciais do ensino superior. No entanto, todos esses estudantes apresentam problemas quando apresentados a situações simples envolvendo forças de atrito.

Há muitos relatos na literatura sobre as concepções não científicas encontradas entre a população em relação ao atrito [Driver, 1985, Caldas e Saltiel, 1999, Viennot, 2003, Arons, 1997, *apud* Carvalho, 2005; Magalhães, 2002]. Quando se passa a fazer o estudo de corpos rígidos, em particular de objetos em movimento de rolamento, esta situação se agrava. Os estudantes tendem a simplificar os problemas de corpos rígidos, usando os mesmos raciocínios que aprenderam para partículas. Com isso, é difícil discutir o sentido da força de atrito, sua representação nos diagramas de força, o que constitui um obstáculo à compreensão dos problemas que envolvem rotação [Carvalho, 2002]. Há trabalhos indicando os levantamentos feitos [Rimoldini, 2005], e a experiência de sala de aula leva a concluir que há necessidade de elaborar materiais didáticos adequados que facilitem o processo de ensino e aprendizagem deste tópico.

Um dos grandes problemas é a discussão da condição do rolamento ideal, o denominado rolamento sem deslizamento. Nesta situação, depois de estabelecida esta condição, a força de atrito na maior parte das vezes se anula – a força de atrito é estática, e quando o centro de massa está em movimento uniforme, o atrito é nulo no movimento horizontal. Esse tema – a não dissipação de energia no movimento de rolamento sem deslizamento – é difícil de ser apresentado e discutido. E pretende-se neste trabalho mostrar, a partir de um experimento, que esta situação é encontrada de fato na vida real.

Capítulo 3

O movimento de rolamento como uma superposição de translação e rotação

Neste capítulo, apresenta-se a discussão sobre a mudança de sistemas de referência e sobre a descrição cinemática do movimento de rolamento. Em particular, deseja-se apresentar a mudança que os olhos humanos fazem automaticamente, ao observar uma roda girando: passam para o referencial do centro de massa, e afirmam que “a roda está girando”, quando de forma precisa dever-se-ia dizer que a roda se translada e gira.

3.1 – Breve comentário

A localização de uma pessoa ou de um objeto esteve ligada ao desenvolvimento da humanidade; por exemplo, para a navegação a localização era fundamental. O astrolábio, antigo instrumento astronômico, teve grande importância e tornou-se o principal instrumento de localização para os primeiros navegadores. O primeiro astrolábio, denominado planisférico, foi inventado pelo astrônomo grego Hiparco de Nicéia (190 aC–126 aC) da Escola de Alexandria. Há vestígios de que astrólogos sumérios (5000 aC) utilizavam algo similar para determinar a posição das estrelas. O astrolábio como o mostrado na Figura 3.1 foi muito utilizado por árabes e chineses, mas com os portugueses teve a sua grande evolução para atender as grandes navegações.

Figura 3.1 – Astrolábio de 1572, construído por Gualterus Arsenius.
(http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/malice3/astrol.html)



No século XIV, o matemático e físico escolástico francês, bispo em Lisieux, Nicole d'Oresme (1323–1382) contribuiu para o pensamento matemático desenvolvendo um sistema de localização de pontos através de suas coordenadas influenciando os matemáticos do período renascentista e pós-renascentista [Boyer, 1974]:

Por quase um século antes de seu tempo os filósofos escolásticos vinham discutindo a quantificação das “formas” variáveis, um conceito de Aristóteles aproximadamente equivalente à qualidade. Entre tais formas havia coisas como a velocidade de um objeto móvel e a variação da temperatura, de ponto para ponto, num objeto com temperatura não uniforme. As discussões eram interminavelmente prolixas, pois os instrumentos de análise disponíveis eram inadequados. Apesar dessa falta, os lógicos em Merton College tinham obtido como vimos um importante teorema quanto ao valor médio de uma forma “uniformemente disforme” – isto é, uma em que a taxa de variação da taxa de variação é constante. Oresme conhecia bem esse resultado, e ocorreu-lhe em algum momento antes de 1361 um pensamento brilhante – porque não traçar uma figura ou gráfico da maneira pela qual variam as coisas? Vemos aqui, é claro, uma sugestão antiga daquilo que chamamos representação gráfica de funções.

O primeiro a utilizar um sistema de coordenadas e que de certa forma contribuiu para a Geometria Analítica foi Apolônio de Pérgamo (262aC–190aC). Na obra *As cônicas*, Apolônio discorre que [Boyer, 1974]:

*Os métodos de Apolônio, em *As cônicas*, em muitos pontos são tão semelhantes aos modernos que às vezes se considera seu tratado uma Geometria Analítica, antecipando a de Descartes por 1800 anos... As distâncias medidas ao longo do diâmetro a partir do ponto de tangência são as abscissas, e os segmentos paralelos à tangente e cortados entre o eixo e a curva são as ordenadas... Da geometria grega podemos dizer que as equações são determinadas pelas curvas, mas não que curvas fossem determinadas pelas equações. Coordenadas, variáveis e equações eram noções subsidiárias derivadas de*

uma situação geométrica específica; e infere-se que do ponto de vista grego não era suficiente definir curvas abstratamente como lugares satisfazendo a condições dadas sobre as coordenadas.

Em 1629, Pierre Fermat (1601–1665), matemático francês, relendo as obras de Apolônio, descreve as suas ideias sobre geometria no trabalho não publicado *Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos*, onde são tratados os eixos ortogonais, equações gerais: da reta, circunferência, parábolas, elipses e hipérbolas.

Em 1636 descobre o princípio fundamental da Geometria Analítica: “sempre que numa equação final encontram-se duas quantidades incógnitas, temos um lugar, a extremidade de uma delas, uma linha, reta ou curva” [Boyer, 1974].

Ainda no século XVII, em 1637, foi publicado pelo filósofo e matemático francês René Descartes (1596–1650) o livro *Discurso do método – para bem conduzir a própria razão e procurar a verdade nas ciências*. Em um dos apêndices da obra – *La Géométrie* – ele apresenta a descrição de um tratado geométrico que é conhecido, hoje em dia, como Geometria Analítica. Sua proposta era unir a Álgebra e a Geometria Euclidiana em um único contexto com o objetivo de mostrar o alcance do método filosófico para o raciocínio e a busca da verdade. Segundo relato de Boyer [Boyer, 1974],

O objetivo do seu método, portanto, era duplo:

- (1) por processos algébricos libertar a geometria de diagramas e;*
- (2) dar significados às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas.*

É com Descartes que surge a forma de representar as quantidades conhecidas (parâmetros) pelas primeiras letras do alfabeto e as quantidades desconhecidas (variáveis) pelas últimas. É importante salientar que na sua representação Descartes pensava nas variáveis como segmentos. A importância do texto foi o desenvolvimento do chamado *espaço cartesiano* e sua influência inclusive nos dias atuais.

Nesse breve histórico podemos observar dois enfoques diferentes sobre o mesmo tema: enquanto René Descartes parte do lugar geométrico para a equação, Pierre Fermat parte da equação para o lugar geométrico correspondente.

3.2 – Sistemas de referência inerciais

Os comentários anteriores serviram como uma breve introdução ao uso de coordenadas para a descrição da localização de corpos. A seguir, discutem-se a determinação de posição de corpos por dois sistemas de referência aos quais são associados dois sistemas de coordenadas e a relação entre essas coordenadas.

Para o estudo do movimento de um ponto material, é necessário mencionar o sistema de referência ou referencial no qual o movimento está sendo descrito, pois todo movimento é relativo. Para, entretanto, utilizar-se as Leis da Mecânica, é necessária a “existência” e o “uso” de um sistema inercial de referência, um sistema para o qual a primeira Lei de Newton tenha validade, ou seja, um sistema de referência não “acelerado”. Assim o observador ao qual se associa o sistema descreve um movimento retilíneo e uniforme em relação a um sistema inercial de referência. Podemos chamá-lo de “absoluto” e imóvel no próprio espaço que constitui o Universo. Tal conceito é de difícil compreensão e sua realização se torna impossível na prática. Para estabelecermos o conceito de referencial inercial e suas restrições, devemos retornar a Newton, quando ele examina os conceitos de espaço e tempo afirma:

- O **espaço absoluto**, na sua verdadeira natureza, sem levar em conta qualquer coisa externa, permanece sempre uniforme e imóvel.
- O **tempo absoluto**, verdadeiro e matemático, por si só, e pela sua natureza, flui uniformemente sem levar em conta qualquer coisa externa, e denomina-se também duração.

Podemos perceber que na mecânica de Newton o espaço é absoluto e permanece sempre igual a si mesmo e imóvel; um sistema adequado de referência para as leis da mecânica seria aquele que estivesse em repouso

nesse espaço absoluto, tal sistema seria um sistema absoluto de referência, e qualquer outro com movimento retilíneo e uniforme em relação ao sistema absoluto de referência seria igualmente adequado para exprimir as Leis da Mecânica. Tais sistemas seriam ditos “*inerciais*”. Entretanto, determinar tal sistema absoluto de referência é impossível, pois não conhecemos o espaço absoluto, nem o Universo; não se tendo, portanto um processo para “*fixar*” um sistema de eixos no espaço absoluto ou no Universo.

3.3 - A descrição do movimento de uma partícula: conceitos básicos

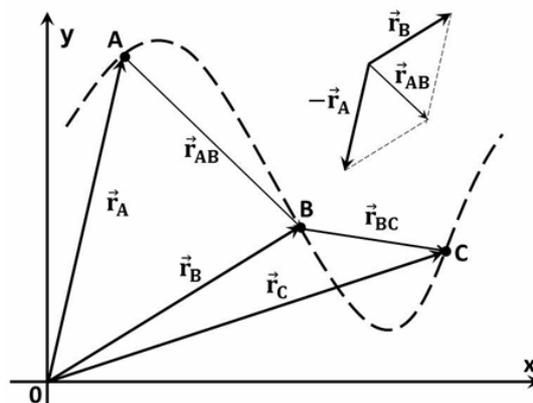
A descrição do movimento de um corpo é feita usando-se um sistema de referência, preferencialmente inercial. A partir desse referencial, considera-se um sistema de coordenadas cartesianas. A posição de um corpo é descrita a partir de um ponto de referência fixo neste referencial, o ponto O. O vetor posição \vec{r}_A pode ser pensado como o deslocamento necessário para o movimento do ponto O até a localização do objeto no espaço, o ponto A, no momento considerado.

Se um objeto que pode ser descrito como uma partícula move-se de um ponto A para um ponto B, seu deslocamento pode ser escrito como:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

Na Figura 3.2 estão indicados o vetor deslocamento e as posições de um corpo que se desloca sobre uma trajetória de um ponto A ao ponto B.

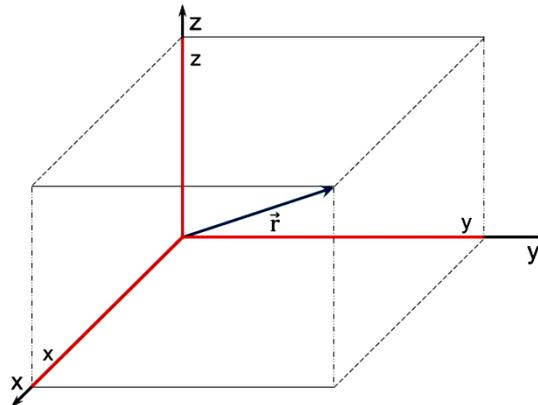
Figura 3.2 – Representação vetorial do deslocamento de um objeto em um sistema cartesiano



Utilizando as componentes de um vetor na representação cartesiana (x, y, z) , e tomando os unitários $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ para as direções x, y, z , como na Figura 3.3, escreve-se:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

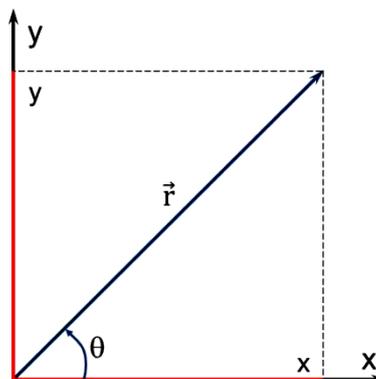
Figura 3.3 – As componentes cartesianas de um vetor



Para a descrição de movimentos de rotação no plano, muitas vezes é conveniente utilizar coordenadas polares planas, em particular no caso de uma roda girando (ou um carretel). As coordenadas polares planas, apresentadas na Figura 3.4, correspondem ao módulo do vetor posição e ao ângulo (medido no sentido anti-horário) formado com o eixo x , $(r; \theta)$. As relações entre essas componentes polares planas e as cartesianas são dadas por:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases} \text{ sendo: } \begin{cases} r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg \left(\frac{y}{x} \right) \end{cases}$$

Figura 3.4 – Componentes cartesianas e polares de um vetor no plano



A velocidade de um objeto é definida como a razão (taxa) entre a variação de posição (deslocamento) de um objeto e o intervalo de tempo necessário para tal variação:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle \Rightarrow \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right)$$

A velocidade média tem a mesma direção e sentido do vetor deslocamento, e por isso sua direção é secante à curva que descreve a trajetória entre os dois pontos para os quais se calcula o deslocamento. A velocidade instantânea tem a direção tangente à curva, que descreve a trajetória, no ponto em que se está observando o objeto.

A aceleração é definida de forma análoga, como a taxa de variação da velocidade por intervalo de tempo necessário para tal variação:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle \Rightarrow \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right)$$

3.4 – Coordenadas cartesianas e polares da velocidade e aceleração no movimento de rolamento

Em coordenadas cartesianas, e considerando um movimento no plano, a velocidade é um vetor com componentes cartesianas:

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} . \text{ Sendo: } \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{cases}$$

A aceleração pode ser representada por:

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} . \text{ Sendo: } \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \end{cases}$$

Para descrever um movimento circular, como é o caso do movimento de um ponto na periferia de um carretel em movimento plano observado por um referencial fixo no seu centro, é mais conveniente utilizar coordenadas polares planas. Nestas coordenadas, o módulo do vetor posição não varia (pois o movimento é circular em torno do eixo) e pode-se definir uma velocidade angular como a taxa de variação da coordenada angular em relação ao tempo:

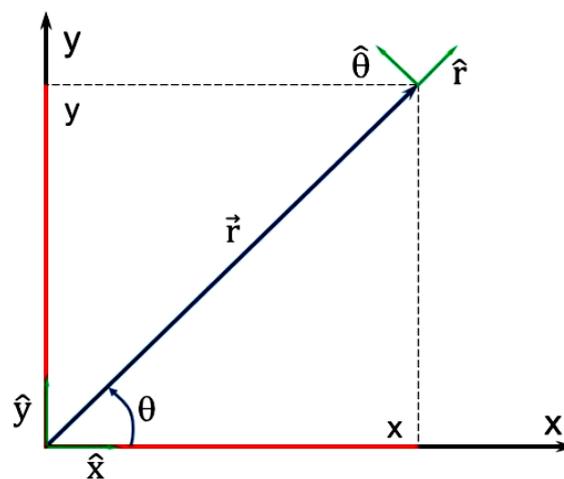
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

A aceleração angular como a taxa de variação da velocidade angular em relação ao tempo é dada por:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Define-se habitualmente, em um movimento circular, dois unitários que variam no tempo, o unitário da direção radial \hat{r} para fora do centro e o unitário da direção perpendicular à radial (que no movimento circular é a direção tangencial) e no sentido da rotação anti-horária, $\hat{\theta}$, como indicado na Figura 3.5.

Figura 3.5 – Os unitários das direções radial e tangencial das coordenadas polares planas

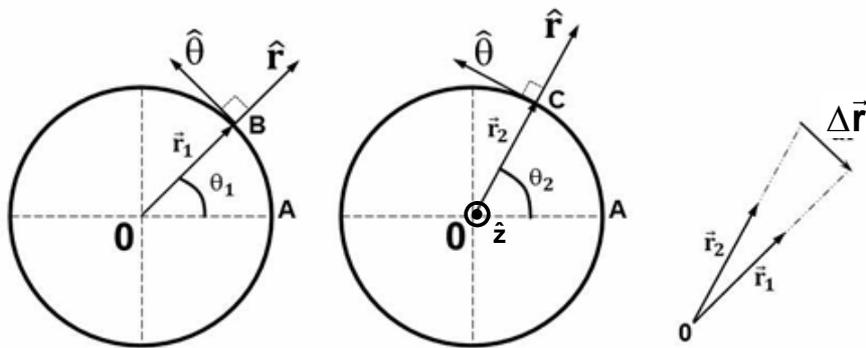


Em termos desses unitários, a posição do corpo é escrita como

$$\vec{r} = r \cdot \hat{r}$$

Como esses unitários giram junto do corpo, é preciso observar que a velocidade pode apresentar componentes fora da direção radial. Na Figura 3.6, apresentamos um esquema para descrever a variação da posição como função do tempo em coordenadas polares.

Figura 3.6 – Representação da variação do vetor posição no tempo



Da Figura 3.6, observa-se que \vec{v} tem módulo (chamando de Δs o arco de círculo percorrido no intervalo considerado):

$$v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \cdot \Delta \theta}{\Delta t} = r \cdot \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = r \cdot \omega$$

Sua direção é perpendicular ao raio – portanto na direção de $\hat{\theta}$. Escreve-se então em coordenadas polares como:

$$\vec{v} = \omega \cdot r \cdot \hat{\theta}$$

Essa expressão pode ser reescrita na forma vetorial. Costuma-se definir um vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ como um vetor de módulo ω cuja direção é perpendicular ao plano de rotação e cujo sentido é dado pela regra da mão direita; de acordo com a Figura 3.6, $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$. O vetor velocidade é perpendicular à direção radial; pode-se então escrever

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} .$$

O mesmo raciocínio pode ser desenvolvido para a obtenção da aceleração em coordenadas polares [Nussenzveig, 1996], obtendo-se para o movimento circular:

$$\vec{a} = (-\omega^2 \cdot r) \cdot \hat{r} + (\alpha \cdot r) \cdot \hat{\theta}$$

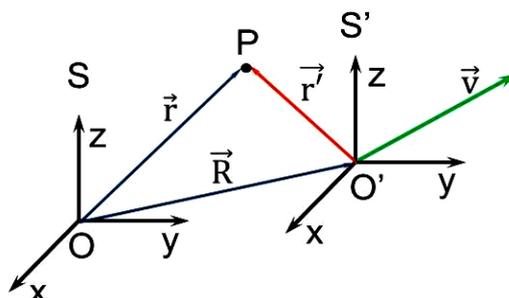
Portanto, se a velocidade angular for constante, o movimento circular apresenta exclusivamente aceleração centrípeta, que mede a taxa de variação da mudança da direção da velocidade sem alterar seu módulo.

3.5 – Movimento do carretel: corpo rígido em translação e rotação

Considerando um carretel – uma roda homogênea – movendo-se sobre uma superfície horizontal, observa-se que o movimento pode ser visto como uma combinação de translação com rotação.

De uma forma geral, se temos um observador S fixo à Terra observando um movimento, e outro observador S' em movimento com velocidade \vec{V} em relação a S, podem ser estabelecidas as relações entre as observações e medidas feitas pelos dois observadores por meio das transformações de Galileu. Na Figura 3.7, estão indicados os dois sistemas de referência e um objeto situado em um ponto P. (As coordenadas medidas em S' são representadas com apóstrofo).

Figura 3.7 – Transformações de Galileu



Da Figura 3.7, observa-se que:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$$

Na física clássica, intervalos de tempo são idênticos quando medidos em sistemas de referência em movimento relativo entre si. Portanto, pode-se escrever uma equação adicional (implícita)

$$t' = t$$

Se no instante $t = 0$ os dois pontos de referência O e O' coincidirem no espaço e se \vec{V} é constante, pode-se obter:

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d(\vec{r} - \vec{R})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{R}}{dt} \Rightarrow \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

que é a transformação de Galileu para as velocidades – com a hipótese de que os intervalos de tempo são idênticos em sistemas de referência diferentes.

No caso do carretel girando, podemos considerar que o sistema S' é o sistema fixo ao eixo central do carretel, onde está localizado seu centro de massa. Do ponto de vista deste referencial, qualquer ponto do carretel descreve um movimento circular.

Utilizando a equação de transformação de Galileu para as velocidades, todos os pontos do carretel tem uma velocidade que é a soma vetorial da velocidade de translação do centro de massa do carretel – como indicado na Figura 3.8, e uma velocidade correspondente ao movimento de rotação do carretel em torno de seu centro de massa – caso a velocidade angular de rotação em torno do eixo que passa pelo centro de massa seja constante, os vetores estão representados nos pontos da periferia da roda como mostrado na Figura 3.9.

Figura 3.8 – Representação do vetor velocidade do centro de massa em vários pontos do carretel

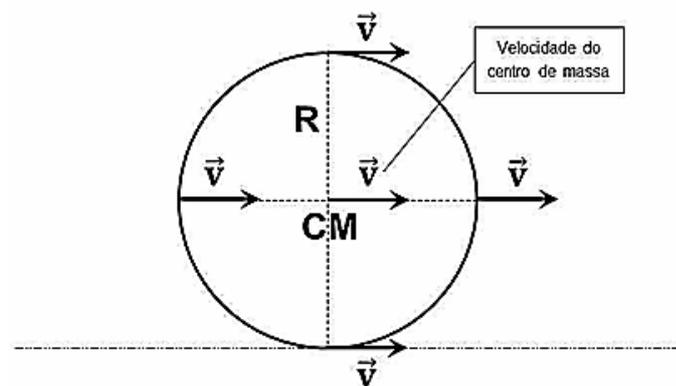
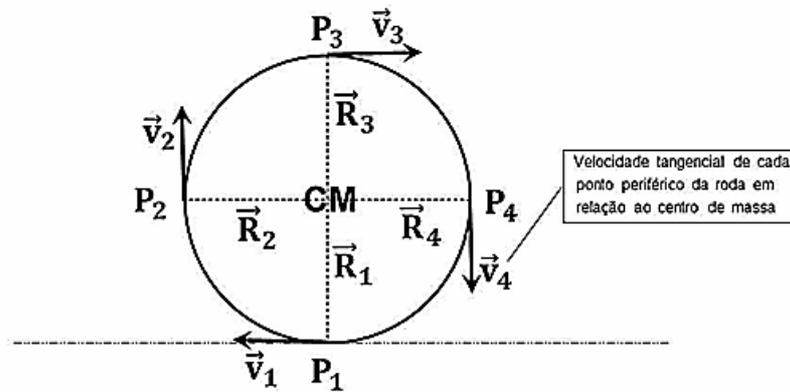


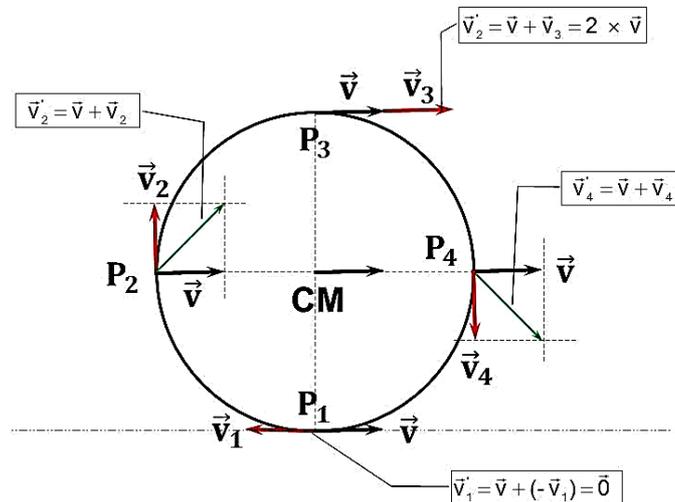
Figura 3.9 – Representação da velocidade em relação ao centro de massa de pontos da borda do carretel



Caso os pontos do carretel escolhidos não estejam na borda externa, o valor numérico do raio diminui, e o módulo da velocidade tangencial será menor e proporcional à redução do raio.

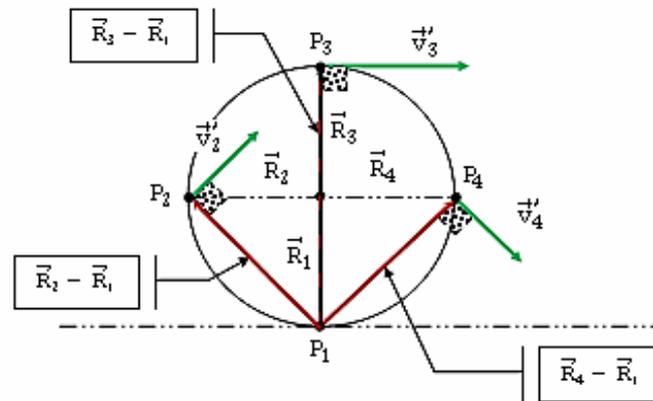
Os movimentos são simultâneos: translação e rotação. Na Figura 3.10, indica-se a representação da velocidade dos pontos da periferia observada por um referencial fixo à Terra.

Figura 3.10 – Representação do vetor velocidade resultante em relação a um referencial externo ao carretel.



No caso específico em que o carretel gira sem deslizar, o ponto de contato do carretel com a superfície deve ter velocidade nula. Neste caso, a representação da velocidade em cada um dos pontos considerados é a que está indicada na Figura 3.11.

Figura 3.11 – Representação do vetor velocidade resultante em relação a um referencial externo ao carretel.



3.6 – A dinâmica do movimento do carretel

Em um movimento de rolamento de uma roda, sempre é necessário iniciar o movimento; pode-se dizer que se aplica uma força à roda, ou se transfere energia a essa roda. No caso específico considerado neste trabalho, o carretel é colocado em movimento por meio de um puxão com um dinamômetro (poderia também ser apenas empurrado ou puxado).

Portanto, durante um breve intervalo de tempo inicial, o centro de massa é puxado, e o movimento inicia-se com um arrastamento da roda. Nesse processo, surge atrito (cinético) entre os pontos de contato do carretel e da superfície, e este atrito provoca um torque no carretel, dando início ao processo de rotação. Ou, dito de outra forma, a energia de translação do centro de massa (fornecida pelo trabalho da força que puxa o centro do carretel) transforma-se em uma soma de energia cinética de rotação e energia cinética de translação:

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}MV_{\text{cm}}^2 + E_{\text{cin}}^{\text{rot}} = \frac{1}{2}MV_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2$$

No rolamento sem deslizamento, também chamado de rolamento puro, entre duas superfícies perfeitamente rígidas, cada ponto da periferia, em uma revolução completa, só entra em contato com um e somente um ponto do plano horizontal.

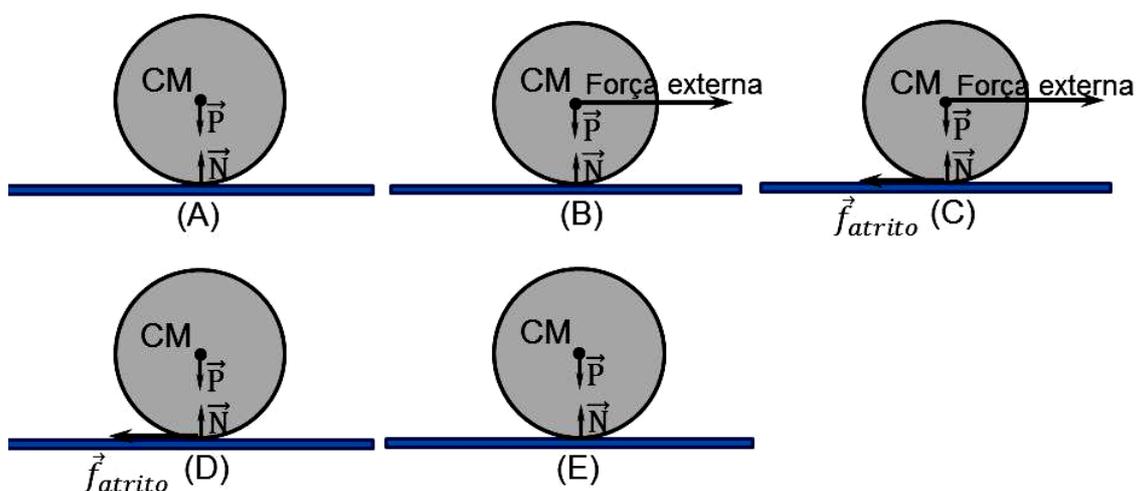
3.7 – O atrito no rolamento

A força de atrito no rolamento desempenha, em determinados momentos, um papel fundamental para que determinados fenômenos possam ocorrer. Como exemplo, podemos citar o caso clássico do aumento ou redução de velocidade de um automóvel.

A força de atrito tem origem no movimento relativo das superfícies envolvidas, e o atrito de rolamento surge quando há velocidade relativa entre os pontos de contato na superfície e no carretel.

Nas Figuras 3.12, indica-se o diagrama de forças sobre o carretel nos diversos momentos do movimento que está sendo analisado neste trabalho.

Figura 3.12 – Diagrama de forças no carretel em seus diversos estágios de movimento: na sequência, (A) Repouso antes do experimento. (B) Inicia-se o puxão sobre o eixo. (C) O movimento de rotação começa. (D) O puxão deixa de atuar. (E) Estabelece-se o regime de rolamento sem deslizamento.

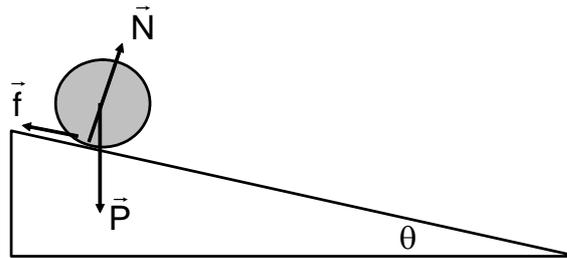


Idealmente, portanto, espera-se que se for atingida a situação do rolamento sem deslizamento, a força de atrito desapareça – no rolamento sem deslizamento, o atrito é estático. Isso significa que não há dissipação de energia no processo.

A anulação do valor da força de atrito após ser atingida a situação de rolamento sem deslizamento é um resultado de difícil aceitação; no entanto,

caso a força de atrito não fosse nula, o centro de massa do sistema teria sua velocidade reduzida. Um exemplo que pode ser resolvido, num caso em que a força de atrito não se anula, é o de um carretel descendo um plano inclinado a partir do repouso e rolando sem deslizar. Na Figura 3.13, apresenta-se o diagrama de forças sobre o carretel.

Figura 3.13. Carretel descendo um plano inclinado: diagrama de forças.



A aplicação das leis da dinâmica ao movimento deste corpo nos fornecem, para a equação relativa à translação do centro de massa (M é a massa do carretel, e A a aceleração de seu centro de massa):

$$Mg \operatorname{sen} \theta - f = MA$$

A equação da rotação em torno do centro de massa é dada por (I é o momento de inércia do carretel em relação ao eixo perpendicular ao plano do movimento e passando pelo centro de massa)

$$f R = I \alpha$$

Supondo que o carretel parte do repouso, e que rola no plano sem deslizar ($A = \alpha R$), podemos escrever para a aceleração do centro de massa do carretel

$$A = \frac{g \operatorname{sen} \theta}{1 + \frac{I}{MR^2}}$$

e para a força de atrito

$$f = \frac{I}{MR^2} \frac{Mg \operatorname{sen} \theta}{1 + \frac{I}{MR^2}}$$

Se o momento de inércia do carretel for o de um disco, ou um cilindro, podemos escrever $I = MR^2 / 2$; neste caso, os valores da aceleração e da força de atrito ficam

$$A = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

$$f = \frac{1}{2} Mg \sin \theta$$

Isso significa que uma parcela da componente da força peso ao longo da trajetória é compensada pela força de atrito, freando o movimento de translação de forma a que parte da energia cinética de rotação transforme-se em energia de rotação por meio do torque produzido pela força de atrito.

Também verifica-se que o caso limite em que o ângulo de inclinação do plano é nulo, $\theta = 0$, a aceleração do centro de massa é nulo e a força de atrito também é nula.

3.8 – Finalização do capítulo

Essa discussão apresentou as seguintes informações: o modelo físico para a descrição do movimento plano de um corpo rígido, o papel do atrito na transformação da translação em rotação, e a descrição do movimento como a superposição de uma translação com uma rotação.

Nesse processo, nossos conhecimentos a respeito da física indicam que a força de atrito, quando estabelecida a condição de rolamento sem deslizamento entre um corpo rígido ideal e a superfície horizontal, deixa de existir. No entanto, essa ideia não é de fácil compreensão nem é aceita por estudantes.

Neste trabalho, então, pretende-se verificar experimentalmente se esse modelo é uma boa descrição para uma situação real observada. É o que será descrito a seguir.

Capítulo 4

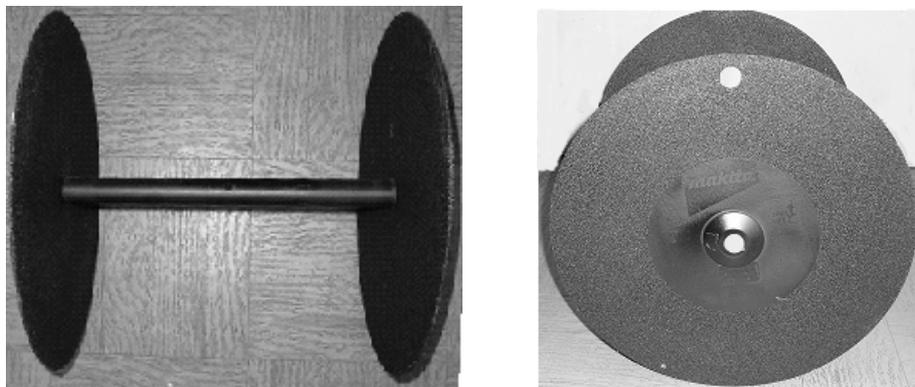
Descrição do experimento

Neste capítulo, será feita a descrição do material, das ferramentas de análise dos dados (softwares) e da construção dos materiais utilizados no experimento.

4.1 – O carretel

Para atender a proposta do trabalho, foi construído um carretel mostrado na Figura 4.1.

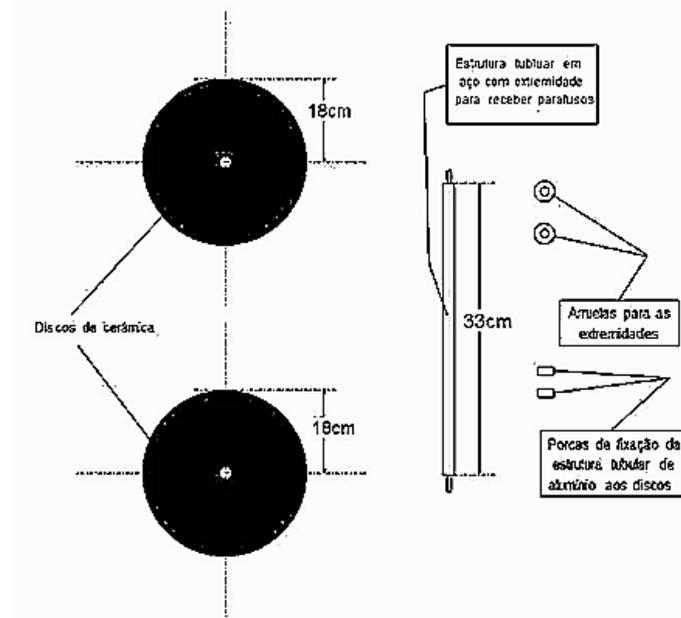
Figura 4.1 – Fotografia do carretel utilizado no experimento.



Na construção do carretel foi utilizado material de fácil obtenção no mercado. Um eixo feito em aço com as características: massa 2,5kg; comprimento 33cm, diâmetro 2,5cm; dois discos de corte abrasivo para metais ferrosos, marca Makita, com as seguintes características: diâmetro externo de 36cm; espessura de 3,25mm; furo de 2,5cm e massa 0,30kg que pode ser encontrado em diversas lojas de ferragens. A fixação dos discos no cilindro foi feita com dois parafusos, modelo Allen, de 4,0cm.

Esse material e sua montagem estão detalhados na Figura 4.2. O objetivo da maior massa do cilindro em relação aos discos é dar estabilidade ao carretel e a pequena espessura do disco confeccionado com material de grande rigidez está em uma menor ação do atrito.

Figura 4.2 – Os elementos que compõem o carretel.

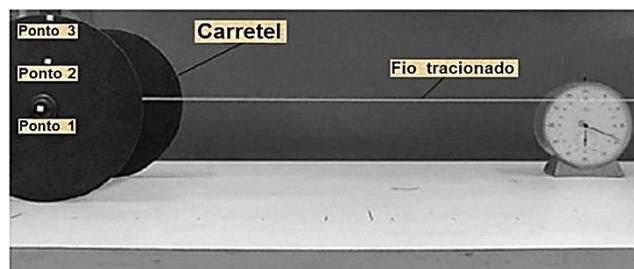


Foram identificados três pontos do carretel, com etiquetas, para o estudo: o centro de massa (ponto 1) e dois outros pontos que no instante inicial estavam na linha vertical sobre o centro de massa, o ponto 3 na borda e o ponto 2 em uma posição intermediária.

4.2 – A montagem do experimento

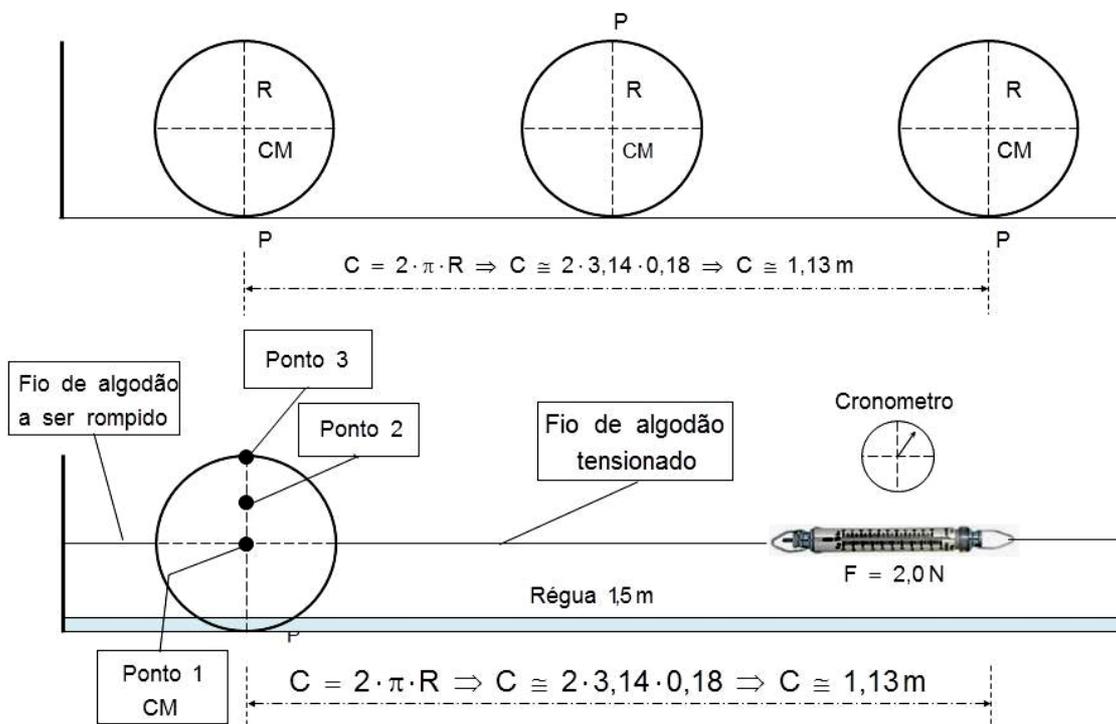
Na Figura 4.3, está apresentada a montagem feita para a obtenção dos dados: os pontos marcados no carretel, o fio e o cronômetro.

Figura 4.3 – Distribuição dos elementos utilizados no carretel.



Para o controle da força aplicada ao sistema, de 2,0N, foi utilizado um dinamômetro simples de tubo. A montagem pode ser vista na Figura 4.4.

Figura 4.4 – Desenho representando a montagem do experimento



4.3 – O experimento

Para o estudo do movimento e a posterior análise foi gravado um filme em alta velocidade e de curta duração com uma câmera digital Casio modelo EX-F1 Exilim. Sua descrição e manual podem ser obtidos no endereço eletrônico <http://www.support.casio.com.br/pt/downloads/manual/dc/exf1/>.

A câmera foi colocada em um tripé com o objetivo de evitar possíveis trepidações. O filme obtido foi trabalhado com três softwares de livre acesso em um computador, tendo como resultado final uma fotografia estroboscópica do experimento [Dias, 2009]. Os três softwares de uso livre são:

- *Any Video Converter*

Disponível em http://www.any-video-converter.com/products/for_video_free/ acessado em 15 de maio de 2011;

- *VirtualDub*

Disponível em <http://www.virtualdub.org/index> acessado em 15 de maio de 2011;

- *ImageJ*

Disponível em <http://rsbweb.nih.gov/ij/> acessado em 15 de maio de 2011.

O experimento e a filmagem foram realizados em um Laboratório do Instituto de Física – UFRJ localizado no 4º andar do bloco A – Cidade Universitária. Foram considerados os seguintes cuidados:

1. Eliminação de possíveis correntes de ar;
2. Cor branca nas paredes do laboratório utilizadas;
3. Cuidado com o nivelamento: através de um nível, da mesa utilizada no experimento bem como sua aderência ao solo evitando possíveis trepidações;
4. A mesa utilizada apresentava na superfície fórmica branca;
5. As referências para avaliar as dimensões no filme foram, além do carretel, o cronômetro presente durante as filmagens que apresentava um diâmetro de 16cm;
6. A iluminação utilizada foi a luz natural e a posição e a posição da câmera era frontal ao experimento recebendo a luz de forma direta;
7. A filmagem foi realizada em um dia de sol, no período da manhã;
8. Foram feitos 20 pequenos filmes, sendo metade com sequência de 24 quadros com o objetivo de selecionar aquele que permitisse a análise com qualidade;
9. A mesa utilizada foi marcada, em sua superfície, com distâncias de 10cm para auxiliar uma possível análise posterior. O comprimento utilizado, na marcação, foi exatamente o perímetro do disco;

Com a câmera fotográfica no modo vídeo, foi realizada a filmagem do movimento do carretel. Após a gravação foi feita a transferência do vídeo para o computador e este foi trabalhado por meio da utilização de dois softwares *VirtualDub* e *ImageJ*, de uso livre.

Como em qualquer filme, o vídeo digital se constitui por uma sequência de fotogramas digitais em intervalos de tempo fixo. Foram utilizados dois padrões: 24 e 30 fotogramas por segundo. O padrão de 24 quadros por segundo não se mostrou satisfatório para a fotografia estroboscópica, sendo portanto descartado.

Foi necessário converter o formato do vídeo de extensão *.mov* (utilizado pela câmara) para o formato de vídeo com extensão *.mpg*; para essa conversão foi utilizado o *Any Video Converter*. Com o *VirtualDub* foi selecionado o trecho a ser utilizado na filmagem. A sequência foi decomposta em fotogramas individuais, onde cada um deles reproduz uma cena do movimento e o seu conjunto se apresenta ordenado no tempo. Com o software *ImageJ* foi feita a sobreposição de todos os fotogramas em uma única foto dando origem a uma fotografia digital estroboscópica do movimento.

Para a filmagem a câmara foi fixada sobre um tripé e o conjunto colocado a uma distância de 2,5m da mesa e a três metros do fundo azul, localizada a uma altura correspondente a 20cm do nível da mesa. Foi feito o enquadramento do cenário e iniciou-se a filmagem.

No cenário, o carretel estava inicialmente fixo em uma extremidade por um fio de algodão curto ligado a um tripé e que seria rompido para dar início ao experimento, enquanto na outra extremidade outro fio de algodão tencionava o sistema através de um dinamômetro tubular, previamente regulado para 2,0N, também fixo a outro tripé. A gravação é realizada em aproximadamente 30 segundos. Foram feitas dez filmagens.

4.4 – Os dados obtidos

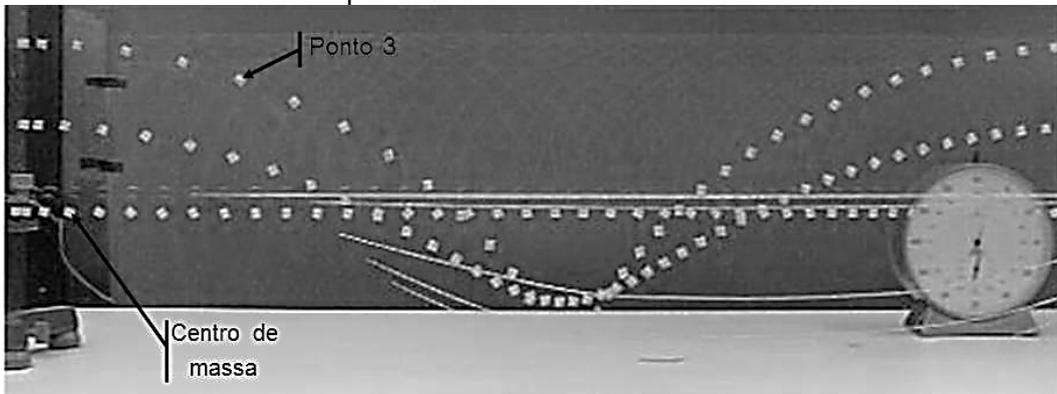
Os arquivos com os vídeos são transferidos da câmara digital para o PC onde, em primeiro lugar, foi selecionado o melhor vídeo; a seguir foi feita a mudança de formato e escolheu-se a sequência específica a ser trabalhada. Foi feita a decomposição do filme em fotogramas usando o programa *VirtualDub*. Foram obtidos 183 fotogramas em todo o intervalo de movimento selecionado. O filme selecionado foi feito com configuração da máquina para 30 fotogramas por segundo. Logo o intervalo de tempo entre dois fotogramas

sucessivos é de 1/30 do segundo e o tempo de movimento, no intervalo selecionado do filme, é de:

$$\Delta t_1 = 182 \times \frac{1}{30} \Rightarrow \Delta t_1 \cong 6,0\text{s}$$

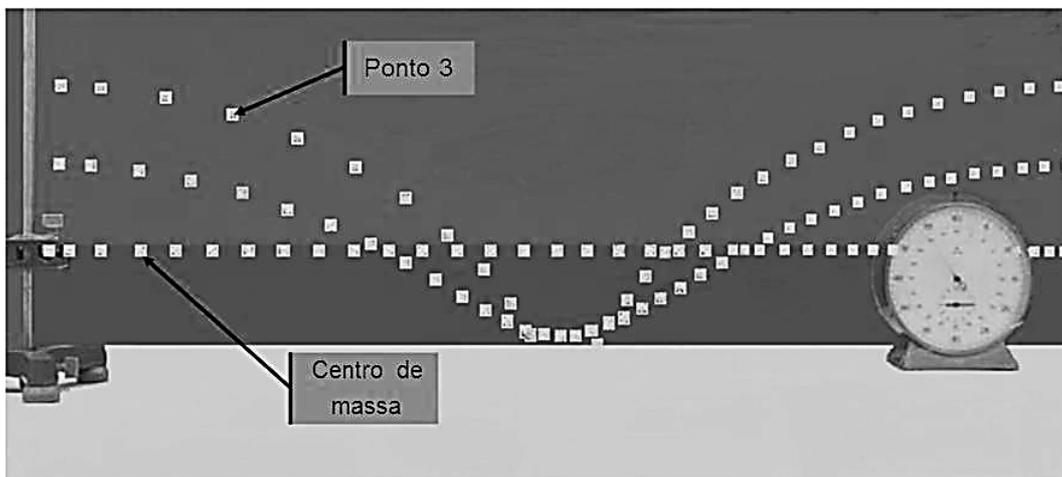
A fase seguinte consiste em sobrepor os 183 fotogramas selecionados em uma única foto, o que foi feito com o programa *ImageJ*, onde foi utilizado um incremento equivalente a seis, isto é, a sequência inicial tomada a cada seis quadros o que resulta em uma nova sequência de 31 fotogramas, que foram sobrepostos resultando na imagem apresentada na Figura 4.5.

Figura 4.5 – Fotografia estroboscópica na forma bruta, sem o tratamento para eliminar sombras.



A mesma fotografia apresentada na Figura 4.5 foi trabalhada para a retirada de sombras junto com o armário situado no fundo e o resultado pode ser visto na Figura 4.6.

Figura 4.6 – Fotografia estroboscópica com tratamento da imagem.



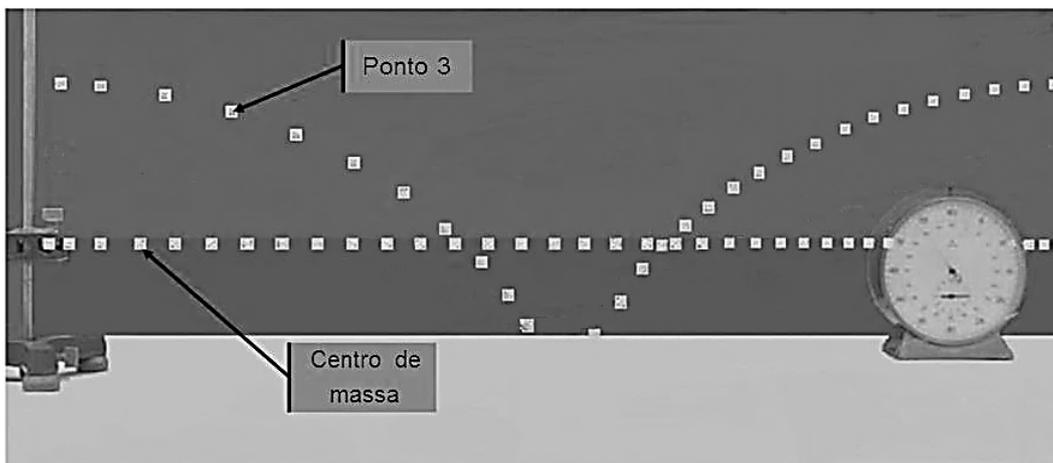
Na figura estroboscópica obtida o intervalo de tempo entre uma posição e a imediata passa a ser de:

$$\Delta t_2 = 6 \times \frac{1}{30} \Rightarrow \Delta t_2 \cong 0,20 \text{ s}$$

Com o *ImageJ* identificam-se as coordenadas dos pontos obtidos na fotografia estroboscópica. Utiliza-se como referencial um eixo imaginário passando pelo segundo ponto do centro de massa. Foi usado o segundo ponto para neutralizar a ação, no início do movimento, do dinamômetro. Com as coordenadas e o tempo Δt_2 foi construída uma tabela com tempo e posição dos diversos pontos identificados na fotografia.

Se na Figura 4.6 eliminarmos o ponto 2, a foto estroboscópica para análise fica representada na Figura 4.7. Essa figura foi a base para a construção de todas as tabelas utilizadas na análise do experimento.

Figura 4.7 – Fotografia estroboscópica com os dois pontos usados no desenvolvimento do texto.



No capítulo seguinte será feita a apresentação dos dados obtidos no experimento bem como sua análise.

Capítulo 5

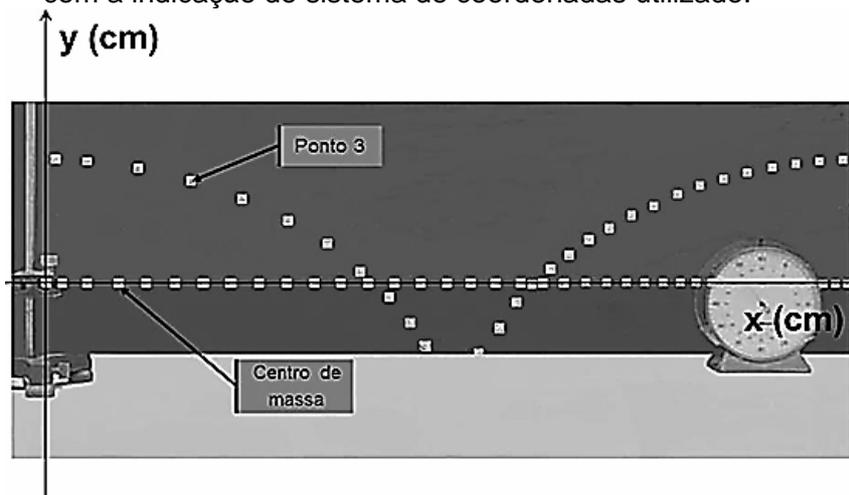
Análise do experimento

Neste capítulo, são apresentados os dados obtidos na filmagem do movimento do carretel sobre a mesa horizontal, a partir da obtenção de uma fotografia estroboscópica do vídeo, como descrito no capítulo anterior [Dias, 2009]. A figura é trabalhada com o programa ImageJ¹. Os dados são tabelados e tratados para obtenção dos valores da velocidade dos pontos do carretel.

5.1 – A leitura dos dados

Para o início da tabulação dos dados, tomou-se a imagem e traçou-se sobre ela um sistema de coordenadas cartesianas no qual a origem (0, 0) é o primeiro ponto do movimento do centro de massa (CM), como indicado na Figura 5.1. A análise envolveu os onze primeiros pontos do movimento. Os demais não puderam ser considerados devido ao fato da 12^a posição, do movimento periférico (ponto 3), estar situado sobre um fundo de cor branca (a mesma cor do ponto), o que provocou a interrupção no processo de medidas.

Figura 5.1 – A imagem estroboscópica obtida do movimento do carretel com a indicação do sistema de coordenadas utilizado.



Na imagem, há dois pontos cujos movimentos são objeto de estudo:

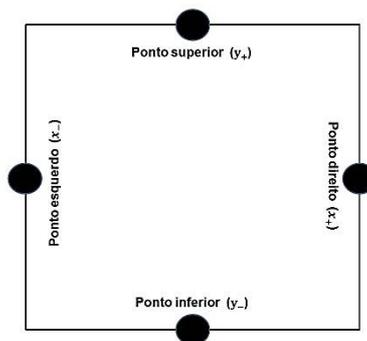
¹ Image J: Image Processing and Analysis in Java, software livre de domínio público, disponível em <http://rsbweb.nih.gov/ij/>, consultado em 22 de setembro de 2012.

- Ponto 1 – centro de massa;
- Ponto 3 – ponto situado na extremidade do carretel.

Para a realização das medidas, foi utilizado o programa computacional *ImageJ*. As medidas das posições foram inicialmente obtidas em pixels e posteriormente convertidas para centímetros. A relação entre pixel e centímetro foi fornecida pelo programa *ImageJ* que estabeleceu o fator de conversão em 7,576 pixels/cm.

Para a determinação da incerteza experimental das medidas realizadas, cada marcação na fotografia estroboscópica foi considerada como sendo um quadrado e foi medida a extensão a partir dos extremos do quadrado. Na Figura 5.2 indica-se a notação utilizada nas tabelas.

Figura 5.2 – A notação utilizada na leitura dos dados.



Para determinar a incerteza nas medidas experimentais, considerou-se o tamanho do ponto na imagem:

No alinhamento horizontal (eixo – x):

$$\Delta x = x_+ - x_- = x_{\text{direito}} - x_{\text{esquerdo}}$$

No alinhamento vertical (eixo – y):

$$\Delta y = y_+ - y_- = y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}}$$

O cálculo do valor central, ou coordenada do ponto considerado, foi feito tomando o valor médio entre os extremos:

$$x = \frac{1}{2}(x_+ + x_-) \text{ e } y = \frac{1}{2}(y_+ + y_-)$$

O cálculo foi estendido para cada um onze valores tabulados nas colunas correspondentes. Para o cálculo da incerteza δ nessas medidas, foram utilizadas as relações:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{2} = \frac{1}{2} (x_+ - x_-), \quad \delta_y = \frac{\Delta y}{2} = \frac{1}{2} (y_+ - y_-).$$

5.2 – O movimento do centro de massa do carretel

Na Figura 5.1, o centro de massa está assinalado, e esta marca aparece no carretel onde foi colocado um pequeno reticulado branco. A partir da imagem, são obtidos os valores apresentados nas Tabelas 5.1 e 5.2 para a posição (horizontal e vertical, respectivamente) deste ponto em função do tempo.

Tabela 5.1 – Componente x da posição do centro de massa do carretel em função do tempo.

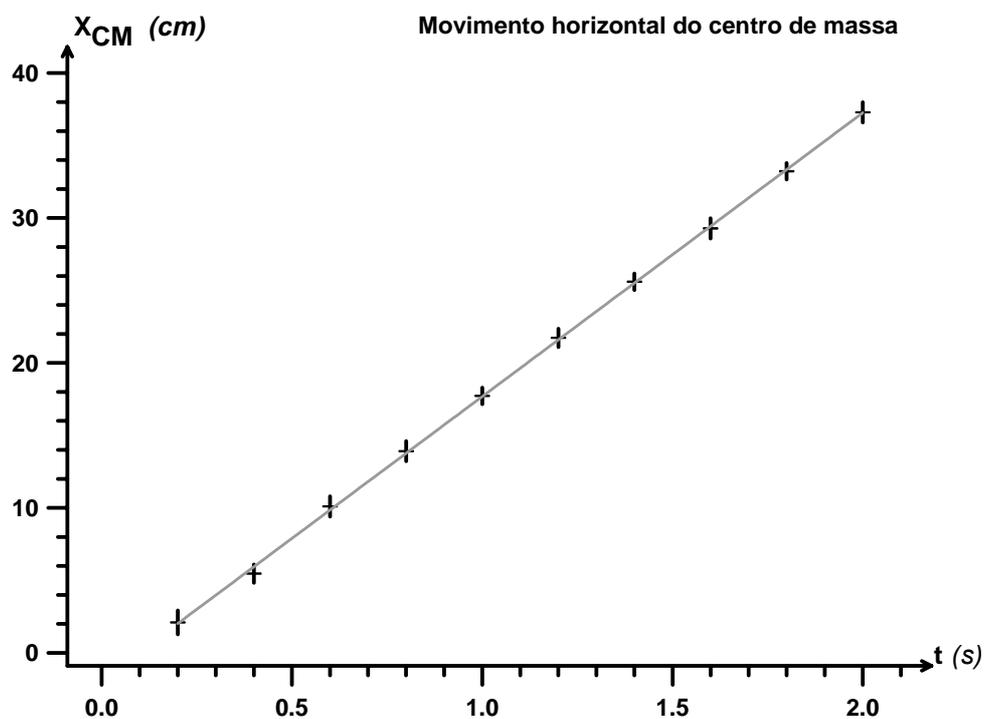
Tempo (s)	x_- (cm)	x_+ (cm)	X_{CM} (cm)	δx (cm)
0.0	-0.89	0.38	-0.25	0.64
0.2	1.27	2.92	2.10	0.83
0.4	4.83	6.10	5.46	0.64
0.6	9.40	10.80	10.10	0.70
0.8	13.21	14.61	13.91	0.70
1.0	17.15	18.30	17.72	0.57
1.2	21.09	22.36	21.73	0.64
1.4	25.03	26.17	25.60	0.57
1.6	28.59	29.99	29.29	0.70
1.8	32.65	33.80	33.23	0.57
2.0	36.59	37.99	37.29	0.70

Tabela 5.2 – Componente y da posição do centro de massa do carretel em função do tempo.

Tempo (s)	y_- (cm)	y_+ (cm)	Y_{CM} (cm)	δy (cm)
0,0	-0,76	0,76	0,00	0,76
0,2	-0,76	0,76	0,00	0,76
0,4	-0,76	0,76	0,00	0,76
0,6	-0,76	0,76	0,00	0,76
0,8	-0,76	0,76	0,00	0,76
1,0	-0,76	0,76	0,00	0,76
1,2	-0,76	0,76	0,00	0,76
1,4	-0,76	0,76	0,00	0,76
1,6	-0,76	0,76	0,00	0,76
1,8	-0,76	0,76	0,00	0,76
2,0	-0,76	0,76	0,00	0,76

Com os dados da Tabela 5.1, foi possível construir um gráfico da componente horizontal como função do tempo. Este gráfico está apresentado na Figura 5.2.

Figura 5.2 – O gráfico da componente horizontal do movimento do centro de massa como função do tempo.



Usando-se a regressão linear para ajuste dos dados obtidos, verifica-se que o melhor ajuste² ($R^2 = 0,999$) é encontrado com os valores (tempo em segundos, posições em centímetros):

$$X_{CM}(t) = 19,2t - 1,4$$

Considerando a Tabela 5.2, podemos concluir que a componente vertical do movimento não sofre variação (o movimento é unidimensional).

Pode-se estimar a incerteza experimental na determinação da velocidade através da propagação da incerteza nos dados de posição. O algoritmo usual para calcular a velocidade é

$$v(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Para esse ou qualquer outro algoritmos similar, a incerteza corresponderia ao valor (supondo a incerteza na determinação da posição como sendo a mesma, igual à média dos valores determinados da Tabela 5.1, $\delta x = 0,66\text{cm}$):

$$\delta v(t) = \frac{\delta x \sqrt{2}}{\Delta t} = 4,7\text{cm/s}.$$

Portanto, observou-se experimentalmente que o movimento do centro de massa do carretel, no intervalo de tempo analisado, é um movimento uniforme, com velocidade:

$$V_{X_{CM}} = (19,2 \pm 4,7)\text{cm/s} \Rightarrow V_{X_{CM}} = (19 \pm 5)\text{cm/s}.$$

Para a componente Y, a velocidade é nula.

Há um último comentário a ser feito. De acordo com a descrição do experimento apresentada no capítulo anterior, o carretel é colocado em movimento pela aplicação de uma força elástica de intensidade 2,0N. Esta força atua durante um tempo curto, no início do movimento, provocando o

² O ajuste foi feito com a utilização do software gráfico Grapher GS.

deslocamento do centro de massa do carretel. Nos dados aqui apresentados, esta transição não é observada, mas em outras análises feitas (com outros filmes) foi possível observar em um tempo inferior a 0,20s instabilidade no movimento inicial, correspondendo ao período em que está havendo a transformação da energia de translação (fornecida pelo trabalho realizado pela força) em energia de rotação do carretel.

5.3 – O movimento do ponto 3 na extremidade do carretel

A trajetória do ponto 3 marcado na extremidade do carretel está indicada na Figura 5.1. Esta trajetória se dá em um espaço bidimensional. O movimento então será analisado a partir de sua projeção nos eixos cartesianos x e y .

Novamente, as componentes x e y da posição deste ponto são determinadas durante o movimento. A Tabela 5.3 indica os dados obtidos para a projeção horizontal (componente x) da posição do ponto 3, enquanto que a Tabela 5.4 indica os dados para a projeção vertical (componente y) da posição do mesmo ponto.

Tabela 5.3 – Componente x da posição do ponto 3 do carretel em função do tempo.

Tempo (s)	x_{3-} (cm)	x_{3+} (cm)	X_3 (cm)	δx_3 (cm)
0,0	0,38	1,91	1,14	0,76
0,2	4,83	5,97	5,40	0,57
0,4	12,07	13,21	12,64	0,57
0,6	19,44	20,71	20,08	0,64
0,8	26,68	27,70	27,19	0,51
1,0	32,78	34,05	33,42	0,64
1,2	38,37	39,64	39,01	0,63
1,4	42,69	43,96	43,33	0,64
1,6	46,89	48,16	47,52	0,63
1,8	49,68	50,95	50,32	0,64
2,0	51,97	53,11	52,54	0,57

Tabela 5.4 – Componente y da posição do ponto 3 do carretel em função do tempo.

Tempo (s)	y_{3-} (cm)	y_{3+} (cm)	Y_3 (cm)	δy_3 (cm)
0,0	16,65	17,92	17,28	0,64
0,2	16,52	17,54	17,03	0,51
0,4	15,38	16,65	16,01	0,64
0,6	13,72	14,87	14,29	0,57
0,8	11,18	12,45	11,82	0,64
1,0	8,01	9,15	8,58	0,57
1,2	5,08	6,35	5,72	0,63
1,4	1,14	2,42	1,78	0,64
1,6	-2,67	-1,40	-2,03	0,64
1,8	-5,97	-4,96	-5,46	0,51
2,0	-9,28	-8,13	-8,70	0,57

Essas duas tabelas permitem a obtenção dos gráficos descrevendo o movimento horizontal e vertical deste ponto, indicados respectivamente nas Figuras 5.4 e 5.6. De fato, não é necessária a análise das duas componentes do movimento, mas ela será feita apenas para comparação. A descrição física do movimento deste ponto não permite o ajuste dos dados por retas, e isto pode ser claramente observado dos gráficos.

Figura 5.4 – O gráfico da componente horizontal do movimento do ponto 3 na extremidade do carretel como função do tempo.

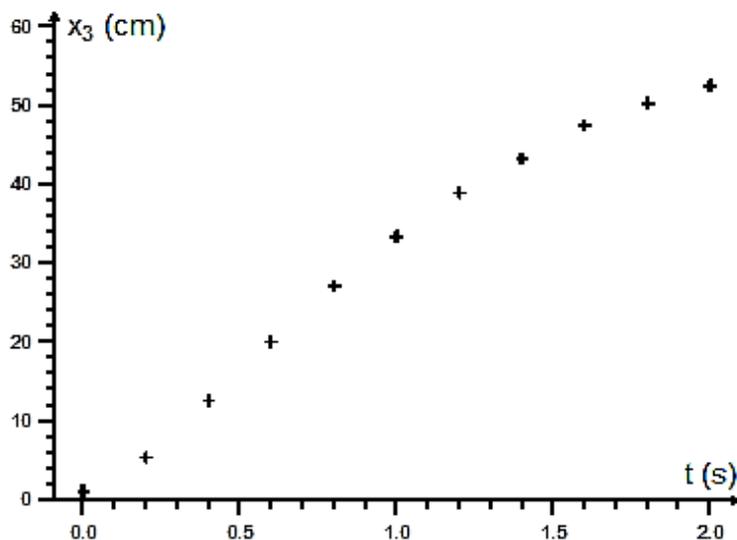
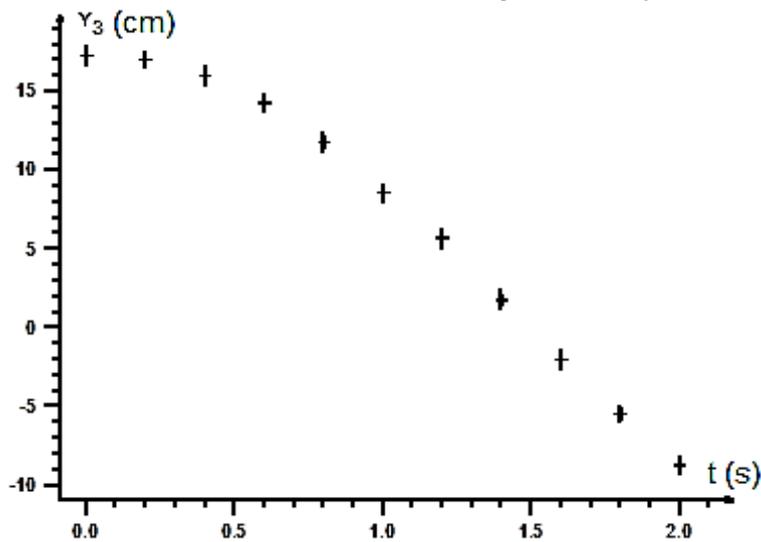


Figura 5.5 – O gráfico da componente vertical do movimento do ponto 3 na extremidade do carretel como função do tempo.

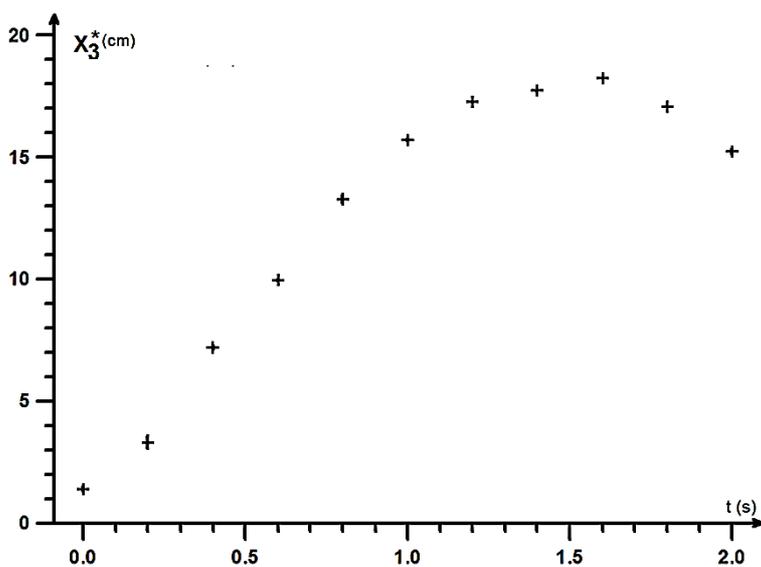


De acordo com a discussão apresentada no Capítulo 3, o movimento de qualquer ponto do carretel pode ser descrito em relação a um observador fixo ao centro de massa do carretel. Neste caso, em relação ao centro de massa as posições do ponto 3 podem ser escritas como:

$$x_3^* = x_3 - X_{CM}$$

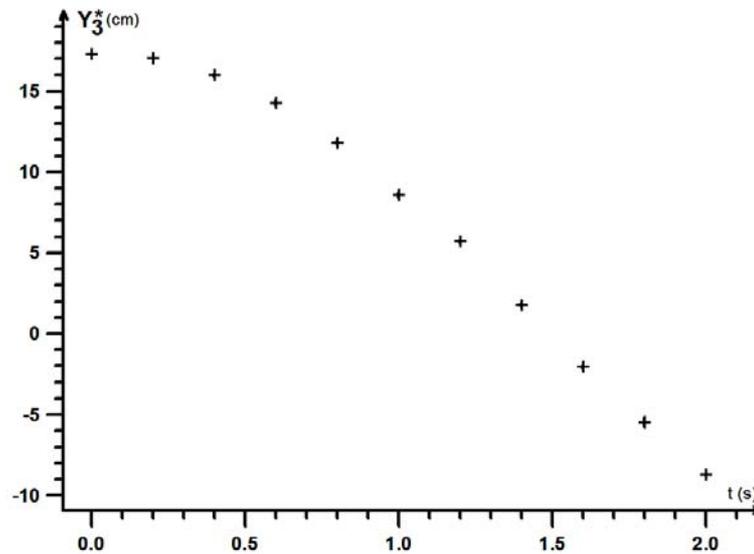
$$y_3^* = y_3 - Y_{CM}$$

Figura 5.7 – O gráfico da componente horizontal do movimento do ponto 3 na extremidade do carretel como função do tempo do ponto vista de um observador movendo-se com o centro de massa do carretel.



A partir das Tabelas 5.1 e 5.3 pode-se calcular as componentes horizontais instante a instante do ponto 3 visto por um observador que se move com o centro de massa. O gráfico deste movimento está apresentado na Figura 5.6. E, a partir das Tabelas 5.2 e 5.4, pode-se fazer o mesmo para as componentes verticais; o gráfico está apresentado na Figura 5.7.

Figura 5.7 – O gráfico da componente vertical do movimento do ponto 3 na extremidade do carretel como função do tempo do ponto vista de um observador movendo-se com o centro de massa do carretel.



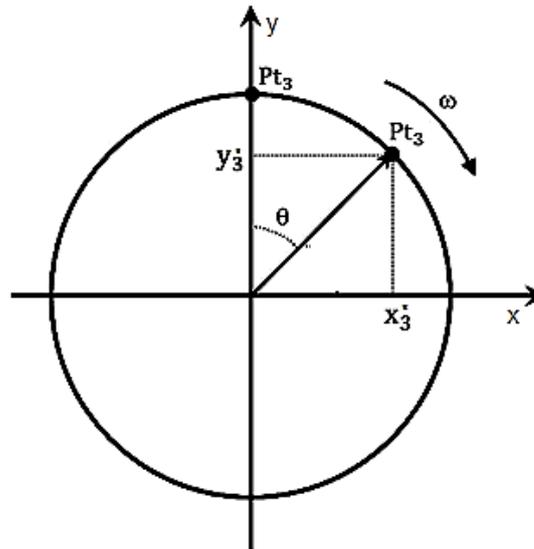
Estes gráficos indicam, visualmente, o que seria esperado: do ponto de vista do centro de massa, o ponto 3 descreve um movimento de rotação de raio R. Podemos descrever este movimento usando a notação da Figura 5.8 (observando-se que a velocidade angular está no sentido horário, o que corresponde habitualmente a uma velocidade angular negativa).

Desta figura 5.8, observa-se que as posições horizontal e vertical do ponto 3 podem ser descritas pelas equações:

$$x_3^*(t) = R \cos \alpha = R \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \Rightarrow x_3^*(t) = R \sin \theta$$

$$y_3^*(t) = R \sin \alpha = R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \Rightarrow y_3^*(t) = R \cos \theta$$

Figura 5.8 – A descrição do movimento do ponto 3 visto por um observador no referencial do centro de massa do carretel.



Essas equações e os dados obtidos fornecem duas maneiras diferentes de determinar o valor do ângulo, e portanto da velocidade angular de rotação. Apesar da redundância na determinação do ângulo, fez-se a análise nas duas componentes, notando-se por θ_x a função que descreve a variação no tempo do ângulo quando determinado pela componente horizontal e por θ_y a função obtida pela análise da componente vertical do movimento do carretel.

Para verificar se o movimento de rotação é um movimento uniforme, pode-se fazer a linearização de θ , isto é, obter uma expressão para θ como função do tempo. Das equações acima, pode-se escrever os dados do movimento horizontal:

$$\theta_x = \arcsen\left(\frac{x_3^*(t)}{R}\right)$$

Para o movimento vertical podemos escrever:

$$\theta_y = \arccos\left(\frac{y_3^*(t)}{R}\right)$$

Foram então preparados os gráficos de θ_x e θ_y como função do tempo. Esses gráficos, apresentados respectivamente nas Figuras 5.9 e 5.10, indicam claramente que o ângulo varia linearmente no tempo para as duas componentes, indicando um movimento circular uniforme.

Figura 5.9 – O gráfico do ângulo θ obtido a partir da componente horizontal como função do tempo.

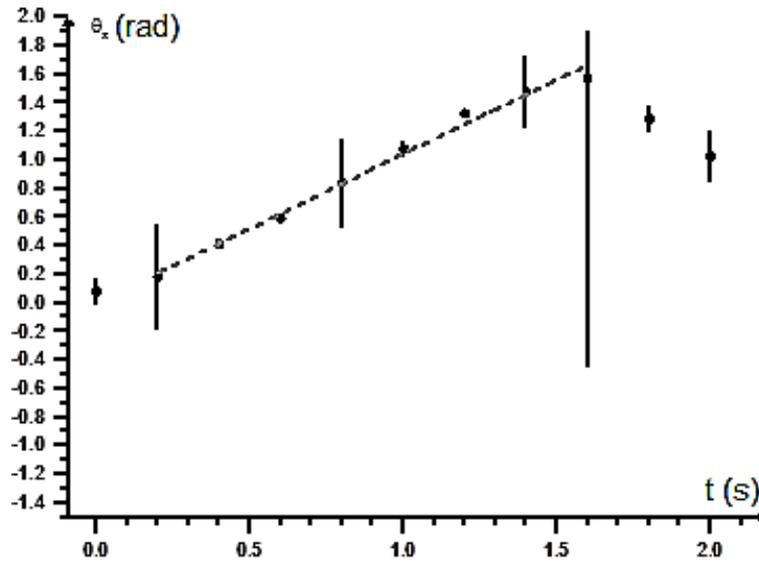
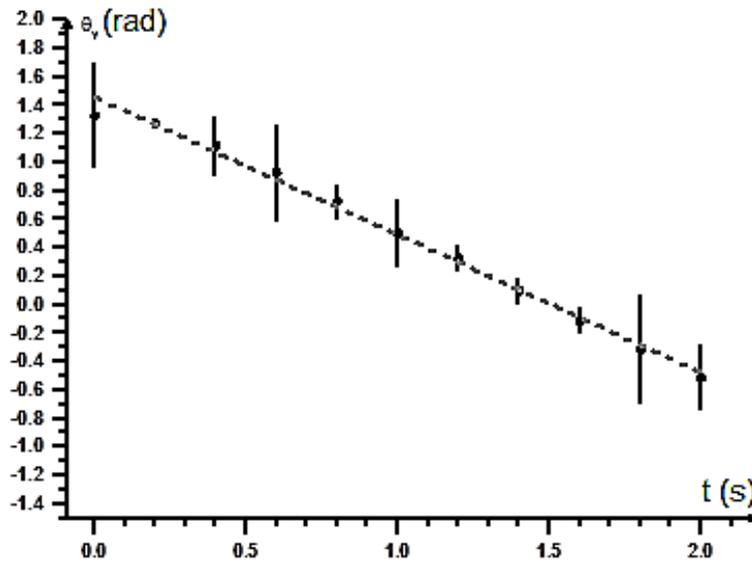


Figura 5.10 – O gráfico do ângulo θ obtido a partir da componente vertical como função do tempo.



O melhor ajuste para os dados apresentados na Figura 5.9, com a exclusão do ponto inicial e dos dois pontos finais, para os quais a análise visual do vídeo e das fotos revela dificuldades na determinação dos valores, é (em radianos, considerando $R^2 = 0,990$):

$$\theta_x = 1,038t + 0,003$$

Da função acima podemos constatar uma velocidade angular constante (sem estimativa da incerteza) de valor igual a:

$$\omega_x = 1,04 \text{ rad/s}$$

Para os dados apresentados na Figura 5.10, obtém-se (em radianos, considerando $R^2 = 0,993$):

$$\theta_y = -0,969 t + 1,457$$

A velocidade angular correspondente será igual a:

$$\omega_y = 0,97 \text{ rad/s}$$

Conclui-se então que o movimento do ponto 3 em relação ao centro de massa pode ser bem descrito como um movimento circular uniforme com velocidade angular cujo melhor valor é dado por:

$$\omega = (1,01 \pm 0,04) \text{ rad/s}$$

Esse valor foi obtido a partir do cálculo da média aritmética entre os valores obtidos na análise da componente horizontal do movimento e da componente vertical deste movimento (a incerteza é calculada também como a média).

$$\omega = \frac{1}{2} (\omega_x + \omega_y) , \quad \delta \omega = \frac{1}{2} (\delta \omega_x + \delta \omega_y)$$

5.4 – Resultados

Apresentou-se aqui a análise dos dados obtidos na filmagem de um carretel colocado em movimento sobre uma mesa horizontal lisa. Os vídeos foram tratados e transformados em uma fotografia estroboscópica, e os pontos assinalados no carretel – o centro de massa e um ponto próximo à borda – tiveram suas coordenadas cartesianas medidas.

Na análise destes dados, primeiro descreveu-se o movimento do centro de massa do carretel: observou-se experimentalmente que o movimento do centro de massa do carretel, no intervalo de tempo analisado, é um movimento uniforme, com velocidade:

$$V_{x_{CM}} = (19,2 \pm 4,7)\text{cm/s} \Rightarrow V_{x_{CM}} = (19 \pm 5)\text{cm/s}.$$

Para a componente y da velocidade do centro de massa obteve-se valor nulo (o movimento é horizontal).

Para a descrição do movimento de um ponto próximo à borda do carretel, o ponto 3, fez-se a mudança de sistema de referências: a descrição foi feita no referencial do centro de massa.

Observou-se experimentalmente que o movimento do ponto 3 em relação ao centro de massa pode ser bem descrito como um movimento circular uniforme com velocidade angular cujo melhor valor é dado por

$$\omega = (1,01 \pm 0,04)\text{rad/s}$$

O valor da velocidade tangencial no movimento de rotação é dado por:

$$v_3^* = \omega \times R = (1,01 \pm 0,04)\text{rad/s} \times (17,8 \pm 0,2)\text{cm} \Rightarrow v_3^* = (18,0 \pm 0,7)\text{cm/s}$$

O valor está compatível com aquele obtido para a velocidade do centro de massa do sistema.

Em suma, o experimento permitiu mostrar que, no trecho do vídeo analisado:

- O movimento do centro de massa é uniforme, o que significa que a resultante das forças que atua sobre o carretel após a estabilidade ter sido alcançada é nula;
- Esta resultante ser nula implica que a força de atrito de contato entre a superfície e a borda do carretel é nula, uma observação que se revela de difícil compreensão por parte dos alunos;
- O movimento do carretel em torno do centro de massa é um movimento de rotação uniforme;
- A velocidade angular de rotação é compatível (experimentalmente) com o valor $\omega = V_{cm}/R$, e com isso pode-se demonstrar que o ponto de contato está instantaneamente em repouso durante o movimento.

Capítulo 6

Considerações finais

Neste trabalho, propôs-se a apresentação do estudo de rolamento de um carretel, um exemplo de corpo rígido, para o Ensino Médio. Para isso, deu-se ênfase ao trabalho em laboratório com análise de dados tomados por meio de um vídeo, evitando discussões matematizadas e abstratas, que costumam induzir concepções não científicas nos estudantes conforme pode ser visto na literatura sobre o assunto.

Preparou-se um carretel especialmente para o experimento. Foi feito um vídeo e obtidos dados do movimento de pontos do carretel, uma composição de movimentos de rotação e translação sobre uma mesa horizontal.

Com o vídeo realizado e usando softwares de uso livre foi obtida uma fotografia estroboscópica do movimento, e assim construíram-se tabelas de dados para análise. Com a construção dos gráficos relativos ao movimento, foi obtida de forma simples a velocidade do centro de massa do carretel e de forma não tão simples da velocidade angular de rotação em torno do seu centro de massa.

Em virtude de restrições impostas ao experimento por fatores não previstos houve a necessidade de se realizar um recorte no movimento trabalhado, isto é, limitar a análise a um determinado intervalo de tempo. Em primeiro lugar foi desconsiderado o movimento inicial devido a ação da força elástica utilizada no deslocamento inicial do carretel. Também foi eliminada a segunda metade do movimento em função da dificuldade de determinar a posição correta do ponto localizado na periferia pelo fato do ponto e a mesa de apoio serem da mesma cor. Apesar dos problemas relatados tal restrição não impediu a obtenção de resultados para o trabalho e a discussão do do modelo de análise dos dados.

Os dois principais resultados do trabalho referem-se à possibilidade de discussão, com base em resultados experimentais, da velocidade do ponto de contato do corpo rígido com a superfície e do valor da força de atrito num movimento de rolamento sem deslizamento em um plano horizontal.

A discussão sobre o papel e o valor da força de atrito no contato entre a superfície da mesa e o ponto do carretel que a toca é uma discussão física relevante e esclarecedora, em particular por que é feita a partir de resultados experimentais.

O produto de nosso trabalho é o vídeo, que pode ser utilizado em sala de aula da mesma forma proposta aqui neste trabalho, e a animação complementar a ele, que pode ser utilizada para discussão dos conceitos físicos relevantes.

Referências Bibliográficas

[Boyer, 1974]

Boyer, C. B., História da Matemática. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1974.

[Carvalho, 2005]

Carvalho, P. S.; Sousa, A. S.. Rotation in Secondary School: Teaching the effects of Frictional Force. *Physics Education*, **40**(3): 257 – 265, 2005.

[Dias, 2007]

Dias, A. R. Atrito em Escala Nanométrica: um Estudo por Simulação. Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/843/IACO-766RTQ/tese_rodrigo_a._dias.pdf?sequence=1. Consultada em 10/05/2012.

[Dias, 2009]

M. A. Dias, H. S. Amorim e S. S. Barros, Produção de Fotografias Estroboscópicas sem Lâmpada Estroboscópica. *Caderno Brasileiro Ensino de Física*, v. 26. n 3: p.492 – 513. Dez. 2009.

[Krim, 1996]

Krim, J. . Friction at Atomic Scale. *Scientific American*, **275**: 48–56, 1996.

[Magalhães, 2002]

Magalhães, M. E. C.. O Atrito e as Áreas de Contato entre os Sólido: A Dificuldade dos Alunos e Professores. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2002.

[McCurdy, 1904]

McCurdy, E. Leonardo da Vinci, London: G. Bell and Sons, 1904.

[Nussenzveig, 1996]

Nussenzveig, H. M. . Curso de Física Básica – vol. 1: Mecânica, 3ª edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[Palmer, 1949]

Palmer, F. . What About Friction? *América Journal of Physics*, vol. **17**, Issue 4, pp 181, 1949.

[Rimoldini, 2005]

Rimoldini, L.G.; Singh, C. Student understanding of rotational and rolling motion concepts. *Physical Review Special Topics: Physics Education Research* **1**, 010102, 2005.

Apêndice A

O rolamento do carretel

Este apêndice está apresentado na forma de um CD, anexo a este texto.