



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## **Idealizações em Mecânica Newtoniana e Violações do Determinismo**

Jorge Luiz Gomes Dias

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Marcus Venicius Cougo Pinto

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2011

# **Idealizações em Mecânica Newtoniana e Violações do Determinismo**

Jorge Luiz Gomes Dias

Orientador: Marcus Venicius Cougo Pinto

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Presidente, Prof. Marcus Venicius Cougo Pinto

---

Prof. Carlos Farina de Souza

---

Prof. José Abdalla Helayel Neto

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2011

## FICHA CATALOGRÁFICA

D541i Dias, Jorge Luiz Gomes  
Idealizações em Mecânica Newtoniana e Violações do Determinismo / Jorge Luiz Gomes Dias. – Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2011.  
IX, 97 f. : il. ; 30 cm.  
Orientador: Marcus Venicius Cougo Pinto.  
Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2011.  
Referências Bibliográficas: f. 95-97.  
1. Ensino de Física. 2. Idealizações em mecânica newtoniana. 3. Violações do determinismo newtoniano. I. Cougo Pinto, Marcus Venicius. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. Idealizações em Mecânica Newtoniana e Violações do Determinismo.

À minha família.  
Dedico à minha mãe Glória,  
à minha esposa Marisa  
e aos meus filhos Carol, Igor e Lu,  
que além de motivos são os grandes  
apoios de todas as minhas realizações.

## **Agradecimentos**

Aos professores Paulo Carrilho, Ana M. Senra Breistschaft e Carlos Farina pela carta de apresentação para que fosse possível a minha inscrição para concorrer a uma das vagas do mestrado.

Minha admiração pelo belo trabalho de coordenação do curso de pós-graduação pelo professor Carlos Eduardo Aguiar, que sempre nos estimulou para melhor desempenho dos trabalhos. Também agradeço ao professor Carlos pelas excelentes sugestões para a redação do apêndice.

A todos os professores, à secretária Dilma e aos funcionários ligados ao Mestrado Profissional em Ensino de Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Meu muito obrigado, às professoras Marta Feijó e Susana L. Souza Barros pela dedicação e ensinamentos que nos conduzem a repensar e aperfeiçoar a "aula" que estamos ministrando.

Agradeço a Marcio Mendes Taddei pela tradução do artigo em alemão de F. Klein para o português e a Mathias Ihl, pela tradução do mesmo artigo para o inglês. Graças a essas traduções pudemos ter o acesso ao trabalho de Felix Christian Klein. Ao Sergio Mockdece (animação) e Arnaldo César pelas orientações computacionais.

A todos meus colegas da primeira turma (2008) do programa MPEF do IF-UFRJ, que me acolheram MUITO bem nesta Cidade Maravilhosa, apesar de ser "estrangeiro". Pelas caronas do Otávio, do Walter, do Tobias, pelas explicações da Marta Máximo, aos companheiros de seminários Alexsander Paixão e José Lages, pela boa conversa do Marcelo São Tiago, do Geraldo, do José Bernardo. Do colega de CEDERJ Marco Adriano, aos competentes representantes da turma Anderson Ribeiro e Leandro Rubino, e ainda Diego Uzeda e Leandro Nery.

Ao meu amigo de longa caminhada profissional, Getúlio M. Marques que sempre me estimulou, através da sua confiança em nosso trabalho em sala de aula, para o aperfeiçoamento do conhecimento técnico e humano na profissão de professor.

Finalmente, ao coordenador e orientador de pesquisas Marcus Venicius Cougo Pinto a minha sincera gratidão pela paciência e dedicação durante todo o curso, o que me proporcionou um GRANDE aperfeiçoamento de conhecimentos no desenvolvimento e na apresentação deste trabalho.

## RESUMO

### **Idealizações em Mecânica Newtoniana e Violações do Determinismo**

Jorge Luiz Gomes Dias

Orientador: Marcus Venicius Cougo Pinto

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

A mecânica newtoniana, como as demais partes da Física, é formulada em termos de conceitos idealizados e leis idealizadamente exatas. Exemplos notáveis são dados pelo conceito de partícula como corpo de dimensões nulas e pelo conceito de corpo perfeitamente rígido. As forças de contato entre esses corpos idealizados têm suas componentes normais às superfícies de contato consideradas como forças vinculares e suas componentes tangenciais consideradas como sujeitas às leis coulombianas de atrito, por sua vez altamente idealizadas, apesar de meramente aproximadas na realidade. Painlevé descobriu exemplos de sistemas nos quais as leis coulombiana do atrito cinético levam a violações de um dos princípios mais fundamentais da mecânica clássica, o princípio do determinismo newtoniano, que afirma a existência de um, e somente um, movimento de um sistema fechado para uma dada condição inicial. A apresentação e discussão em forma didática de três exemplos dessas violações é o principal resultado desta dissertação. Um dos exemplos é simples o bastante para ser usado em aulas de Física do Ensino Médio.

Palavras chave: Ensino de Física, Idealizações em mecânica newtoniana, Violações do determinismo newtoniano.

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2011

## **ABSTRACT**

### **Idealizations in Newtonian Mechanics and Violations of Determinism**

Jorge Luiz Gomes Dias

Supervisor: Marcus Venicius Cougo Pinto

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

Newtonian mechanics, as other branches of physics, is formulated in terms of idealized concepts and laws. Remarkable examples are given by the concept of particle as a body with zero dimension and by the concept of perfectly rigid body. The contact forces between those idealized bodies have their components perpendicular to the contact surface considered as constraint forces and their tangential components considered as subjected to the Coulombian laws of friction, which are highly idealized, although merely approximate in real situations. Painlevé discovered examples of systems in which the Coulombian laws of kinetic friction lead to violations of one of the most fundamental principles of classical mechanics, the principle of Newtonian determinism, which states the existence of one, and only one, motion of a closed system for a given initial condition. The presentation and discussion in didactic form of three examples of those violations is the main result of this dissertation. One of the examples is simple enough to be used in high school classes.

Keywords: Physics education, Idealizations in newtonian mechanics, Violations of newtonian determinism.

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2011

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Noções fundamentais de mecânica clássica</b>	<b>5</b>
1.1 Conceitos pressupostos pela mecânica clássica . . . . .	6
1.2 Princípios de cinemática . . . . .	8
1.3 Princípios de dinâmica . . . . .	13
1.4 As leis de movimento newtonianas . . . . .	22
1.5 Sistemas de partículas . . . . .	29
1.6 Forças vinculares . . . . .	34
1.7 Constantes de movimento . . . . .	36
<b>2 Idealizações e suas limitações</b>	<b>42</b>
2.1 Idealizações em mecânica newtoniana . . . . .	43
2.2 Invasores do espaço e determinismo newtoniano . . . . .	45
2.3 Teorema de Cauchy e determinismo newtoniano . . . . .	46
2.4 O domo de Norton . . . . .	51
<b>3 Incompatibilidade entre as leis empíricas do atrito e o determinismo newtoniano</b>	<b>62</b>
3.1 As leis empíricas do atrito . . . . .	64
3.2 Haltere deslizando em trilhos paralelos . . . . .	66
3.2.1 Enunciado do problema . . . . .	66
3.2.2 Aplicação das leis da mecânica ao problema . . . . .	67
3.2.3 Caso de atrito grande . . . . .	70
3.2.4 Caso de atrito pequeno . . . . .	73
3.2.5 Caso de atrito crítico . . . . .	74
3.3 Pêndulo com pivô deslizando . . . . .	75
3.4 Roda com centro de massa excêntrico . . . . .	80
<b>Apêndice</b>	<b>87</b>





# Introdução

Durante minha vida de estudante universitário do curso de engenharia, trabalhei como professor de física e matemática, por necessidade, em escolas e cursos pré-vestibulares. Fato que era comum na época, devido à escassez de professores disponíveis na área. Após formado, trabalhei como engenheiro em um trecho de noventa quilômetros na obra da Ferrovia do Aço, durante quase três anos. Voltei ao magistério onde me encontro até hoje, realizado profissionalmente e, o mais importante, *feliz*.

Nos meus trinta e seis anos de magistério em física, minha experiência foi semelhante à da maioria de meus colegas. Enquanto professor reproduzia em aula os textos da literatura disponível e mais utilizada, garimpando exercícios e alguma teoria que eram cobrados com maior frequência nas provas de vestibulares. Os problemas propostos eram programados para que o aluno aplicasse fórmulas sem qualquer preocupação de verificar os resultados com algum modelo experimental. A abordagem da teoria e dos problemas não era crítica, de modo a questionar se as idealizações usadas eram compatíveis com resultados experimentais ou com a própria teoria. Alertava os alunos para a leitura dos texto onde deveria se observar que alguns elementos dos sistemas seriam idealizados como, por exemplo, os fios, polias e molas ideais. Porém sem compromisso de justificar ou avaliar tal exigência dos elementos a serem idealizados. Na mecânica newtoniana, eu acreditava que com o estudo das leis coulombianas do atrito já estava bastante próximo ao tratamento real dos fenômenos naturais. Assim, a menção da idealização nos textos era uma imposição a ser verificada apenas para que se pudesse usar as fórmulas envolvidas sobre o assunto em questão. Algumas universidades apresentam em programas de vestibular a cobrança sobre noções de física moderna, onde as leis de Newton devem ser corrigidas para valores altos da velocidade.

Essa era uma ocasião quando citávamos a proibição da utilização das leis, porque elas poderiam apresentar resultados errados. Tinha também a noção de que em movimentos em escala atômica nem mesmo com correções as leis de Newton poderiam ser utilizadas. O assunto era tratado como uma poesia decorada.

No entanto, quando se tratava de aplicar as leis de Newton em situações normais, em problemas de pêndulos ou rodas encontrados no dia a dia, a crença comum é que elas nunca levam a erros essenciais. As idealizações usadas na formulação e solução desses problemas poderiam limitar a precisão dos resultados, mas jamais levar a inconsistências e contradições. Por isso, foi uma surpresa fascinante tomar conhecimento das descobertas de Painlevé [1, 2], de que as idealizações comumente usadas ao tratar as leis coulombinas do atrito cinético podem levar à violação de um princípio fundamental de mecânica newtoniana, o do determinismo newtoniano. Esse princípio afirma que, dadas as forças sobre um sistema, para cada condição inicial existe um, e somente um, movimento possível para o sistema. A violação é consequência de diversas idealizações. Primeiramente, a idealização dos corpos em atrito como rigorosamente rígidos. Em segundo lugar, a idealização da perfeita proporcionalidade entre o módulo da força de atrito cinético e o da força normal de contato. Finalmente, a idealização dessa proporcionalidade como válida para quaisquer valores do coeficiente de atrito cinético, mesmo para valores relativamente grandes. A possibilidade de uma inconsistência tão importante, entre um princípio fundamental e idealizações aceitas comumente, merece ser conhecida. Assim, o objetivo neste nosso trabalho é chamar a atenção sobre essa possibilidade. Queremos chamar a atenção para a importância das idealizações em mecânica newtoniana, para a importância do princípio do determinismo newtoniano e para a possibilidade de conflito entre esses dois elementos da teoria. Embora tenhamos considerado questões de mecânica newtoniana, podemos crer que idealizações excessivas podem levar a problemas sérios em outras áreas da física.

Nosso trabalho se dirige ao professor de física do ensino médio e pretende fornecer a ele um conteúdo que possa ajudá-lo no ensino da mecânica newtoniana. Não abordaremos a questão profunda e difícil de como ensinar esse conteúdo. Os métodos pedagógicos para ensiná-lo mereceriam uma outra tese. O produto dessa tese é o encarte apresentado no apêndice. Ele é destinado prioritariamente

ao professor de ensino médio que, de acordo com sua experiência e julgamento, pode apresentá-lo aos estudantes em maior ou menor detalhe. No entanto, o encarte pode ser lido com proveito também pelos alunos de ensino médio com boa compreensão de mecânica nesse nível.

De acordo com nosso objetivo, a preocupação neste nosso trabalho é, numa primeira parte, apresentar as Leis de Newton de um modo que procure levar ao professor (e ao aluno) conceitos fundamentais e imprescindíveis como partícula, livre ou isolada, corpo rígido, a idéia de referencial inercial, de movimento e de força, para o entendimento racional de uma literatura básica apropriada ao tratamento dos fenômenos naturais. Isso propicia uma melhor apreciação e compreensão desses fenômenos e, conseqüentemente, constitui um fator importante para aprimorar a interpretação de textos propostos em problemas. Em seguida apresentamos um estudo sobre idealizações que muito contribuem para que se torne acessível a verificação de hipóteses através dos experimentos, coletas de dados e finalmente para a execução de cálculos, cujos resultados abonam ou descartam as hipóteses quando comparados com a realidade dos fenômeno na natureza. Como já dissemos, essas mesmas idealizações, que tanto colaboram no estudo da mecânica quando bem dosadas ou bem fundamentadas, podem comprometer os resultados e nos expor a conclusões completamente absurdas e contrárias a toda uma teoria que há séculos vem se comportando como um suporte sólido para a compreensão dos fenômenos naturais, a nível macroscópico, satisfazendo a quem ensina e a quem tenta entender o comportamento da natureza. Numa terceira etapa, fazemos uma apresentação dos estudos de Paul Painlevé sobre as leis empíricas do atrito e o determinismo newtoniano, onde foram abordadas situações que apresentam incompatibilidade entre as leis empíricas do atrito cinético e esse princípio fundamental da dinâmica.

Além dessa introdução, a tese contém três capítulos, uma conclusão e um encarte apresentado em apêndice. No primeiro capítulo apresentamos a primeira parte mencionada anteriormente, uma exposição sobre os pontos essenciais da mecânica newtoniana. Embora seja assunto bem conhecido, esse capítulo faz uma apresentação onde o princípio do determinismo newtoniano é enfatizado, mostra a teoria que será utilizada nos exemplos posteriores, com a notação que adotamos, e também deixa explícita qual a teoria que contém as idealizações abordadas no

segundo capítulo e as inconsistências discutidas no terceiro capítulo.

No segundo capítulo apresentamos a segunda parte mencionada nessa introdução, as idealizações usadas na mecânica newtoniana e a possibilidade delas levarem a conclusões absurdas. Apresentamos alguns exemplos de violações do determinismo newtoniano diferentes das que nos interessam primordialmente. Com esses exemplos mostramos que essas violações não se limitam aos trabalhos de Painlevé sobre atrito e se constituem em assunto de interesse mais geral e atual.

No terceiro capítulo apresentamos o tema central desse nosso estudo, três exemplos de Painlevé mostrando a incompatibilidade entre as leis coulombianas empíricas do atrito cinético e o princípio do determinismo newtoniano. Acreditamos que nossa apresentação seja bem mais acessível ao professor de ensino médio atual por termos atualizado a notação, detalhado a apresentação, usado recursos mais didáticos de cálculo e, naturalmente, apresentarmos os problemas no vernáculo. Essa é nossa contribuição nessa tese: tornar acessível ao professor de ensino médio um conteúdo que lhe será útil para a compreensão e ensino da mecânica. Na conclusão, fazemos um apanhado de nosso trabalho que é útil para quem terminou sua leitura e apresentamos perspectivas de continuação deste estudo. Parte da bibliografia visa apontar para essas continuações. No apêndice apresentamos um encarte contendo uma versão simplificada do primeiro exemplo tratado no terceiro capítulo. Esse encarte possibilita a professores de ensino médio e, possivelmente, a alunos de ensino médio, tomar contato com a contribuição essencial desta tese sem a necessidade de sua leitura.

# Capítulo 1

## Noções fundamentais de mecânica clássica

Nesse capítulo apresentaremos as noções fundamentais de mecânica clássica para as discussões dos capítulos posteriores. Embora amplamente usada no ensino médio e universitário, a formulação original de Newton é cheia de sutilezas e de difícil compreensão, o que levou a formulações mais didáticas como, por exemplo, as apresentadas em livros franceses de Mecânica Racional do início do século XX. Dentre esses, podemos citar os tratados de Appell [3], de Chazy [4] e de Painlevé [5]. Uma formulação profunda nessas linhas, mas extremamente sucinta e difícil, é dada nas primeiras páginas do famoso livro de Mecânica de Arnold [6,7]. Um resumo baseado nessas referências aparece nas notas de aula do curso de Tópicos de Física Clássica I de 2009/1 de nossa pós-graduação, que são nossa principal fonte de referência neste capítulo [8]. O objetivo desse capítulo é apenas apresentar uma versão desse resumo dos conceitos fundamentais da mecânica newtoniana que facilite a apreciação do estudo realizado nos próximos capítulos, especialmente da questão das idealizações utilizadas na formulação da mecânica newtoniana. Em especial será enfatizado o princípio do determinismo newtoniano de que trata nosso estudo.

## 1.1 Conceitos pressupostos pela mecânica clássica

A finalidade da mecânica clássica é estudar o movimento dos corpos materiais descrito através da geometria euclidiana dentro do espaço alcançado pelos nossos sentidos. Assim sendo se faz necessário o conhecimento básico da geometria euclidiana, como também de regras de uso de instrumentos de medição no espaço descrito por essa geometria.

A seguir apresentamos os pressupostos que dão origem aos conceitos primários e postulados da mecânica clássica. Vários conceitos citados nesta seção, como espaço, tempo e movimento, não são definidos mas são usados com seus significados intuitivos, obtidos a partir de algumas situações concretas, particularmente aquelas que descrevem procedimentos práticos para realizar observações e medições.

Para isto supomos disponíveis **régua**s idênticas para medições de distâncias e comprimentos em qualquer lugar do espaço. Denotamos por  $\mathcal{E}$  o **espaço euclidiano**, o conjunto de todos os pontos do espaço de nossa percepção sensorial.

As régua define uma função **distância**  $d$ , que associa a cada par de pontos um número real bem definido. Supomos que essa função tem as propriedades usuais da distância em geometria euclidiana.

Usamos essa noção de distância para marcar escalas em eixos e usamos sistemas de eixos cartesianos para localizar pontos do espaço e definir figuras geométricas. Dado um sistema de eixos  $\mathcal{OXYZ}$  cada ponto  $P$  de  $\mathcal{E}$  pode ser identificado biunivocamente por suas coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  relativas ao sistema de eixos  $\mathcal{OXYZ}$ . Essas coordenadas definem a **posição do ponto** relativa ao sistema de eixos  $\mathcal{OXYZ}$ . Podemos considerar tal posição como um vetor de  $\mathbb{R}^3$ , que chamamos **vetor-posição** do ponto relativa ao sistema de eixos  $\mathcal{OXYZ}$ . Representando o vetor posição por  $\mathbf{r}$ , temos  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ .

Como de costume, também podemos considerar cada vetor  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  de  $\mathbb{R}^3$  como uma seta cujas componentes ao longo dos  $\mathcal{OX}$ ,  $\mathcal{OY}$  e  $\mathcal{OZ}$  são os respectivos números  $a_x$ ,  $a_y$  e  $a_z$ . As setas unitárias ao longo dos eixos são  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$  e  $\mathbf{u}_z$ , de modo que  $\mathbf{a} = a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z$ .

Com isso, o vetor posição  $\mathbf{r}$  de qualquer ponto  $P$  é a seta cujas componentes são as coordenadas respectivas  $x$ ,  $y$  e  $z$  do ponto  $P$ , e podemos escrever  $\mathbf{r} =$

$(x, y, z) = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$ . Naturalmente, essa é a seta que vai da origem de  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$  até o ponto  $P$ . Desse modo, em última análise, as réguas permitem associar a cada ponto do espaço  $\mathcal{E}$  uma posição ou, mais especificamente, um vetor posição, relativo ao sistema de eixos.

Também supomos disponíveis **relógios** idênticos e sincronizados para medições de durações e intervalos de tempo em qualquer lugar do espaço. Os relógios associam a cada **evento**, em um dado ponto do espaço, um número real bem definido que denominamos **instante** do evento.

Definimos **partícula** como um corpo cujas dimensões são desprezíveis em um dado problema, isto é, cujas dimensões são desprezíveis na descrição de seu movimento. Geometricamente, uma partícula é um ponto. Naturalmente, o conceito de partícula depende do problema em consideração. Um mesmo corpo pode ser considerado como partícula em um dado problema e não ser considerado como partícula em outro problema. A Terra, por exemplo, é considerada como uma partícula em seu movimento anual em torno do Sol, mas não é considerada como tal em seu movimento de rotação diário em torno de seu eixo.

Também postulamos que qualquer **corpo** ou **sistema** é um conjunto de partículas, isto é, um conjunto de partes suficientemente pequenas para que cada parte possa ser considerada como uma partícula. Um **corpo rígido** é um sistema de partículas que mantêm entre si distâncias constantes. Normalmente, consideramos um corpo rígido como um objeto tridimensional, isto é, como um sistema formado ao menos por quatro partículas não coplanares. Quando quisermos considerar corpos rígidos bidimensionais, como discos, ou unidimensionais, como barras, isso será explicitamente afirmado. Como exemplos do dia a dia de corpos rígidos, temos um bloco de granito, uma sala com piso, paredes e teto e a constelação do Cruzeiro do Sul.

Usando réguas e relógios podemos definir um ponto do espaço como sendo **fixo em relação a um corpo rígido** se as distâncias entre ele e os pontos do corpo rígido permanecem constantes. Dizemos que uma figura no espaço, tal como um sistema de eixos cartesianos, é **fixa em relação ao corpo rígido** ou **fixa no corpo rígido** se todos os seus pontos são fixos em relação a ele. O conjunto de todos os pontos do espaço fixos em relação a um corpo rígido é chamado **corpo rígido estendido**. Quando citarmos um ponto de um corpo rígido, entendemos



um ponto do corpo rígido estendido, exceto se for dito explicitamente o contrário. Obviamente, quando citamos uma partícula do corpo rígido, ela está em um ponto do corpo rígido propriamente dito.

Dizemos que uma partícula está **fixa em relação ao corpo rígido** ou **fixa no corpo rígido** se as distâncias entre ela e os pontos do corpo rígido permanecem constantes. Um conjunto de partículas está **fixo em relação ao corpo rígido** se cada uma das partículas está fixa em relação a ele.

Desejamos expressar a idéia de que réguas e relógios estão fixos em um corpo rígido (durante o processo de medição). Para expressar esse fato, diremos que há um **observador munido de réguas e relógios nesse corpo rígido**. Também se entende nessa expressão que estão disponíveis infinitudes de réguas idênticas e relógios idênticos e sincronizados para medições em qualquer lugar do espaço.

**Referencial** é um corpo rígido no qual um observador está munido de réguas e relógios e no qual está fixo um dado sistema de eixos coordenados. Um exemplo de referencial é o que usa a Terra como corpo rígido; esse tipo de referencial é chamado **terrestre**. Um referencial que usa o Sol e as estrelas fixas como corpo rígido, com o Sol na origem do sistema de eixos coordenados é chamado **copernicano**. Em geral nos referimos ao sistema de eixos como se fosse o referencial, ficando subtendido o corpo rígido no qual está fixo o sistema de eixos e o observador munido dos instrumentos de medição. Normalmente, representamos um referencial em figuras desenhando apenas seu sistemas de eixos. Por conveniência, também usamos apenas sistemas de eixos ortogonais. A posição de um ponto relativa ao sistema de eixos de um referencial é chamada **posição do ponto relativa ao referencial** em questão.

## 1.2 Princípios de cinemática

**Posição** de uma partícula relativa a um referencial ou **vetor-posição** de uma partícula relativo a um referencial, em um certo instante, é o vetor-posição relativo a esse referencial do ponto ocupado pela partícula nesse instante. Se as coordenadas da partícula no sistema de eixos  $\mathcal{OXYZ}$  são  $x$ ,  $y$  e  $z$ , a posição da partícula é o vetor  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ .

**Movimento** de uma partícula relativo a um referencial é uma função que as-

socia a cada instante de um dado intervalo de tempo uma posição da partícula relativa a esse referencial. Portanto, um movimento é uma função

$$\begin{aligned} \phi : (T_i, T_f) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ &: t \longmapsto \mathbf{r} . \end{aligned} \quad (1.1)$$

na qual  $(T_i, T_f)$  é o intervalo de tempo no qual ocorre o movimento. A **duração** de tal movimento é  $T_f - T_i$ . O movimento, sendo uma função, também é chamado **função-movimento** ou **função-horária** da partícula. A função-movimento de uma partícula é geralmente dada por uma expressão

$$\mathbf{r} = \phi(t) \quad (t \in (T_i, T_f)) . \quad (1.2)$$

É também comum deixar implícito o intervalo de tempo em que ocorre o movimento. É também comum considerar movimentos em um intervalo de tempo infinito, *i.e.*, com  $T_i \rightarrow -\infty$  ou  $T_f \rightarrow \infty$ , ou ambos. Quando um movimento  $\phi$  ocorre no intervalo  $(-\infty, +\infty)$  escrevemos  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Uma função-movimento (1.2) é determinada por três funções  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  e  $\phi_z$ , que dão as coordenadas de  $\mathbf{r}$  em função do tempo, ou seja  $\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$  e

$$x = \phi_x(t) , \quad y = \phi_y(t) \quad \text{e} \quad z = \phi_z(t) . \quad (1.3)$$

Durante um movimento  $\phi$  a extremidade do vetor posição  $\mathbf{r}$  traça uma curva no espaço que chamamos **trajetória** da partícula nesse movimento. Um movimento que tem uma reta por trajetória é chamado **movimento retilíneo**. Outros movimentos também são qualificados pela sua trajetória como, por exemplo, movimento circular, parabólico, plano, etc.

**Deslocamento** de uma partícula de uma posição para outra é a variação de seu vetor posição. O deslocamento de  $\mathbf{r}$  para a  $\mathbf{r}'$  é o vetor  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

**Velocidade** de uma partícula no instante  $t$  de um movimento  $\phi$  é a derivada de sua posição nesse instante, correspondendo à taxa de variação temporal da posição no instante considerado,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (1.4)$$

ou, na notação de Newton,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\phi}(t)$ . Chamamos a derivada  $\dot{\phi}$  da função-movimento **função-velocidade** ou **função horária da velocidade**. Naturalmente,  $v_x = \dot{x} = \dot{\phi}_x(t)$ ,  $v_y = \dot{y} = \dot{\phi}_y(t)$  e  $v_z = \dot{z} = \dot{\phi}_z(t)$ .

**Aceleração** de uma partícula no instante  $t$  de um movimento  $\phi$  é a derivada de sua velocidade nesse instante,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\dot{\phi}(t)}{dt}. \quad (1.5)$$

ou, na notação de Newton,  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\phi}(t)$ . Chamamos a derivada  $\ddot{\phi}$  da função-velocidade **função-aceleração** ou **função horária da aceleração**. Naturalmente,  $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = \ddot{\phi}_x(t)$ ,  $a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = \ddot{\phi}_y(t)$  e  $a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} = \ddot{\phi}_z(t)$ .

As propriedades geométricas dos vetores deslocamento, velocidade e aceleração são bem conhecidas. O deslocamento da partícula de  $\mathbf{r}$  para  $\mathbf{r}'$  é a seta que vai de  $\mathbf{r}$  para  $\mathbf{r}'$ . A velocidade  $\mathbf{v}$  da partícula tem a direção da tangente à trajetória da partícula no ponto em que ela se encontra e o sentido em que a partícula se move na trajetória no ponto em que ela se encontra. A aceleração  $\mathbf{a}$  da partícula tem a direção e o sentido em que varia a velocidade no ponto em que a partícula se encontra; conseqüentemente, aponta sempre para a concavidade da trajetória no ponto em que a partícula se encontra.

**Movimento retilíneo uniforme** é o movimento com velocidade constante. É retilíneo porque a direção da velocidade é constante e uniforme porque seu módulo e sentido também são constantes. É o único movimento no qual a aceleração é sempre nula.

Vamos agora considerar um movimento (1.2) de uma partícula e desenvolver alguns conceitos cinemáticos associados à sua trajetória. Consideramos a curva  $\mathcal{C}$  dada por um trecho aberto da trajetória e adotamos em  $\mathcal{C}$  um ponto  $\mathcal{O}_\mathcal{C}$  que chamamos **origem da curva**. Adotamos também um sentido de percurso na curva como positivo e o outro, como negativo. Seja  $P$  um ponto qualquer em  $\mathcal{C}$  e  $\ell$  o comprimento de arco ao longo de  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{O}_\mathcal{C}$  até  $P$ . Definimos **espaço percorrido**  $s$  de  $\mathcal{O}_\mathcal{C}$  até  $P$  como sendo  $\ell$  se o sentido de  $\mathcal{O}_\mathcal{C}$  para  $P$  é positivo e,  $-\ell$  se negativo. Se  $s_1$  e  $s_2$  são os respectivos espaços percorridos até os pontos  $P_1$  e  $P_2$ ,  $s_2 - s_1$  é chamado espaço percorrido de  $P_1$  até  $P_2$ . Também chamamos arco percorrido o espaço percorrido. Dado um valor de  $s$ , existe um único ponto, cuja posição

denotamos por  $\mathbf{r}$ , que tem  $s$  como espaço percorrido até ele. Desse modo fica definida a função  $\gamma$  por meio de

$$\mathbf{r} = \gamma(s) . \quad (1.6)$$

Essa função é chamada representação paramétrica de  $\mathcal{C}$  com parâmetro  $s$ , o espaço percorrido.

A cada instante do tempo, corresponde um único espaço percorrido, de modo que fica definida uma função  $\varphi$  por meio de

$$s = \varphi(t) . \quad (1.7)$$

Temos para a velocidade da partícula  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = (d\mathbf{r}/ds)(ds/dt)$ , onde  $d\mathbf{r}/ds$  é o vetor **unitário tangente** à trajetória, que denotamos por  $\mathbf{u}_T$ , e  $ds/dt = \dot{s}$  a chamada **velocidade escalar** da partícula na trajetória. Com isso

$$\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{u}_T . \quad (1.8)$$

Temos para a aceleração da partícula  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = (d\dot{s}/dt)\mathbf{u}_T + \dot{s}(d\mathbf{u}_T/dt) = \ddot{s}\mathbf{u}_T + \dot{s}(d\mathbf{u}_T/ds)(ds/dt)$ , isto é,  $\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{u}_T + \dot{s}^2(d\mathbf{u}_T/ds)$ . Podemos escrever  $d\mathbf{u}_T/ds = \kappa\mathbf{u}_N$ , onde  $\mathbf{u}_N$  é o **unitário normal** à trajetória apontando para sua concavidade e  $\kappa = |d\mathbf{u}_T/ds|$  é a **curvatura da trajetória** no ponto em consideração, que é o inverso do seu **raio de curvatura**  $\rho$  nesse ponto. Portanto,

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{u}_T + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{u}_N . \quad (1.9)$$

Chamamos  $\ddot{s}$  **aceleração tangencial** à trajetória e  $\frac{\dot{s}^2}{\rho}$ , aceleração normal à trajetória, ou aceleração centrípeta no ponto em consideração.

Agora, passemos aos conceitos cinemáticos fundamentais de um sistema de  $N$  partículas e denotemos por  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , ...,  $\mathbf{r}_N = (x_N, y_N, z_N)$  as posições das partículas do sistema em um certo instante. **Configuração**, do sistema nesse instante é o vetor de  $\mathbb{R}^{3N}$  dado por  $\mathbf{r} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N)$ . Escreveremos tal vetor na forma  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ .

**Movimento do sistema** em um intervalo de tempo  $(T_i, T_f)$  é uma função  $\phi$

que associa a cada instante desse intervalo uma configuração do sistema,

$$\begin{aligned}\phi &: (T_i, T_f) \longrightarrow \mathbb{R}^{3N} \\ &: t \longmapsto \mathbf{r} .\end{aligned}\tag{1.10}$$

Denotando por  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$  os movimentos das respectivas partículas 1, 2, ...,  $N$  nesse intervalo, temos

$$\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N) .\tag{1.11}$$

Sejam  $\mathbf{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}), \mathbf{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}), \dots, \mathbf{v}_N = (v_{Nx}, v_{Ny}, v_{Nz})$  as respectivas velocidades das partículas do sistema em um certo instante. **Distribuição de velocidades** do sistema nesse instante é o vetor de  $\mathbb{R}^{3N}$  dado por  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N)$ . **Função-velocidade de um sistema** em um intervalo de tempo  $(T_i, T_f)$  é uma função  $\dot{\phi}$  que associa a cada instante desse intervalo uma distribuição de velocidades do sistema,

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &: (T_i, T_f) \longrightarrow \mathbb{R}^{3N} \\ &: t \longmapsto \mathbf{v} .\end{aligned}\tag{1.12}$$

A função-velocidade do sistema (1.12) é a derivada temporal da função-movimento do sistema (1.10) e, levando em conta (1.11),  $\dot{\phi} = (\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dots, \dot{\phi}_N)$ .

Sejam  $\mathbf{a}_1 = (a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}), \mathbf{a}_2 = (a_{2x}, a_{2y}, a_{2z}), \dots, \mathbf{a}_N = (a_{Nx}, a_{Ny}, a_{Nz})$  as respectivas acelerações das partículas do sistema em um certo instante. **Distribuição de acelerações** do sistema nesse instante é o vetor de  $\mathbb{R}^{3N}$  dado por  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N)$ . **Função-aceleração do sistema** em um intervalo de tempo  $(T_i, T_f)$  é uma função  $\ddot{\phi}$  que associa a cada instante desse intervalo uma distribuição de acelerações do sistema,

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &: (T_i, T_f) \longrightarrow \mathbb{R}^{3N} \\ &: t \longmapsto \mathbf{a} .\end{aligned}\tag{1.13}$$

A função-aceleração do sistema (1.13) é a derivada temporal da função-velocidade do sistema (1.12) e a derivada temporal segunda da função movimento do sistema

(1.10) e, Levando em conta (1.11),  $\ddot{\phi} = (\ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2, \dots, \ddot{\phi}_N)$ .

**Deslocamento de um sistema** de uma configuração para outra é a variação de sua configuração. Assim, o deslocamento da configuração  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$  para a configuração  $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_N)$  é o vetor  $\mathbf{r}' - \mathbf{r} = (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}'_N - \mathbf{r}_N)$ . Naturalmente, o deslocamento do sistema é a  $N$ -upla formada pelos deslocamentos das partículas do sistema. Como configurações do sistema são vetores de  $\mathbb{R}^{3N}$ , as variações de configurações, *i.e.*, os deslocamentos do sistema, também são vetores de  $\mathbb{R}^{3N}$ .

**Translação** de um corpo rígido é um deslocamento desse corpo no qual todas as suas partículas sofrem o mesmo deslocamento. **Rotação** de um corpo rígido em torno de um de seus pontos é um deslocamento desse corpo no qual esse ponto não se desloca. Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo é um deslocamento desse corpo no qual os pontos do eixo não se deslocam. Um teorema famoso de Euler afirma que toda rotação em torno de um ponto é uma rotação em torno de um eixo que passa pelo ponto.

Um corpo rígido está em **movimento de translação** em um certo instante se nesse instante todas as partículas do corpo têm a mesma velocidade, dita **velocidade de translação** do corpo. Um corpo rígido está em **movimento de rotação** em torno de um ponto em um certo instante se nesse instante o ponto tem velocidade nula. Um corpo rígido está em **movimento de rotação** em torno de um eixo em um certo instante se nesse instante os pontos do eixo têm velocidade nula. Pelo teorema de Euler, todo movimento de rotação em um certo instante é um movimento de rotação em torno de um eixo nesse instante. Esse eixo é chamado **eixo instantâneo de rotação** no instante em questão.

Sejam  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , ...,  $\mathbf{r}_N = (x_N, y_N, z_N)$  as respectivas posições e  $\mathbf{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ ,  $\mathbf{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$ , ...,  $\mathbf{v}_N = (v_{Nx}, v_{Ny}, v_{Nz})$  as respectivas velocidades das partículas 1, 2, ...,  $N$  em um certo instante. **Estado do sistema** nesse instante é o vetor de  $\mathbb{R}^{6N}$  dado por  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N)$ .

### 1.3 Princípios de dinâmica

As leis fundamentais da dinâmica são obtidas de observações e experimentos, e relacionam os movimentos de partículas com os corpos que os influenciam. Es-

As leis são enunciadas e divulgadas como as três leis de Newton do movimento. Aqui elas serão apresentadas na forma de 7 princípios, com a expectativa de facilitar a compreensão das três leis de Newton. Apresentaremos várias definições que são necessárias para apresentar esses princípios.

Definimos **partícula livre**, ou **isolada**, como sendo uma partícula infinitamente afastada de todos os outros corpos do universo. Definimos **referencial inercial** como sendo um referencial relativo ao qual são constantes as velocidades de alguma trinca de partículas livres não-colineares.

A exigência de que as partículas não sejam colineares merece uma explicação. Consideremos uma trinca de partículas livres colineares, e um referencial relativo ao qual as velocidades das partículas são constantes, por exemplo, todas nulas. Nesse caso, as três partículas também terão velocidades nulas relativas a um referencial que apresente movimento de rotação, relativo ao primeiro referencial, em torno de um eixo que passe pelas três partículas. Como não desejamos que dois referenciais com movimento relativo acelerado sejam ambos inerciais, incluímos na definição de referencial inercial a condição de que as partículas não sejam colineares.

**1.º) Princípio da inércia.** *Existem partículas livres e referenciais inerciais; em relação a um referencial inercial qualquer partícula livre está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.*

As estrelas fixas são bons exemplos de partículas livres. De fato, elas estão suficientemente afastadas entre si e dos demais corpos do universo. Podemos escolher três delas não-colineares (por exemplo,  $\delta$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  do Cruzeiro do Sul) e usá-las para determinar se um dado referencial é ou não inercial. Por exemplo, é fácil perceber que um referencial copernicano é inercial se usarmos estrelas fixas para verificar essa propriedade. Com efeito, um referencial copernicano é, por definição, fixo em relação às estrelas fixas. Consequentemente, quaisquer três delas não colineares escolhidas para a verificação terão velocidades nulas relativas ao referencial copernicano. Portanto, ele é inercial. De qualquer referencial terrestre as estrelas fixas são observadas em movimento circular, que é um movimento com aceleração diferente de zero; portanto, tais referenciais não são inerciais. Durante um intervalo de tempo suficientemente pequeno em relação a um

dia, as estrelas fixas são observadas praticamente em repouso ou em movimento aproximadamente retilíneo uniforme; portanto, durante um tal intervalo de tempo, os referenciais terrestres são aproximadamente inerciais.

Todos os princípios enunciados a seguir são sempre válidos apenas em referenciais inerciais. Os conceitos usados nas formulações desses princípios pressupõem o uso exclusivo de referenciais inerciais. Esses fatos estão pressupostos na exposição a seguir, mesmo se não forem explicitamente anunciados. Com essas considerações fica clara a importância dos conceitos de partícula livre e referencial inercial e a importância do princípio da inércia.

**2º) Princípio do determinismo newtoniano.** *Existem sistemas de partículas que têm cada um de seus movimentos possíveis determinado univocamente pelo estado do sistema em um instante fixo qualquer; qualquer sistema de partículas que não tenha essa propriedade é parte de um sistema que a tem.*

Um sistema com a propriedade enunciada nesse princípio é dito **isolado**. Portanto, o princípio do determinismo newtoniano afirma que cada movimento de um sistema isolado é univocamente determinado pelo seu estado em um instante fixo qualquer, ou seja, pela sua configuração e distribuição de velocidades em um instante fixo qualquer. O princípio também afirma que todo sistema que não é isolado é parte de um sistema que é isolado. No contexto desse princípio, o instante fixo em que é dado o estado do sistema que determina seu movimento é chamado **instante inicial** do movimento; o estado dado no instante inicial é chamado **estado inicial** ou **condição inicial**; as posições e velocidades do estado inicial são chamadas, respectivamente, **posições iniciais** e **velocidades iniciais**. O movimento do sistema determinado por uma dada condição inicial é chamado **movimento que satisfaz à condição inicial**.

Os movimentos que satisfazem a todas as possíveis condições iniciais são os **movimentos possíveis** do sistema. De acordo com o princípio do determinismo newtoniano, esses formam o conjunto de todos os movimentos que o sistema pode realizar e nesse conjunto há um único que satisfaz uma dada condição inicial.

Se um subsistema de um sistema isolado é isolado, dizemos que o restante do sistema **não influencia os movimentos do subsistema**. Em contrapartida, se o subsistema não é isolado, dizemos que o restante do sistema **influencia os movimentos do subsistema**; nesse caso, o restante do subsistema é chamado



**vizinhança** do subsistema.

**3º) Princípio do isolamento.** *Corpos infinitamente afastados de um sistema não influenciam os seus movimentos.*

Como exemplo da utilização desse princípio, consideramos que em boa aproximação as estrelas fixas não influenciam os movimentos dos sistemas na Terra porque estão muito afastadas dela.

Seja um sistema isolado de  $N$  partículas e seja  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N)$  um estado qualquer do sistema em um instante arbitrário  $t$ . De acordo com o princípio do determinismo newtoniano, um tal estado determina univocamente o movimento do sistema. Em particular, determina univocamente as acelerações das partículas do sistema no próprio instante  $t$ . Isso significa que para cada partícula do sistema existe uma função que determina a aceleração da partícula no instante  $t$  a partir do estado do sistema nesse mesmo instante. Dito de outro modo, existem funções  $f_1, f_2, \dots, f_N$  que determinam as acelerações das partículas do sistema,

$$\mathbf{a}_i = f_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N; t) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (1.14)$$

Para a função que determina a aceleração de uma partícula do sistema a partir do estado do sistema (e do instante considerado) usamos o nome **função aceleratriz da partícula**. Em (1.14) a função  $f_i$  é a função aceleratriz da  $i$ -ésima partícula do sistema. Notemos que foi deixada a possibilidade de a função aceleratriz depender do instante em que ela relaciona o estado do sistema com as acelerações das partículas do sistema.

Seja  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  uma função-movimento do sistema. No instante  $t$  desse movimento, as partículas têm posições  $\mathbf{r}_1 = \phi_1(t)$ ,  $\mathbf{r}_2 = \phi_2(t), \dots, \mathbf{r}_N = \phi_N(t)$ , velocidades  $\mathbf{v}_1 = \dot{\phi}_1(t)$ ,  $\mathbf{v}_2 = \dot{\phi}_2(t), \dots, \mathbf{v}_N = \dot{\phi}_N(t)$ , e acelerações  $\mathbf{a}_1 = \ddot{\phi}_1(t)$ ,  $\mathbf{a}_2 = \ddot{\phi}_2(t), \dots, \mathbf{a}_N = \ddot{\phi}_N(t)$ . Substituindo essas expressões nas  $N$  equações em (1.14) elas transformam-se em equações envolvendo apenas a variável  $t$ . Se essas equações forem verdadeiras para qualquer  $t$  (em um intervalo de tempo determinado), isto é, se elas forem identidades na variável  $t$ , o movimento  $\phi$  é um movimento possível do sistema. Caso contrário não é um movimento possível.

As equações (1.14) formam um sistema de  $N$  equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Sabemos pela teoria dessas equações que, satisfeitas certas

condições para as funções aceleratrizes  $f_1, f_2, \dots, f_N$ , existe uma, e somente uma,  $N$ -upla de funções-movimento  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  que satisfaz às  $N$  equações diferenciais e a uma dada condição inicial. Supomos que as condições sobre as funções aceleratrizes sejam satisfeitas para qualquer sistema de partículas, de modo que o conjunto de todos os movimentos possíveis do sistema seja dado pelas soluções das equações diferenciais (1.14); além disso, dentre essas soluções há uma única que satisfaz a uma dada condição inicial.

As equações (1.14) são chamadas **equações de movimento** do sistema, exatamente porque o conjunto de todas as suas soluções é o conjunto dos movimentos possíveis do sistema. **Problema fundamental da dinâmica** é o de encontrar todos os movimentos possíveis do sistema a partir do conhecimento das funções aceleratrizes, *i.e.*, é o de resolver o sistema de equações diferenciais de movimento (1.14). Naturalmente, devemos considerar como são obtidas as funções aceleratrizes, o que caracteriza o chamado **problema inverso da dinâmica**. Voltaremos a essa questão posteriormente.

Agora, vamos usar esses três primeiros princípios para abordar o conceito de par isolado. O princípio da inércia fundamenta o uso de referenciais inerciais que tornam válidos o princípio do isolamento e do determinismo newtoniano. O princípio do isolamento garante que afastando do resto do universo um par de partículas, ele fica isolado; vamos chamá-lo, simplesmente, **par isolado**. O princípio do determinismo newtoniano estabelece para as partículas do par isolado, digamos a  $i$ -ésima e a  $j$ -ésima, as equações

$$\mathbf{a}_i = f_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t) \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_j = f_{ji}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t), \quad (1.15)$$

onde  $f_{ij}$  é a função aceleratriz da  $i$ -ésima partícula na presença da  $j$ -ésima e  $f_{ji}$  a da  $j$ -ésima na presença da  $i$ -ésima. Se as partículas de um par isolado se afastarem infinitamente uma da outra, de modo que cada uma se torne isolada, elas passam a ter velocidades constantes, *i.e.*, aceleração nula, em virtude do princípio da inércia. Conseqüentemente, obtemos de (1.15)

$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \rightarrow \infty \implies f_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t) \rightarrow 0. \quad (1.16)$$

Essas propriedades das funções aceleratrizes de um par isolado, em especial o fato de que elas dependem apenas das posições e velocidades do par (e do tempo), são muito importantes, como veremos no enunciado dos próximos dois princípios.

**4º) Princípio da superposição.** *Em um sistema isolado, a aceleração de uma partícula em um certo instante é a soma vetorial das acelerações que a partícula teria se, nesse instante, cada uma das outras partículas do sistema formasse com ela um par isolado.*

Conseqüentemente, as funções aceleratrizes em (1.14) gozam da propriedade

$$f_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N; t) = \sum_{j=1(j \neq i)}^N f_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t). \quad (1.17)$$

**5º) Princípio da proporcionalidade das acelerações.** *As acelerações simultâneas,  $\mathbf{a}_i$  e  $\mathbf{a}_j$ , das partículas  $i$  e  $j$  de um par isolado, têm sempre a mesma direção e sentidos opostos e a razão entre seus módulos é uma constante, isto é,*

$$\mathbf{a}_i = -m_{ji}\mathbf{a}_j, \quad (1.18)$$

onde  $m_{ji}$  é uma constante positiva que depende apenas das partículas  $i$  e  $j$ ; além disso, para quaisquer partículas  $i, j$  e  $k$ , vale a relação  $m_{ik}/m_{jk} = m_{ij}$ .

Chamamos  $m_{ij}$  **constante inercial do par isolado** ( $i, j$ ). Como veremos posteriormente, essas constantes permitem definir o conceito de massa de uma partícula.

Os dois últimos princípios são importantes para relacionar as observações de um mesmo sistema feitas de diferentes referenciais inerciais. Para isso, devemos estabelecer como espaço, tempo e movimento se relacionam em diferentes referenciais inerciais. Em mecânica newtoniana isso é feito no princípio newtoniano do espaço e tempo absolutos e no princípio de relatividade galileana, aos quais passamos agora.

**6º) Princípio newtoniano do espaço e tempo absolutos.** *A magnitude do intervalo de tempo entre dois eventos é a mesma em relação a qualquer referencial inercial e também o é a distância entre dois eventos simultâneos.*

Sejam dois referenciais inerciais  $\mathcal{R}ef$  e  $\mathcal{R}ef'$ . Seja um evento que, em relação a  $\mathcal{R}ef$  ocorre no instante  $t_1$  e na posição  $\mathbf{r}_1$  e, em relação a  $\mathcal{R}ef'$ , no instante  $t'_1$  e na posição  $\mathbf{r}'_1$ ; seja um segundo evento que, em relação a  $\mathcal{R}ef$  ocorre no instante  $t_2$  e na posição  $\mathbf{r}_2$  e, em relação a  $\mathcal{R}ef'$ , no instante  $t'_2$ , na posição  $\mathbf{r}'_2$ . De acordo com o princípio newtoniano do espaço e tempo absolutos, devemos ter

$$|t'_1 - t'_2| = |t_1 - t_2| \quad \text{e} \quad (1.19)$$

$$|\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \quad \text{se} \quad t_1 = t_2 . \quad (1.20)$$

É possível demonstrar que as transformações de coordenadas mais gerais entre referenciais inerciais  $\mathcal{R}ef$  e  $\mathcal{R}ef'$  que satisfazem às condições (1.19,1.20) desse princípio são

$$\mathbf{r}' = G\mathbf{r} + \mathbf{u}t + \mathbf{b} \quad \text{e} \quad t' = \varepsilon t + \beta \quad , \quad (1.21)$$

na qual  $G$  é um operador linear que deixa distâncias e ângulos invariantes,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{b}$  são vetores constantes em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\beta$  é um número real qualquer e  $\varepsilon = \pm 1$ . As transformações de coordenadas (1.21) são chamadas **transformações de Galileu**. Passamos à descrição dos significados de  $G$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\varepsilon$  e  $\beta$  e dos casos particulares importantes dessas transformações de coordenadas.

O operador  $G$  mais geral é um operador de rotação, que representamos por  $R$ , seguido ou não por um operador que inverte o sentido de um dos eixos do sistema de coordenadas; esse operador é chamado operador de **inversão espacial**; como um exemplo, temos o que transforma o eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$  em um eixo  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'$  com sentido oposto de  $\mathcal{O}\mathcal{X}$ . Por simplicidade, vamos nos restringir ao caso em que  $G$  é uma rotação. A transformação com  $\varepsilon = -1$ , chamada **inversão temporal**, corresponde ao relógio de  $\mathcal{R}ef'$  marchar com o sentido oposto ao de  $\mathcal{R}ef$ . Também por simplicidade, vamos nos restringir ao caso em que  $\varepsilon = 1$ . Excluindo as inversões espaciais e temporais, as transformações de coordenadas mais gerais entre dois referenciais inerciais são dadas por

$$\mathbf{r}' = R\mathbf{r} + \mathbf{u}t + \mathbf{b} \quad \text{e} \quad t' = t + \beta \quad . \quad (1.22)$$

Essas transformações de coordenadas (1.22) são conhecidas como **transformações de Galileu restritas**. Com elas não há mudança do operador de derivação em relação ao tempo,  $d/dt' = d/dt$ , de modo que a derivada da primeira equação em (1.22) resulta em

$$\mathbf{v}' = R\mathbf{v} + \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}' = R\mathbf{a} \quad . \quad (1.23)$$

Vemos que também velocidades e acelerações podem mudar quando mudamos de referencial inercial. No caso da aceleração a mudança é apenas de direção, já que rotações não mudam o módulo de vetores.

A transformação  $t' = t + \beta$  é chamada **translação temporal** e corresponde a adiantar o relógio em  $\text{Ref}'$  de um intervalo de tempo  $\beta$  com relação ao relógio de  $\text{Ref}$ .

No caso particular em que  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , então  $\mathbf{r}' = R\mathbf{r}$ , que chamamos **rotação de referenciais**; ela relaciona as coordenadas de  $\text{Ref}'$  e  $\text{Ref}$  quando esses referenciais têm eixos com a mesma origem e um dos referenciais é obtido por uma rotação do outro em torno dessa origem. Por outro lado, se não há rotação e  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , temos  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{b}$  que é uma transformação chamada **translação espacial** ou, simplesmente, de **translação**; ela relaciona coordenadas dos referenciais  $\text{Ref}$  e  $\text{Ref}'$  quando os eixos de  $\text{Ref}$  têm a mesma direção e sentido dos respectivos eixos de  $\text{Ref}'$ , mas a origem dos eixos de  $\text{Ref}$  está deslocada de  $\mathbf{b}$  com relação à origem dos eixos de  $\text{Ref}'$ . Se não há rotação e nem translação espacial, então  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}t$  que é uma transformação chamada **empurrão**; ela relaciona coordenadas dos referenciais  $\text{Ref}$  e  $\text{Ref}'$  quando os eixos de  $\text{Ref}$  tem a mesma direção e sentido dos respectivos eixos de  $\text{Ref}'$  e  $\text{Ref}$  está em movimento de translação em relação a  $\text{Ref}'$  com velocidade  $\mathbf{u}$ . Dizemos que  $\mathbf{u}$  é a **velocidade do empurrão**. Podemos dizer que uma transformação de Galileu restrita (1.22) pode ser obtida adiantando igualmente os relógios de um referencial inercial e submetendo-o a uma rotação, uma translação e um empurrão.

Uma grandeza que não muda ao mudarmos de referencial é chamada um **invariante pela mudança de referencial**, ou um **invariante sob as transformações de coordenadas que relacionam esses referenciais**. No caso de transformações de Galileu, a grandeza é dita um **invariante sob transformações de Galileu** ou, resumidamente, um **invariante de Galileu**. Vimos em (1.23) que sob uma

transformação de Galileu restrita, qualquer aceleração sofre apenas uma rotação,  $\mathbf{a}' = R\mathbf{a}$ , de modo que

$$|\mathbf{a}'| = |\mathbf{a}|, \quad (1.24)$$

pois rotações não mudam o módulo de vetores. Portanto o módulo de qualquer aceleração é um invariante sob transformações de Galileu restritas. Na verdade, é fácil mostrar que *o módulo de qualquer aceleração é invariante sob quaisquer transformações de Galileu.*

Pelo princípio da proporcionalidade das acelerações, a qualquer par isolado de partículas  $i$  e  $j$  é associado o número positivo  $m_{ji}$  dado por  $\mathbf{a}_i = -m_{ji}\mathbf{a}_j$ . Portanto,  $|\mathbf{a}_i| = m_{ji}|\mathbf{a}_j|$ . Se a expressão correspondente em outro referencial inercial é  $|\mathbf{a}'_i| = m'_{ji}|\mathbf{a}'_j|$ , obtemos, em virtude da invariância de Galileu dos módulos das acelerações,

$$m'_{ji} = m_{ji}, \quad (1.25)$$

*i.e., as constantes de pares isolados são invariantes de Galileu.*

Finalmente, passamos ao último princípio da dinâmica clássica.

**7º) Princípio da relatividade galileana.** *O conjunto de todos os movimentos possíveis de um sistema isolado é o mesmo em todos os referenciais inerciais.*

Como discutido anteriormente, os movimentos possíveis do sistema isolado são os que satisfazem às equações de movimento (1.14)

$$\mathbf{a}_i = f_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N; t) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (1.26)$$

Conseqüentemente, o conjunto desses movimentos possíveis é determinado pelas funções aceleratrizes  $f_1, f_2, \dots, f_N$ . Desse modo, o princípio da relatividade galileana afirma que as funções aceleratrizes de um sistema isolado são as mesmas em todos os referenciais inerciais, *i.e.*, são invariantes de Galileu. Desse modo, se em um referencial inercial  $\mathcal{R}ef$  as equações de movimento do sistema isolado são as dadas por (1.26), em qualquer outro referencial inercial  $\mathcal{R}ef'$ , são dadas por

$$\mathbf{a}'_i = f_i(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_N; \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_N; t') \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (1.27)$$

Essas considerações têm conseqüências importantes nas forma das funções aceleratrizes, que serão mais convenientemente discutidas quando introduzirmos o

conceito de força. Os 7 princípios da dinâmica foram enunciados em termos de conceitos bem definidos. Dois dentre eles, o de constante inercial de um par isolado e o de função aceleratriz serão usados para definir os novos conceitos de massa inercial e de força. Com isso chegaremos à formulação newtoniana usual das leis da dinâmica, que constitui-se no assunto da próxima seção.

## 1.4 As leis de movimento newtonianas

Nesta seção obtemos as leis de movimento newtonianas a partir dos sete princípios da seção anterior. Desse modo, esperamos que o conteúdo e o significado das leis newtonianas se tornem mais claros. Começamos pela definição de massa de uma partícula.

Consideremos uma partícula bem determinada que chamamos **partícula padrão** ou partícula  $p$ . Formando um par isolado dessa partícula com qualquer outra partícula, digamos a partícula  $i$ , obtemos a constante  $m_{ip}$  determinada pelo princípio da proporcionalidade das acelerações (1.18),  $\mathbf{a}_p = -m_{ip}\mathbf{a}_i$ . Usando essa constante, associamos à partícula  $i$  a quantidade

$$m_i := m_{ip} u_p , \quad (1.28)$$

sendo  $u_p$  o símbolo indicativo da unidade em que expressamos  $m_i$  e que é determinada pela escolha da partícula padrão. Definimos **massa inercial** da partícula  $i$  como sendo a quantidade  $m_i$  (cuja medida na unidade  $u_p$  é o número  $m_{ip}$ ). Evidentemente, não é possível formar um par ordenado da partícula padrão como ela mesma. Na verdade, a partícula padrão tem, por definição, uma unidade de massa,

$$m_p := 1 u_p . \quad (1.29)$$

É importante notar que a massa inercial da partícula não depende do padrão escolhido. Com efeito, escolhendo uma outra partícula padrão  $\bar{p}$  e definindo  $\bar{m}_i = m_{i\bar{p}}u_{\bar{p}}$ , obtemos  $\bar{m}_i = m_i$  (inclusive se  $i = p$ ). Para demonstrar isso, basta usar a relação fundamental  $m_{ik}/m_{jk} = m_{ij}$ , dada no princípio da proporcionalidade das acelerações e a igualdade óbvia  $m_{ij} = 1/m_{ji}$ . De modo semelhante, obtemos a

partir da definição de massa inercial (1.28) a igualdade

$$m_{ij} = \frac{m_i}{m_j}, \quad (1.30)$$

Notemos que a massa de uma partícula é um invariante de galileu, isto é, tem o mesmo valor em qualquer referencial inercial. De fato, de acordo com (1.28) a massa de uma partícula é definida como uma constante de par isolado. Como estas constantes são invariantes de galileu, de acordo com o que foi estabelecido em (1.25), a massa de uma partícula qualquer também é. Desse modo, se denotamos por  $m_i$  a massa de uma partícula em um referencial  $\mathcal{R}_{ef}$ , e por  $m'_i$  a massa da mesma partícula em um referencial  $\mathcal{R}'_{ef}$ , então

$$m'_i = m_i. \quad (1.31)$$

Agora, usando a igualdade (1.30) no princípio da proporcionalidade das acelerações do par isolado,  $\mathbf{a}_i = -m_{ji}\mathbf{a}_j$ , ele toma a forma

$$m_i\mathbf{a}_i = -m_j\mathbf{a}_j. \quad (1.32)$$

Usando o princípio do determinismo newtoniano para as acelerações do par isolado, obtemos da igualdade (1.32)

$$m_i f_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t) = -m_j f_{ji}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t). \quad (1.33)$$

Essas igualdades sugerem a definição de um novo conceito, como faremos agora. Definimos **função-força total na partícula** como o produto da massa da partícula pela sua função aceleratriz. Denotando a função-força total na partícula  $i$  por  $\mathcal{F}_i$ , temos  $\mathcal{F}_i = m_i f_i$ , ou seja, para qualquer estado do sistema, em qualquer instante  $t$ ,

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N; t) = m_i f_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N; t). \quad (1.34)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N).$$

No caso de um par isolado de partículas, digamos  $i$  e  $j$ , definimos **função-**



**força na partícula  $i$  devida à partícula  $j$**  como sendo a função  $\mathcal{F}_{ij} = m_i f_{ij}$ , *i.e.*,

$$\mathcal{F}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t) = m_i f_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t) . \quad (1.35)$$

em qualquer estado do sistema isolado, em qualquer instante  $t$ .

Usando o conceito de função força no princípio da superposição, obtemos

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N; t) = \sum_{j=1(j \neq i)}^N \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t) . \quad (1.36)$$

É importante observar as restrições importantes que esse princípio impõe à forma da função-força.

Agora, considerando um subsistema constituído por partículas  $j_1, j_2, \dots, j_\alpha$ , definimos **função força na partícula  $i$  devida ao subsistema** como sendo a função

$$\mathcal{F}_{i(j_1, j_2, \dots, j_\alpha)} = m_i f_{ij_1} + m_i f_{ij_2} + \dots + m_i f_{ij_\alpha} . \quad (1.37)$$

Naturalmente,  $\mathcal{F}_{i(j_1, j_2, \dots, j_\alpha)}$  é uma função do estado da partícula que sofre a força. Sem dúvida, também é uma função do estado do subsistema que exerce a força, constituído pelas partículas  $i, j_1, j_2, \dots, j_\alpha$ , e do instante considerado.

Finalmente, definimos **força sobre uma partícula** como sendo o valor da função-força na partícula (no estado em consideração do sistema); nesse caso dizemos que a partícula **sofre a força** em questão. Dizemos que a força é exercida pelas *outras* partículas cujas posições ou velocidades são variáveis da função-força, isto é, pelas partículas que influenciam na aceleração da partícula que sofre a força. Seguem-se as definições secundárias. O vetor  $\mathbf{F}_i$  dado por

$$\mathbf{F}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N; t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.38)$$

é chamado **força total na partícula  $i$  exercida pelo restante do sistema**. O vetor

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t) \quad (1.39)$$

é chamado **força na partícula  $i$  exercida pela partícula  $j$** . O vetor  $\mathbf{F}_{i(j_1, j_2, \dots, j_\alpha)}$  dado por

$$\mathbf{F}_{i(j_1, j_2, \dots, j_\alpha)} = \mathcal{F}_{i(j_1, j_2, \dots, j_\alpha)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{j_1}, \mathbf{r}_{j_2}, \dots, \mathbf{r}_{j_\alpha}; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{j_1}, \mathbf{v}_{j_2}, \dots, \mathbf{v}_{j_\alpha}; t) \quad (1.40)$$

é chamado **força na partícula  $i$  exercida pelo subsistema constituído pelas partículas  $j_1, j_2, \dots, j_\alpha$** . Com essas definições chegamos ao conceito usual de força comumente usado em mecânica, mas ressaltando a importância do conceito de função-força, muitas vezes usado de modo apenas implícito.

Usando o conceito de função-força no princípio do determinismo newtoniano, obtemos

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N; t) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1.41)$$

que é uma forma equivalente de escrever esse princípio, *i.e.*, de dizer que as acelerações do sistema em cada instante são determinadas pelo seu estado nesse instante. Na forma original do princípio as acelerações são determinadas pela funções aceleratrizes; na forma (1.41), pelas funções-força. Usando o conceito de força podemos escrever o princípio do determinismo newtoniano na forma abreviada e comumente usada para enunciar a segunda lei de Newton,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (1.42)$$

Nessa equação, bem como na (1.32), é claro que a massa de uma partícula é uma medida de sua **inércia**, isto é, de sua capacidade de resistir a acelerações.

Usando o conceito de função-força para a igualdade (1.33), obtida para o par isolado constituído pelas partículas  $i$  e  $j$ , obtemos

$$\mathcal{F}_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t) = -\mathcal{F}_{ji}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j; t) \quad (1.43)$$

Com o auxílio do conceito de força, a igualdade anterior pode ser escrita na forma abreviada e comumente usada para enunciar a terceira lei de Newton,

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}. \quad (1.44)$$

Com o auxílio do conceito de força podemos escrever o princípio da superposição de funções-força (1.36) na forma abreviada e comumente usada,

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1(j \neq i)}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, N) . \quad (1.45)$$

Na seção anterior consideramos que resultados experimentais levam aos sete princípios da dinâmica que postulamos. Nesta seção vimos que eles levam às três leis de Newton. A primeira lei é essencialmente o que chamamos princípio da inércia. A segunda lei é a equação (1.42) e a terceira lei é a equação (1.44), cujos significados devem ser claros pelas as definições prévias de função-força, de massa e de força e, naturalmente, pelos conteúdos dos sete princípios anteriormente enunciados. Tanto as três leis de Newton quanto os sete princípios enunciados são válidos apenas para movimentos relativos a referenciais inerciais e em quaisquer desses referenciais essas leis e princípios são os mesmos.

Podemos perguntar se, partindo das três leis de Newton, podemos chegar aos sete princípios. Poderíamos responder que o significado das três leis do movimento enunciadas por Newton não é livre de controvérsias e pontos obscuros e que a tentativa de esclarecer esses pontos leva a postulados do tipo dos sete princípios.

As equações (1.41) dadas pela segunda lei de Newton são equivalentes às equações de movimento do sistema dadas em termos das funções aceleratrizes (1.14). Por esse motivo as equações da segunda lei também são chamadas **equações de movimento do sistema**. Os movimentos possíveis do sistema são os que satisfazem às equações de movimento (1.41) e são determinados pelas funções-força  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_N$  que aparecem em (1.41). Dentre esses movimentos há um, e somente um, que satisfaz à qualquer condição inicial dada.

Agora, consideremos algumas consequências do princípio da relatividade galileana nas formas das equações de movimento de um sistema. Esse princípio afirma que o conjunto de todos os movimentos possíveis de um sistema isolado é o mesmo em todos os referenciais inerciais. Isso significa que as funções aceleratrizes de um sistema isolado são as mesmas em todos os referenciais inerciais. Mas as funções-força são produtos das funções aceleratrizes pelas massas das partículas, e essas massas também são invariantes galileanos. Portanto, o princípio da relatividade galileana pode ser expresso pela afirmação de que as funções-força de um sistema isolado são as mesmas em todos os referenciais inerciais, isto é, as funções-força são invariantes galileanos.

Consideremos as equações de movimento de um sistema isolado em um referencial inercial  $\mathcal{R}_{ef}$ ,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N; t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) . \quad (1.46)$$

Como as massas  $m_1, m_2, \dots, m_N$  e as funções-força  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_N$  são invariantes galileanos, em qualquer outro referencial inercial  $\mathcal{R}_{ef}'$  as equações de movimento do sistema são

$$m_i \mathbf{a}'_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_N; \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_N; t') \quad (i = 1, 2, \dots, N) . \quad (1.47)$$

As invariâncias de massas e funções-força nas equações (1.46) e (1.47) impõe sobre elas importantes restrições. Por exemplo, se a única diferença entre os dois referenciais inerciais for uma translação temporal, a transformação de Galileu entre eles reduz-se às equações  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  e  $t' = t + \beta$ . Nesse caso,  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$  e  $\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i$ , de modo que as equações (1.47) no referencial  $\mathcal{R}_{ef}'$  tomam a forma

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N; t + \beta) \quad (i = 1, 2, \dots, N) . \quad (1.48)$$

Comparando essas equações com as equações (1.46) no referencial  $\mathcal{R}_{ef}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N; t + \beta) = \\ = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N; t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) . \end{aligned} \quad (1.49)$$

Como  $\beta$  é arbitrário nessa igualdade, concluímos que *as funções-forças  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_N$  de um sistema isolado não dependem explicitamente da variável tempo  $t$* . Tendo em vista esse resultado, passamos a escrever as equações de movimento (1.41) de um sistema isolado na forma

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N) \quad (i = 1, 2, \dots, N) . \quad (1.50)$$

Essas equações de movimento de um sistema isolado são invariantes por inversão temporal,  $t \mapsto -t$ , isto é  $\varepsilon = -1$  e  $\beta = 0$  na transformação temporal em (1.21)). Como consequência, se o sistema tem um movimento possível, seu reverso também é possível.

O princípio da relatividade galileana foi combinado com translações temporais para concluir que as funções-força de um sistema isolado não dependem explicitamente do tempo. Combinando o princípio com translações espaciais, concluímos que as funções-força de um sistema isolado dependem das posições das partículas do sistema apenas por meio de diferenças de posições, isto é, por meio do que chamamos posições *relativas* entre as partículas. Combinando o princípio com empurrões, concluímos que as funções-força de um sistema isolado dependem das velocidades das partículas do sistema apenas por meio de diferenças de velocidades, isto é, por meio do que chamamos velocidades *relativas* entre as partículas. Se combinado com rotações, obtemos outras restrições interessantes sobre a maneira pela qual as funções-força dependem dos estados do sistema isolado [6, 7].

A força exemplar em mecânica newtoniana é a força gravitacional. Ela é dada pela lei de Newton da atração gravitacional: força gravitacional na partícula  $i$  exercida pela partícula  $j$  é dada pela expressão

$$\mathbf{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij} , \quad (1.51)$$

na qual  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_{ij}$  é o unitário do vetor  $\mathbf{r}_{ij}$  e  $G$  é a constante chamada **constante da gravitação universal**, cujo valor é  $6,672.59(8.5) \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{kgs}^2$ . Como uma força entre partículas de um sistema isolado, ela não depende explicitamente de tempo e depende da posição das partículas. Essa força não depende das velocidades das partículas e do tempo. Ela depende apenas das posições das partículas apenas por meio da posição relativa entre elas. Além disso, não depende das velocidades das partículas. Essa força explica os movimentos planetários e está sempre presente nos corpos que observamos no dia a dia sob o nome de peso. É um resultado experimental importante que a intensidade da força gravitacional entre partículas é proporcional ao produto das massas *inerciais* das partículas. É mesmo surpreendente que a propriedade da partícula que mede sua capacidade de atrair gravitacionalmente é a mesma que mede sua capacidade de resistir a acelerações.

## 1.5 Sistemas de partículas

Nesta seção abordamos as noções fundamentais da dinâmica de sistemas de partículas, não necessariamente isolados, e alguns novos conceitos úteis no estudo desses sistemas.

Consideremos um sistema de partículas isolado  $\mathcal{S}_T$  com número total de partículas igual a  $N_T$  e um sistema de  $N$  partículas  $\mathcal{S}$  que é um subsistema do sistema total isolado ( $N < N_T$ ). Para facilitar nosso estudo numeramos as partículas do sistema total isolado de tal modo que as  $N$  primeiras sejam as partículas do sistema  $\mathcal{S}$ . Desse modo, o sistema  $\mathcal{S}$  é constituído pelas partículas  $1, 2, \dots, N$  enquanto as partículas  $N + 1, N + 2, \dots, N_T$  estão fora de  $\mathcal{S}$ .

Estamos interessados na situação nova em que o sistema  $\mathcal{S}$  não é isolado, de modo que as partículas  $N + 1, N + 2, \dots, N_T$  formam a vizinhança de  $\mathcal{S}$ , ou seja, influenciam os movimentos de  $\mathcal{S}$ .

Pela Segunda Lei de Newton, as equações de movimento que determinam as acelerações das partículas do sistema  $\mathcal{S}$  são

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{r}_{N+1}, \dots, \mathbf{r}_{N_T}; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, \mathbf{v}_{N+1}, \dots, \mathbf{v}_{N_T}) \quad (i = 1, \dots, N) . \quad (1.52)$$

Essas acelerações são dadas em função das posições e velocidades das partículas do sistema  $\mathcal{S}$  e das posições e velocidades das partículas da vizinhança de  $\mathcal{S}$ . Estamos interessados apenas na situação em que o movimento da vizinhança de  $\mathcal{S}$  é conhecido, isto é, em que são dados os movimentos das partículas das vizinhanças,  $\mathbf{r}_{N+1} = \phi_{N+1}(t), \dots, \mathbf{r}_{N_T} = \phi_{N_T}(t)$ . Usando essas funções eliminamos de (1.52) as posições e velocidades das partículas da vizinhança e obtemos

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \phi_{N+1}(t), \dots, \phi_{N_T}(t); \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, \dot{\phi}_{N+1}(t), \dots, \dot{\phi}_{N_T}(t)) \quad (i = N + 1, \dots, N_T) \quad (1.53)$$

Vemos que no lugar das posições e velocidades das partículas da vizinhança aparece a variável  $t$  que representa o tempo. Desse modo o membro direito da  $i$ -ésima dessas equações torna-se uma função do estado do sistema  $\mathcal{S}$  e do tempo. Deno-

tando por  $\mathcal{F}_i^{ef}$  essa função, temos

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_i^{ef}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t) = \\ & = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \phi_{N+1}(t) \dots, \phi_{N_T}(t); \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, \dot{\phi}_{N+1}(t) \dots, \dot{\phi}_{N_T}(t)) . \end{aligned} \quad (1.54)$$

Chamamos  $\mathcal{F}_i^{ef}$  **função-força efetiva** total na partícula  $i$ . Usando essa definição de função-força efetiva, as equações (1.53) tomam a forma

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathcal{F}_i^{ef}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t) \quad (i = 1, \dots, N) . \quad (1.55)$$

Essas são as equações de movimento para o sistema  $\mathcal{S}$ , isto é, as equações que determinam os movimentos possíveis desse sistema. A influência exercida nele pelas vizinhanças desse sistema não isolado aparece na possível dependência explícita do tempo apresentada pela função-força efetiva.

Denominamos **força efetiva** o valor da função-força efetiva em um certo estado e em um certo instante. Denotando por  $\mathbf{F}_i^{ef}$  a força efetiva na partícula  $i$  do sistema  $\mathcal{S}$ , a equação anterior toma a forma abreviada

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{ef} \quad (i = 1, \dots, N) . \quad (1.56)$$

O normal é não indicarmos explicitamente que a função-força ou a força são efetivas, ficando implícito pelo contexto; assim, escrevemos no lugar de  $\mathcal{F}_i^{ef}$  e  $\mathbf{F}_i^{ef}$ , simplesmente  $\mathcal{F}_i$  e  $\mathbf{F}_i$ .

Em um sistema  $\mathcal{S}$  não isolado, há forças exercidas sobre suas partícula por partículas que estão no próprio sistema, chamadas **forças internas** sobre  $\mathcal{S}$ , e forças exercidas por partículas que estão na vizinhança de  $\mathcal{S}$ , chamadas **forças externas** sobre  $\mathcal{S}$ . A soma de todas as forças internas sobre a  $i$ -ésima partícula é chamada **força interna total** sobre ela e é denotada por  $\mathbf{F}_i^{in}$ , e a sua função-força correspondente, **função-força interna total**, denotada por  $\mathcal{F}_i^{in}$ . Pelo princípio da superposição,

$$\mathbf{F}_i^{in} = \sum_{j=1(j \neq i)}^N \mathbf{F}_{ij} \quad (1.57)$$

ou, em termos das funções-força,

$$\mathcal{F}_i^{in}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) = \sum_{j=1(j \neq i)}^N \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}) . \quad (1.58)$$

A soma de todas as forças externas sobre a  $i$ -ésima partícula é chamada **força externa total** sobre ela e é denotada por  $\mathbf{F}_i^{ex}$ . A sua função-força correspondente é chamada **função-força externa total** sobre a partícula e é denotada por  $\mathcal{F}_i^{ex}$ . Temos

$$\mathbf{F}_i^{ex} = \mathcal{F}_i^{ex}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i; t) . \quad (1.59)$$

A força total sobre a partícula  $i$  do sistema  $\mathcal{S}$  é a soma da força interna total com a externa total sobre ela,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{F}_i^{in} , \quad (1.60)$$

ou, em termos das funções-forças,

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t) = \sum_{j=1(j \neq i)}^N \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}) + \mathcal{F}_i^{ex}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i; t) . \quad (1.61)$$

Usando essa decomposição em forças internas e externas as equações de movimento (1.56) tomam a forma

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{ex} + \mathbf{F}_i^{in} \quad (i = 1, 2, \dots, N) , \quad (1.62)$$

ou seja,

$$m_i \mathbf{a}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}) + \mathcal{F}_i^{ex}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i; t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) . \quad (1.63)$$

Se o sistema  $\mathcal{S}$  é constituído por uma única partícula, ( $N = 1$ ), não há forças internas sobre ela e (1.63) toma a forma

$$m \mathbf{a} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; t) , \quad (1.64)$$



na qual o subíndice desnecessário 1 foi abolido.

Em um sistema  $\mathcal{S}$  com um número  $N$  de partículas maior do que 1, a soma de todas as forças internas sobre as partículas do sistema é zero, em virtude da Terceira Lei de Newton,

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{in} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1(j \neq i)}^N \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0} . \quad (1.65)$$

Para explorar essa propriedade, vamos somar todas as equações de movimento do sistema, conforme dadas em (1.62); obtemos uma expressão na qual aparecem apenas forças externas, pois as forças internas somam zero,

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ex} . \quad (1.66)$$

Essa equação sugere algumas definições. Definimos **massa total do sistema  $\mathcal{S}$** , ou, simplesmente, **massa do sistema  $\mathcal{S}$** , como sendo a soma das massas de suas partículas. Se denotarmos a massa total por  $M$ ,

$$M := \sum_{i=1}^N m_i . \quad (1.67)$$

Definimos **centro de massa** do sistema  $\mathcal{S}$  como sendo o ponto cujo vetor-posição é

$$\mathbf{R} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i . \quad (1.68)$$

A posição do centro de massa do sistema é a *média ponderada* das posições das partículas do sistema, na qual os ponderadores são as massas respectivas dessas partículas. Definimos também **velocidade do centro de massa** do sistema e **aceleração do centro de massa** do sistema como sendo os respectivos vetores

$$\mathbf{V} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad \text{e} \quad \mathbf{A} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i . \quad (1.69)$$

Definimos **força externa total sobre o sistema  $\mathcal{S}$**  como sendo a soma de todas

as forças externas sobre as suas partículas, e a correspondente função-força é chamada **função-força externa total**. Representando a força externa total por  $\mathbf{F}^{ex}$  e a correspondente função-força por  $\mathcal{F}^{ex}$ , obtemos

$$\mathbf{F}^{ex} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ex} \quad (1.70)$$

e

$$\mathcal{F}^{ex}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t) = \sum_{i=1}^N \mathcal{F}_i^{ex}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i; t) . \quad (1.71)$$

Usando as definições anteriores, a equação (1.66) assume a forma

$$M \mathbf{A} = \mathbf{F}^{ex} . \quad (1.72)$$

A comparação dessa equação com a equação (1.64) nos leva ao **teorema do movimento do centro de massa**: *o centro de massa do sistema move-se como se fosse uma partícula de massa igual à massa total do sistema e sujeita a uma força total igual à força externa total sobre o sistema.*

A força  $\mathbf{F}^{ex}$  em (1.72) é dada, em princípio, pela função-força (1.71),

$$\mathbf{F}^{ex} = \mathcal{F}^{ex}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t) . \quad (1.73)$$

No caso em que o sistema é um corpo rígido em movimento de translação, em cada instante, todas as velocidades das partículas são iguais e, conseqüentemente, são iguais à velocidade  $\mathbf{V}$  do centro de massa, de acordo com a definição em (1.69). Portanto,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \dots = \mathbf{v}_N = \mathbf{V}$ . Como  $\mathbf{v}_i = \mathbf{V}$ , a derivada em relação ao tempo de  $\mathbf{r}_i - \mathbf{R}$  é nula, donde  $\mathbf{r}_i = \mathbf{s}_i + \mathbf{R}$ , sendo  $\mathbf{s}_i$  vetores constantes ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Portanto, as únicas variáveis que realmente determinam o valor de  $\mathbf{F}^{ex}$  em (1.73) são a posição  $\mathbf{R}$  do centro de massa, sua velocidade  $\mathbf{V}$  e o tempo  $t$ . Com isso, reescrevemos (1.73) na forma  $\mathbf{F}^{ex} = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{V}; t)$ . Usando essa expressão em (1.72), obtemos

$$M \mathbf{A} = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{V}; t) . \quad (1.74)$$

Comparando essa equação com (1.64), concluímos que a equação de movimento de um corpo rígido em translação é idêntica à de uma única partícula. Essa propriedade justifica em diversos problemas, como os de blocos em planos inclinados, considerar corpos rígidos como se fossem partículas.

As três leis de Newton, que formulamos para partículas, tem versões aplicáveis a sistemas, isto é, a corpos. A primeira afirma que o centro de massa de um corpo isolado permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. A segunda é dada pela própria equação (1.72). A terceira afirma que, se um corpo exerce uma força total sobre outro, esse exerce sobre o primeiro uma força de mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto. Essas versões aplicáveis a corpos podem ser obtidas diretamente das três leis originais para partículas e da equação (1.72). Em contrapartida, essas versões aplicáveis a corpos se reduzem às três leis usuais para partículas tomando o limite em que as dimensões dos corpos considerados tendem a zero.

## 1.6 Forças vinculares

Agora, passamos ao conceito importantíssimo de força vincular. As forças de contato entre corpos sólidos, como quaisquer forças, são funções das posições e velocidades das partículas desses corpos. É comum tais forças não dependerem das velocidades, mas apenas das posições das partículas. Mais especificamente, serem funções apenas da deformação sofrida pelo corpo, isto é, da variação da configuração do corpo a partir de uma certa configuração de equilíbrio. Em geral, as funções que relacionam as deformações com as forças são extremamente complicadas ou até mesmo totalmente desconhecidas. Uma exceção bem conhecida é a função simples dada pela lei de Hooke, que dá a força exercida por uma mola a partir de sua deformação. Quando corpos apresentam uma rigidez muito grande, a força de contato entre eles é normalmente complicada e desconhecida, de modo que é preferível considerar os corpos como perfeitamente rígidos. Nesse caso a força de contato não pode mais ser função das deformações dos corpos, pois esses são indeformáveis por hipótese. Essas forças podem ter qualquer valor para uma dada configuração dos corpos, tantos valores muito pequenos quando eles estão quase perdendo contato, como valores ilimitadamente grandes para garantir

a rigidez dos corpos. Essas forças são então funções *desconhecidas* do tempo que dependem do particular movimento dos corpos em contato; um exemplo é dado pela força normal entre um bloco perfeitamente rígido e uma superfície lisa perfeitamente rígida sobre a qual ele desliza. No limite idealizado de rigidez perfeita dos corpos, a força de contato entre eles é chamada **força vincular**.

O nome força vincular se deve ao fato de que as forças vinculares impõem restrições, ou **vínculos**, aos movimentos dos corpos, quais sejam, eles não podem realizar movimentos em que um corpo penetre na região do espaço ocupado por outro. Esses vínculos são informações extras sobre os movimentos dos corpos. Essas informações e as equações de movimento, juntas, devem ser capazes de determinar os movimentos possíveis dos corpos e, para cada um desses movimentos, as forças vinculares em ação. Em um contexto em que aparecem forças vinculares, as forças usuais, dadas como funções-força conhecidas do estado do sistema e do tempo, são chamadas **forças dadas**.

Consideremos um sistema de  $N$  partículas sobre as quais agem forças vinculares, sendo  $\mathbf{N}_i$  a força vincular total sobre a partícula  $i$  do sistema ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Seja  $\mathbf{F}_i$  a soma de todas as forças dadas sobre a partícula  $i$  do sistema, isto é, a força dada total sobre a partícula  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Com essa separação das forças em vinculares e dadas, as equações de movimento (1.56) do sistema toma a forma

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i \quad (i = 1, \dots, N) . \quad (1.75)$$

A força dada  $\mathbf{F}_i$  é determinada por sua função-força  $\mathcal{F}_i$ , isto é, por uma expressão dada  $\mathbf{F}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t)$ . Por outro lado, cada força vincular  $\mathbf{N}_i$  é uma função  $\mathcal{N}_i$  do tempo que é desconhecida e que desejamos determinar,  $\mathbf{N}_i = \mathcal{N}_i(t)$ . Escrevendo (1.75) em forma explícita,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t) + \mathcal{N}_i(t) \quad (i = 1, \dots, N) . \quad (1.76)$$

podemos dizer que desejamos usar essas  $N$  equações para determinar as funções-movimento das  $N$  partículas,  $\phi_1, \dots, \phi_N$ , que dão as posições  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  em função do tempo, e as funções  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_N$ , que dão as forças vinculares  $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_N$  em função do tempo. Devemos esperar que as  $N$  equações em (1.76) não sejam

suficientes para isso. A informação suplementar necessária é fornecida pelos vínculos associados às forças vinculares. Esses vínculos restringem os movimentos possíveis e caracterizam as forças vinculares do problema. A suposição fundamental é que os vínculos, juntamente com as equações de movimento (1.76), determinam os movimentos possíveis e as forças vinculares em cada um desses movimentos. Talvez o exemplo interessante mais simples de sistema com forças de vínculo seja a normal exercida por um plano inclinado sobre um bloco que desliza sem atrito sobre ele quando ambos são considerados como perfeitamente rígidos. Considerando o bloco como o sistema, a força dada sobre ele é o peso, a força vincular é a normal e tanto o movimento do bloco quanto a normal podem ser obtidas das equações de movimento do bloco e do vínculo de que o bloco tem movimento restrito ao plano inclinado.

## 1.7 Constantes de movimento

Nesta seção apresentamos os conceitos de momento linear, de momento angular, de energia e as condições em que essas quantidades se conservam.

**Momento linear de uma partícula** é o produto de sua massa pela sua velocidade. **Momento linear  $\mathbf{P}$  de um sistema de partículas** é a soma dos momentos lineares de suas partículas,

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i . \quad (1.77)$$

Usando esse conceito de momento linear, a equação (1.72) assume a forma

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{ex} . \quad (1.78)$$

Esse resultado é o **teorema da força e momento linear**. Como consequência imediata, obtemos o **teorema da conservação do momento linear**: *Se a força externa total sobre um sistema é nula, seu momento linear é conservado.*

$$\mathbf{F}^{ex} = \mathbf{0} \implies \mathbf{P} \text{ é constante.} \quad (1.79)$$

Naturalmente, o momento linear de qualquer sistema isolado é constante. Dado o caráter vetorial do momento linear, cada componente é conservada independentemente das outras.

Passemos agora aos conceitos importantes na definição de momento angular. Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos do espaço. **Posição de  $P$  relativa a  $Q$**  é vetor  $\mathbf{r}_{PQ}$  que vai de  $Q$  até  $P$ . **Velocidade de  $P$  relativa a  $Q$**  é o vetor  $\mathbf{v}_{PQ} = d\mathbf{r}_{PQ}/dt$ . **Aceleração de  $P$  relativa a  $Q$**  é o vetor  $\mathbf{a}_{PQ} = d\mathbf{v}_{PQ}/dt$ . Se  $\mathbf{r}_P$  e  $\mathbf{r}_Q$  são os vetores-posição respectivos de  $P$  e  $Q$ , então  $\mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q$ ,  $\mathbf{v}_{PQ} = \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q$  e  $\mathbf{a}_{PQ} = \mathbf{a}_P - \mathbf{a}_Q$ . Naturalmente, se  $P$  é o ponto onde se encontra alguma partícula, dizemos que  $\mathbf{r}_{PQ}$ ,  $\mathbf{v}_{PQ}$  e  $\mathbf{a}_{PQ}$  são a **posição, a velocidade e a aceleração da partícula relativas ao ponto  $Q$** , respectivamente. Se  $\mathcal{OXYZ}$  é o sistema de eixos em relação ao qual temos as posições  $\mathbf{r}_P$  e  $\mathbf{r}_Q$  dos respectivos pontos  $P$  e  $Q$ , o vetor  $\mathbf{r}_{PQ}$  é a posição de  $P$  relativa ao sistema de eixos  $QX'Y'Z'$  obtido submetendo o sistema  $\mathcal{OXYZ}$  à translação  $\mathbf{r}_Q$ . Portanto  $QX'Y'Z'$  move-se com  $Q$  mantendo seus eixos paralelos ao respectivos eixos de  $\mathcal{OXYZ}$ .

Seja uma partícula de massa  $m$  e velocidade  $\mathbf{v}$ . **Momento angular da partícula relativo a um ponto  $Q$**  é o produto vetorial  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_Q)$ . Seja  $\mathbf{F}$  uma força sobre uma partícula de posição  $\mathbf{r}$ . Definimos **torque de  $\mathbf{F}$  relativo a um ponto  $Q$**  como sendo o produto vetorial da posição da partícula relativa a  $Q$  pela força  $\mathbf{F}$ , isto é,  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}$ . O ponto  $Q$  em relação ao qual calculamos momentos angulares e torques é chamado **ponto base**. **Momento angular  $L_Q$  de um sistema de partículas** relativo a um dado ponto base  $Q$  é a soma dos momentos angulares de suas partículas relativos a esse ponto base,

$$\mathbf{L}_Q = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times m_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_Q) . \quad (1.80)$$

Supondo que o ponto  $Q$  tem aceleração nula no referencial inercial ou que o ponto  $Q$  é o centro de massa, e usando a Segunda Lei de Newton, obtemos

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_i^{ex} + \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_i^{in} . \quad (1.81)$$

O primeiro somatório no membro direito dessa equação é definido como sendo o

torque externo total  $\boldsymbol{\tau}_Q^{ex}$  sobre o sistema de partículas relativo ao ponto  $Q$ ,

$$\boldsymbol{\tau}_Q^{ex} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}_i^{ex} . \quad (1.82)$$

Usando a terceira lei de Newton e a hipótese de que as forças de interação entre qualquer par de partículas têm a direção da reta que passa por elas, obtemos que a soma dos torques das forças internas é nula. Essa soma é o segundo somatório no membro direito de (1.81). Portanto,

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \boldsymbol{\tau}_Q^{ex} . \quad (1.83)$$

*i.e.*, a taxa instantânea de variação do momento angular de um sistema de partículas, relativo a um ponto de aceleração nula ou ao centro de massa do sistema, é igual ao torque externo total sobre o sistema relativo ao respectivo ponto de aceleração nula ou centro de massa. Esse resultado é o **teorema do torque e momento angular**. Como consequência imediata dessa igualdade, temos o **teorema da conservação do momento angular**: *Se é nulo o torque externo total sobre um sistema, relativo a um ponto de aceleração nula ou ao centro de massa do sistema, seu momento angular relativo ao respectivo ponto de aceleração nula ou centro de massa, é conservado,*

$$\boldsymbol{\tau}_Q^{ex} = \mathbf{0} \implies \mathbf{L}_Q \text{ é constante.} \quad (1.84)$$

Naturalmente, o momento angular de qualquer sistema isolado é constante e cada componente do momento angular se conserva independentemente das outras.

Uma aplicação simples dos teoremas anteriores é a demonstração de que as forças de tensão nas extremidades de uma barra rígida de massa desprezível são de mesmo módulo, mesma direção, sentidos opostos e com direção ao longo da barra. Com efeito, denotando essas forças por  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$ , e aplicando à barra o teorema (1.72), obtemos  $M \mathbf{A} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + M\mathbf{g}$ , onde  $M$  é a massa da barra. Como a massa é desprezível, podemos tomar  $M = 0$  e obter  $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{R}_1$ , isto é, as reações têm mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos. Denotando por  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  os respectivos pontos de aplicação de  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$  relativos ao centro de massa,

e aplicando o teorema (1.83) com  $Q$  no centro de massa, obtemos  $d\mathbf{L}_Q/dt = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{R}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{R}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{R}_1$ . Como a massa é desprezível, podemos tomar  $\mathbf{L}_Q = \mathbf{0}$  e obter  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{R}_1 = \mathbf{0}$ , isto é, as reações estão ao longo da barra.

Agora, seja  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N)$  a distribuição de velocidades em um instante arbitrário  $t$  de um movimento possível de um sistema de  $N$  partículas. Pela Segunda Lei de Newton

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1.85)$$

Seja  $(d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2, \dots, d\mathbf{r}_N)$  o deslocamento do sistema em um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$  a partir do instante arbitrário  $t$ ; naturalmente,  $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Multiplicando escalarmente pelo deslocamento infinitesimal  $d\mathbf{r}_i$  ambos os membros de (1.85), obtemos

$$d \left[ \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right] = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t) \cdot d\mathbf{r}_i \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1.86)$$

Adicionando as equações (1.86) membro a membro, temos

$$d \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right] = \sum_{i=1}^N \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t) \cdot d\mathbf{r}_i. \quad (1.87)$$

Vamos supor que o membro direito dessa equação não dependa das velocidades,

$$d \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right] = \sum_{i=1}^N \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \cdot d\mathbf{r}_i, \quad (1.88)$$

e que seja um diferencial exato, isto é, que exista uma função  $U$  da configuração do sistema que satisfaça a igualdade

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \cdot d\mathbf{r}_i = -dU(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (1.89)$$

na qual o sinal negativo é apenas por questão de conveniência. Notemos que  $U$  é



definida a menos de uma constante aditiva. Usando (1.89) em (1.88), obtemos

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \text{constante}, \quad (1.90)$$

isto é, a quantidade no membro esquerdo dessa equação é uma constante durante movimentos possíveis do sistema de partículas. Essa quantidade é chamada **energia mecânica do sistema**, que representamos por  $E$ ,

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (1.91)$$

Seja um deslocamento infinitesimal  $d\mathbf{r}$  de uma partícula sob a ação de uma força  $\mathbf{F}$ . **Trabalho infinitesimal  $\vec{d}W$  da força nesse deslocamento** é, por definição, o produto escalar da força pelo deslocamento; dizemos que o trabalho é realizado pela força sobre a partícula. O membro direito de (1.87) é o trabalho infinitesimal realizado sobre a partícula  $i$  pela força total que age sobre ela. O membro direito de (1.87), ou de (1.88), é chamado **trabalho infinitesimal realizado sobre o sistema** pelas forças que agem sobre ele no deslocamento  $(d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2, \dots, d\mathbf{r}_N)$ . Representamos esse trabalho por  $\vec{d}W$ .

Se o trabalho infinitesimal realizado sobre o sistema é um diferencial exato, como afirmado em (1.89),  $\vec{d}W = -dU$ , dizemos que o sistema de partículas é um **sistema conservativo** e a função  $U$  é chamada uma **energia potencial do sistema de partículas**. De acordo com uma observação anterior, a soma de uma energia potencial do sistema com uma constante é também uma energia potencial do sistema. Escrevendo (1.89) na forma  $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -dU$ , obtemos

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad (1.92)$$

*i.e.*, a força na partícula  $i$  é o negativo do gradiente da energia potencial relativo à posição a partícula  $i$ . Dadas as forças do sistema conservativo, uma energia

potencial do sistema é

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i, \quad (1.93)$$

onde  $\mathbf{r}_p$  é uma configuração fixa arbitrária do sistema chamada **configuração padrão** da energia potencial  $U$ .

A integral de um trabalho infinitesimal nos deslocamentos sucessivos de um movimento é chamada **trabalho** da força nesse movimento. A expressão (1.93) mostra que *uma energia potencial de um sistema conservativo em uma certa configuração é dada pelo trabalho que as forças do sistema realizariam se o sistema fosse dessa configuração até a configuração padrão da energia potencial.*

**Energia cinética de uma partícula** é o semiproduto de sua massa pelo quadrado de sua velocidade. **Energia cinética de um sistema de partículas** é a soma das energias cinéticas de suas partículas. Vemos que a energia mecânica do sistema definida em (1.91) é a soma da energia cinética do sistema com sua energia potencial. Obviamente, a energia mecânica de um sistema conservativo é uma função do estado do sistema e, de acordo com (1.90), tem um valor constante para cada movimento possível do sistema.

Um sistema de  $N$  partículas em interação puramente gravitacional é um sistema conservativo e tem uma energia potencial dada por

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^N \frac{-Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (1.94)$$

Se uma força sobre uma partícula pode ser escrita como um gradiente de uma função relativo à posição da partícula, dizemos que a força é uma **força conservativa**. Naturalmente, se todas as forças que agem sobre um sistema de partículas são conservativas, o sistema é conservativo. Em um sistema conservativo isolado conservam-se a energia, as três componentes do momento linear e as três do angular. Essas quantidades são conhecidas como as **sete constantes universais do movimento**.

## Capítulo 2

### Idealizações e suas limitações

As idealizações de situações reais substituem os fenômenos reais, normalmente complicados e de caracterização imprecisa, por modelos simplificados. Tais idealizações muito contribuem para que se torne acessível a verificação de hipóteses através dos experimentos, coletas de dados e finalmente para a execução dos cálculos, cujos resultados abonam ou descartam as hipóteses quando comparados com a realidade do fenômeno na natureza. Estas mesmas idealizações, que tanto colaboram, quando não bem dosadas ou bem fundamentadas podem também comprometer os resultados e nos expor a conclusões completamente absurdas em uma teoria que há séculos vem se comportando como um suporte sólido para a compreensão de fenômenos naturais, a nível macroscópico, que é a mecânica newtoniana. Certamente, as outras teorias estão sujeitas ao mesmo perigo, mas nosso trabalho se limita à mecânica clássica newtoniana. Neste capítulo faremos uma descrição simples das idealizações mais notáveis usadas nessa teoria, seguindo seu resumo exposto no capítulo anterior. Em seguida veremos alguns exemplos de resultados inesperados devidos a essas idealizações. Daremos uma breve descrição do exemplo dos informalmente chamados “invasores do espaço”. Veremos a importância das condições de Cauchy na mecânica newtoniana e de exemplos em que elas são violadas, em particular no domo de Norton.

## 2.1 Idealizações em mecânica newtoniana

Seguindo o roteiro do formalismo newtoniano exposto no capítulo 1, começamos pelos conceitos pressupostos pela mecânica clássica. Pressupomos que o espaço da mecânica newtoniana é o espaço da geometria euclidiana usual e que os postulados e teoremas dessa geometria são verificáveis experimentalmente por meio de réguas. Essa já é uma idealização extrema, pois todas as nossas réguas (assim entendemos qualquer processo de se medir distância) são de precisão limitada. Além disso, nossas medições não garantem que a geometria do espaço seja diferente se considerarmos porções muito grandes do universo ou regiões muito pequenas, muito menores do que as dimensões atômicas. Com isso, é uma idealização radical supor que o espaço inteiro do universo obedeça à geometria euclidiana e que podemos fazer medições de distâncias em qualquer ponto do espaço. É particularmente perigoso tomarmos o limite em que distâncias vão a zero. Segue-se que são igualmente idealizados os conceitos de sistema de eixos coordenados e de pontos localizados relativamente a esses eixos por meio de vetores-posição. Também os relógios disponíveis são de uso e precisão limitados nas situações reais, de modo que o conceito de instante de tempo e a possibilidade de medi-lo em qualquer ponto do espaço se revelam como altamente idealizados. De qualquer modo, sem essas suposições não é possível sequer iniciar o estudo da mecânica. Qualquer refinamento posterior não invalida usar esses conceitos pelo menos em domínios restritos de fenômenos.

Em seguida temos os conceitos de partícula e de sistema qualquer como sendo um conjunto de partículas. O conceito de partícula como um corpo de dimensões desprezíveis em um dado problema não deve causar dificuldades, pela ressalva de que a dimensão desprezível significa que não está além da precisão dos particulares instrumentos usados em um certo problema. Mas a identificação entre partícula e ponto que é de fato feita no formalismo é uma idealização radical. No conceito de sistema como um conjunto de partes tão pequenas que podem ser consideradas como partículas, também há um perigo, pois se for necessário considerar as partes com dimensões subatômicas, elas não são descritas pela mecânica newtoniana, mas pela mecânica quântica, como é bem sabido.

O conceito de corpo rígido também é aproximado, pois nossas medições das

distâncias entre seus pontos são feitas com precisão limitada para garantir que sejam exatamente invariáveis. Além disso, todos os corpos materiais são em alguma medida deformáveis. Daí, o conceito de corpo absolutamente rígido usado no formalismo é altamente idealizado. Em igual medida são idealizados os conceitos de referencial, que usa os conceitos de corpo rígido, de réguas e de relógios, bem como os conceitos relativos a referenciais, como posição, velocidade e aceleração de uma partícula.

Obviamente, o conceito de partícula livre como uma partícula infinitamente afastada dos outros corpos do universo é uma idealização extrema, pois afastamentos observáveis podem ser relativamente enormes mas jamais infinitos. Além disso, uma partícula infinitamente afastada de todos os corpos não seria observável. Igualmente idealizado é o conceito de referencial inercial, definido a partir do conceito de partícula livre.

Os sete princípios da mecânica apresentados no capítulo 1 usam as idealizações que acabamos de discutir e, portanto, têm características idealizadas. O princípio da inércia pressupõe os conceitos idealizados de referencial inercial e partícula livre. O princípio do determinismo newtoniano usa vários conceitos idealizados que já descrevemos e acrescenta o de sistema isolado que, idealmente, não deveria sofrer nenhuma influência do restante do universo. De modo semelhante podem ser apreciados o princípio do isolamento, o da superposição e o da proporcionalidade das acelerações. É evidente que no princípio newtoniano do espaço e tempo absolutos e no princípio da relatividade galileana são usadas idealizações, mas tocam conceitos e fenômenos que ultrapassam o domínio da mecânica newtoniana e qualquer comentário sobre eles também ultrapassa nossos objetivos. É evidente que as leis de Newton, como decorrentes dos princípios citados também são afirmativas idealizadas. O mesmo podemos dizer das consequências das leis de Newton, como os teoremas de conservação.

Para nosso estudo é de particular importância a idealização de forças de vínculo. Introduzimos o conceito de força de vínculo de contato entre sólidos baseada na idealização extrema de que eles têm rigidez infinita. É natural esperar que tal conceito leve em um momento ou outro a dificuldades, e o mesmo se deve dizer do conceito de força de atrito, que depende da força vincular de contato.

Todas essas idealizações são bem conhecidas e reconhecidas e são inevitáveis.

Sem elas não é possível desenvolver os formalismos e projetar os experimentos. O que não é claro é que os perigos decorrentes dessas idealizações sejam apenas resultados imprecisos ou em desacordo com situações reais, mas que podem ser melhorados para obter melhor precisão ou acordo com a realidade. Pode ocorrer que as idealizações sejam mais perigosas do que isso. Elas poderiam causar inconsistências dentro da própria teoria, com resultados provenientes da teoria violando seus próprios postulados.

## 2.2 Invasores do espaço e determinismo newtoniano

O problema newtoniano mais importante é o de um sistema de partículas sujeitas somente às forças gravitacionais mútuas. Se temos um sistema de  $N$  partículas de massas  $m_1, \dots, m_N$ , e vetores-posição respectivos  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ , os movimentos possíveis do sistema são determinados pelas equações

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^N G \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (i = 1, \dots, N), \quad (2.1)$$

Dizemos que ocorre colisão entre um par de partículas  $i$  e  $j$  se, em algum instante,  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$ , isto é,  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = 0$ . Nesse caso, há força e aceleração infinitas nas equações de movimento (2.1), de modo que é razoável dizer que as equações perdem sua validade e que podemos esperar movimentos estranhos. No entanto, Poincaré e Painlevé levantaram a questão de, na ausência de colisões, poder ocorrer algo muito estranho: uma das partículas do sistema ser lançada no infinito em um tempo finito [9]. Em linguagem muito simples, isso significa que, dado o sistema de  $N$  partículas, após um intervalo de tempo finito, uma partícula pode desaparecer. Mas as equações de movimento (2.1) são invariantes por inversão temporal,  $t \mapsto -t$ . Portanto, se um movimento é possível, o reverso também é. No caso em consideração, se uma partícula pode ser lançada no infinito em tempo finito, isso significa que uma partícula pode aparecer no sistema vinda do infinito em um tempo finito. Essas partículas que aparecem do infinito são chamadas informalmente “invasores do espaço” [10]. Essas partículas violariam o princípio do determinismo newtoniano, pois antes delas aparecerem não havia ne-

nhuma afirmação sobre suas posições e velocidades que permitissem determinar seus movimentos [10].

Painlevé demonstrou que para  $N = 3$ , isto é, para o problema de três corpos, não existem soluções sem colisões que permitam invasores do espaço. Além disso, ele levantou a questão se haveria esse tipo de solução para sistemas com mais de três corpos. Muito estudo foi dedicado a esse problema [9] até que, em 1988, Zhihong Xia [11] demonstrou em sua tese de doutorado que em sistemas com cinco ou mais partículas existem soluções com invasores do espaço [12].

A existência das soluções com invasores do espaço baseia-se na lei de gravitação entre partículas no sentido idealizado da palavra, isto é, não apenas corpúsculos de dimensões aproximadamente nulas, mas extritamente nulas, isto é, massas concentradas em pontos geométricos. Podemos supor que a violação do determinismo newtoniano nas soluções com invasores do espaço se deva à idealização excessiva contida na formulação usual da lei de gravitação universal. Não podemos aprofundar nesse problema por ultrapassar de longe os objetivos de nosso estudo e remetemos o leitor interessado em mais detalhes às referências citadas.

## 2.3 Teorema de Cauchy e determinismo newtoniano

Vimos no capítulo 1 que o princípio do determinismo newtoniano implica nas equações de movimento para um sistema de partículas,

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathcal{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N; t) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (2.2)$$

As soluções dessas equações dão os movimentos possíveis do sistema e, pelo princípio do determinismo newtoniano, existe uma e somente uma solução que satisfaz uma condição inicial dada em um instante arbitrário  $t_0$ . Se a condição inicial é que no instante  $t_0$  o sistema tenha configuração  $(\mathbf{r}_{10}, \dots, \mathbf{r}_{N0})$  e distribuição de velocidades  $(\mathbf{v}_{10}, \dots, \mathbf{v}_{N0})$ , o princípio exige que exista uma e somente uma solução, dada por  $\mathbf{r}_1 = \phi_1(t), \dots, \mathbf{r}_N = \phi_N(t)$ , tal que

$$\mathbf{r}_{10} = \phi_1(t_0), \dots, \mathbf{r}_{N0} = \phi_N(t_0) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{10} = \dot{\phi}_1(t_0), \dots, \mathbf{v}_{N0} = \dot{\phi}_N(t_0). \quad (2.3)$$

É comum escrever essa condição inicial na forma

$$\mathbf{r}_1|_{t=t_0} = \mathbf{r}_{10}, \dots, \mathbf{r}_N|_{t=t_0} = \mathbf{r}_{N0} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_1|_{t=t_0} = \mathbf{v}_{10}, \dots, \mathbf{v}_N|_{t=t_0} = \mathbf{v}_{N0}. \quad (2.4)$$

Mas é bem conhecido [5] (tomo I, pág. 230) que nem todo sistema de equações diferenciais satisfaz essa propriedade e quais são as condições para que satisfaça. As condições são dadas pelo **teorema de Cauchy** [13] (pág. 104): as funções  $\mathcal{F}_{ix}$ ,  $\mathcal{F}_{iy}$  e  $\mathcal{F}_{iz}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) que definem as equações diferenciais (2.2) devem ter derivadas contínuas em relação a todas as suas variáveis nas vizinhanças do ponto  $(\mathbf{r}_{10}, \dots, \mathbf{r}_{N0}; \mathbf{v}_{10}, \dots, \mathbf{v}_{N0}; t_0)$ .

Se as funções  $\mathcal{F}_{ix}$ ,  $\mathcal{F}_{iy}$  e  $\mathcal{F}_{iz}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) não satisfazem as condições do teorema de Cauchy, as equações diferenciais (2.2) podem violar o princípio do determinismo newtoniano, não exibindo nenhuma solução ou exibindo mais de uma para uma dada condição inicial (2.4). Um exemplo simples e espetacular de violação é dado por Painlevé [5] (tomo I, pág. 230). Nesse exemplo, supomos que uma partícula de massa  $m$  seja repelida da origem por uma força resultante proporcional à raiz cúbica da distância da partícula à origem. Nesse caso  $\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}) = k r^{1/3} \hat{\mathbf{r}}$  ( $k > 0$ ), e as equações de movimento (2.2) tomam a forma

$$m\mathbf{a} = \mathcal{F}(\mathbf{r}) = k r^{1/3} \hat{\mathbf{r}} \quad (k > 0). \quad (2.5)$$

Notemos que a força tem valores bem definidos em todos os pontos do espaço, inclusive na origem. Vamos postular como condição inicial a partícula em repouso na origem no instante  $t_0$ ,

$$\mathbf{r}_0 = \phi(t_0) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_0 = \dot{\phi}(t_0) = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Obviamente, uma solução possível do problema consiste em ter a partícula sempre em repouso na origem. Denotando a função-movimento correspondente por  $\phi_0$ , temos

$$\phi_0(t) = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

É trivial verificar que  $\phi_0$  satisfaz à equação de movimento (2.5) e à condição



inicial (2.6). Agora, mostraremos que essa não é a única solução, mas que existe uma infinidade de outras soluções, na forma de movimentos retilíneos partindo da origem em uma direção fixa dada por um unitário  $\hat{\mathbf{r}}$ . Portanto vamos procurar outros movimentos nos quais

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}} \quad (\hat{\mathbf{r}} = \text{constante}) , \quad (2.8)$$

de modo que apenas  $r$  mude com o tempo. Nesses movimentos retilíneos puramente radiais,  $\mathbf{v} = (dr/dt)\hat{\mathbf{r}} = v\hat{\mathbf{r}}$  e  $d\mathbf{v}/dt = (dv/dt)\hat{\mathbf{r}}$ . Para encontrar esses movimentos, multiplicamos ambos os membros de (2.5) escalarmente por  $\mathbf{v}$  e obtemos

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{k}{m} r^{1/3} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} , \quad (2.9)$$

donde

$$\frac{dv}{dt} v = \frac{k}{m} r^{1/3} \frac{dr}{dt} . \quad (2.10)$$

donde

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{k}{m} \frac{r^{4/3}}{4/3} \right) . \quad (2.11)$$

ou seja,

$$\frac{v^2}{2} = \frac{k}{m} \frac{r^{4/3}}{4/3} + \text{constante} . \quad (2.12)$$

Impondo a essa igualdade as condições iniciais (2.6), obtemos

$$\frac{v^2}{2} = \frac{k}{m} \frac{r^{4/3}}{4/3} . \quad (2.13)$$

Portanto,

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{3k}{2m} r^{4/3} . \quad (2.14)$$

Podemos tomar a raiz quadrada dos dois membros dessa equação e nos limitarmos à raiz positiva, de modo que

$$\frac{dr}{dt} = \left( \frac{3k}{2m} \right)^{1/2} r^{2/3} . \quad (2.15)$$

Integrando essa equação do instante  $t_0$  ao instante  $t$ , obtemos

$$r = \left( \frac{k}{6m} \right)^{3/2} (t - t_0)^3 , \quad (2.16)$$

que é uma expressão válida para  $t \geq t_0$ , já que  $r \geq 0$ . Levando esse resultado em (2.8) obtemos o movimento retilíneo na direção  $\hat{\mathbf{r}}$ ,

$$\mathbf{r} = \left( \frac{k}{6m} \right)^{3/2} (t - t_0)^3 \hat{\mathbf{r}} \quad (\hat{\mathbf{r}} = \text{constante e } t \geq t_0) . \quad (2.17)$$

Podemos estender essa função para  $t < t_0$ , supondo que a partícula estava em repouso antes de  $t = t_0$ . Denotando a função-movimento correspondente por  $\phi_{\hat{\mathbf{r}}}$ , temos

$$\mathbf{r} = \phi_{\hat{\mathbf{r}}}(t) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } t < t_0 , \\ \left( \frac{k}{6m} \right)^{3/2} (t - t_0)^3 \hat{\mathbf{r}} & \text{se } t \geq t_0 . \end{cases} \quad (\hat{\mathbf{r}} = \text{constante}) . \quad (2.18)$$

É fácil verificar que  $\phi_{\hat{\mathbf{r}}}$  satisfaz à equação de movimento (2.5) e à condição inicial (2.6) para qualquer  $\hat{\mathbf{r}}$  constante. Portanto, para uma dada condição inicial (2.6), existe mais de um movimento possível da partícula. Basta tomar um par de movimentos para demonstrar essa violação do princípio do determinismo newtoniano, por exemplo  $\phi_0$  em (2.7), no qual a partícula está em repouso antes de  $t = t_0$  e permanece em repouso a partir desse instante, e  $\phi_{\hat{\mathbf{r}}}$  com um determinado  $\hat{\mathbf{r}}$  em (2.18), no qual a partícula está em repouso antes de  $t = t_0$  e começa um movimento retilíneo se afastando da origem na direção fixa  $\hat{\mathbf{r}}$  a partir do instante  $t = t_0$ . Como para cada  $\hat{\mathbf{r}}$  constante há um movimento possível em (2.18) podemos exibir infinitos movimentos possíveis para a partícula a partir da condição inicial (2.6), o movimento  $\phi_0$  e os infinitos diferentes movimentos  $\phi_{\hat{\mathbf{r}}}$  obtidos escolhendo os infinitos  $\hat{\mathbf{r}}$  possíveis.

Vemos que a suposição de que existe uma força  $\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}) = k r^{1/3} \hat{\mathbf{r}}$  ( $k > 0$ ) e, conseqüentemente, uma equação de movimento (2.5) leva a resultados estranhos. O primeiro é a violação do determinismo newtoniano: há mais de um movimento possível a partir de uma dada condição inicial (2.6). Isso significa que a partícula que estava parada na origem nos instantes anteriores a  $t_0$ , pode continuar parada depois desse instante ou começar nesse instante um movimento retilíneo de afastamento da origem em uma direção e sentido quaisquer. Como o instante inicial  $t_0$  é arbitrário, isso significa que a qualquer instante a partícula pode começar seu movimento retilíneo de afastamento da origem. Em linguagem pitoresca, é como se a partícula pudesse escolher entre continuar em repouso na origem ou sair em movimento retilíneo da origem e, nesse caso, ainda pudesse escolher qual direção e sentido tomaria para o movimento retilíneo e, também o instante em que sai da origem. Além disso, é estranho que nos movimentos retilíneos (2.18) em que sai da origem, a partícula começa o movimento a partir do repouso com força nula, já que na origem  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Esses movimentos contrariam também as condições de equilíbrio usuais.

Todas as características estranhas do problema em questão se devem ao fato de que a força resultante na equação de movimento (2.5) não satisfaz às exigências do teorema de Cauchy. De fato, as derivadas das componentes da força não são definidas na posição inicial, como exigido pelo teorema de Cauchy, embora a própria força seja contínua nessa posição. Para verificar isso, basta tomar o caso particular em que  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}}$  e calcular a derivada em relação a  $x$  de  $F_x$ . Nesse caso, a derivada de  $F_x$  em relação a  $x$  não é definida na origem,

$$F_x = k x^{1/3}, \quad \text{donde} \quad \frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{k}{3} \frac{1}{x^{2/3}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_x}{\partial x} \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad x \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

Se as características estranhas do problema, que não esperamos encontrar nas situações reais, são conseqüências da violação das condições de Cauchy, podemos postular que forças na mecânica newtoniana devem obrigatoriamente satisfazer as condições de Cauchy. Nesse caso, uma expressão como  $\mathbf{F} = k r^{1/3} \hat{\mathbf{r}}$  ( $k > 0$ ) é simplesmente descartada como uma possível força dentro da mecânica newtoniana. No entanto, esse simples descartar de expressões que violam as condições de Cauchy não é uma solução satisfatória, pois com a idealização de situações

concretas usualmente aceita na mecânica newtoniana é possível obter forças com expressões que violam as condições de Cauchy, como veremos na seção seguinte.

## 2.4 O domo de Norton

Em 2003 John D. Norton [14] apresentou o problema de uma partícula em repouso no ápice de um domo sujeita somente ao seu peso como força dada, e à reação normal do domo como força de vínculo (conferir, também [15]). As equações de movimento desse sistema violam a condição de Cauchy e dão origem a diversos movimentos possíveis para uma partícula em repouso no ápice do domo. Nesse caso estamos diante do problema de uma situação concreta que viola o princípio do determinismo newtoniano. Como veremos, essa violação ocorre devida ao particular formato rígido apresentado pelo domo, que podemos denominar **domo de Norton**.

Para definir o domo de Norton, começamos por especificar uma curva em um plano vertical. Usamos um sistema de eixos com o eixo  $\mathcal{OZ}$  vertical apontando para baixo e consideramos um plano vertical qualquer que passa pelo eixo  $\mathcal{OZ}$ . Para simplificar podemos tomar esse plano como sendo  $\mathcal{OXZ}$ , como indica a figura 2.1. A curva a ser considerada é definida em representação paramétrica como [16]

$$x = \frac{2L}{3} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{s}{L} \right)^{3/2} \right], \quad z = \frac{2}{3\sqrt{L}} s^{3/2} \quad (0 \leq s < L), \quad (2.20)$$

onde o parâmetro  $s$  é o comprimento de arco da curva, isto é, o espaço percorrido, a partir da origem do sistema de eixos e  $L$  seu valor máximo. Para nossos objetivos basta considerar um trecho da curva até algum ponto com  $s > 0$  e menor do que  $L$ . O domo é a superfície de revolução gerada pela rotação dessa curva em torno do eixo  $\mathcal{OZ}$  como indica a figura 2.2. Supomos o domo perfeitamente rígido, para manter a forma que o define, e perfeitamente liso, de modo que a única força que exerce sobre uma partícula sobre ele é a força de vínculo normal.

Consideremos uma partícula de massa  $m$  que pode deslizar sem atrito sobre a superfície do domo. Como as forças sobre ela são o peso e a normal  $\mathbf{N}$  exercida

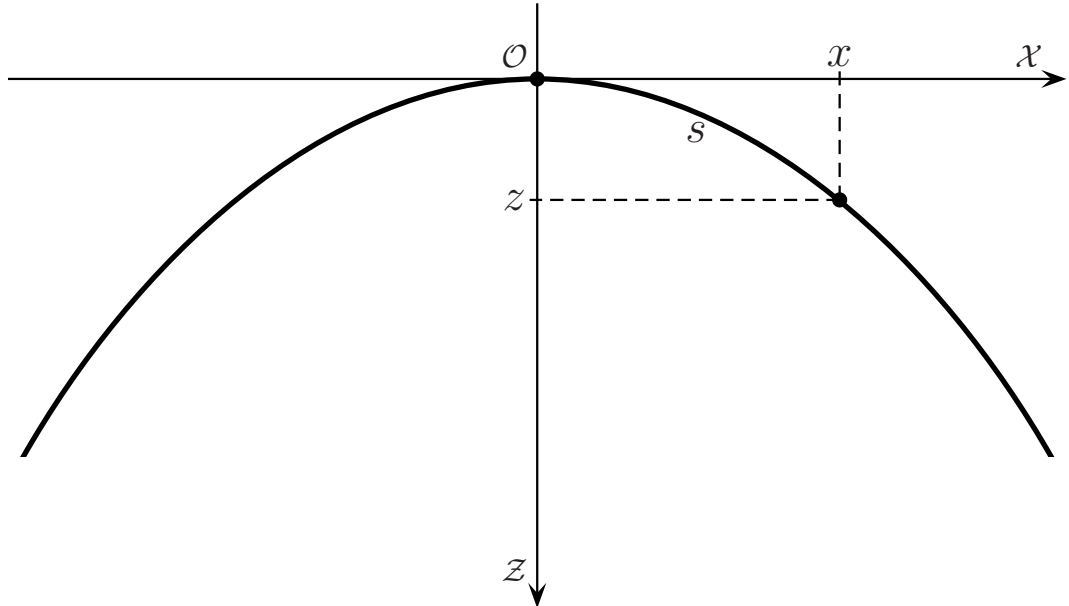


Figura 2.1: Aspecto da curva geratriz do domo de Norton.

pelo domo, obtemos pela segunda lei de Newton a equação de movimento

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} . \quad (2.21)$$

Escolhemos como condição inicial a partícula em repouso no topo do domo no instante  $t_0$ . Portanto, a condição inicial é

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{0} . \quad (2.22)$$

Uma solução óbvia para o problema é que a partícula permaneça em repouso no topo do domo. Denotando a função-movimento correspondente por  $\phi_0$ , temos

$$\phi_0(t) = \mathbf{0} . \quad (2.23)$$

É trivial verificar que  $\phi_0$  satisfaz à equação de movimento (2.21), com a normal assumindo o valor que anula o peso, isto é  $\mathbf{N} = -m\mathbf{g}$ , e satisfaz a condição

inicial (2.22). Portanto o problema fica totalmente resolvido com o movimento determinado e a força de vínculo obtida. Agora veremos que esse não é o único movimento possível.

Vamos mostrar que é possível um movimento da partícula ao longo de cada curva geratriz do domo. Já que se trata de movimento ao longo de uma trajetória especificada, convém usar as grandezas cinemáticas associadas à trajetória. Podemos identificar cada geratriz pelo seu vetor tangente no topo, que denotaremos por  $\mathbf{u}_0$ , conforme indicado na figura 2.2.

Suponhamos que a partícula deslize sobre o domo ao longo de uma geratriz identificada por  $\mathbf{u}_0$  e consideremos que esteja em uma posição arbitrária em  $t > t_0$ , como indicado na figura 2.2. A segunda lei de Newton (2.21) nos fornece as equações

$$m\ddot{s} = mg \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad N - mg \cos\theta = m\frac{\dot{s}^2}{\rho}, \quad (2.24)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre a normal e a vertical, como indicado na figura 2.2,  $s$  é o comprimento de espaço percorrido ao longo da geratriz desde o topo do domo,  $\dot{s}$  a velocidade escalar da partícula e  $\rho$  o raio de curvatura da geratriz, tais como definidos na seção 1.2.

Usando a representação paramétrica (2.20) da trajetória, obtemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{dz}{ds} = \left(\frac{s}{L}\right)^{1/2}, \quad \cos\theta = \frac{dx}{ds} = \left(1 - \frac{s}{L}\right)^{1/2}. \quad (2.25)$$

Usando essa expressão do seno na primeira equação de movimento em (2.24), obtemos

$$\ddot{s} = \frac{g}{\sqrt{L}} s^{1/2}. \quad (2.26)$$

Multiplicando os dois membros dessa equação por  $\dot{s}$ , que supomos diferente de zero, obtemos  $\dot{s}\ddot{s} = (g/\sqrt{L})s^{1/2}\dot{s}$ , donde

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{s}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{2g}{3\sqrt{L}} s^{3/2} \right). \quad (2.27)$$

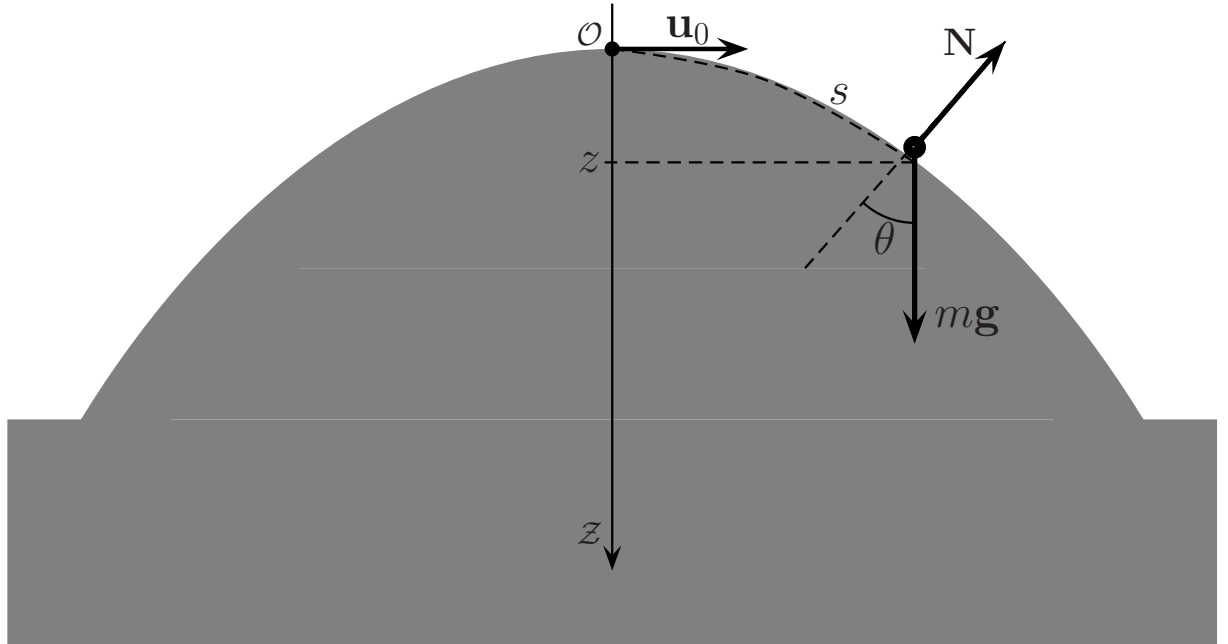


Figura 2.2: Partícula descendo ao longo de uma geratriz no domo de Norton.

Integrando ambos os membros do instante  $t_0$  ao instante arbitrário  $t$ , obtemos

$$\frac{\dot{s}^2}{2} - \frac{\dot{s}^2}{2} \Big|_{t=t_0} = \frac{2g}{3\sqrt{L}} s^{3/2} - \frac{2g}{3\sqrt{L}} s^{3/2} \Big|_{t=t_0} . \quad (2.28)$$

Agora, impomos a condição inicial (2.22) a essa expressão. Naturalmente,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$  significam que  $s = 0$  e  $\dot{s} = 0$  no instante  $t = t_0$ . Com isso, obtemos de (2.28)

$$\frac{\dot{s}^2}{2} = \frac{2g}{3\sqrt{L}} s^{3/2} . \quad (2.29)$$

Tomando a raiz quadrada de ambos os termos, obtemos

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{4g}{3\sqrt{L}}} s^{3/4} . \quad (2.30)$$

Separando as variáveis nessa expressão e integrando do instante inicial  $t_0$  ao ins-

tante arbitrário  $t$ , obtemos

$$\int_0^s s^{-3/4} ds = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{4g}{3\sqrt{L}}} dt . \quad (2.31)$$

onde o limite inferior da primeira integral se deve à hipótese de que  $s = 0$  no instante inicial  $t_0$ . Obtemos  $s^{1/4} = \sqrt{[g/(12\sqrt{L})]}(t - t_0)$ , isto é

$$s = \left( \frac{g}{12\sqrt{L}} \right)^2 (t - t_0)^4 . \quad (2.32)$$

Esse é um movimento de deslizamento ao longo de uma geratriz do domo. Para obtê-lo fizemos algumas escolhas, como  $\dot{s} > 0$ , mas o que tem realmente importância é se ele satisfaz à equação de movimento do problema, a primeira equação em (2.24), e à condição inicial (2.22). Notemos que a segunda equação em (2.24) determina a normal a partir do movimento conhecido. Para que tudo fique explícito voltaremos a ela posteriormente. Agora, em (2.32) temos um movimento ao longo da geratriz identificada pelo vetor unitário  $\mathbf{u}_0$  e podemos verificar que, de fato, ele satisfaz à equação de movimento (2.24), e à condição inicial (2.22) para  $t \geq t_0$  e antes do término do domo (lembremo-nos que o domo deve terminar antes de  $s = L$ ). Representando esse movimento possível da partícula por  $\varphi_{\mathbf{u}_0}$ , temos,

$$s = \varphi_{\mathbf{u}_0}(t) = \left( \frac{g}{12\sqrt{L}} \right)^2 (t - t_0)^4 . \quad (2.33)$$

Portanto, dada a equação de movimento (2.21) e a condição inicial (2.22) temos dois movimentos possíveis,  $\phi_0$  em (2.23), no qual a partícula permanece em repouso no topo do domo depois do instante  $t_0$ , e  $\varphi_{\mathbf{u}_0}$  em (2.33), no qual a partícula abandona o topo no instante  $t_0$  na direção do unitário  $\mathbf{u}_0$  e desliza ao longo da geratriz do domo que se inicia no topo nessa direção. A existência desses dois movimentos viola o princípio do determinismo newtoniano. Na verdade, como o vetor  $\mathbf{u}_0$  é arbitrário, temos infinitas direções no topo do domo em que o movimento de deslizamento pode começar, cada um correspondendo ao deslizamento ao longo de cada uma das geratrizes do domo. Portanto, para uma mesma condição ini-



cial, há uma infinidade de movimentos possíveis, que englobam a possibilidade da partícula ficar parada no topo do domo ou deslizar ao longo de uma das suas infinitas geratrizes. Além disso, como o instante  $t_0$  é arbitrário, a possibilidade da partícula permanecer parada no topo ou começar a deslizar pode ocorrer a qualquer momento. Também na condição inicial a partícula está parada no topo e sofre força total nula, pois peso e normal se cancelam. Ainda assim, ela pode sair do equilíbrio e começar a deslizar ao longo de qualquer geratriz.

Novamente temos resultados estranhos obtidos de uma equação de movimento newtoniana. Além disso, agora não podemos dizer, simplesmente, que tal força não pode existir porque leva à violação das condições de Cauchy, pois tal força não foi arbitrariamente postulada. De fato, foi obtida a partir de uma situação concreta, com as idealizações usuais da mecânica newtoniana. De fato, na equação (2.26) a condição de Cauchy é violada, pois a derivada do membro direito em relação a  $s$  não é contínua em  $s = 0$ , no ponto em que tomamos a condição inicial. Mas a força que deu origem a essa equação foi de fato obtida do domo que, em princípio pode ser construído de um material rígido, e idealizado como perfeitamente rígido, como é comum fazer nos problemas de mecânica newtoniana. De fato estamos acostumados a resolver problemas de blocos deslizando em planos inclinados em que ambos são idealizados como perfeitamente rígidos, sem obter resultados estranhos. Mas é exatamente esse o ponto sobre o qual desejamos chamar a atenção. Idealizações que são úteis e não geram dificuldades em muitos casos, em alguns pode ser a causa de resultados que violam princípios fundamentais da mecânica. O domo é um exemplo onde é simples vermos isso. Com efeito, se levarmos em conta que a rigidez perfeita do domo é uma idealização excessiva, que alguma deformação sempre ocorre, por mínima que seja, podemos supor que a partícula sobre o seu topo cause nele uma deformação devida às forças de contato trocadas entre eles. Admitindo essa deformação o domo em seu topo não mais terá a forma dada por (2.20) e que leva à violação do determinismo newtoniano. Com a deformação no topo pode ocorrer que a partícula permaneça sempre no topo, sem deslizar jamais. A demonstração rigorosa de que isso salva o princípio do determinismo newtoniano pode ser bastante complicada [17] e foge aos nossos objetivos. Provavelmente deveríamos levar em conta que o conceito de partícula também é uma idealização excessiva e deve ser substituído pelo modelo

de uma bolinha que também sofre deformações. De qualquer modo a lição pode ser tirada: as idealizações usuais podem levar a problemas em que as equações de movimento não obedecem às condições de Cauchy.

Para completar a solução do problema, vamos obter a força de vínculo normal para todos os movimentos possíveis da partícula no domo. Naturalmente, para o movimento (2.23), no qual a partícula permanece em repouso no topo do domo, na segunda equação em (2.24)  $\theta = 0$  e  $\dot{s} = 0$ , de modo que ela se reduz a  $N = mg$ . Portanto, a normal é vertical e de mesmo módulo que o peso,  $\mathbf{N} = -mg$ . Para o movimento (2.33), com a partícula deslizando, a normal tem em cada posição direção perpendicular ao domo, sentido apontando para fora do domo e módulo que também calculamos a partir da segunda equação em (2.24). De fato, essa equação nos fornece  $N$  em função de  $\cos \theta$ ,  $\dot{s}$  e do raio de curvatura  $\rho$ . Temos  $\cos \theta$  e  $\dot{s}$  em função de  $s$  em (2.25) e (2.30). Usando a definição de  $\rho$  e  $\mathbf{u}_T$  dadas na seção 1.2, obtemos

$$\frac{1}{\rho^2} = \left| \frac{d\mathbf{u}_T}{ds} \right|^2 = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|^2 = \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 \quad (2.34)$$

Derivando as expressões em (2.25), obtemos

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{2L} \left( 1 - \frac{s}{L} \right)^{-1/2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{1}{2L} \left( \frac{s}{L} \right)^{-1/2}. \quad (2.35)$$

Substituindo esses resultados em (2.34) e simplificando, chegamos a

$$\rho = 2L \sqrt{\frac{L-s}{2L-s}}. \quad (2.36)$$

Usando essa expressão, (2.25) e (2.30) na segunda equação em (2.24), obtemos

$$N = mg \left[ \sqrt{1 - \frac{s}{L}} + \frac{2}{3} \left( \frac{s}{L} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{2 - (s/L)}{1 - (s/L)}} \right]. \quad (2.37)$$

Essa expressão nos fornece a normal em qualquer ponto da trajetória seguida pela partícula. Para se obter a normal em função do tempo, basta substituir em (2.37) a expressão de  $s$  em função do tempo dada por (2.33). Notemos que para  $s = 0$

a expressão (2.37) se reduz a  $N = mg$ , que é o valor esperado no topo do domo. Com esse cálculo da normal fica completa a solução do problema do domo de Norton.

Notemos que o domo de Norton é definido pela representação paramétrica  $\mathbf{r} = \gamma(s)$  da geratriz dada em (2.20). Com a escolha dos eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Z}$  no plano da geratriz, a representação paramétrica pode ser escrita como  $x = \gamma_x(s)$  e  $z = \gamma_z(s)$ . Examinando os cálculos anteriores, podemos ver que a violação do determinismo newtoniano se deve às características da relação  $z = \gamma_z(s) = 2s^{3/2}/(3\sqrt{L})$ . No entanto, outras curvas geratrizes podem apresentar as características que definam um domo que leve à violação do determinismo newtoniano. Não é difícil encontrar tais características. De fato, vamos supor que a geratriz seja dada pela seguinte representação paramétrica, com  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Z}$  no plano da geratriz e  $\mathcal{O}\mathcal{Z}$  vertical apontando para baixo,

$$x = \gamma_x(s) \quad \text{e} \quad z = \gamma_z(s) \quad (0 \leq s < L) \quad (2.38)$$

onde  $L$  é um comprimento que define o domínio de variação possível do espaço percorrido  $s$ . O domo generalizado é a superfície de revolução em torno do eixo  $\mathcal{O}\mathcal{Z}$ , que tem a curva (2.38) como geratriz. Por simplicidade, vamos concentrar nossa atenção em uma geratriz e examinar os possíveis movimentos ao longo dela. Da segunda lei de Newton obtemos para a aceleração tangencial  $m\ddot{s} = mg \sin\theta$ , onde  $\sin\theta = dz/ds = \gamma'_z(s)$ , isto é,

$$\ddot{s} = g\gamma'_z(s) . \quad (2.39)$$

Desejamos resolver essa equação diferencial para a condição inicial

$$s|_{t=t_0} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{s}|_{t=t_0} = 0 . \quad (2.40)$$

Essa condição corresponde a uma partícula em repouso na origem da curva ( $s = 0$ ) no instante  $t_0$ . A função  $\varphi_0$  que corresponde à partícula continuar em repouso em um intervalo após  $t_0$ , é dada por

$$s = \varphi_0(t) = 0(t_0 \leq t < t') , \quad (2.41)$$

para algum  $t' > 0$  ( $\varphi_0(t') < L$ ). Obviamente, ela satisfaz à condição inicial (2.40). Também é trivial verificar que ela satisfaz à equação de movimento (2.39) se, e somente se,

$$\gamma'_z(0) = 0. \quad (2.42)$$

Agora, vamos procurar pelas condições de existência de outro movimento possível. Supondo  $\dot{s} \neq 0$  para  $t > t_0$ , multiplicando ambos os membros de (2.39) por  $\dot{s}$  e integrando a equação resultante de  $t_0$  a  $t$  arbitrário, obtemos

$$\dot{s}^2 = 2g[\gamma_z(s) - \gamma_z(0)]. \quad (2.43)$$

Sendo  $\dot{s}^2 \geq 0$ , essa equação é válida se, e somente se,

$$\gamma_z(s) \geq \gamma_z(0). \quad (2.44)$$

Supondo tal condição satisfeita, tomando a raiz quadrada positiva de ambos os membros de (2.43), separando as variáveis, integrando a equação resultante de  $t_0$  a  $t$  arbitrário e impondo a condição inicial (2.40) nos limites de integração obtemos

$$\int_0^s \frac{ds'}{[\gamma_z(s') - \gamma_z(0)]^{1/2}} = \sqrt{2g}(t - t_0). \quad (2.45)$$

O membro esquerdo dessa equação é uma função de  $s$ . Portanto, a equação define  $t$  como função de  $s$ . Supondo que  $\gamma_z$  é tal que essa função tenha inversa  $\varphi$  em um intervalo  $t_0 \leq t < t''$  ( $t''$  e  $(\varphi(t'') < L)$ ), obtemos

$$s = \varphi(t) = 0 \quad (t_0 \leq t < t''), \quad (2.46)$$

É fácil verificar que essa função satisfaz à equação de movimento (2.39) e à condição inicial (2.40). Portanto, é um movimento possível. Tomemos  $t_1$  como um valor positivo menor do que  $t'$  e  $t''$ . Como  $\varphi$  em (2.46) é certamente distinto do movimento  $\varphi_0$  em (2.41), temos dois movimentos possíveis no intervalo  $t_0 \leq t < t_1$  para a partícula, ambos com a mesma condição inicial. Portanto,

há violação do determinismo newtoniano. É claro que, na verdade, há infinitos movimentos possíveis,  $\varphi_0$  e um movimento  $\varphi$  ao longo de cada uma das infinitas geratrizes desse domo generalizado. Recolhendo as condições para obter a violação do determinismo newtoniano, podemos enunciar o resultado a seguir.

*Seja um sistema de eixo com  $\mathcal{OZ}$  vertical para baixo e um domo obtido como superfície de revolução em torno de  $\mathcal{OZ}$  com geratriz  $\mathbf{r} = \gamma(s)$  ( $0 \leq s < L$ ). Seja uma partícula em repouso no topo do domo no instante  $t_0$ . A partícula tem mais de um movimento possível a partir dessa condição inicial se forem satisfeitas as condições (i)  $\gamma_z(s) \geq \gamma_z(0)$ , (ii)  $\gamma'_z(0) = 0$  e (iii) a integral em (2.45) define uma função (2.46).*

Vamos aplicar esse resultado ao caso particular em que a função geratriz que define  $z$  é proporcional a uma potência arbitrária de espaço percorrido,

$$z = \gamma_z(s) = \frac{\alpha}{L^{n-1}} s^n \quad (0 \leq s < L) \quad (2.47)$$

onde  $n$  é um número real e  $\alpha$  e  $L$  números reais positivos, o primeiro adimensional e  $L$  com dimensão de comprimento ( $L$  pode ser importante nas outras equações da representação paramétrica da geratriz). A condição (i),  $\gamma_z(s) \geq \gamma_z(0)$ , é trivialmente satisfeita por (2.47) e a condição (ii),  $\gamma'_z(0) = 0$ , é satisfeita se, e somente se,  $n > 1$ . A condição (iii), que a integral em (2.45) defina uma função (2.46), é satisfeita se, e somente se  $n < 2$ . Nesse caso a função obtida é

$$s = \phi(t) = \left( \frac{2-n}{2L^{n/2}} \sqrt{2\alpha g L} \right)^{\frac{2}{2-n}} (t - t_0)^{\frac{2}{2-n}} \quad (1 < n < 2). \quad (2.48)$$

No caso do domo de Norton (2.20), temos  $\alpha = 2/3$  e  $n = 3/2$  em (2.47) e, como consequência, (2.48) se reduz a (2.33), como esperado. A classe de soluções que generalizam o problema de Norton coincide com a obtida anteriormente por Malament [16].

Para discussões mais aprofundadas do domo de Norton e do indeterminismo em física, que ultrapassam nossos objetivos didáticos, remetemos o leitor aos trabalhos já citados [14–17], às referências neles contidas e, em especial, ao artigo de Kosiakov, onde é discutido o domo de Norton e a questão do indeterminismo no eletromagnetismo [18], ao artigo de Wilson [19], onde é apresentada uma ex-

tensa discussão sobre determinismo e ao artigo de Fletcher [20], para uma discussão recente do domo de Norton. (É curioso saber que o domo de Norton é discutido também no youtube [21], embora essa citação não signifique uma recomendação.)

No próximo capítulo trataremos de violações do determinismo newtoniano devidas a forças de atrito cinético.

## Capítulo 3

# Incompatibilidade entre as leis empíricas do atrito e o determinismo newtoniano

Neste capítulo apresentamos o tema principal de nosso estudo, a incompatibilidade entre as leis empíricas do atrito e o determinismo newtoniano, tal como apresentada por Painlevé em diversas publicações. Paul Painlevé (1863-1933) teve uma biografia incomum. Foi físico e matemático com uma abordagem crítica de teorias bem aceitas em seu tempo, como a mecânica newtoniana e mesmo a relatividade de Einstein, foi professor na universidade de Lille e ensinou também na Sorbonne, na École Polytechnique, no Collège de France e na École Normale Supérieure e, em 1900, foi eleito membro da Académie des Sciences. Além de suas atividades científicas, dedicou-se seriamente à política, tendo sido por duas vezes primeiro ministro da república francesa, uma delas em 1917, durante a primeira guerra mundial. Suas exposições sobre os axiomas da mecânica clássica são cuidadosas e críticas (conferir, por exemplo, sua obra *Les axiomes de la mécanique* publicada em 1922 [22]).

A incompatibilidade entre as leis empíricas do atrito e o determinismo newtoniano foi assinalada pela primeira vez por Painlevé em um curso ministrado na *Faculté de Science de Paris* em 1895 [1] e em uma nota apresentada no mesmo ano na *Académie de Sciences de Paris* [2]. Essa incompatibilidade foi mostrada

por Painlevé por meio de exemplos simples. Posteriormente outros exemplos foram apresentados por Mayer em 1901 [23]. O trabalho de Painlevé motivou novas pesquisas experimentais sobre as leis do atrito [24] e muitas tentativas de eliminar a contradição que seus exemplos mostravam entre as leis do atrito e o determinismo newtoniano [25–27] [28]. Ainda recentemente o trabalho de Painlevé tem atraído atenção (conferir, por exemplo [29, 30] e suas referencias). As tentativas de eliminar a contradição dos exemplos de Painlevé se baseiam em diminuir as idealizações supostas por Painlevé, como por exemplo supor que os corpos presentes não são absolutamente rígidos, isto é, apresentam alguma elasticidade, ou que os trilhos ou guias que implementam os vínculos permitem um certo jogo na partícula vinculada e assim por diante. Essas tentativas fogem ao nosso interesse por dois motivos. Em primeiro lugar porque nosso objetivo é chamar a atenção para os problemas decorrentes das idealizações, e não mostrar que os problemas podem ser eliminados se abirmos mão da idealizações. Em segundo porque explicações em nível muito avançado fogem de nossos objetivos didáticos. É importante notar que as violações do determinismo newtoniano apresentados por Painlevé não se devem à violação das condições de Cauchy, pelo menos na forma usual dessas condições, mas ao fato de que as reações vinculares normais que dão origem ao atrito dependerem do coeficiente de atrito e desse ser relativamente grande, como veremos a seguir.

Esse capítulo se constitui essencialmente de três exemplos de incompatibilidade entre as leis empíricas do atrito e o determinismo newtoniano devidos a Painlevé. O primeiro é uma versão simplificada (conferir o artigo de Klein em [28] e [31, 32]) do problema de um haltere em duas guias apresentado nas página 93 e seguintes de suas lições de 1895 [1]. O segundo é o de um pêndulo com pivô deslizante (conferir página 97 e seguintes das lições de Painlevé [1]), para o qual seguimos a exposição de Appel [3]. O terceiro é o da roda com centro de massa excêntrico, para o qual seguimos a exposição do próprio Painlevé nas páginas 657 e seguintes de seu tratado de mecânica racional de 1929 [5].



### 3.1 As leis empíricas do atrito

Existe uma enormidade de leis empíricas de atrito de grande complexidade. Nosso interesse aqui é nas leis simplificadas do atrito de deslizamento entre superfícies secas atribuídas a Coulomb. Além disso, nos restringimos ao caso de superfícies de corpos perfeitamente rígidos. Então, o que chamamos **leis empíricas do atrito** são descritas como a seguir (conferir, por exemplo, página 640 e seguintes do tratado de mecânica racional de Painlevé [5]).

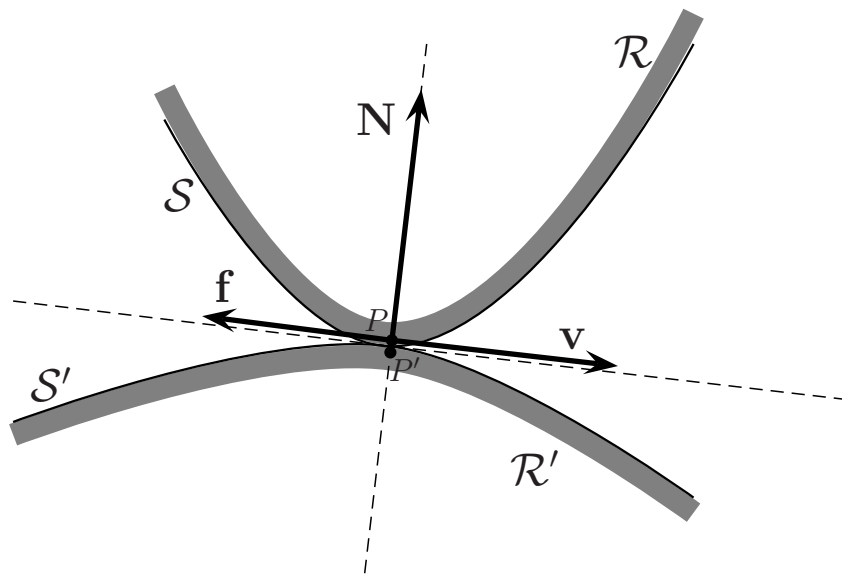


Figura 3.1: Dois corpos rígidos com um ponto de contato e as forças normal e de atrito.

Sejam dois corpos perfeitamente rígidos  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  com superfícies respectivas  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$ . Os contatos entre os dois corpos se faz pelo contato da partícula no ponto  $P$  de  $\mathcal{S}$  com a partícula no ponto  $P'$  de  $\mathcal{S}'$ , conforme ilustrado na figura 3.1. Geometricamente, esses pontos se confundem e por eles passa o plano tangente e a reta normal a ambas as superfícies  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$ . A força de reação  $\mathbf{R}$  exercida pelo corpo rígido  $\mathcal{R}'$  sobre o ponto  $P$  de  $\mathcal{R}$  tem duas componentes, uma força  $\mathbf{N}$  na direção normal apontando de  $\mathcal{R}'$  para  $\mathcal{R}$  e uma força  $\mathbf{f}$  no plano tangente, de modo que  $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{f}$ . Chamamos  $\mathbf{N}$  **força normal** e  $\mathbf{f}$  força tangencial, ou **força de atrito**. Quando  $\mathbf{f} \neq 0$  dizemos que há atrito entre as superfícies  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$ .

Dizemos que há deslizamento de  $\mathcal{S}$  sobre  $\mathcal{S}'$  se a velocidade  $\mathbf{v}$  de  $P$  relativa a  $P'$  está no plano tangente e é diferente de zero. Chamamos  $\mathbf{v}$  **velocidade de**

**deslizamento** de  $\mathcal{S}$  sobre  $\mathcal{S}'$  (ou de  $\mathcal{R}$  sobre  $\mathcal{R}'$ ). Se há deslizamento  $\mathbf{f}$  é chamada **força de atrito cinético**. Ela tem a direção da velocidade de deslizamento  $\mathbf{v}$ , sentido oposto e módulo proporcional ao módulo da força normal, sendo a constante de proporcionalidade uma característica apenas da natureza das superfícies em contato chamada **coeficiente de atrito cinético**. Denotando esse coeficiente por  $\mu$ , temos

$$|\mathbf{f}| = \mu |\mathbf{N}| . \quad (3.1)$$

Seja um eixo na direção da velocidade instantânea de deslizamento  $\mathbf{v}$  e seja  $\mathbf{u}$  o unitário ao longo desse eixo apontando no seu sentido convencional positivo. Então, podemos escrever  $\mathbf{v} = v\mathbf{u}$  e  $\mathbf{f} = f\mathbf{u}$ , onde  $v$  e  $f$  denotam as componentes da velocidade e da força de atrito ao longo desse eixo (e não seus respectivos módulos). Usando essas componentes, podemos escrever

$$f = -\operatorname{sgn}(v) \mu |\mathbf{N}| , \quad (3.2)$$

onde usamos a definição da **função sinal**  $\operatorname{sgn}$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ : x &\longmapsto \operatorname{sgn}(x) , \end{aligned} \quad (3.3)$$

sendo que

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 , \\ 0 & \text{se } x = 0 , \\ 1 & \text{se } x > 0 . \end{cases} \quad (3.4)$$

É difícil exagerar o quanto o uso dessa função facilita as análises dos exemplos de Painlevé. Uma simples comparação entre o tratamento das fontes originais que citamos e o tratamento que apresentamos usando a função sinal, mostra claramente a utilidade dessa última. As propriedades da função sinal são muito simples de se entender e de se demonstrar. Listamos algumas a seguir. (i)  $\operatorname{sgn}(x+y) = \operatorname{sgn}(x)$  se  $|x| > |y|$ ; (ii)  $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)$ . (iii)  $\operatorname{sgn}(1/x) = \operatorname{sgn}(x)$  se  $x \neq 0$ ; (iv)  $\operatorname{sgn}(x) = x$  se  $x = \pm 1$  ou se  $x = 0$ ; (v)  $x = \operatorname{sgn}(x)|x|$ ; (vi)  $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$

se  $x \neq 0$ .

Se a velocidade de deslizamento é nula,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{f}$  é chamada **força de atrito estático**. Nesse caso a força  $\mathbf{f}$  tem um valor máximo para o módulo proporcional à normal, sendo a constante de proporcionalidade uma característica apenas da natureza das superfícies em contato chamada **coeficiente de atrito estático**. Denotando esse coeficiente por  $\mu_0$ , temos

$$|\mathbf{f}| \leq \mu_0 |\mathbf{N}| . \quad (3.5)$$

De resto o módulo, a direção e o sentido da força de atrito estático são os necessários para assegurar o valor nulo da velocidade de deslizamento. Em geral, o coeficiente de atrito estático é levemente superior ao cinético.

Se há mais de um ponto de contato entre dois sólidos, aplicamos a cada um deles as leis descritas anteriormente.

## 3.2 Haltere deslizante em trilhos paralelos

### 3.2.1 Enunciado do problema

Seja um haltere de comprimento  $L$  com massas iguais a  $m$ , isto é, uma barra de comprimento  $L$  e massa desprezível com duas bolinhas de mesma massa  $m$  presas em suas extremidades. Consideramos que as bolinhas estão sobre uma mesa lisa horizontal, de modo que seus pesos são cancelados pelas normais exercidas pela mesa e os movimentos das bolinhas se processam no plano da mesa. Além disso as bolinhas deslizam dentro de dois trilhos paralelos presos à mesa e separados por uma distância menor do que  $L$ ; o menor ângulo que a barra faz com os trilhos é  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi/2$ ). O coeficiente de atrito entre uma das bolinhas e o trilho que a guia é  $\mu$  e a outra bolinha não tem atrito com o outro trilho. Para facilitar a discussão, a bolinha que tem atrito com o trilho será chamada primeira bolinha e a outra, segunda bolinha. Finalmente, supomos que a primeira bolinha sofre uma força constante dada  $\mathbf{F}$ , na direção do trilho. Podemos considerar  $\mathbf{F}$  exercida por meio de um fio preso na bolinha e puxado ao longo do trilho.

Vamos escolher o eixo  $\mathcal{OX}$  ao longo do trilho em que está a primeira bolinha,

de modo que o ângulo entre esse eixo e a barra seja  $\theta$ , e o eixo  $\mathcal{OY}$  também no plano dos trilhos e apontando para o trilho em que está a segunda bolinha, como indicado na figura 3.2. Seja  $x$  a posição da primeira bolinha no eixo  $\mathcal{OX}$ ; a posição da segunda bolinha é, naturalmente,  $x + L \cos \theta$ . Dado um movimento da primeira bolinha no eixo  $\mathcal{OX}$ , o movimento da segunda e do sistema inteiro fica univocamente determinado. Do mesmo modo, para especificar a condição inicial do sistema, basta dar a condição inicial da primeira bolinha. Não há perda de generalidade se tomarmos sua posição inicial como sendo a origem; como sua velocidade inicial ao longo do eixo  $\mathcal{OX}$  tomamos uma constante arbitrária  $v_0$ , que pode ser positiva, negativa ou nula. Desse modo, se  $\phi$  é o movimento da primeira bolinha,

$$\phi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\phi}(0) = v_0. \quad (3.6)$$

Desejamos determinar o movimento subsequente do altere com as bolinhas, isto é, encontrar o movimento  $\phi$  que obedece a condição inicial dada (3.6).

No problema originalmente proposto por Painlevé [1], há atrito das duas bolinhas com os dois trilhos, com coeficientes diferentes  $\mu$  e  $\mu'$ , e ambas são puxadas por forças horizontais de componentes  $F$  e  $F'$  ao longo de  $\mathcal{OX}$ . A versão simplificada que apresentamos retém as características essenciais da versão original e se deve a Klein (conferir o seu artigo em [28] e [31, 32]).

### 3.2.2 Aplicação das leis da mecânica ao problema

As forças que agem na primeira bolinha são a força aplicada constante  $\mathbf{F}$ , a força da barra e a força do trilho. A força aplicada  $\mathbf{F}$  tem componente apenas ao longo de  $\mathcal{OX}$ , que denotamos por  $F$ . A força da barra, tem componente apenas na direção dela, que denotamos por  $R$  e convencionamos como positiva quando a barra empurra a bolinha e negativa quando puxa. A força do trilho tem a componente  $f$  de atrito ao longo de  $\mathcal{OX}$  e componente  $N$  normal ao longo de  $\mathcal{OY}$ . As forças sobre a segunda bolinha são a força da barra e a força do trilho. A força da barra nessa bolinha é a oposta à força da barra na primeira bolinha, pois a barra tem massa desprezível; com isso, denotamos sua componente que empurra a segunda bolinha também por  $R$ . A força do trilho tem apenas componente normal ao longo de  $\mathcal{OY}$ , que representamos por  $-N'$ , para nos conformamos com a figura

3.2.

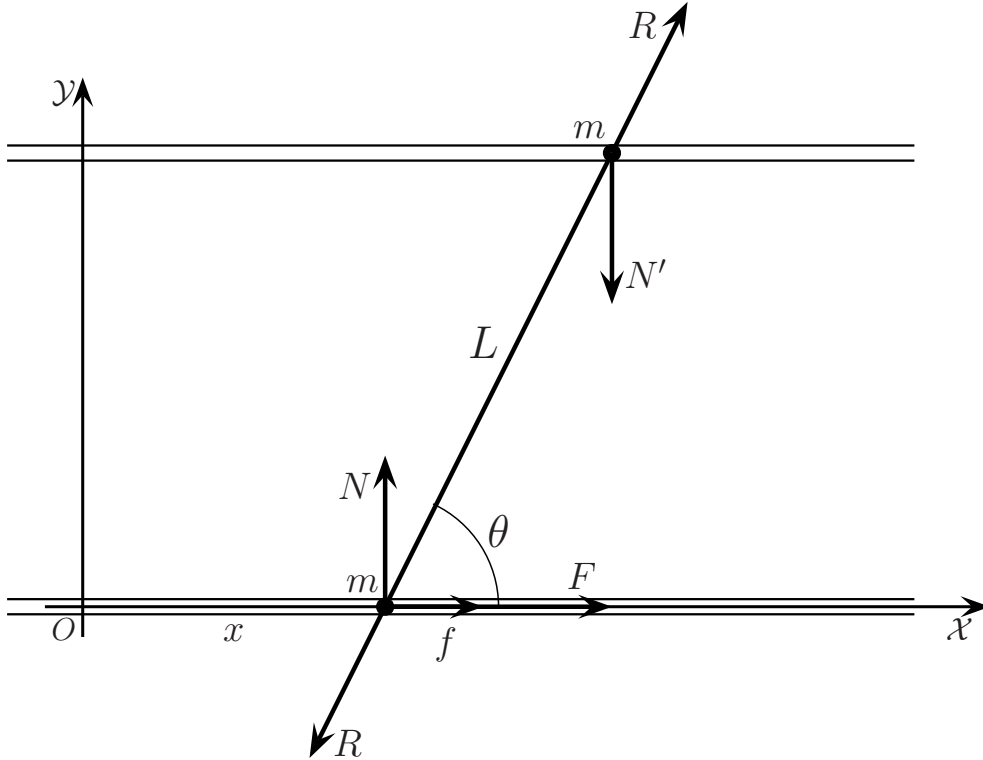


Figura 3.2: Haltere de massas iguais nos trilhos paralelos e as forças nas massas.

Sendo  $x$  a coordenada da primeira bolinha, temos pela Segunda Lei de Newton

$$m\ddot{x} = F - R \cos \theta + f \quad \text{e} \quad 0 = N - R \sin \theta . \quad (3.7)$$

Uma vez que a coordenada da segunda bolinha é  $x + L \cos \theta$ , se aplicarmos nela a Segunda Lei de Newton, obtemos

$$m\ddot{x} = R \cos \theta \quad \text{e} \quad 0 = N' - R \sin \theta . \quad (3.8)$$

Pela lei coulombiana do atrito cinético, a força de atrito na primeira bolinha é dada por  $f = -\text{sgn}(\dot{x})\mu|N|$ . Usando a segunda equação em (3.7),  $f = -\text{sgn}(\dot{x})\mu|R \sin \theta|$ , donde  $f = -\text{sgn}(\dot{x})\mu|R| \sin \theta = -\text{sgn}(\dot{x})\mu \text{sgn}(R)R \sin \theta$ . Dessa fórmula concluímos que a força de atrito é dada por

$$f = -\varepsilon\mu R \sin \theta , \quad (3.9)$$

onde

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(\dot{x}) \operatorname{sgn}(R) . \quad (3.10)$$

A segunda equação em (3.8) para a segunda bolinha apenas diz que  $N' = R \operatorname{sen} \theta$ , que não tem efeito em nossa discussão, porque não há atrito nessa bolinha. Substituindo (3.9) na primeira equação em (3.7), ela forma com a primeira equação em (3.8) o seguinte sistema

$$m\ddot{x} = F - R \cos \theta - \varepsilon \mu R \operatorname{sen} \theta \quad \text{e} \quad m\ddot{x} = R \cos \theta . \quad (3.11)$$

Desejamos determinar com essas equações  $x$  e  $R$  como função do tempo, isto é, encontrar como o haltere se movimenta e como varia a força de vínculo da barra. Para isso, começamos por eliminar  $m\ddot{x}$  entre as duas equações. Isso é o mesmo que impor que elas sejam compatíveis. A condição de compatibilidade obtida é

$$(\varepsilon \mu \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta) R = F . \quad (3.12)$$

Desse modo obtemos a seguinte expressão para  $R$ ,

$$R = \frac{F}{\varepsilon \mu \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta} . \quad (3.13)$$

Mas nessa equação existe um sinal de  $R$  dentro de  $\varepsilon$ , de acordo com a definição de  $\varepsilon$  em (3.10), e o sinal de  $R$  no lado esquerdo da equação. É necessário que esses sinais sejam compatíveis para que o problema tenha solução. Se há compatibilidade, a solução (3.13) para  $R$  pode ser substituída na segunda equação em (3.11) para encontrarmos a aceleração do movimento,

$$\ddot{x} = \frac{(F/m) \cos \theta}{\varepsilon \mu \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta} . \quad (3.14)$$

Sendo essa aceleração constante, não haverá dificuldade em determinar o movimento uniformemente acelerado resultante nos casos em que o problema tem solução. Examinaremos a seguir os casos importantes que dependem do denominador em (3.13).

### 3.2.3 Caso de atrito grande

Primeiramente, seja o caso em que no denominador em (3.13) o termo de maior módulo seja o primeiro, isto é,  $|\varepsilon\mu \operatorname{sen}\theta| > |2 \cos \theta|$ , que equivale a

$$\mu \operatorname{sen}\theta > 2 \cos \theta , \quad (3.15)$$

ou seja,

$$\mu > 2 \operatorname{cotg}\theta . \quad (3.16)$$

Esse é o caso que chamamos de atrito grande (capaz de superar  $2 \operatorname{cotg}\theta$ ). Nesse caso, o denominador tem o sinal do primeiro termo, que é o sinal de  $\varepsilon$ , pois  $\mu$  e  $\operatorname{sen}\theta$  são positivos,  $\operatorname{sgn}(\varepsilon\mu \operatorname{sen}\theta + 2 \cos \theta) = \operatorname{sgn}(\varepsilon) = \varepsilon$ , ou seja,

$$\operatorname{sgn}(\varepsilon\mu \operatorname{sen}\theta + 2 \cos \theta) = \varepsilon . \quad (3.17)$$

Consequentemente, obtemos da equação (3.13) que

$$\operatorname{sgn}(R) = \operatorname{sgn}(F) / \operatorname{sgn}(\varepsilon\mu \operatorname{sen}\theta + 2 \cos \theta) = \operatorname{sgn}(F)\varepsilon . \quad (3.18)$$

Substituindo (3.10) nesse resultado, obtemos a condição de consistência da equação (3.13):

$$\operatorname{sgn}(R) = \operatorname{sgn}(F) \operatorname{sgn}(\dot{x}) \operatorname{sgn}(R) . \quad (3.19)$$

Duas possibilidades se apresentam: ou  $\operatorname{sgn}(\dot{x}) = -\operatorname{sgn}(F)$  ou  $\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \operatorname{sgn}(F)$ .

#### **Primeiro subcaso: inexistência de movimento.**

Se  $\operatorname{sgn}(\dot{x}) = -\operatorname{sgn}(F)$  a equação (3.19) é impossível de ser satisfeita, pois se reduz a  $\operatorname{sgn}(R) = -\operatorname{sgn}(R)$  e não existe nenhuma reação  $R$  capaz de satisfazê-la. Portanto, com qualquer condição inicial em que a velocidade inicial  $v_0$  tem sentido tal que  $\operatorname{sgn}(v_0) = -\operatorname{sgn}(F)$ , não existe nenhum  $R$  e, consequentemente, nenhuma aceleração (3.14) é possível. Simplesmente, não há solução para as equações de movimento (3.11). Em resumo, para uma tal condição inicial nenhum movimento é possível.

#### **Segundo subcaso: existência de dois movimentos.**

Se  $\operatorname{sgn}(\dot{x}) = \operatorname{sgn}(F)$ , então a equação (3.19) se transforma na identidade

$\text{sgn}(R) = \text{sgn}(R)$ . Nesse caso, para qualquer condição inicial dada há duas soluções possíveis: uma com  $\text{sgn}(R) = 1$  e a outra com  $\text{sgn}(R) = -1$ . Para chegarmos a essas duas soluções, fica mais simples se fixarmos um sinal para  $F$ , por exemplo,  $\text{sgn}(F) = 1$ , de modo que a condição para a existência dos dois movimentos torna-se

$$\text{sgn}(\dot{x}) = 1 . \quad (3.20)$$

Com isso, (3.10) torna-se  $\varepsilon = \text{sgn}(R)$  e (3.13) se transforma em

$$R = \frac{F}{\text{sgn}(R)\mu \text{sen}\theta + 2 \cos \theta} . \quad (3.21)$$

e (3.14) toma a forma

$$\ddot{x} = \frac{(F/m) \cos \theta}{\text{sgn}(R)\mu \text{sen}\theta + 2 \cos \theta} . \quad (3.22)$$

Seja a primeira solução dada pela escolha  $\text{sgn}(R) = 1$ . Nesse caso, de acordo com (3.21) e (3.14), temos para a força da barra a solução

$$R_1 = \frac{F}{\mu \text{sen}\theta + 2 \cos \theta} . \quad (3.23)$$

e para o sistema a aceleração

$$\ddot{x}_1 = \frac{(F/m) \cos \theta}{\mu \text{sen}\theta + 2 \cos \theta} , \quad (3.24)$$

isto é,

$$\ddot{x}_1 = \frac{F/m}{\mu \text{tg}\theta + 2} . \quad (3.25)$$

Notemos que os denominadores positivos em (3.24) e (3.25) garantem que  $R$  e  $\ddot{x}$  tenham o mesmo sentido de  $F$ , que estamos supondo positivo. Portanto, supondo que na condição inicial (3.6)  $v_0$  satisfaz à condição (3.20), temos o seguinte movimento subsequente para o sistema em algum intervalo de tempo após  $t=0$ ,

$$x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F/m}{\mu \text{tg}\theta + 2} t^2 . \quad (3.26)$$



Nesse movimento, a velocidade é dada por

$$\dot{x}_1 = v_0 + \frac{F/m}{\mu \operatorname{tg}\theta + 2} t . \quad (3.27)$$

Sendo sempre positiva, ela satisfaz à condição (3.20) das soluções em consideração, de modo que o movimento pode prosseguir indefinidamente de acordo com as equações de movimento, ou seja, podemos escrever para o movimento  $\phi_1$

$$x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F/m}{\mu \operatorname{tg}\theta + 2} t^2 \quad (t \geq 0) . \quad (3.28)$$

Agora, passemos à segunda solução das equações de movimento, dada pela escolha  $\operatorname{sgn}(R) = -1$ . Nesse caso, de acordo com (3.21) e (3.14), temos para a força da barra a solução

$$R_2 = -\frac{F}{\mu \operatorname{sen}\theta - 2 \cos\theta} . \quad (3.29)$$

e para o sistema a aceleração

$$\ddot{x}_2 = -\frac{F/m}{\mu \operatorname{tg}\theta - 2} . \quad (3.30)$$

Agora, os denominadores em (3.29) e (3.30) são negativos, em virtude da condição de atrito grande (3.16). Com isso, temos  $R$  e  $\ddot{x}$  com sentidos opostos ao de  $F$ , isto é, com sentidos negativos, já que estamos supondo positivo o sentido de  $F$ . Portanto, supondo que na condição inicial (3.6)  $v_0$  satisfaça a condição (3.20), temos o seguinte movimento subsequente para o sistema em algum intervalo de tempo após  $t=0$ ,

$$x_2 = v_0 t - \frac{1}{2} \frac{F/m}{\mu \operatorname{tg}\theta - 2} t^2 . \quad (3.31)$$

Nesse movimento, a velocidade é dada por

$$\dot{x}_2 = v_0 - \frac{F/m}{\mu \operatorname{tg}\theta - 2} t . \quad (3.32)$$

Essa velocidade somente é positiva antes do instante crítico

$$t_c = (\mu \operatorname{tg} \theta - 2) \frac{mv_0}{F} . \quad (3.33)$$

Após esse instante, a velocidade (3.32) viola a condição (3.20) de dois movimentos possíveis. Ela passa a satisfazer a condição  $\operatorname{sgn} \dot{x} = -\operatorname{sgn}(F)$  do primeiro subcaso, de inexistência do movimento. Portanto, o segundo movimento (3.31) é possível apenas no intervalo de tempo entre  $t = 0$  e  $t = t_c$ ,

$$x_2 = v_0 t - \frac{1}{2} \frac{F/m}{\mu \operatorname{tg} \theta - 2} t^2 \quad (0 \leq t < t_c) . \quad (3.34)$$

Portanto, dada a condição inicial no instante  $t = 0$  há dois movimentos subsequentes possíveis no intervalo de tempo  $[0, t_c)$ .

### Conclusão.

No caso de atrito grande, dado pela condição (3.16),  $\mu > 2 \cot \theta$ , dada uma condição inicial, ou nenhum movimento é possível a partir dela, se a velocidade inicial tiver sinal oposto ao da força aplicada  $F$ , ou dois movimentos são possíveis durante um certo intervalo, se tiver o mesmo sinal; desses dois movimentos um pode prosseguir indefinidamente, e o outro torna-se impossível a partir de um certo instante crítico.

### 3.2.4 Caso de atrito pequeno

Agora, seja o caso em que no denominador em (3.13) o termo de maior módulo seja o segundo,  $|2 \cos \theta| > |\varepsilon \mu \operatorname{sen} \theta|$ , ou seja,

$$\mu < 2 \cot \theta . \quad (3.35)$$

Esse é o caso que chamamos de atrito pequeno (comparado com  $2 \cot \theta$ ). Nesse caso, o denominador em (3.13) tem o sinal do segundo termo  $2 \cos \theta$ , que é positivo,

$$\operatorname{sgn}(2 \cos \theta + \varepsilon \mu \operatorname{sen} \theta) = \operatorname{sgn}(2 \cos \theta) = 1 . \quad (3.36)$$

Conseqüentemente, obtemos da equação (3.13) que  $\text{sgn}(R) = \text{sgn}(F) / \text{sgn}(2 \cos \theta + \varepsilon \mu \text{sen} \theta) = \text{sgn}(F)$ , isto é,

$$\text{sgn}(R) = \text{sgn}(F) . \quad (3.37)$$

Essa condição é sempre realizável e determina univocamente o sinal de  $R$ . Substituindo esse resultado em (3.10), obtemos  $\varepsilon = \text{sgn}(\dot{x}) \text{sgn}(F)$ , de modo que (3.13) toma a forma

$$R = \frac{F}{2 \cos \theta + \text{sgn}(\dot{x}) \text{sgn}(F) \mu \text{sen} \theta} . \quad (3.38)$$

Desse modo,  $R$  tem um único valor determinado pela força aplicada  $F$  e pelo sinal da velocidade inicial e, conseqüentemente, a aceleração (3.14) também tem um único valor dado por

$$\ddot{x} = \frac{F/m}{2 + \text{sgn}(\dot{x}) \text{sgn}(F) \mu \text{tg} \theta} . \quad (3.39)$$

Para ilustrar esse resultado, podemos fixar o sinal de  $F$  como sendo positivo e considerar os dois casos de velocidade inicial positiva e negativa,  $v_0 = \pm |v_0|$ , temos duas acelerações  $\ddot{x}_{\pm} = (F/m) / (2 \pm \mu \text{tg} \theta)$  e, com a condição inicial (3.6), dois movimentos

$$x_{\pm} = \pm |v_0| t + \frac{1}{2} \frac{F/m}{2 \pm \mu \text{tg} \theta} t^2 . \quad (3.40)$$

Como eles correspondem a condições iniciais diferentes, em nada contrariam o princípio do determinismo newtoniano.

### 3.2.5 Caso de atrito crítico

Finalmente, examinemos na condição de compatibilidade (3.12) a possibilidade  $\varepsilon \mu \text{sen} \theta + 2 \cos \theta = 0$ , que é equivalente a  $-\varepsilon \mu = 2 \cot \theta$  e leva a um valor infinito de  $R$ . Como as grandezas envolvidas na igualdade anterior são positivas, exceto  $\varepsilon$ , essa igualdade é possível somente se  $\varepsilon = -1$ . Isso significa, de acordo com (3.10), que o sentido de  $R$  deve ser oposto ao da velocidade  $\text{sgn}(R) = -\text{sgn}(\dot{x})$ , ou seja,  $R = -\text{sgn}(\dot{x}) \infty$ . Levando esse resultado na segunda equação em (3.11), obtemos a aceleração  $\ddot{x} = -\text{sgn}(\dot{x}) \infty$ , ou seja, uma aceleração infinita e oposta

à velocidade, o que caracteriza a impossibilidade do movimento para qualquer condição inicial. Tal caso mostra que as idealizações usadas para formular o problema pode levar a situações de extrema artificialidade.

### 3.3 Pêndulo com pivô deslizante

Consideremos um sistema constituído por duas partículas de mesma massa  $m$  ligadas por uma barra rígida de comprimento  $a$  e massa desprezível. Uma das partículas desliza com atrito dentro de um trilho horizontal e o sistema todo tem seus movimentos restritos a um plano vertical. Escolhemos os eixos coordenados de modo que  $\mathcal{OXY}$  esteja nesse plano com  $\mathcal{OX}$  ao longo do trilho e  $\mathcal{OY}$  apontando para baixo, como mostra a figura 3.3. O sistema se constitui pois em um pêndulo com pivô deslizante na horizontal e massa igual à da partícula suspensa. Desejamos encontrar os seus movimentos possíveis. A configuração do sistema é dada pela posição  $(x, 0)$  da partícula no trilho e pela posição  $(x_1, y_1)$  da partícula suspensa. Também usaremos como variável cinemática o ângulo  $\theta$  que a barra faz com o eixo  $\mathcal{OY}$ , como ilustrado na figura 3.3

As forças externas sobre o sistema são os pesos das partículas e as forças exercidas pelo trilho, a normal vincular  $\mathbf{N}$  e a de atrito cinético  $\mathbf{f}$  (as forças exercidas pela barra ideal são forças internas desse sistema). Na figura estão indicadas as forças externas apontando nos sentidos positivos dos eixos coordenados, com exceção da força normal, desenhada com componente negativa ao longo do eixo  $\mathcal{OY}$ . Notemos que, no que segue,  $N$  e  $f$  representam as componentes das forças normal e de atrito, respectivamente, e não os seus módulos.

O centro de massa do sistema está, obviamente, no meio da barra. Aplicando ao sistema o teorema do movimento do centro de massa (1.72), obtemos

$$\ddot{x} + \ddot{x}_1 = \frac{f}{m} \quad \text{e} \quad \ddot{y}_1 = \frac{N}{m} + 2g . \quad (3.41)$$

Do teorema do torque e momento angular (1.83), obtemos  $I_{cm}\ddot{\theta} = \tau_{cm}^{ex}$ , onde  $I_{cm} = ma^2/2$  é o momento de inércia do sistema relativo a um eixo paralelo  $\mathcal{OZ}$  que passa pelo centro de massa e  $\tau_{cm}^{ex}$  é a componente ao longo de  $\mathcal{OZ}$  do torque externo total relativo ao centro de massa. Dessa equação, obtemos  $(ma^2/2)\ddot{\theta} =$

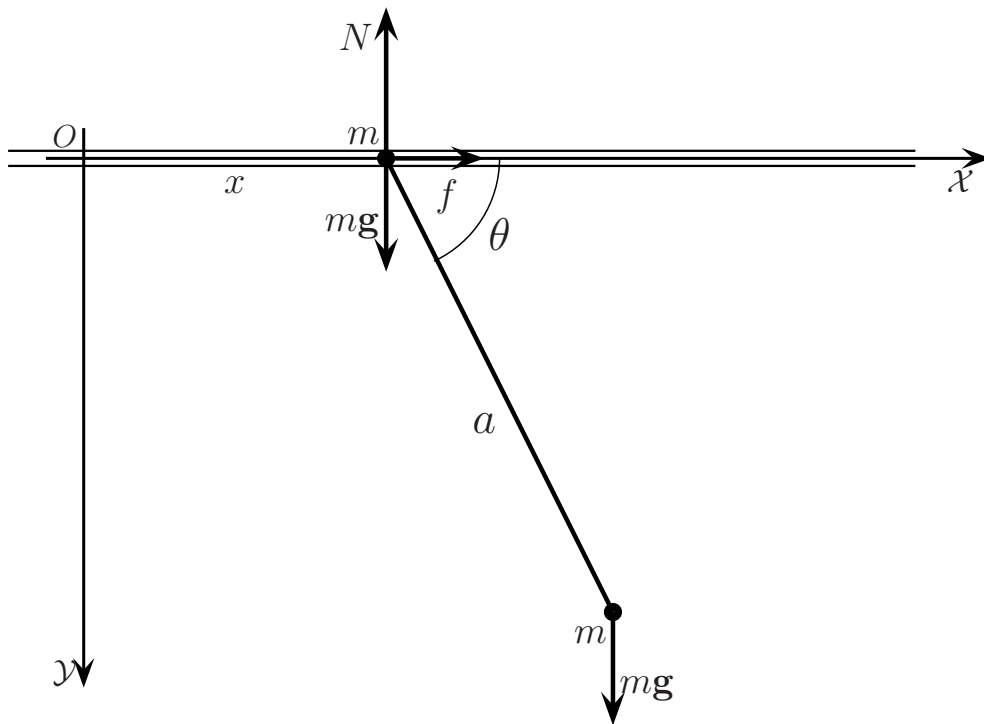


Figura 3.3: Pêndulo com pivô deslizando na horizontal com massa igual à massa suspensa.

$(a/2) \operatorname{sen}\theta f - (a/2) \cos\theta N$ , isto é,

$$a\ddot{\theta} = \frac{f}{m} \operatorname{sen}\theta - \frac{N}{m} \cos\theta . \quad (3.42)$$

O vínculo da barra rígida de comprimento  $a$  que liga as partículas é dado por

$$x_1 = x + a \cos\theta \quad \text{e} \quad y_1 = a \operatorname{sen}\theta . \quad (3.43)$$

Impondo esses vínculos às equações do movimento do centro de massa (3.41), obtemos as equações de movimento

$$2\ddot{x} - a \operatorname{sen}\theta \ddot{\theta} - a \cos\theta \dot{\theta}^2 = \frac{f}{m} \quad \text{e} \quad a \cos\theta \ddot{\theta} - a \operatorname{sen}\theta \dot{\theta}^2 = \frac{N}{m} + 2g . \quad (3.44)$$

Substituindo as expressões para  $f$  e  $N$  dadas por essas equações na equação de

movimento (3.42), ela assume a forma

$$\ddot{x} \sin \theta - a \ddot{\theta} + g \cos \theta = 0 . \quad (3.45)$$

Agora, pelas leis empíricas do atrito,  $f = -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu|N|$ , donde  $f = -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu \operatorname{sgn}(N)N$ , isto é

$$f = -\varepsilon\mu N , \quad (3.46)$$

onde usamos a definição

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(\dot{x}) \operatorname{sgn}(N) , \quad (3.47)$$

Usando (3.46) para eliminar  $f$  da primeira equação em (3.44) obtemos

$$2\ddot{x} - a \sin \theta \ddot{\theta} - a \cos \theta \dot{\theta}^2 = -\varepsilon\mu \frac{N}{m} . \quad (3.48)$$

Essa equação junto com a segunda em (3.44) e a equação (3.45) forma um sistema de três equações para as três incógnitas  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{\theta}$  e  $N$ . Após alguma álgebra obtemos as soluções

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{D} \left\{ a\dot{\theta}^2 (\cos \theta + \varepsilon\mu \sin \theta) + g[\cos \theta \sin \theta + \varepsilon\mu(1 + \sin^2 \theta)] \right\} , \\ a\ddot{\theta} &= \frac{1}{D} \left[ (a\dot{\theta}^2 \sin \theta + 2g)(\cos \theta + \varepsilon\mu \sin \theta) \right] , \\ N &= -\frac{1}{D} m(a\dot{\theta}^2 \sin \theta + 2g) , \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde usamos a definição

$$D = 1 + \cos^2 \theta + \varepsilon\mu \sin \theta \cos \theta . \quad (3.50)$$

As duas primeiras equações em (3.49) são equações de movimento e obedecem a condição de Cauchy. A terceira equação permite, em princípio, determinar a força vincular  $N$  uma vez conhecido o movimento (de fato basta conhecer  $\theta$  em função do tempo). Essa última equação tem a forma explícita

$$N = -\frac{m(a\dot{\theta}^2 \sin \theta + 2g)}{1 + \cos^2 \theta + \varepsilon\mu \sin \theta \cos \theta} . \quad (3.51)$$

Essa equação apresenta as duas características delicadas que levam às violações do determinismo newtoniano apontadas por Painlevé. A primeira é que nela a normal depende do coeficiente de atrito. A segunda é que a normal aparece com seu sinal no membro esquerdo da equação e o sinal da normal também aparece no membro direito, de modo a levantar a questão da consistência da equação, que investigaremos a seguir.

Para fixar as idéias vamos especificar a condição inicial como sendo

$$x|_{t=t_0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=t_0} = v_0, \quad \theta|_{t=t_0} = \theta_0, \quad \dot{\theta}|_{t=t_0} = \omega_0 \quad (0 < \theta_0 < \pi/2). \quad (3.52)$$

onde  $x_0$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$  e  $\omega_0$  são números arbitrários, exceto pela limitação de que  $0 < \theta_0 < \pi/2$ . Vamos considerar de agora em diante ângulos em uma vizinhança de  $\theta_0$ , de modo que seus senos e cossenos sejam positivos.

Agora fazemos a hipótese crucial, de que  $D = 1 + \cos^2 \theta + \varepsilon \mu \operatorname{sen} \theta \cos \theta$  tenha o sinal de  $\varepsilon$  na vizinhança de  $\theta_0$ ,

$$\operatorname{sgn}(1 + \cos^2 \theta + \varepsilon \mu \operatorname{sen} \theta \cos \theta) = \operatorname{sgn}(\varepsilon). \quad (3.53)$$

Essa condição é satisfeita se, e somente se,

$$\mu > \frac{1 + \cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} \quad (3.54)$$

nessa vizinhança. Naturalmente, essa é uma hipótese de que o atrito é relativamente grande. Verifiquemos a consistência do sinal de  $N$  em (3.51). Tomando o sinal de ambos os membros de (3.51) e usando a condição com atrito grande (3.53), obtemos

$$\operatorname{sgn}(N) = -\operatorname{sgn}\left(\frac{m(a\dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta + 2g)}{1 + \cos^2 \theta + \varepsilon \mu \operatorname{sen} \theta \cos \theta}\right) = -\operatorname{sgn}(\varepsilon), \quad (3.55)$$

ou seja

$$\operatorname{sgn}(N) = -\varepsilon. \quad (3.56)$$

Substituindo nessa igualdade a expressão (3.47) de  $\varepsilon$  determinada pelas leis empíricas

do atrito cinético, obtemos

$$\operatorname{sgn}(N) = -\operatorname{sgn}(\dot{x}) \operatorname{sgn}(N) . \quad (3.57)$$

Consequentemente, se  $\dot{x} > 0$ , a equação (3.51) é inconsistente e, se  $\dot{x} < 0$ , a equação (3.51) tem duas soluções, uma para  $N > 0$  e outra para  $N < 0$ . Portanto, se na condição inicial (3.52)  $v_0 > 0$ , nenhum movimento é possível. Por outro lado, se  $v_0 < 0$ , os dois sinais de  $N$  são possíveis. Da equação (3.47) obtemos  $\varepsilon = -\operatorname{sgn}(N)$ , e consequentemente as duas soluções para (3.51):

$$N_{\pm} = -\frac{m(a\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta + 2g)}{1 + \cos^2\theta \mp \mu \operatorname{sen}\theta \cos\theta} , \quad (3.58)$$

com  $N$  positiva e negativa, respectivamente. Com isso, as duas primeiras equações nos fornecem dois movimentos possíveis a partir da mesma condição inicial, dadas por

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{\pm} &= \frac{a\dot{\theta}^2(\cos\theta \mp \mu \operatorname{sen}\theta) + g[\cos\theta \operatorname{sen}\theta \mp \mu(1 + \operatorname{sen}^2\theta)]}{1 + \cos^2\theta \mp \mu \operatorname{sen}\theta \cos\theta} , \\ a\ddot{\theta}_{\pm} &= \frac{(a\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta + 2g)(\cos\theta - \mu \operatorname{sen}\theta)}{1 + \cos^2\theta \mp \mu \operatorname{sen}\theta \cos\theta} , \end{aligned} \quad (3.59)$$

respectivamente. Notemos que, embora não saibamos resolver essas equações para encontrar os movimentos, sabemos que eles existem, pois as equações diferenciais (3.59) satisfazem às condições de Cauchy nos dois casos  $\varepsilon = \pm 1$ . De fato, em (3.59) os denominadores são sempre positivos, devido à condição de atrito grande, e as derivadas em relação a  $\theta$  e  $\dot{\theta}$  são contínuas. Cada caso  $\varepsilon = \pm 1$  dá um único movimento possível e os dois casos juntos dão dois movimentos possíveis a partir da mesma condição inicial (3.52). Em suma, as leis empíricas do atrito, com a condição de atrito grande, violam o princípio do determinismo newtoniano. Para a condição inicial (3.52), com  $v_0 > 0$  nenhum movimento é possível e com  $v_0 < 0$  dois movimentos diferentes são possíveis.



### 3.4 Roda com centro de massa excêntrico

Nesta seção abordamos nosso último exemplo de violação de determinismo newtoniano devido às leis empíricas do atrito apresentado por Painlevé. Esse exemplo é o de menos interesse didático devido à sua complexidade. No entanto, nele o sistema não está vinculado em trilhos e portanto não está sujeito a reações ilimitadamente grandes que o trilho pode fazer para garantir o vínculo [31]. No presente caso o vínculo consiste em uma roda não penetrar na superfície em que desliza e, além disso, a roda pode saltar e perder contato com a superfície. A finalidade dessa seção é apresentar as características diferentes que esse exemplo apresenta em relação aos anteriores.

Seja uma roda de massa  $M$ , raio  $a$  e centro de massa em um ponto  $G$  distante de  $b$  do seu centro  $C$ , conforme indica a figura 3.4. A roda desliza com atrito sobre um piso plano horizontal, sendo o coeficiente de atrito entre eles  $\mu$ , com a pos-

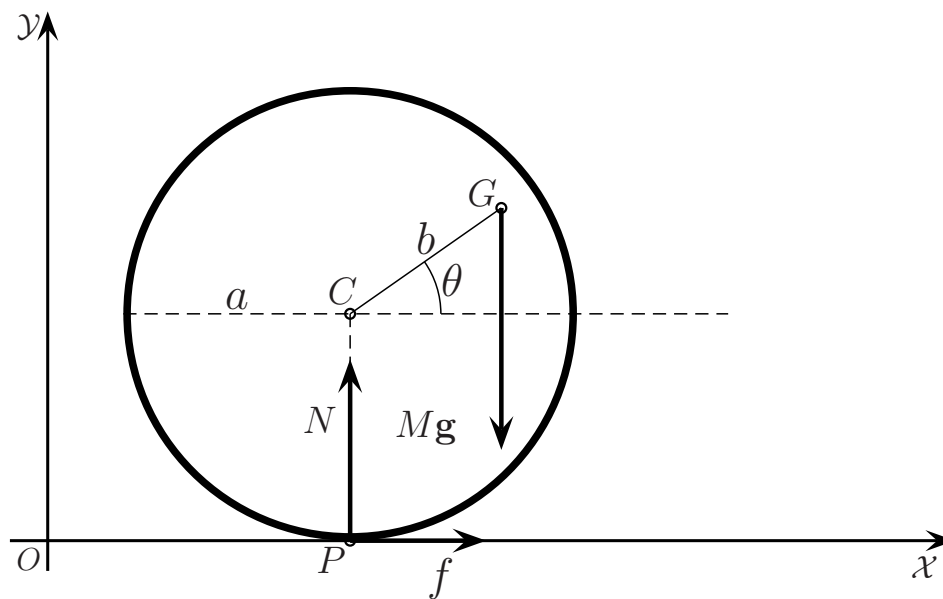


Figura 3.4: Roda com centro de massa excêntrico.

sibilidade de perder contato com esse piso. Essa possibilidade decorre do centro

de massa ser excêntrico (conferir página 648 e seguintes no tratado de mecânica racional de Painlevé [5]). Em seu movimento, a roda se mantém em um plano vertical fixo, de modo que sua velocidade angular é perpendicular a esse plano. Escolhemos um sistema de eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$  com o eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$  na interseção do plano vertical do movimento com o piso horizontal e o eixo  $\mathcal{O}\mathcal{Y}$  vertical apontando para cima. Portanto, a roda se move no plano  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}$  e desliza sobre o eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$  quando está em contato com o piso. O ponto da superfície da roda que entra em contato com o piso é denotado por  $P$  e está, obviamente, na mesma vertical que o centro  $C$ . Denotamos a posição de  $C$  relativa ao sistema de eixos por  $(x, y)$  e a do centro de massa em  $G$ , por  $(X, Y)$ . Para indicar a posição do centro de massa na roda usamos o ângulo que  $CG$  faz com o eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$ , que denotamos por  $\theta$ . Com isso, temos as relações

$$X = x + b \cos \theta \quad \text{e} \quad Y = y + b \sin \theta . \quad (3.60)$$

A condição inicial é escolhida de modo que no instante inicial  $t_0$  a roda esteja em contato com o piso e seja lançada horizontalmente,

$$y_0 = y|_{t=t_0} = \phi_y(t_0) = a \quad \text{e} \quad v_{y0} = \dot{y}|_{t=t_0} = \dot{\phi}_y(t_0) = 0 . \quad (3.61)$$

Essa é a primeira de diversas suposições que faremos. Será então necessário mostrar que são compatíveis. Isso faremos mais no final da discussões em que mostraremos que todas as suposições podem ser simultaneamente realizadas.

A velocidade de deslizamento da roda é a velocidade  $\mathbf{v}_P$  do ponto  $P$  durante o tempo de contato. Nesse caso,  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PC}$ , onde  $\mathbf{v}_C = \dot{x}\hat{\mathbf{x}}$  é a velocidade do centro  $C$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{z}}$  a velocidade angular da roda e  $\mathbf{r}_{PC} = -a\hat{\mathbf{y}}$  a posição de  $P$  relativa a  $C$ . Portanto,  $\mathbf{v}_P = (\dot{x} + a\dot{\theta})\hat{\mathbf{x}}$ . Usando nessa expressão a primeira relação em (3.60), obtemos para a velocidade de deslizamento,  $\mathbf{v}_P = (\dot{X} + b\dot{\theta}\sin\theta + a\dot{\theta})\hat{\mathbf{x}}$ . Vamos considerar movimentos da roda em que essa velocidade aponta no sentido negativo do eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$ , para com isso fixar o sentido da força de atrito como positivo. Esta escolha é perfeitamente possível, como é evidente na expressão de

$v_P$ . Basta considerar  $\dot{\theta} < 0$  com  $|\dot{\theta}|$  grande o bastante. Portanto, consideramos

$$\dot{X} + a\dot{\theta} \left( 1 + \frac{b}{a} \operatorname{sen}\theta \right) < 0 \quad (3.62)$$

e com isso garantimos que a componente  $f$  da força de atrito ao longo de  $\mathcal{OX}$  seja positiva quando há contato,  $f > 0$ . Naturalmente, se denotarmos por  $N$  a componente da força normal ao longo de  $\mathcal{OY}$ , nesse caso em que temos uma superfície e não um trilho,  $N \geq 0$ , sendo  $N > 0$  quando há contato. Essas propriedades estão ilustradas na figura 3.4. Em termos simples, podemos dizer no problema presente  $N$  e  $f$  representam de fato os módulos respectivos da normal e da força de atrito. Agora passamos a investigar os dois tipos de movimento possíveis, o da roda em contato com o piso e o da roda saltando acima do piso.

Primeiramente, consideremos o movimento da roda em contato com o piso. A condição dinâmica de contato é  $N \geq 0$ , da qual obtemos  $f = \mu N \geq 0$ . A condição cinemática de contato é que  $y = a$  durante o movimento. Levando em conta que as forças externas sobre a roda são o seu peso  $Mg$  e as forças normal e de atrito, e usando o teorema do movimento do centro de massa (1.72), obtemos

$$M\ddot{X} = \mu N \quad \text{e} \quad M\ddot{Y} = N - Mg . \quad (3.63)$$

Do teorema do torque e momento angular (1.83), obtemos  $I_{cm}\ddot{\theta} = \tau_{cm}^{ex}$ , onde  $I_{cm}$  é o momento de inércia da roda relativo a um eixo paralelo  $\mathcal{OZ}$  que passa pelo seu centro de massa e  $\tau_{cm}^{ex}$  é a componente ao longo de  $\mathcal{OZ}$  do torque externo total relativo ao centro de massa. Escrevendo o momento de inércia em termos do raio de giração  $k$  da roda,  $I_{cm} = Mk^2$ , esse teorema assume a forma

$$Mk^2\ddot{\theta} = \mu NY - Nb \cos \theta . \quad (3.64)$$

Substituindo a condição cinemática de contato,  $y = a$ , na segunda equação em (3.60) e derivando o resultado encontrado, obtemos

$$Y = a + b \operatorname{sen}\theta , \quad \dot{Y} = -b\dot{\theta} \cos \theta \quad \text{e} \quad \ddot{Y} = b\ddot{\theta} \cos \theta - b\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\theta . \quad (3.65)$$

Usando essa última equação para eliminar  $\ddot{Y}$  da segunda equação em (3.63) e

juntando o resultado encontrado com (3.64), obtemos o sistema de duas equações

$$M[b\ddot{\theta} \cos \theta - b\dot{\theta}^2 \sin \theta] = N - Mg \quad \text{e} \quad Mk^2\ddot{\theta} = \mu N Y - N b \cos \theta . \quad (3.66)$$

Eliminando  $\ddot{\theta}$  dessas equações, chegamos à expressão para o módulo da normal

$$N = \frac{Mk^2(g - b\dot{\theta}^2 \sin \theta)}{k^2 + b^2 \cos^2 \theta - \mu b \cos \theta (a + b \sin \theta)} . \quad (3.67)$$

A questão é saber se essa expressão define uma solução para a normal. Isso ocorre se, e somente se  $N \geq 0$ , já que  $N$  representa o módulo da normal. Se esse for o caso, essa expressão para a normal pode ser substituída em (3.63) e (3.64) para obtermos as equações de movimento

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \frac{\mu k^2 (g - b\dot{\theta}^2 \sin \theta)}{k^2 + b^2 \cos^2 \theta - \mu b \cos \theta (a + b \sin \theta)} , \\ \ddot{Y} &= - \frac{k^2 (b\dot{\theta}^2 / g) \sin \theta + [b^2 \cos^2 \theta - \mu b \cos \theta (a + b \sin \theta)]}{k^2 + b^2 \cos^2 \theta - \mu b \cos \theta (a + b \sin \theta)} g , \\ \ddot{\theta} &= \frac{(\mu Y - b \cos \theta)(g - b\dot{\theta}^2 \sin \theta)}{k^2 + b^2 \cos^2 \theta - \mu b \cos \theta (a + b \sin \theta)} . \end{aligned} \quad (3.68)$$

Embora essas equações sejam muito complicadas para serem resolvidas exatamente, elas satisfazem as condições de Cauchy, de modo que fica garantida a existência de uma e somente uma solução que satisfaça condições iniciais dadas (e que respeitem as restrições (3.61) e (3.62)). Essa solução determina  $X$  e  $Y$  em função do tempo, isto é, o movimento do centro de massa da roda, e  $\theta$  em função do tempo, isto é, o movimento de rotação da roda. Substituindo  $X$ ,  $Y$  e  $\theta$  como funções do tempo em (3.67), obtemos a normal como função do tempo e o problema fica completamente resolvido.

Resta saber se (3.67) define uma solução para a normal, para que as soluções de (3.68) tenham o significado de um movimento possível da roda. A questão é novamente delicada por causa da normal (3.67) depender do coeficiente de atrito  $\mu$ . Para simplificar nossa análise, consideremos trechos de movimentos em que o centro de massa  $G$  está avançado em relação ao centro  $C$  da roda,  $X - x =$

$b \cos \theta > 0$ , isto é,

$$b \cos \theta > 0 . \quad (3.69)$$

Agora faremos a suposição crucial de que o denominador em (3.67) é negativo,

$$\text{sgn}(k^2 + b^2 \cos^2 \theta - \mu b \cos \theta (a + b \text{sen} \theta)) = -1 . \quad (3.70)$$

Essa condição é satisfeita se, e somente se,

$$\mu > \frac{k^2 + b^2 \cos^2 \theta}{b \cos \theta (a + b \text{sen} \theta)} , \quad (3.71)$$

que é uma condição de atrito grande. Notemos que nessa desigualdade ambos os membros são positivos, pois  $b \cos \theta > 0$  pela hipótese feita em (3.69) de centro de massa avançado, e  $a + b \text{sen} \theta > 0$  por ser a altura  $Y$  do centro de massa acima do piso. Tomando o sinal de ambos os membros de (3.67), obtemos

$$\text{sgn}(N) = -\text{sgn}(g - b\dot{\theta}^2 \text{sen} \theta) , \quad (3.72)$$

onde foi usada a hipótese (3.70) decorrente do atrito grande. Resta examinar as duas possibilidades

$$\text{sgn}(g - b\dot{\theta}^2 \text{sen} \theta) = \pm 1 . \quad (3.73)$$

Se  $\text{sgn}(g - b\dot{\theta}^2 \text{sen} \theta) = 1$ , (3.72) se reduz a  $\text{sgn}(N) = -1$ , o que é absurdo. Portanto, não existe normal que possa garantir a existência de movimento para qualquer condição inicial que satisfaça às restrições impostas no problema. Se  $\text{sgn}(g - b\dot{\theta}^2 \text{sen} \theta) = -1$ , (3.72) se reduz a  $\text{sgn}(N) = 1$ , o que mostra que (3.67) define uma normal que garante a existência de movimento para qualquer condição inicial que satisfaça às condições impostas ao problema.

Para fundamentar essas análises, verifiquemos agora que as condições impostas ao problema são compatíveis. São elas as condições (3.61) de movimento inicial com contato e velocidade de lançamento horizontal, (3.62) de velocidade de deslizamento negativa, (3.69) de centro de massa avançado em relação ao centro, (3.71) de atrito grande e (3.73) do sinal do numerador na expressão (3.67) da normal. As condições (3.61) são sobre o movimento vertical do centro de massa e são totalmente independentes das outras condições que dizem respeito

ao movimento horizontal e de rotação. A condição (3.62) de velocidade de deslizamento negativa pode ser satisfeita com  $\dot{\theta}$  negativo e de módulo grande o bastante,  $|\dot{\theta}| > (\dot{X}/a)/[1 + (b/a)\text{sen}\theta]$ , para qualquer  $\theta$ . A condição de centro de massa avançado é satisfeita se  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ . Com essa restrição no ângulo, a condição (3.71) de atrito grande pode sempre ser implementada. Mas para não ser necessário supor  $\mu$  desmesuradamente grande, podemos escolher  $\theta$  longe de  $\pm\pi$ , por exemplo, com a restrição  $-\pi/4 < \theta < \pi/4$ . Finalmente, na condição (3.73) do sinal do numerador, precisamos aceitar a suposição já feita de  $|\dot{\theta}|$  grande. Ainda assim, é possível obter em (3.73) o sinal positivo se tomarmos  $\theta$  próximo de zero, e o sinal negativo se tomarmos  $\theta$  afastado de zero no intervalo já pressuposto  $-\pi/4 < \theta < \pi/4$  (não esqueçamos que  $|\dot{\theta}|$  permanece livre para ser aumentado). Podemos pois satisfazer simultaneamente às condições impostas, inclusive a dupla escolha de sinais em (3.73).

Estabelecida a compatibilidade das condições impostas ao problema, podemos chegar à conclusão final: dada uma condição inicial obedecendo as condições impostas,

$$(i) \text{ não existe movimento com contato se } \text{sgn}(g - b\dot{\theta}^2 \text{sen}\theta) \Big|_{t=t_0} = +1 \quad (3.74)$$

$$(ii) \text{ existe movimento com contato se } \text{sgn}(g - b\dot{\theta}^2 \text{sen}\theta) \Big|_{t=t_0} = -1 \quad (3.75)$$

Agora passemos ao estudo da possibilidade de movimento da roda sem contato com o piso, a partir de condição inicial com a mesma restrição (3.61). A condição dinâmica de perda de contato da roda com piso é  $N = 0$  e  $f = 0$ . Nesse caso, as equações de movimento podem ser obtidas impondo  $N = 0$  e  $f = 0$  a (3.63) e (3.64). Obtemos

$$M\ddot{X} = 0, \quad M\ddot{Y} = -Mg \quad \text{e} \quad Mk^2\ddot{\theta} = 0. \quad (3.76)$$

A condição cinemática da perda de contato é  $\psi(t) = y - a > 0$  para algum intervalo de tempo depois do inicial  $t_0$ . Sendo ela satisfeita, há perda de contato e o movimento é determinado pelas equações (3.76). Se pelo contrário  $\psi(t) = y - a < 0$  o movimento sem contato (ou qualquer outro) é impossível, pois essa é a condição da roda penetrar dentro do piso. Considerando  $t$  em um intervalo

de tempo  $[t_0, t_1)$  suficientemente pequeno, temos  $y - a = \psi(t) = \psi(t_0) + (t - t_0)\dot{\psi}(t_0) + (1/2!)(t - t_0)^2\ddot{\psi}(t_0) + \dots$ . Mas  $\psi(t_0) = y_0 - a = 0$  e  $\dot{\psi}(t_0) = v_{y0} = 0$  em virtude da condição inicial (3.61); logo:  $y - a = \psi(t) = (1/2!)(t - t_0)^2\ddot{\psi}(t_0) + \dots$ . Portanto  $\ddot{\psi}(t_0) > 0$  garante  $y - a > 0$  e a possibilidade de movimento sem contato, ao passo que  $\ddot{\psi}(t_0) < 0$  leva a  $y - a < 0$  e à impossibilidade de movimento sem contato. Vamos usar a segunda fórmula em (3.60) para expressar essas condições em termos das variáveis  $Y$  e  $\theta$ , temos  $\psi(t) = y - a = Y - b \text{sen}\theta - a$ , donde

$$\ddot{\psi}(t) = \ddot{Y} + b\dot{\theta}^2 \text{sen}\theta - b\ddot{\theta} \cos\theta \quad (3.77)$$

Usando nessa expressão a segunda e terceira equações em (3.76), obtemos

$$\ddot{\psi}(t) = -(g - b\dot{\theta}^2 \text{sen}\theta) . \quad (3.78)$$

Portanto, as condições de existência ou não de movimento sem contato, respectivamente,  $\text{sgn}(\ddot{\psi}(t_0)) = \pm 1$ , são equivalentes a, respectivamente,  $\text{sgn}(g - b\dot{\theta}^2 \text{sen}\theta)\Big|_{t=t_0} = \mp 1$ . Em suma:

$$(i) \text{ não existe movimento sem contato se } \text{sgn}(g - b\dot{\theta}^2 \text{sen}\theta)\Big|_{t=t_0} = +1 \quad (3.79)$$

$$(ii) \text{ existe movimento sem contato se } \text{sgn}(g - b\dot{\theta}^2 \text{sen}\theta)\Big|_{t=t_0} = -1 \quad (3.80)$$

Juntando (3.74) com (3.79), concluímos que para uma condição inicial que satisfaça  $\text{sgn}(g - b\dot{\theta}^2 \text{sen}\theta)\Big|_{t=t_0} = +1$  não existe nenhum movimento possível para a roda, com ou sem contato com o solo. Juntando (3.75) com (3.80), concluimos que para uma condição inicial que satisfaça  $\text{sgn}(g - b\dot{\theta}^2 \text{sen}\theta)\Big|_{t=t_0} = -1$  existem dois movimentos distintos possíveis, um no qual a roda se mantém em contato com o piso e o outro no qual ela perde o contato. A conclusão final é que as leis empíricas do atrito aplicadas com atrito grande à roda com centro de massa excêntrico levam à violações do princípio do determinismo newtoniano.

# Apêndice

Este é um material instrucional proposto como produto da dissertação de mestrado de Jorge Luiz Dias Gomes, apresentada em 04/02/2011 ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

## Idealizações e violações do determinismo newtoniano

A segunda lei de Newton determina os movimentos possíveis de um sistema quando são especificadas as forças que agem sobre ele. Também postulamos, nem sempre de modo explícito, que existe um único movimento dentre os possíveis que satisfaz a uma dada condição inicial. Como sabemos, uma condição inicial é definida pelas posições e velocidades das partículas do sistema em um certo instante. Usualmente, o instante, as posições e as velocidades são chamadas instante inicial, posições iniciais e velocidades iniciais. Desse modo, *dada uma condição inicial do sistema, existe um, e somente um, movimento do sistema que satisfaz a essa condição*, afirmação essa chamada **princípio do determinismo newtoniano**. Esse princípio, pelo qual cada condição inicial determina univocamente o movimento do sistema, desempenha um papel fundamental na mecânica newtoniana. Essa existência e unicidade do movimento é claramente usada quando ensinamos, por exemplo, que há sempre um único movimento de um projétil próximo à superfície da Terra quando damos sua posição e velocidade de lançamento.

Em um curso ministrado na *Faculté de Science de Paris* em 1895 [1], Paul Painlevé mostrou que é possível haver incompatibilidade entre as leis empíricas coulombianas do atrito cinético e o princípio do determinismo newtoniano. Ele mostrou que há vários exemplos nos quais, para coeficiente de atrito cinético suficientemente grande, há condições iniciais para as quais *nenhum movimento* é possível e condições iniciais para as quais *mais de um movimento* é possível. Esses exemplos contrariam o princípio do determinismo newtoniano. Essas violações são decorrentes das idealizações usadas nos exemplos apresentados por Painlevé.



Elas são idealizações normalmente feitas nos problemas de mecânica do dia a dia em nossas aulas, como supor que superfícies em contato e barras sejam perfeitamente rígidas, ou que haja perfeita proporcionalidade entre os módulos da força de atrito e da força normal de contato entre as superfícies atritantes, como afirma a lei coulombiana do atrito cinético.

Portanto, é importante saber que é possível haver incompatibilidade entre dois aspectos essenciais do formalismo da mecânica clássica, as idealizações normalmente feitas e o princípio do determinismo newtoniano. É particularmente importante para os que ensinam mecânica clássica, como os professores de física do ensino médio. Desejamos neste texto tornar disponível esse conhecimento por meio de um exemplo simples e didático da incompatibilidade mencionada. Para isso, apresentamos a seguir uma versão simplificada de um exemplo proposto por Painlevé.

Seja um haltere de massas iguais; mais especificamente, uma barra de comprimento  $L$  e massa desprezível com duas bolinhas de mesma massa  $m$  presas em suas extremidades. Consideramos que as bolinhas estão sobre uma mesa lisa horizontal, de modo que seus pesos são cancelados pelas normais exercidas pela mesa e as bolinhas se movam no plano horizontal da mesa. Além disso as bolinhas deslizam dentro de dois trilhos paralelos presos à mesa e separados por uma distância menor do que  $L$ . Vamos escolher um sistema de eixos coordenados  $\mathcal{OXY}$  com o eixo  $\mathcal{OX}$  ao longo de um trilho e o eixo  $\mathcal{OY}$  apontando desse trilho para o outro, de modo que a barra faça com o eixo  $\mathcal{OX}$  um ângulo  $\theta$ , sendo  $0 < \theta < \pi/2$ , como indicado na figura. Para facilitar a discussão, a bolinha no trilho ao longo de  $\mathcal{OX}$  será chamada primeira bolinha e a outra, segunda bolinha. O coeficiente de atrito cinético entre a primeira bolinha e o trilho que a guia é  $\mu$  e na segunda bolinha o atrito com o outro trilho é desprezível. Finalmente, temos na primeira bolinha uma força constante dada  $\mathbf{F}$ , na direção e sentido de  $\mathcal{OX}$ . Podemos considerar  $\mathbf{F}$  exercida por meio de um fio preso na bolinha e puxado ao longo do trilho.

Sejam  $x$  e  $x'$  as respectivas coordenadas da primeira e da segunda bolinhas no eixo  $\mathcal{OX}$ . Naturalmente  $x' = x + L \cos \theta$  e a coordenada da segunda bolinha no eixo  $\mathcal{OY}$  é a constante  $y' = L \sin \theta$ . Portanto, basta dar a coordenada  $x$  da primeira bolinha para sabermos sua posição, a da segunda e a do sistema todo. Também é claro que, dado um movimento da primeira bolinha no eixo  $\mathcal{OX}$ , o movimento

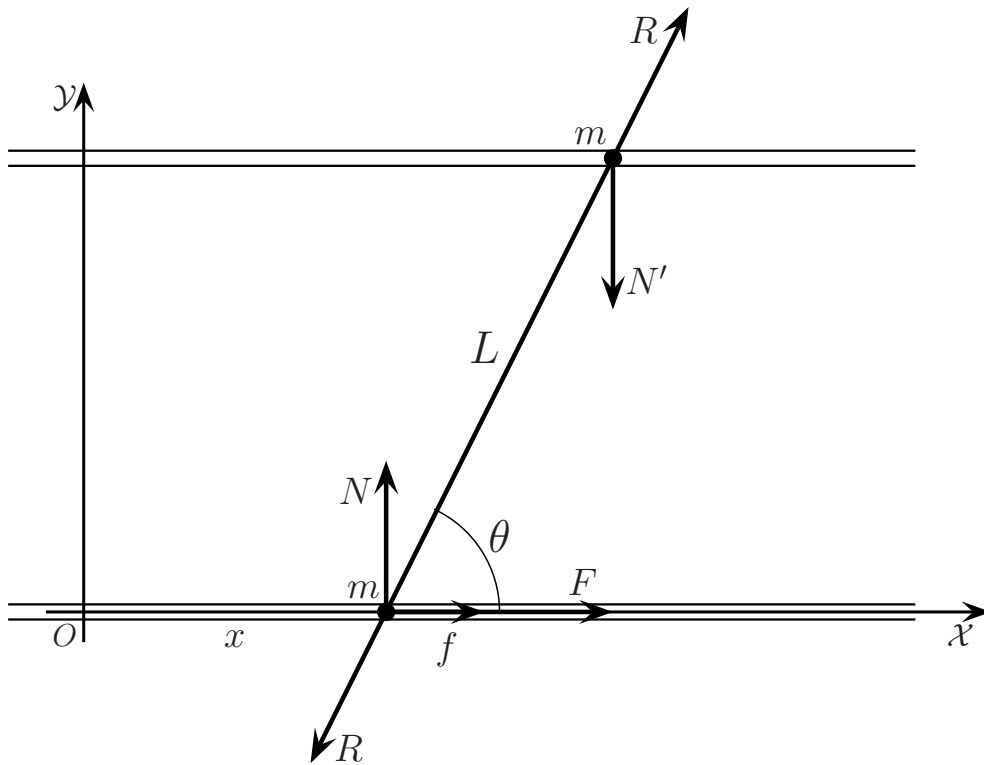


Figura .5: Haltere de massas iguais nos trilhos paralelos e as forças nas massas.

da segunda e do sistema inteiro fica univocamente determinado. Denotando por  $v$  e  $a$  as respectivas velocidade e aceleração escalares da primeira bolinha, e por  $v'$  e  $a'$  as da segunda bolinha, temos as relações  $v' = v$  e  $a' = a$ . Para especificar a condição inicial do sistema, basta dar a condição inicial da primeira bolinha. Como posição inicial da primeira bolinha tomamos a origem e como sua velocidade inicial ao longo do eixo  $\mathcal{OX}$  tomamos uma constante arbitrária  $v_0$ , que pode ser positiva, negativa ou nula. Desse modo, tomando o instante inicial como  $t = 0$ , a condição inicial tem a forma

$$x|_{t=0} = 0 \quad \text{e} \quad v|_{t=0} = v_0 . \quad (81)$$

Desejamos determinar o movimento subsequente do sistema, isto é, encontrar que movimento da primeira bolinha satisfaz à condição inicial dada (81).

As forças que agem na primeira bolinha são a força aplicada constante  $\mathbf{F}$ , a força da barra e a força do trilho. A força aplicada  $\mathbf{F}$  tem apenas uma componente, positiva, ao longo de  $\mathcal{OX}$ , que denotamos por  $F$ . A força da barra, tem com-

ponente apenas na direção dela, que denotamos por  $R$  e convencionamos como positiva quando a barra empurra a bolinha e negativa quando a puxa. A força do trilho tem componente  $f$  de atrito ao longo de  $\mathcal{OX}$  e componente  $N$  normal ao longo de  $\mathcal{OY}$ . Tanto  $f$  quanto  $N$  e  $R$  podem ser positivas ou negativas, conforme a situação (a figura ilustra o caso em que elas são positivas). As forças sobre a segunda bolinha são a força da barra e a força do trilho. A força da barra nessa bolinha é a oposta à força da barra na primeira bolinha, pois a barra tem massa desprezível; com isso, denotamos sua componente que empurra a segunda bolinha também por  $R$ . A força do trilho tem apenas componente normal  $N'_y$  ao longo de  $\mathcal{OY}$ ; por conveniência, trabalharemos com sua negativa  $N' = -N'_y$  (ilustrada na figura no caso  $N' > 0$ ).

Aplicando a segunda lei de Newton à primeira bolinha, obtemos

$$m a = F - R \cos \theta + f \quad \text{e} \quad 0 = N - R \sin \theta . \quad (82)$$

Uma vez que  $a' = a$ , aplicando a segunda lei de Newton à segunda bolinha, obtemos

$$m a = R \cos \theta \quad \text{e} \quad 0 = N' - R \sin \theta . \quad (83)$$

Pelas leis do atrito cinético, a força de atrito sobre a primeira bolinha tem módulo dado por  $|f| = \mu|N|$ , ou seja,  $|f| = \mu|R \sin \theta|$ , em virtude da segunda equação em (82). Levando em conta que  $\sin \theta$  é positivo, obtemos para o módulo da força de atrito

$$|f| = \mu|R| \sin \theta . \quad (84)$$

Como a força de atrito cinético tem sentido oposto ao da velocidade de deslizamento, dois casos se apresentam, conforme  $v$  seja positiva ou negativa. Consideremos cada caso em separado.

Seja o caso de velocidade  $v < 0$ , que nos leva a  $f = \mu|R| \sin \theta$ . Considerando as duas possibilidades da componente  $R$  ser positiva ou negativa,  $|R| = \pm R$ , obtemos a expressão

$$f = \pm \mu R \sin \theta , \quad (85)$$

na qual o sinal superior se refere ao caso em que  $R$  é positiva e o inferior, ao caso em que é negativa. Substituindo (85) na primeira equação em (82), o resultado

forma com a primeira equação em (83) o seguinte sistema

$$m a = F - R \cos \theta \pm \mu R \operatorname{sen} \theta \quad \text{e} \quad m a = R \cos \theta . \quad (86)$$

Desejamos determinar com essas equações  $x$  e  $R$  como função do tempo, isto é, encontrar como o sistema se movimenta e como varia a força de vínculo da barra. Para isso, começamos por eliminar  $a$  entre as duas equações para obter a seguinte expressão para  $R$ ,

$$R = \frac{F}{\mp \mu \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta} , \quad (87)$$

na qual o sinal superior se refere ao caso em que  $R$  é positiva e o inferior, ao caso em que é negativa. Além desses sinais de  $R$  no denominador do membro direito dessa equação, há os sinais de  $R$  no seu membro esquerdo, de modo que se faz necessário examinar a compatibilidade desses sinais. Faremos isso na situação proposta por Painlevé, em que no denominador em (87) o termo de maior módulo seja o primeiro, isto é,  $|\mp \mu \operatorname{sen} \theta| > |2 \cos \theta|$ . Essa condição equivale a

$$\mu > 2 \operatorname{cotg} \theta . \quad (88)$$

Nesse caso, o denominador da fração em (87) tem o sinal do seu primeiro termo, isto é,  $\mp \mu \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta = \mp |\mp \mu \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta|$ . Uma vez que o numerador  $F$  da fração é positivo, o sinal da fração é o sinal do primeiro termo de seu denominador,

$$R = \mp \left| \frac{F}{\mp \mu \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta} \right| . \quad (89)$$

É fácil ver que essa equação é totalmente contraditória, visto que o sinal superior se refere ao caso em que  $R$  é positiva e o inferior, negativa. Com efeito, se  $R$  é positiva vale o sinal superior que determina no membro esquerdo da equação uma componente  $R$  negativa e se  $R$  é negativa vale o sinal inferior que determina no membro esquerdo da equação uma componente  $R$  positiva; em ambos os casos o resultado é absurdo. Portanto, não existe nenhuma solução  $R$  para o sistema de equações (86). Consequentemente, não existe nenhuma solução para a aceleração  $a$  nesse sistema, de modo que nenhum movimento é possível com velocidade negativa. Portanto, para uma dada condição inicial com velocidade inicial negativa,

nenhum movimento é possível.

Agora, seja o caso de velocidade  $v > 0$ , que nos leva a  $f = -\mu|R|\text{sen}\theta$ . Considerando as duas possibilidades da componente  $R$  ser positiva ou negativa,  $|R| = \pm R$ , obtemos a expressão

$$f = \mp\mu R \text{sen}\theta, \quad (90)$$

na qual, novamente, o sinal superior se refere ao caso em que  $R$  é positiva e o inferior, negativa. Substituindo (90) na primeira equação em (82), o resultado forma com a primeira equação em (83) o seguinte sistema

$$m a = F - R \cos \theta \mp \mu R \text{sen}\theta \quad \text{e} \quad m a = R \cos \theta. \quad (91)$$

Eliminando  $a$  entre as duas equações, obtemos

$$R = \frac{F}{\pm\mu \text{sen}\theta + 2 \cos \theta}. \quad (92)$$

Supondo, novamente, a condição (88), o denominador da fração em (92) tem o sinal de seu primeiro termo, que é o sinal da fração, pois o numerador  $F$  é positivo. Portanto, (92) pode ser escrita como

$$R = \pm \left| \frac{F}{\pm\mu \text{sen}\theta + 2 \cos \theta} \right|. \quad (93)$$

Agora, o sinal superior no denominador da fração em (93), que corresponde a  $R$  positivo, determina um valor positivo para a fração e, portanto, para a componente  $R$  do membro esquerdo. Analogamente, o sinal inferior no denominador da fração em (93), que corresponde a  $R$  negativo, determina um valor negativo para a fração e, consequentemente, para a componente  $R$  do membro esquerdo. Portanto, em ambos os casos, a equação (93) é consistente e fornece duas soluções perfeitamente aceitáveis para  $R$ , uma positiva e a outra negativa. São elas

$$R_1 = \frac{F}{\mu \text{sen}\theta + 2 \cos \theta} \quad \text{e} \quad R_2 = -\frac{F}{\mu \text{sen}\theta - 2 \cos \theta}. \quad (94)$$

Substituindo essas soluções na segunda equação em (91) obtemos duas acelerações

possíveis, respectivamente,

$$a_1 = \frac{F/m}{\mu \operatorname{tg}\theta + 2} \quad \text{e} \quad a_2 = -\frac{F/m}{\mu \operatorname{tg}\theta - 2}. \quad (95)$$

Assim, desde que a velocidade  $v$  seja positiva, há duas acelerações possíveis: a positiva  $a_1$  e a negativa  $a_2$ . Naturalmente, nos respectivos movimentos, a velocidade inicial  $v_0$  deve ser positiva.

O primeiro movimento possível é dado por

$$x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} \frac{F/m}{\mu \operatorname{tg}\theta + 2} t^2. \quad (96)$$

Nesse movimento, a velocidade é dada por

$$v_1 = v_0 + \frac{F/m}{\mu \operatorname{tg}\theta + 2} t. \quad (97)$$

Essa velocidade permanece positiva para todo  $t$  maior do que

$$t_1 = -(\mu \operatorname{tg}\theta + 2) \frac{mv_0}{F}. \quad (98)$$

Em particular, o movimento pode prosseguir indefinidamente a partir do instante inicial  $t = 0$ . Antes do instante  $t_1$  a partícula tem velocidade negativa e caímos no primeiro caso, em que nenhum movimento é possível.

A aceleração negativa  $a_2$  em (95) nos fornece o segundo movimento possível com velocidade positiva,

$$x_2 = v_0 t - \frac{1}{2} \frac{F/m}{\mu \operatorname{tg}\theta - 2} t^2. \quad (99)$$

Nesse movimento, a velocidade é dada por

$$v_2 = v_0 - \frac{F/m}{\mu \operatorname{tg}\theta - 2} t. \quad (100)$$

Essa velocidade é positiva para todo  $t$  menor do que

$$t_2 = (\mu \operatorname{tg}\theta - 2) \frac{mv_0}{F}. \quad (101)$$

Após o instante  $t_2$  a partícula tem velocidade negativa e caímos no primeiro caso, em que nenhum movimento é possível. Assim, dada uma condição inicial  $x_0 = 0$  e  $v_0 > 0$ , há dois movimentos possíveis no intervalo de tempo  $(t_1, t_2)$ , no qual o instante negativo  $t_1$  e o positivo  $t_2$  são dados por (98) e (101). Em particular, após o instante inicial  $t = 0$ , os dois movimentos são possíveis no intervalo  $(0, t_2)$ . Consequentemente, para uma dada condição inicial com velocidade inicial positiva, dois movimentos distintos são possíveis, um uniformemente acelerado e o outro uniformemente retardado.

Em suma, no caso de coeficiente de atrito grande o bastante para satisfazer a condição (88),  $\mu > 2 \cotg\theta$ , o princípio do determinismo newtoniano é violado. Dada uma condição inicial, ou nenhum movimento é possível a partir dela ou dois movimentos são possíveis durante um certo intervalo, conforme o sentido da velocidade inicial. É fácil verificar que não há violação do determinismo newtoniano se a condição (88) for trocada por  $\mu < 2 \cotg\theta$  (a condição limítrofe  $\mu = 2 \cotg\theta$  também é problemática). É possível mostrar que não há violação do determinismo newtoniano se não usarmos idealizações de barras e trilhos perfeitamente rígidos e leis de atrito cinético tão idealizadas como as de Coulomb.

# Referências

- [1] Painlevé P 1895 *Leçons sur le Frottement* (Paris: Hermann)
- [2] Painlevé P 1895 *Comptes Rendus de l'Académie de Science de Paris* **CXXI** 112
- [3] Appell P 1911 *Traité de Mécanique Rationnelle* (Paris: Gauthier-Villars)
- [4] Chazy J 1947 *Cours de Mécanique Rationnelle* (Paris: Gauthier-Villars)
- [5] Painlevé P 1930 *Cours de Mécanique Rationnelle* (Paris: Gauthier-Villars)
- [6] Arnold V I 1987 *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica* (Moscovo: Mir)
- [7] Arnold V I 1989 *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York: Springer)
- [8] Cougo-Pinto M V 2009 *Notas de aula de Mecânica Clássica* da disciplina Tópicos de Física Clássica I (Curso de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, UFRJ)
- [9] Saari D G, Xia Z 1995 *Off to Infinity in Finite Time* Notices of the American Mathematical Society **42** 538
- [10] Hofer C 2010 *Causal determinism* Stanford Encyclopedia of Philosophy <<http://plato.stanford.edu/entries/determinism-causal/>>
- [11] Xia Z 1988 *The existence of non-collision singularities in Newtonian systems* Ph.D. Dissertation, Northwestern University
- [12] Xia Z 1992 *The existence of non-collision singularities in Newtonian systems* Ann. Math. **135** 411
- [13] Arnold V I 1985 *Equações diferenciais ordinárias* (Moscovo: Mir)



- [14] Norton J D 2003 *Causation as Folk Science* *Philosopher's Imprint* **3** (4)  
<<http://www.philosophersimprint.org/003004/>>
- [15] Norton J D 2008 *The Dome: An Unexpectedly Simple Failure of Determinism* *Philosophy of Science* **75** 786
- [16] Malament D 2008 *Norton's Slippery Slope* *Philosophy of Science* **75** 799
- [17] Korolev A 2006 *Indeterminism, Asymptotic Reasoning, and Time Irreversibility in Classical Physics* <<http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00003003>>
- [18] Kosyakov B P 2007 *Is Classical Reality Completely Deterministic*  
arXiv:hep-th/0702185v3
- [19] Wilson M 2007 *Determinism and the Mystery of the Missing Physics*  
<<http://philsci-archive.pitt.edu/archive/>>
- [20] Fletcher S C 2010 *What Counts as a Newtonian System? The View from Norton's Dome* <http://philsci-archive.pitt.edu/archive/>
- [21] <[http://www.youtube.com/watch?v=\\_sPhQjGZ8NY](http://www.youtube.com/watch?v=_sPhQjGZ8NY)>
- [22] Painlevé P 1955 *Les axiomes de la mécanique - Examen critique* (Paris: Gauthier-Villars)
- [23] Mayer A 1901 *Zur Theorie der gleitenden Reibung* *Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*
- [24] Chaumat H 1903 *Comptes Rendus de l'Académie de Science de Paris* 1<sup>er</sup> semestre 1634
- [25] Lecornu L 1905 *Comptes Rendus de l'Académie de Science de Paris* **CXL** 635
- [26] Lecornu L 1905 *Comptes Rendus de l'Académie de Science de Paris* **CXL** 847
- [27] DeSparre 1905 *Comptes Rendus de l'Académie de Science de Paris* **CXLI** 310
- [28] von Mises R 1910 *Zur Kritik der Reibungsgesetze*;  
Klein F 1910 *Zu Painlevés Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze*;  
Hamel G 1901 *Bemerkungen zu den vorstehenden Aufsätzen von Herrn F. Klein und R. v. Mises*;

- Prandtl L 1910 *Bemerkungen zu den vorstehenden Aufsätzen der Herrn F. Klein und R. v. Mises und G. Hamel* Zeitschrift für Mathematik und Physik **58** (1)(2)
- [29] Ivanov A P 2008 *The conditions for the unique solvability of the equations of the dynamics of systems with friction* Journal of Applied Mathematics and Mechanics **72** 372
- [30] Klisch T 1998 *Contact Mechanics in Multibody Systems* Multibody System Dynamics **2** 335
- [31] Taddei M M 2010 *Sobre a crítica de Painlevé às leis de atrito coulombianas* (tradução livre para o português do segundo artigo em [28])
- [32] Ihl M 2010 *About Painlevé's treatment of Coulomb's friction laws* (tradução livre para o inglês do segundo artigo em [28])