



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## Tópicos em Mecânica Clássica

Diego Dias Uzêda

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Carlos Farina de Souza

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2011

# Tópicos em Mecânica Clássica

Diego Dias Uzêda

Orientador: Carlos Farina de Souza

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Presidente, Prof. Carlos Farina de Souza

---

Prof. Alexandre Carlos Tort

---

Prof. Sebastião Dias Alves

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2011

## FICHA CATALOGRÁFICA

U99t Uzêda, Diego Dias  
Tópicos em Mecânica Clássica / Diego Dias Uzêda. –  
Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2011.  
XI, 170 f. : il. ; 30 cm.  
Orientador: Carlos Farina de Souza.  
Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Física /  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2011.  
Referências Bibliográficas: f. 167-170.  
1. Ensino de Física. 2. Huygens e o pêndulo cicloidal.  
3. Problema de Kepler perturbado. I. Farina de Souza, Carlos. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. Tópicos em Mecânica Clássica.

Dedico esta dissertação a todos que ensinam.

## Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, ao Professor Doutor Carlos Farina que foi mais do que um orientador incansável, motivador e inspirador, foi um mestre que me mostrou sobre o que é ser humano. Um exemplo de pessoa que levarei por toda vida.

Gostaria de agradecer a todos os professores do Programa de Pós Graduação em Ensino de Física do Instituto de Física da UFRJ. Em especial, ao Professor Doutor Carlos Aguiar, por toda ajuda e atenção.

Agradeço também a todos os colegas que, de forma direta ou indireta, ajudaram nessa dissertação, como Wilton Kort-Kamp, pelo auxílio nos cálculos do capítulo 3 e Reinaldo Melo e Souza, pelas prévias assistidas e comentários pertinentes.

Serei sempre grato aos meus pais, Carlos Henrique Uzêda e Maria da Conceição Uzêda, e ao meu irmão Cleber Uzêda, por toda ajuda e incentivo incondicional.

Por fim, à minha esposa, minha amada e minha vida, Letícia de Souza Estellita Pessôa, o meu reconhecimento e agradecimento pelas noites em claro ao meu lado, por todo carinho, paciência e apoio.

# RESUMO

## Tópicos em Mecânica Clássica

Diego Dias Uzêda

Orientador: Carlos Farina de Souza

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Esta dissertação contém duas partes que podem ser estudadas independentemente. Na primeira, contida no Capítulo 1, nosso principal objetivo é divulgar a vida e a obra do físico, astrônomo e matemático holandês Christiaan Huygens, enfatizando como ele demonstrou ser a cicloide a curva tautócrona e como utilizou esse resultado no desenvolvimento e na construção de cronômetros marítimos. Mostramos, em detalhe, como Huygens desenvolveu a teoria das evolutas e involutas para construir, a partir da curva tautócrona, um pêndulo isócrona, também conhecido como pêndulo cicloidal. Mostramos, ainda, como Huygens construiu um pêndulo cônico isócrona utilizando a evoluta da parábola. Com respeito a essa primeira parte da dissertação, apresentamos algumas soluções alternativas tanto para o problema da tautócrona, nos Apêndices B, C e D, quanto para o pêndulo cônico isócrona, na última seção do Capítulo 1. Em particular, no Apêndice D, apresentamos uma solução para o problema da tautócrona que pode ser utilizada no ensino médio, por não exigir do aluno conhecimentos sobre cálculo integral e diferencial. Na segunda parte da dissertação, contida nos Capítulos 2 e 3, nosso objetivo principal é discutir a influência de perturbações no problema de Kepler. Apresentamos um método elegante e poderoso de se calcular a velocidade de precessão da órbita perturbada, baseado no vetor de Laplace-Runge-Lenz. Para isso, discutimos inicialmente o problema de Kepler usual, desde sua história até a sua solução temporal, raramente apresentada em livros de mecânica clássica usados em cursos de graduação. Relatamos a

história do vetor de Laplace-Runge-Lenz e discutimos suas propriedades, tão úteis no estudo do problema de Kepler. Consideramos tanto perturbações de caráter central quanto de caráter não-central e fazemos uma discussão da influência do achatamento da Terra nas órbitas não-equatoriais de satélites terrestres.

Palavras chave: Ensino de Física, Huygens e o pêndulo cicloidal, Problema de Kepler perturbado.

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2011

# ABSTRACT

## Topics in Classical Mechanics

Diego Dias Uzêda

Supervisor: Carlos Farina de Souza

Abstract of master's thesis submitted to Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, in partial fulfillment of the requirements for the degree Mestre em Ensino de Física.

This dissertation contains two parts that can be studied independently. In the first one, presented in Chapter 1, our main purpose is to unveil the life and work of the dutch physicist, astronomer and mathematician Christiaan Huygens, emphasizing how he showed that the cycloid is the tautochrone and how he used this result to develop and construct maritime chronometers. We show, in detail, how Huygens created the theory of evolutes and involutes in order to construct, from the tautochrone curve, an isochronous pendulum, also known as cycloidal pendulum. We also show how Huygens constructed an isochronous conical pendulum from the evolute of the parabola. Regarding this first part of the dissertation, we present a few alternative solutions for the tautochrone problem, in Appendixes B, C and D, as well as for the problem of the isochronous conical pendulum, in the last section of Chapter 1. Particularly, the solution of the tautochrone problem presented in Appendix D may be taught for high school students, since it does not demand from them any special knowledge of integral and differential calculus. In the second part of this dissertation, presented in Chapters 2 and 3, our main purpose is to study the influence of perturbations in the Kepler problem. We introduce an elegant and powerful method of calculating the precession velocity of the perturbed orbit, based on the Laplace-Runge-Lenz vector. In order to do that, we first discuss in detail the usual Kepler problem, from its very beginning until its temporal solution, rarely discussed in undergraduate textbooks on classical mechanics. We present the history of the Laplace-



Runge-Lenz vector and discuss in detail its properties, so useful in the study of the Kepler problem. We consider central perturbations as well as non-central ones and we also discuss the influence of the non sphericity of the Earth in non equatorial orbits of its satellites.

Keywords: Physics education, Huygens and the cycloidal pendulum, Perturbed Kepler problem.

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2011

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Christiaan Huygens e o pêndulo isócrono</b>	<b>6</b>
1.1 Vida e obra . . . . .	7
1.2 Em busca de um pêndulo isócrono . . . . .	29
1.3 Ciclóide: a Helena da Geometria . . . . .	32
1.4 Pascal e a competição de 1658 . . . . .	35
1.5 Huygens e a tautócrona . . . . .	37
1.6 Huygens e o pêndulo cicloidal . . . . .	43
1.7 O pêndulo cônico isócrono . . . . .	47
1.8 Comentários finais . . . . .	54
<b>2 Teoria básica do movimento planetário</b>	<b>58</b>
2.1 Hooke, Newton e a teoria da gravitação . . . . .	60
2.2 Forças centrais: definição e propriedades fundamentais . . . . .	65
2.3 Energia potencial efetiva . . . . .	72
2.4 O problema de Kepler . . . . .	81
2.5 Equação de Binet . . . . .	83
2.6 A equação de Kepler temporal . . . . .	87
2.7 Teorema de Bertrand . . . . .	90
2.8 O vetor de Laplace-Runge-Lenz . . . . .	99
2.8.1 Um breve histórico . . . . .	102
2.8.2 Interpretação do vetor de Laplace-Runge-Lenz . . . . .	104
2.8.3 O problema de Kepler perturbado e o cálculo da velocidade de precessão . . . . .	106
2.9 Comentários finais . . . . .	113
<b>3 Satélites terrestres em órbitas não-equatoriais</b>	<b>116</b>
3.1 Efeito do achatamento da Terra . . . . .	117
3.2 Precessão do plano da órbita . . . . .	124
3.3 Dinâmica do vetor de Laplace-Runge-Lenz . . . . .	132

3.4	Comentários finais . . . . .	138
<b>4</b>	<b>Comentários Finais</b>	<b>140</b>
<b>A</b>	<b>Período de um pêndulo simples</b>	<b>144</b>
<b>B</b>	<b>Tautócrona: solução padrão</b>	<b>147</b>
<b>C</b>	<b>Tautócrona: solução híbrida</b>	<b>150</b>
<b>D</b>	<b>Tautócrona: uma solução para o ensino médio</b>	<b>153</b>
<b>E</b>	<b>Demonstração da propriedade da parábola</b>	<b>159</b>
<b>F</b>	<b>Proposta de atividade experimental</b>	<b>163</b>
	F.1 Construindo uma cicloide . . . . .	163
	F.2 Construindo uma estrutura de pêndulos . . . . .	164
	F.3 Isocronismo do pêndulo cicloidal . . . . .	165
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>167</b>

# Introdução

Por se tratar de uma dissertação de mestrado de um programa de pós-graduação em ensino de física, ao escrever essa tese, tive, como preocupação principal, o intuito de fazer com que ela viesse a contribuir, ainda que de uma forma bastante modesta, para a melhoria do ensino de física. A expressão ensino de física deve ser entendida, aqui, de uma forma ampla, de modo que alguns tópicos abordados na tese serão mais úteis nas escolas de ensino médio enquanto outros, mais úteis em cursos de licenciatura e bacharelado em física, ou até mesmo no próprio programa de pós-graduação em ensino de física.

Na minha singela opinião, e também baseado em experiência própria como professor no ensino médio, o aprendizado depende muito mais do aluno do que do professor. Em outras palavras, a “força eletromotriz” do aprendizado está no aluno, e não no professor, no sentido de que não basta o professor querer ensinar, o aluno precisa estar disposto a aprender. Então, qual é o papel do professor, afinal? Obviamente, é fundamental para um professor possuir qualidades como dedicação, conhecimento, clareza e alguma didática, entre outras. No entanto, talvez a qualidade mais importante de um professor seja a capacidade de motivar o aluno, de despertar nele a curiosidade, a vontade de buscar mais conhecimento, enfim, a de acender no aluno uma chama que se alastrará por conta própria.

Segue, naturalmente, a questão: e como se motiva um aluno? Há inúmeras maneiras de se fazer isso, algumas delas até mesmo com iniciativa e suporte institucionais, como por exemplo escolas que promovem feiras de ciência (no caso do ensino de física), festivais de música, teatro ou literatura, (no caso de outras áreas do conhecimento). No entanto, no dia a dia, com o profes-

sor em sala de aula tentando passar a matéria a seus alunos, como acender essa chama? Uma maneira simples mas que pode ser bem efetiva é, em primeiro lugar, não subestimar os alunos. Ao lhes passar problemas mais difíceis, ou mesmo desafios, embora a reação inicial dos alunos possa ser um pouco negativa, rapidamente eles perceberão que com essa atitude o professor os considera muito capazes. Nessa linha de raciocínio, passar problemas extremamente simples deveria ser encarado até mesmo como uma falta de respeito com os alunos, como se eles fossem incapazes de resolver problemas mais difíceis.

Tais problemas desafiadores podem ser, por exemplo, problemas que marcaram a história da física, cujas soluções desafiaram grandes mentes de sua época, como as de Galileu, Huygens e Newton, para citar apenas alguns dos mais conhecidos por alunos do ensino médio. Em geral, problemas desse tipo são muito ricos e instrutivos. De fato, acompanhar de que modo gênios da física como esses resolveram “problemas de ponta” de sua época utilizando conhecimentos muito mais rudimentares do que os atuais (muito embora fossem as melhores ferramentas matemáticas da época) pode impressionar muito os alunos. Problemas que hoje são resolvidos em poucos minutos com matemática moderna, muitas vezes tardaram décadas para serem resolvidos, e isso com a matemática mais avançada da época. Aliás, na maioria das vezes, nova matemática e nova física acabavam sendo desenvolvidas para que se pudesse resolver o problema em consideração.

Muitos desses problemas clássicos da história da física podem ser tratados no nível do ensino médio, mas não o são, muitas vezes, por puro preconceito ou por exigirem, apenas aparentemente, um conhecimento maior do assunto do que o usualmente apresentado no ensino médio. Esses problemas despertariam o interesse dos alunos, motivando-os para estudarem os tópicos de física e matemática necessários para resolvê-los (fora o interesse que poderiam gerar em alguns alunos pelo estudo de seu contexto histórico). Muitos desses problemas foram passados como desafios e, em geral, tinham endereço certo. Alguns deles chegaram até a deteriorar a relação entre familiares, como ocorreu com os irmãos Jean e Jacques Bernoulli no famoso problema da *braquistócrona* (do grego “tempo mais curto”) proposto em 1696 por Jean

Bernoulli e que consistia na determinação da curva sobre a qual um corpo deveria deslizar sob a ação da gravidade para atingir o ponto final no menor tempo possível. Pode-se dizer que esse problema foi um marco na história do cálculo variacional. Muitos outros problemas marcantes, surgidos ainda no próprio século XVII, poderiam ser citados, como por exemplo, o da catenária (forma da curva de uma corda com densidade uniforme presa em seus dois extremos e sob a ação da gravidade), e o da curva tautócrona (forma da superfície sobre a qual deve deslizar um corpo para que o tempo de percurso até o ponto mais baixo dessa superfície independa do ponto de onde o corpo foi abandonado na superfície).

Foi um pouco dentro desse espírito, de levar o leitor ao passado quase que desafiando-o a resolver o problema com as ferramentas disponíveis da época, que escrevi a parte inicial dessa tese. Mas, de uma forma global, são essencialmente dois os principais objetivos dessa tese, a saber:

(i) divulgar tópicos de mecânica clássica interessantes, mas que raramente são discutidos nos livros usualmente adotados em cursos de mecânica clássica e

(ii) tentar fazer essa discussão da forma mais simples possível, sem que isso comprometa os pontos fundamentais do problema em consideração.

Escolhemos dois temas para serem discutidos nessa tese, a saber, a história de como Huygens resolveu o importante problema da tautócrona e como, de posse dessa solução, construiu um pêndulo isócrona (cujas oscilações têm período independente da amplitude) e o movimento planetário. No primeiro, aproveitamos para contar de forma relativamente detalhada um pouco da vida e obra de Christiaan Huygens que, sem nenhum exagero, pode ser considerado um dos maiores gênios do século XVII. No segundo, fazemos uma discussão detalhada do problema de Kepler sendo nosso principal objetivo introduzir o chamado vetor de Laplace-Runge-Lenz. Esse vetor desempenha um papel importante no problema de Kepler e pode ser usado de forma extremamente simples, mas engenhosa, no cálculo de velocidades de precessão de órbitas no problema de Kepler perturbado. A seguir, justifico em poucas palavras minhas duas escolhas.

Os problemas da curva tautócrona e do pêndulo isócrono podem ser considerados como um pequeno marco na história da Mecânica Clássica, de modo que foi notável, na época, o feito de Huygens ao resolvê-los. Além disso, podem ser entendidos completamente usando-se argumentos e conhecimentos apresentados no ensino médio. Inclusive, o estudo teórico desses problemas pode ser complementado com pequenas atividades experimentais feitas em sala de aula envolvendo o estudo da cicloide (que veio a ser a solução da curva tautócrona) e a construção de um pêndulo cicloidal. Gostaria de deixar bem claro, nesse momento, que não tenho nenhuma pretensão de fazer, nesta dissertação, história da ciência, mas sim de apresentar um pouco da vida e obra desse matemático, físico e astrônomo holandês cujos importantes trabalhos e descobertas mereciam ter mais destaque nos dias de hoje. Em relação ao problema de Kepler, o objetivo principal aqui é contar um pouco da história e divulgar o papel do vetor de Laplace-Runge-Lenz da forma mais interessante possível, chamando a atenção para as possíveis aplicações desse vetor no problema de Kepler perturbado, em particular, no cálculo de velocidades de precessão.

Os temas abordados nessa tese são bastante independentes entre si, de modo que a leitura dos mesmos pode ser feita de forma independente. Quanto à organização da tese, preferimos iniciar, no capítulo 1, com a discussão a respeito do trabalho de Huygens, de como ele resolveu o problema da tautócrona e de como, a partir dessa solução, ele foi capaz de construir um pêndulo isócrono. O motivo para essa escolha é simples: ao longo de todo o capítulo 1 utilizamos apenas a matemática e a física conhecidas por um aluno do ensino médio, tornando a leitura inicial da tese mais suave. Já nos dois capítulos seguintes, fazemos uso constante de conhecimentos de cálculo diferencial e integral, muito embora sejam conhecimentos básicos sobre esses temas. No capítulo 2 estabelecemos a teoria básica do movimento planetário, fazendo, em particular, uma revisão detalhada do problema de Kepler e introduzimos o vetor de Laplace-Runge-Lenz no problema de Kepler. Ainda nesse capítulo, discutimos os efeitos de perturbações no problema de Kepler e introduzimos um método perturbativo, baseado no vetor de Laplace-Runge-Lenz, com o qual calculamos a velocidade de precessão de órbitas em

alguns exemplos simples. Deixamos para o capítulo 3 o estudo de um problema ligeiramente mais complexo, a saber, o de analisarmos alguns efeitos do achatamento da Terra no movimento de satélites em órbitas não-equatoriais. No quarto e último capítulo, tecemos alguns comentários sobre como essa dissertação pode ser útil no ensino de física, tanto nas escolas quanto nas universidades.

Foram, ainda, introduzidos alguns Apêndices. Alguns deles contêm pequenas demonstrações que complementam o texto da tese, como ocorre com os Apêndices A e E. Já os Apêndices B, C e D contêm soluções alternativas para o problema da tautócrona, incluindo uma na qual e outros não utilizamos cálculo diferencial e integral (Apêndice D), de modo que pode ser entendida por uma aluno do ensino médio. Por fim, no segundo Apêndice F, apresentamos uma pequena proposta de atividades a serem feitas em sala de aula relacionadas à compreensão da cicloide e do pêndulo cicloidal.



# Capítulo 1

## Christiaan Huygens e o pêndulo isócrono

Neste capítulo, após um pequeno resumo da vida e obra de Christiaan Huygens, descrevemos, inicialmente, como ele foi capaz de resolver o problema ao qual nos referimos, hoje em dia, como o “problema do pêndulo isócrono”. Resolver esse problema significa, como o nome sugere, encontrar um tipo de pêndulo cujas oscilações tenham um período independente da amplitude das mesmas. Trata-se de uma história muito interessante, estreitamente relacionada com a construção e o aprimoramento de cronômetros marítimos, exigidos pela necessidade da época de se medir com precisão a longitude, de uma história repleta de coincidências e surpresas mas que, em grande parte, só ocorreu devido à genialidade de Huygens, um dos maiores físicos, matemáticos e astrônomos do século XVII. A beleza da solução elaborada por Huygens para o problema do pêndulo isócrono pode ser apreciada de diversas formas: ela está não apenas na clara utilização da linguagem geométrica, bastante comum na época, mas também na idéia extremamente engenhosa de se atacar problemas difíceis com a introdução de problemas auxiliares mais simples, de solução conhecida, como veremos mais adiante.

Usando as idéias de Huygens, mostraremos que ao colocarmos obstáculos com o perfil de um arco de cicloide em ambos os lados de um pêndulo simples, a partícula no extremo inferior do pêndulo não só descreve uma trajetória

cicloidial, como oscila com período independente da amplitude das oscilações. Por esse motivo, esse pêndulo também é denominado “pêndulo cicloidial”.

O método de Huygens é capaz, ainda, de fornecer o valor do período de um pêndulo cicloidial em termos do módulo da aceleração da gravidade e do raio do círculo gerador da cicloide em consideração. Além de apresentarmos a solução de Huygens, discutiremos soluções alternativas para o pêndulo cicloidial (apresentadas nos Apêndices B, C e D).

Finalizaremos o capítulo discutindo o chamado “pêndulo cônico isócrono” e apresentaremos uma solução para esse problema que utiliza apenas conhecimentos de física do ensino médio. Elaboramos, ainda, um apêndice no qual apresentamos um pequeno roteiro com algumas atividades a serem realizadas em sala de aula do ensino médio relacionadas com o pêndulo cicloidial. Basicamente, queremos que o aluno aprenda a construir um pêndulo cicloidial e, com ele, possa fazer experimentos simples e verificar que, de fato, se trata de um pêndulo isócrono.

Na escrita desse capítulo, utilizamos com muita frequência as referências [1–10]. Cada uma delas apresenta informações históricas retiradas de fontes primárias e reescritas em uma cronologia diferente da adotada neste trabalho.

## 1.1 Vida e obra

Christiaan Huygens nasceu em 14 de abril de 1629, na cidade de Haia, Holanda. Seu pai, Constantijn Huygens (1596-1687), possuía uma fortuna considerável e era um homem de muita cultura, conhecido como poeta, latinista e matemático. Foi graças a seu pai que Christiaan Huygens teve acesso a um círculo bastante seleto de intelectuais daquela época. De fato, sua casa era frequentada por grandes poetas, pintores e filósofos, como por exemplo, Peter Paul Rubens (1577-1640), Rembrandt Harmenszoon van Rijn (1606-1669) e René Descartes (1596-1650), entre outros. Desde cedo demonstrou talento para desenho e matemática. Seus primeiros esforços em geometria deixaram Descartes muito impressionado. Este, por sua vez, acabou influenciando bastante a formação matemática de Christiaan. Embora tenha se tornado um dos maiores físicos, matemáticos e astrônomos do século XVII,

conhecido como “o século de ouro”, Huygens, assim como Pierre de Fermat (1601-1665), estudou inicialmente direito, para depois estudar matemática e ciências naturais. Em 1645 Huygens entrou na Universidade de Leiden, Holanda, onde iniciou seus estudos em matemática e direito. Permaneceu em Leiden até 1647, continuando seus estudos de 1647 a 1649 na cidade de Breda, no sul da Holanda (por vontade de seu pai, chegou a formar-se em direito).

Tanto em Leiden, quanto em Breda, Huygens teve a sorte de ter professores de matemática muito talentosos (Frans Van Schooten (1615-1660) em Leiden e John Pell (1611-1685) em Breda). Nesse período, por intermédio de seu pai, Christiaan estabeleceu correspondência com Marin Mersenne (1588-1648) que o desafiou a resolver inúmeros problemas, em particular, o de encontrar a forma de uma corda com distribuição de massa homogênea presa em seus extremos e sob a ação da gravidade. Além de resolver esse problema, ele conseguiu resolver um outro, o de determinar de que forma pesos deveriam ser pendurados em uma corda para que a forma da corda fosse parabólica <sup>1</sup>.

Suas primeiras publicações datam de 1651 e 1654 e, nelas, foram abordados problemas de matemática. Em seu trabalho de 1651, “*Cyclometriae*”, Huygens mostrou que os argumentos utilizados pelo jesuíta Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) para construir um quadrado com a mesma área de um círculo (usando apenas régua e compasso) eram falaciosos. Sua publicação de 1654, “*De Circuli Magnitudine Inventa*”, abordava temas semelhantes, mas já era um trabalho mais robusto, o que lhe deu alguma reputação. Em 1657, Huygens publicou “*De ratiociniis in ludi aleae*” (Do cálculo no jogo de azar). Trata-se do primeiro trabalho publicado sobre a teoria das probabilidades. Devido à sua primeira visita a Paris, em 1655, Huygens havia tomado conhecimento da correspondência de 1654 entre Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), na qual desenvolviam esse tema.

---

<sup>1</sup>A curva formada por um fio suspenso entre dois pontos e submetido à ação da gravidade é chamada *catenária*. O problema para descrevê-la foi proposto por Galileu, que supôs a curva, erroneamente, como sendo uma parábola. Aos 17 anos de idade, Huygens mostrou que tal conjectura era falsa. Em 1690, Jean Bernoulli relançou o problema que foi resolvido por ele mesmo, Leibniz e Huygens (1691) [11].

Nessa mesma época, quando ainda tinha vinte e poucos anos, Huygens estudou e resolveu o problema das colisões elásticas (provavelmente foi o primeiro a resolver esse problema), mas a primeira publicação formal de seus resultados sobre colisões frontais apareceu apenas em 1669 (veja a referência [12] para uma descrição detalhada do trabalho de Huygens)

Em 1658, Huygens publicou quatro memórias sobre matemática pura e geometria. Ainda nesse ano, publicou seus primeiros resultados em física. Em um artigo intitulado “*Horologium*” ele descreveu sua primeira invenção, feita aproximadamente dois anos antes, a saber, a aplicação de um pêndulo na construção do primeiro relógio de pêndulo da história <sup>2</sup>. Huygens se inspirou em investigações sobre pêndulos feitas por Galileu Galilei (1564-1642) desde o início do século XVII. Galileu havia descoberto a propriedade fundamental de que um pêndulo é um bom contador de tempo, devido ao isocronismo de seu movimento (na verdade, as oscilações de um pêndulo independem de sua amplitude apenas para pequenas amplitudes, voltaremos a esse ponto ao longo desse capítulo). Galileu teve, então, a idéia de acoplar um contador a um pêndulo criando assim um relógio de pêndulo em torno de 1636, mas faleceu em 1642 antes de fazê-lo. Seu filho, Vincenzo, que deveria ter dado prosseguimento a essa tarefa, só retomou a idéia de construir relógios de pêndulo em 1649, mas faleceu pouco tempo depois sem tampouco ter tido êxito nessa tarefa. A prioridade da patente foi concedida a Huygens.

A utilização do pêndulo como contador do tempo, o primeiro oscilador harmônico usado na medição do tempo, aumentou enormemente a precisão dos relógios da época, de aproximadamente 15 minutos por dia para 15 segundos por dia. Vale mencionar que, desde a invenção do relógio de pêndulo feita por Huygens em 1656 até, aproximadamente, 1930, o relógio de pêndulo foi o mais preciso contador do tempo. Ainda em 1658, juntamente com outros matemáticos importantes da época, Huygens tomou conhecimento de um concurso proposto por Pascal, que consistia na solução de alguns problemas sobre a cicloide elaborados pelo próprio Pascal. O seu envolvimento nesse

---

<sup>2</sup>O artigo “*Horologium*” escrito por Huygens em 1658 não deve ser confundido com a sua maior obra, intitulada “*Horologium Oscillatorium*”, publicada somente quinze anos mais tarde, em 1673.

concurso foi determinante para a solução do problema do pêndulo isócrona, como descreveremos em detalhe ainda nesse capítulo.

Na verdade, Huygens esteve envolvido em problemas relacionados à construção de relógios por quase quarenta anos: desde 1656, quando inventou o relógio de pêndulo, até 1693, ano de sua última publicação no assunto. Havia uma motivação prática por trás desse interesse, a saber, a medição precisa da longitude exigia a medição precisa do tempo. Um bom navegador podia verificar a latitude na qual se encontrava por meio da duração do dia, ou pela altura do sol no firmamento ou até mesmo por observações das estrelas. No entanto, a medição do meridiano em que se encontrava exigia muito mais. Para conhecer sua longitude em um dado instante, o navegador precisava conhecer a hora a bordo e também a hora no porto de saída (ou qualquer outro local de longitude conhecida) exatamente naquele instante. A diferença entre a hora a bordo <sup>3</sup> e a hora do porto de saída poderia ser convertida em graus de longitude. Por exemplo, cada hora de discrepância equivaleria a 15<sup>o</sup> de longitude. Por sua vez, esses 15<sup>o</sup> graus de longitude poderiam ser convertidos em distância mas, nesse caso, o resultado é diferente para cada latitude. Por exemplo, no Equador, onde a circunferência da Terra é máxima, 15<sup>o</sup> de longitude correspondem a 1.852km.

Fica evidente, então, que dominar a marcação do tempo era imprescindível para as navegações, era uma questão de vida ou morte, literalmente. Mesmo com a melhoria substancial na precisão da medida do tempo proporcionada pelos relógios de pêndulo, a partir da segunda metade do século XVI, o problema de se medir a longitude ainda não estava resolvido. A bordo dos navios, tais relógios se atrasavam, adiantavam ou simplesmente deixavam de funcionar. As mudanças de temperatura durante as longas viagens afinavam ou engrossavam o óleo lubrificante dos relógios, além de fazerem seus componentes se expandirem ou se contraírem, levando a resultados desastrosos. Isso para não falar do balanço das ondas ou mesmo de causas mais sutis como pequenas variações na gravidade terrestre.

---

<sup>3</sup>Lembre-se de que a hora a bordo poderia ser ajustada, por exemplo, quando o sol atingisse o zênite, instante que corresponderia ao meio dia local.

Fosse para fazer a guerra ou a paz, fosse para transportar ouro ou mercadorias valiosas de terras estrangeiras, era imprescindível resolver o problema da longitude, isto é, o problema da medição precisa do tempo. Até mesmo a Companhia Holandesa das Índias Orientais demonstrou interesse na construção de relógios mais precisos. Huygens construiu vários cronômetros marítimos, alguns dos quais foram testados em viagens em alto mar, como ocorreu nos anos de 1662 e 1686. No final do século XVII e início do século XVIII, resolver o problema da longitude tomou proporções inimagináveis e até mesmo prêmios valiosos eram oferecidos a quem construísse relógios com a precisão exigida. O Parlamento Inglês, em 1714, chegou a oferecer o prêmio mais alto de todos a quem descobrisse um método prático e útil de se determinar a longitude (muitos milhões de reais em valores atuais). Essa história está agradavelmente contada no livro de Dava Gobel [13], intitulado “*Longitude*”, cuja leitura recomendamos fortemente.

Em 1665, Huygens observou um “*estranho tipo de afinidade*” entre dois relógios de pêndulo situados um ao lado do outro e suspensos a um mesmo suporte. Eles oscilavam com exatamente a mesma frequência e em oposição de fase, isto é, defasados de 180 graus. Quando tais pêndulos eram perturbados, eles voltavam a oscilar em oposição de fase após algum tempo (meia hora, no caso dos pêndulos utilizados por Huygens) e permaneciam assim indefinidamente. Huygens deduziu, corretamente, que o motivo crucial para tal sincronização dos pêndulos vinha dos “*imperceptíveis movimentos*” do suporte comum que unia as partes superiores dos pêndulos, ou seja, seus respectivos pontos de suspensão. Huygens chegou a imaginar que esse tipo de sincronização poderia, inclusive, propiciar um meio de ajuste fino na medida do tempo necessário para resolver o problema da longitude nas navegações marítimas. Infelizmente, as inovações e invenções feitas por Huygens relativas a relógios de pêndulo não resolveram o problema da longitude.

No entanto, suas contribuições nessa área acabaram sendo fundamentais para inúmeros desenvolvimentos em matemática e física, como por exemplo, no estudo de evolutas e involutas (a serem definidas mais adiante) e nos métodos de determinação de curvas a partir de suas tangentes. Indo um

pouco mais longe, podemos até afirmar que seus pêndulos acoplados inspiraram estudos modernos de sistemas não lineares em várias áreas da ciência.

Desde jovem, Huygens também havia se interessado por astronomia. Juntamente com seu irmão, Constantijn, Huygens desenvolveu a partir de 1654 uma nova técnica de polir lentes, o que lhe permitiu construir o telescópio mais avançado da época e fazer grandes descobertas já nos anos de 1655 e 1656. Enquanto o telescópio utilizado por Galileu décadas antes alcançava um aumento em torno de vinte vezes, aquele construído por Huygens chegava a aumentar noventa vezes, aproximadamente. Esse fato foi determinante para que fizesse a maioria de suas descobertas astronômicas. Huygens logo descobriu uma lua de Saturno, a qual denominou Titan <sup>4</sup> ; analisou a superfície de Marte e concluiu, baseando-se no movimento de marcas na superfície desse planeta, que o dia marciano é aproximadamente igual ao nosso (embora erroneamente tenha conjecturado a existência de mares em Marte); propôs que Venus fosse coberto por nuvens; descobriu a diferença entre os diâmetros polar e equatorial de Jupiter e observou um raro objeto celeste que hoje sabemos se tratar de uma nebulosa da constelação de Orion. Nesse último caso, o telescópio utilizado por Huygens teve o poder de resolução necessário para que ele interpretasse, corretamente, a parte interna e mais brilhante dessa nebulosa como um conjunto de inúmeras estrelas. Huygens ainda descobriu outras nebulosas interestelares e algumas estrelas duplas.

No entanto, a mais espetacular de suas descobertas astronômicas foi, sem dúvida alguma, desvendar o chamado “mistério de Saturno”. Até aquele momento, esse planeta se mostrava estranhamente aos que o observavam, com uma forma que parecia variar ligeiramente com o tempo. Alguns chegaram a interpretar esse fato como distorsão dos olhos do observador ou pequenas formas que aderiam às lentes do telescópio. Cientistas ilustres, como Gilles Personne de Roberval (1602-1675), Ismaël Boulliau (1605-1694) e Galileu tinham suas próprias teorias. Para Galileu, por exemplo, Saturno parecia ser formado por um conjunto de três estrelas que se moviam juntas.

---

<sup>4</sup>Depois da descoberta das luas galileanas de Jupiter, Titan foi a primeira nova descoberta de um satélite orbitando em torno de um planeta.

Foi Huygens o primeiro a perceber que, na verdade, havia um anel em torno de Saturno que não o tocava em nenhum ponto. As primeiras descobertas relativas a Saturno, feitas em 1655, foram publicadas inicialmente em 1656, em um pequeno trabalho intitulado “*De Saturni luna observato nova*”. No entanto, Johannes Capellanus convenceu Huygens a não anunciar o resultado do anel de Saturno, fato que traria uma grande euforia a todos, até que ele estivesse bem seguro de suas observações. Por precaução, Huygens decidiu então publicar seu resultado a respeito do anel de Saturno em forma de um enigma literário, simplesmente desordenando as letras em sua afirmação, como segue:

*aaaaaaaccccccdeeeeeghiiiiiii llll mmnnnnnnnnnnnoooop-  
pqqrrstttt uuuuu*

Esse anagrama foi explicado por Huygens em uma publicação posterior, de 1659, sob o nome de “*Systema Saturnium*”. Huygens explicou, então, que reordenando apropriadamente as letras do anagrama formava-se a frase

*Saturnus cingitur annulo tenui, plano, nusquam coherente et ad  
eclipticam inclinato,*

cuja tradução é dada por

*Saturno é rodeado por um anel tênue, plano, que nele não toca e  
que está inclinado para a eclíptica.*

Nesse trabalho, de 1659, e cuja capa está mostrada a seguir, há uma série completa de suas observações e o desenvolvimento de sua idéia sobre o anel de Saturno.



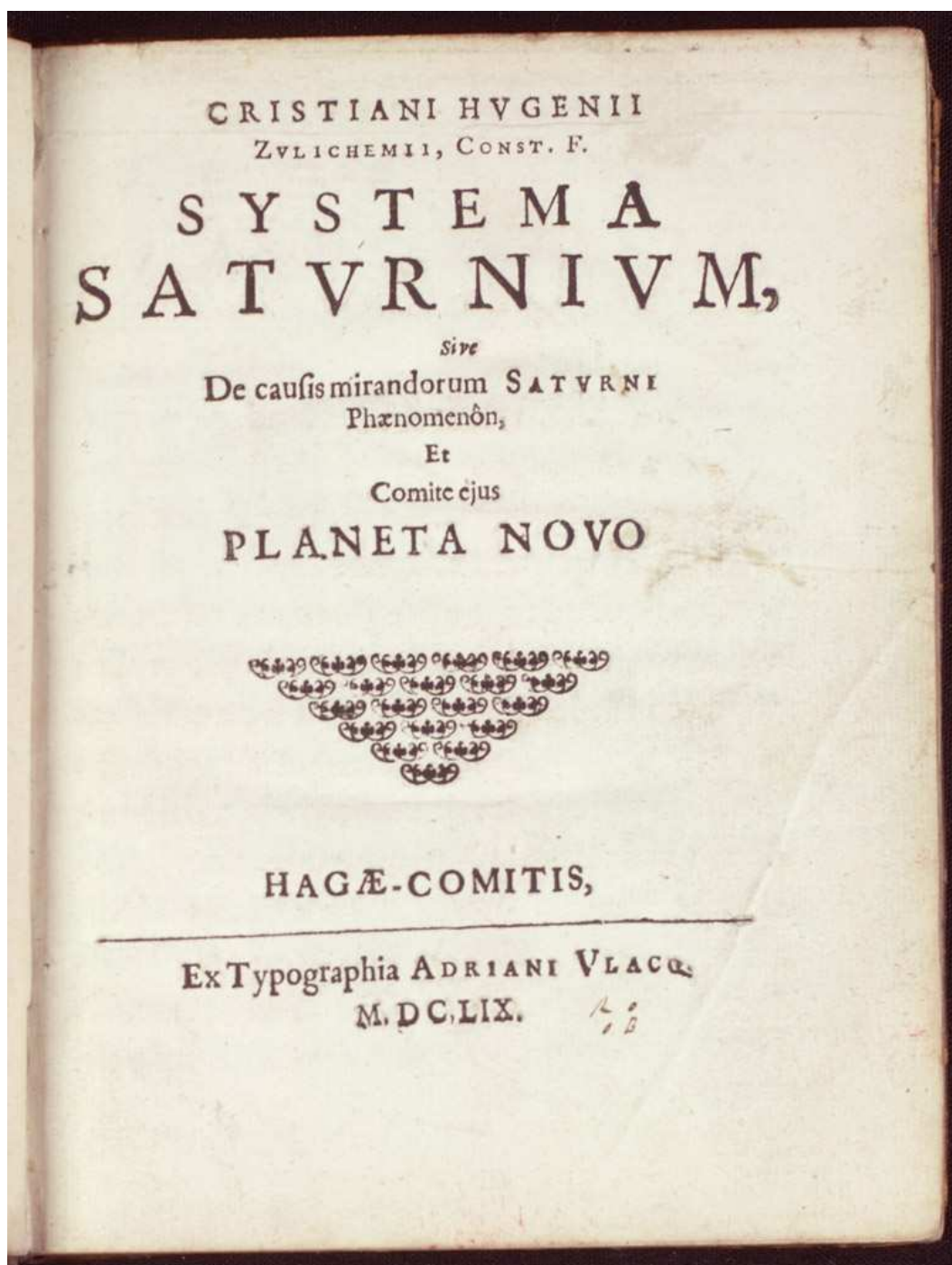


Figura 1.1: Capa da obra “*Systema Saturnium*”, publicada em 1659.

A seguir, mostramos um desenho extraído de “*Systema Saturnium*” no qual Huygens ilustra de forma inequívoca a existência de um anel em torno de Saturno. Em seu desenho, Huygens também indica como Saturno seria visto da Terra naquele período do ano.

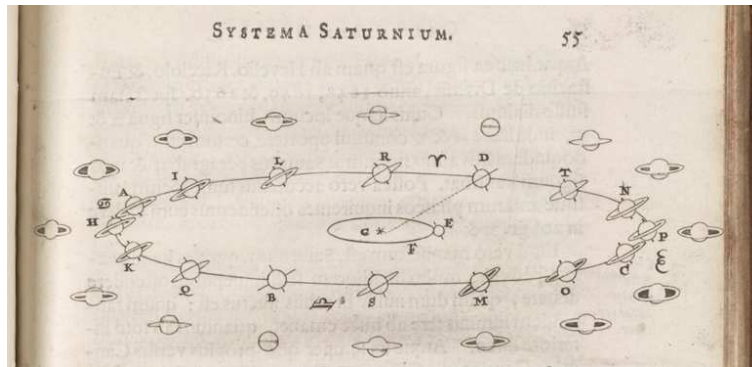


Figura 1.2: Figura feita por Huygens em “*Systema Saturnium*” para descrever as fases do anel de Saturno vista por um observador na Terra.

Durante sua vida, Huygens manteve contato com Anton van Leeuwenhoek (1632-1723), conhecido como o melhor construtor de microscópios de seu tempo e capaz de polir lentes não apenas de vidro, mas também de cristais de rocha e diamante. Talvez por sua influência, Huygens tenha se interessado na observação de pequenas formas de vida e objetos microscópicos, como por exemplo células sanguíneas.

Em 1660, Huygens retornou a Paris e passou a frequentar tertúlias científicas regulares com várias pessoas que ali se encontravam, como por exemplo, Roberval, Carcavi, Pascal, Pierre Petit, entre outros. Em uma carta enviada a seu irmão fica evidente a empolgação de Huygens com tais encontros. Em particular, ele cita explicitamente um encontro com Pascal, no qual depois de conversarem sobre vários assuntos, Huygens lhe mostrou seus telescópios.

Em 1661, Huygens fez sua primeira visita a Londres, com o objetivo de saber mais sobre a recém formada *Royal Society*<sup>5</sup>. Ele ficou bastante impressionado com o grupo de cientistas com os quais discutiu e com quem

<sup>5</sup>O nome completo era *Royal Society of London for the Improvement of Natural Knowledge*, cuja tradução é *Sociedade Real de Londres para o Progresso do Conhecimento da Natureza*, denominada ao longo da tese simplesmente por Real Academia de Londres.

manteve contato, entre eles John Wallis (1616-1703) e Robert Boyle (1627-1691). Huygens mostrou seus telescópios aos cientistas ingleses que reconheceram serem eles superiores aos utilizados na Inglaterra. Ainda em Londres, Huygens viu a bomba de vácuo feita por Boyle, o que o impressionou sobremaneira de modo que, ao regressar à Holanda, realizou vários dos experimentos feitos por Boyle (Huygens parece ter sido o primeiro a observar pressão negativa [14], tema tão importante hoje em dia devido aos estudos de energia escura relacionados à expansão acelerada do Universo).

Também em 1661, Huygens descobriu um princípio básico de mecânica que lhe permitiu resolver certos tipos de problemas que causavam muita dificuldade aos matemáticos ingleses. Tal princípio afirmava que o centro de gravidade de um corpo ou de um sistema de corpos, sob a ação apenas da gravidade (além da força de um fio ou de uma superfície lisa), não podia atingir um nível acima daquele de onde havia sido abandonado. Em reconhecimento a tão significativo resultado, assim como outros aspectos de sua obra, Huygens foi eleito membro da Real Academia de Londres em 1663.

Em 1665, Huygens soube que a Real Academia de Londres estava investigando novas formas de relógio. Em particular, Robert Hooke (1635-1703) estava fazendo experimentos com relógios regulados por molas. Huygens escreveu a Hooke duvidando de seu procedimento, pois achava que tal mecanismo seria muito sensível às variações térmicas. Ainda assim, em 1675, ele construiu um cronômetro que usava uma mola em espiral no lugar de um pêndulo. Hooke já tentara, em 1660, controlar um relógio por meio de uma mola retilínea, mas foi o relógio de mola de Huygens o primeiro a funcionar a contento. Contrapesos girantes e molas em espiral foram utilizados em praticamente todos os relógios até a invenção do oscilador de cristal de quartzo.

Em 1665 Huygens foi convidado por Jean Baptiste Colbert, ministro de Luis XIV, para ser membro fundador da Academia de Ciências de Paris, o que ocorreu em 1666. Isso lhe rendeu um bom salário e um local bem situado para morar. Huygens viveu em Paris por quinze anos, regressando definitivamente a sua pátria em 1681. Durante sua estadia em Paris, ele fez duas visitas à Holanda por motivos de doença, a primeira delas em 1670, retornando a Paris no ano seguinte.

Porém, em 1672, Luis XIV invadiu os Países Baixos, o que deixou Huygens em uma posição desconfortável, por ocupar uma posição importante em Paris enquanto a França guerreava com seu próprio país. Na época, porém, cientistas se sentiam acima de guerras políticas e, desse modo, Huygens, com apoio de seus amigos, foi capaz de continuar seu trabalho em Paris.

Em 1672, Huygens e Leibniz (1646-1716) se encontraram em Paris e, desde então, Leibniz passou a visitar com frequência a Academia de Ciências de Paris. Leibniz aprendeu muitas coisas de matemática com Huygens e se considerava seu discípulo. Foram amigos até o falecimento de Huygens.

Em 1676, a saúde de Huygens se debilitou novamente e ele retornou a sua cidade natal, Haia, onde permaneceu por aproximadamente dois anos. Nesse período ele desenvolveu, entre outras coisas, a teoria da dupla refração, fenômeno descoberto por Caspar Bartholin (1585-1629) em observações feitas em um material conhecido como espato da Islândia ( $\text{CaCO}_3$ , carbonato de cálcio). Ele também trabalhou sobre a velocidade da luz que ele acreditava ser finita, motivo pelo qual ficou muito feliz quando tomou conhecimento dos experimentos de Römer que atribuíam um valor finito à velocidade da luz a partir de observações das luas de Jupiter.

Em 1668 Huygens envia para a Real Sociedade de Londres, em resposta a um problema proposto por alguns de seus membros, uma memória na qual ele demonstra experimentalmente que a componente ao longo de uma certa direção do momento linear de dois corpos que colidem elasticamente um com o outro é a mesma antes e depois da colisão. John Wallis e Christopher Wren (1632-1723) também responderam a essa questão. Esse resultado corrige um erro cometido por Descartes.

Em 1673, Huygens publicou sua *magnus opus*, ou seja, o que pode ser considerado seu mais importante trabalho, intitulado

*Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometriae*

cuja tradução é

*Relógio de pêndulo, ou demonstrações geométricas do movimento pendular aplicado a relógios.*

A seguir, apresentamos a capa dessa obra tão grandiosa.

CHRISTIANI  
HUGENII  
ZVLIHEMII, CONST. F.  
HOROLOGIVM  
OSCILLATORIVM  
SIVE  
DE MOTV PENDVLORVM  
AD HOROLOGIA APERTO  
DEMONSTRATIONES  
GEOMETRICÆ.



PARISIIS,  
Apud E. MUGURY, Regis & Illustrissimi Archiepiscopi Typographum  
via Catharæ, ad insigne trium Regum.  
MDCLXXIII  
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Figura 1.3: capa da obra “*Horologium Oscillatorium*”, publicado em 1673.

Esse livro apresenta, inicialmente, uma descrição de relógios de pêndulo. Embora Galileu já soubesse que o período de um pêndulo simples elevado ao quadrado era proporcional ao comprimento do pêndulo, foi nesse trabalho que Huygens obteve a conhecida expressão para esse período,  $\tau = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ . Em seguida, Huygens trata de movimentos acelerados de corpos em queda livre, ou deslizando sobre planos inclinados, ou ainda deslizando sobre curvas dadas e termina essa discussão mostrando que a curva tautócrona <sup>6</sup> é dada pela cicloide. Após explicar que a tangente à evoluta <sup>7</sup> de uma certa curva é normal a essa curva, Huygens aplicou sua teoria à cicloide e mostrou com argumentos geométricos (como veremos mais adiante) que a evoluta de uma cicloide é a própria cicloide, devidamente deslocada e defasada. Também obteve a evoluta da parábola. Ainda nesse trabalho, Huygens discutiu as oscilações de um objeto extenso, o chamado pêndulo composto, e compreendeu o significado do centro de oscilação. Ele mostrou que se o ponto de suspensão for trocado pelo centro de oscilação o período do pêndulo composto não muda. Esse problema havia sido proposto por Mersenne e já havia sido discutido por Descartes e Roberval. As primeiras noções de momento de inércia apareceram nesse trabalho. No final do trabalho, Huygens voltou a discutir a teoria de relógios e mostrou que se o corpo no extremo inferior do pêndulo fosse obrigado, por meio de obstáculos laterais (cicloidais) a descrever uma trajetória cicloidal, as oscilações seriam isócronas (palavra de origem grega que significa tempos iguais). Por fim, fez uma discussão detalhada sobre força centrípeta no movimento circular uniforme, mostrando que tal força é proporcional a  $v^2/r$ , sendo  $v$  o módulo da velocidade do corpo em movimento circular e  $r$  o raio de sua trajetória. Provavelmente, esse resultado de Huygens auxiliou Newton, de alguma forma, na descoberta da lei da gravitação universal [15].

No mesmo ano em que publicou “*Horologium Oscillatorium*”, Huygens começou a desenvolver a sua teoria ondulatória da luz, que foi publicada

---

<sup>6</sup>A curva sobre a qual um corpo desliza sem atrito e cujo período de oscilação independe de onde esse corpo é abandonado é chamada curva tautócrona (palavra de origem grega significando mesmo tempo).

<sup>7</sup>A evoluta de uma dada curva  $I$  é o lugar geométrico de todos os centros de curvatura associados a essa curva.

apenas em 1690, e cuja idéia geral já havia sido sugerida por Hooke in 1664.

Em 1680, Huygens trabalhou, sem muito êxito, com máquinas de combustão interna. Utilizou vácuo obtido pelo resfriamento de produtos gasosos aquecidos para operar uma bomba d'água.

Em 1681, Huygens apresentou para a Real Academia de Londres sua teoria de gravitação, que foi publicada somente em 1690. Newton estava na audiência, mas não se tem notícia de que tenha havido algum diálogo entre eles nessa ocasião. Embora Huygens admirasse muito Newton (a recíproca era verdadeira), ele não admitia ação a distância. Em linguagem moderna, diríamos que Huygens era um “campista”, ou seja, esperava que houvesse um agente mediador para as interações (como por exemplo ocorre na interação entre duas partículas carregadas eletricamente, cuja interação é mediada pelos campos eletromagnéticos gerados por elas). No entanto, sua teoria de vórtices para a gravitação, herdada de Descartes, mesmo tendo sido substancialmente modificada por Huygens, deixou a desejar.

Em 1681, quinze anos após ter se estabelecido em Paris, Huygens voltou à Holanda por motivos de saúde. A morte de Colbert em 1683 e um clima religioso não propício à sua permanência na França fizeram com que Huygens não retornasse mais a Paris. De fato, o Editto de Nantes, estabelecido em 1598 e que garantia aos protestantes calvinistas da França (conhecidos como huguenotes) direitos substanciais em uma nação considerada essencialmente católica, foi desconsiderado em 1685 por Luis XIV, que também declarou ilegal o protestantismo por meio do Édito de Fontainebleau. Esses atos foram bastante prejudiciais para a França pois levaram milhares e milhares de protestantes a deixarem esse país, mudando-se para a Inglaterra, Prússia, Holanda, Suíça, algumas colônias francesas na América do Norte e até mesmo para a África do Sul. Esse êxodo privou a França da presença de muitos dos mais talentosos e capacitados indivíduos que, a partir de então, iriam auxiliar no desenvolvimento de países rivais.

Em 1690, Huygens publicou seu famoso trabalho “*Traité de la lumière*”. A primeira parte desse trabalho contém seus resultados e suas observações em ótica, alguns deles obtidos mais de dez anos antes. Essa obra e a “*Optika*” de Newton, publicada em 1704, podem ser considerados os dois tra-

balhos mais importantes no assunto dessa época, muito embora os pontos de vista fossem bem diferentes: Huygens adotava a teoria ondulatória para a luz enquanto Newton defendia a teoria corpuscular (embora reconhecesse as virtudes da teoria ondulatória da luz para explicar alguns fenômenos, como por exemplo, a coloração em películas delgadas). A segunda parte desse livro, intitulada “*Discours de la Cause de la Pesanteur*” (Discussão da causa da gravidade), contém a explicação mecânica de Huygens para a gravitação, já comentada anteriormente, na qual a gravidade não deveria ser atribuída a uma propriedade dos corpos, mas deveria ser explicada, como qualquer outro processo natural, em termos de movimento (vórtices em torno do Sol e dos planetas, no caso).

O livro de Huygens, cuja capa está mostrada na próxima página, contém várias pérolas. Com o que ficou conhecido com o nome de Princípio de Huygens, enunciado por exemplo, na forma,

*cada ponto de uma frente de onda no éter hipotético é interpretada como uma fonte de novas perturbações (ondículas secundárias) que se espalham esféricamente e a nova frente de onda é a envolvória de todas estas ondículas...*

Huygens foi capaz de explicar a propagação retilínea da luz (em um meio homogêneo), a reflexão e a refração da luz e a propagação da luz em um meio não-homogêneo como a atmosfera terrestre, entre outras coisas. Vale chamar a atenção para o fato de que Huygens nunca considerou conceitos como comprimento de onda ou frequência da onda. Ele pensava na propagação da luz em termos de impulsos transmitidos de uma partícula do éter luminífero a outra.

No caso da propagação na atmosfera, Huygens descreveu um pequeno experimento para mostrar que a atmosfera não é um meio homogêneo devido a efeitos de temperatura, o que acarreta mudanças na densidade do ar e, por conseguinte, no índice de refração local. Com isso em mente, e utilizando sua teoria ondulatória, ele mostrou claramente, com o auxílio de um desenho, que os raios luminosos (perpendiculares às frentes de onda) se encurvavam ao se propagarem na atmosfera, fazendo com que o objeto observado parecesse



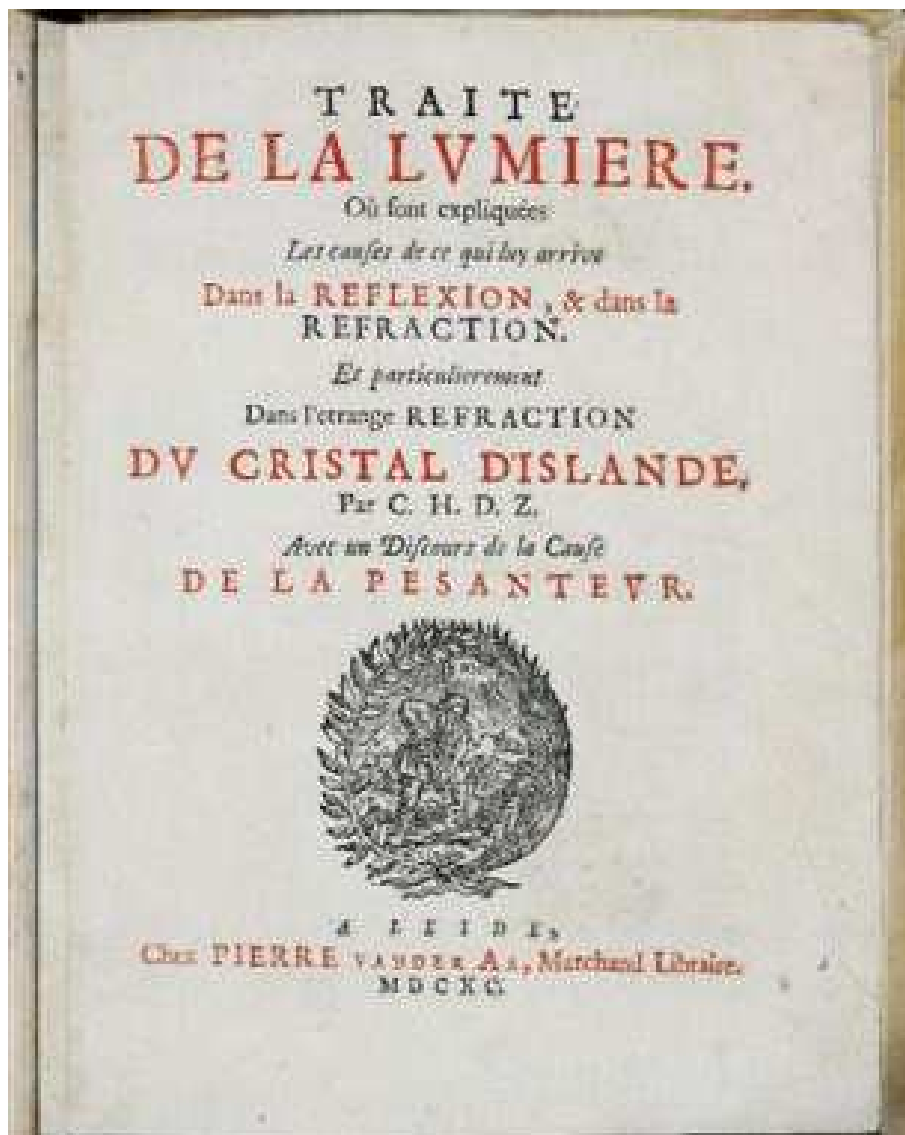


Figura 1.4: Capa do livro “*Traité de la Lumière*”, publicado em 1690. Note nessa edição também está incluída a teoria da gravitação de Huygens.

estar em outra posição, a posição aparente. No desenho abaixo, a posição aparente do ponto A está na direção da semi-reta BD (note que a velocidade da luz na situação em consideração é maior para regiões mais altas, nas quais o ar estaria mais rarefeito).

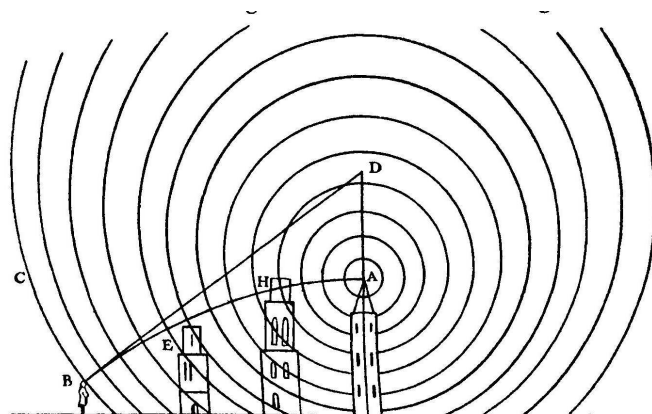


Figura 1.5: Desenho contido na obra “*Traité de la Lumière*” representando o encurvamento dos raios luminosos ao se propagarem através da atmosfera, considerada um meio não-homogêneo, segundo a teoria ondulatória de Huygens.

Ainda com sua teoria ondulatória, Huygens discutiu fenômenos complicados como a dupla refração e a polarização obtida por dupla refração, ocorrida no espato da Islândia. Tais fenômenos haviam sido descobertos por Erasmus Bartholinus em 1669<sup>8</sup>. Huygens percebeu que se a velocidade da luz variasse com a direção as superfícies esféricas se deformariam em superfícies elipsoidais, o que lhe permitiu explicar a dupla refração em materiais como o cristal da Islândia.

Mesmo tendo estudado intensamente a dupla refração e, conseqüentemente, observado fenômenos diretamente ligados com a polarização da luz, Huygens não adotou a transversalidade para as ondas luminosas. A pola-

---

<sup>8</sup>O matemático dinamarquês Erasmus Bartholinus (1625-1698) não apenas observou a dupla refração como também realizou vários experimentos relacionados a esse fenômeno e escreveu um trabalho de mais de cinquenta páginas sobre o assunto. Essa foi a primeira descrição científica do fenômeno de polarização, uma vez que as imagens duplas produzidas por tais materiais têm luz com polarizações perpendiculares entre si. Por esses motivos, Bartholinus é considerado o descobridor da dupla refração e da polarização da luz. No entanto, podemos dizer que o fenômeno da polarização da luz foi percebido de alguma forma por muitos outros e em épocas diferentes. Por exemplo, os Vikings conheciam o espato da Islândia e com ele conseguiam saber a posição do Sol mesmo em um dia nublado (devido à polarização da luz espalhada pela atmosfera), o que os auxiliava em suas navegações.

rização da luz só foi bem compreendida com Augustin Jean Fresnel (1788-1827), em 1821 (uma das dificuldades era a existência de luz não polarizada, que sugeria que a luz fosse como o som, uma onda longitudinal; mas como então explicar que uma onda longitudinal se transformava em onda transversal? Questões como essa eram verdadeiros obstáculos na compreensão da polarização). Newton chegou a argumentar que, uma vez que polarização implicava transversalidade das ondas e que o éter luminífero não seria capaz de propagar ondas transversais (para isso esse meio deveria ser um meio sólido, o que estava muito longe do que se presumia para o éter), a teoria ondulatória deveria ser refutada.

A teoria corpuscular de Newton dominou sobre a teoria ondulatória de Huygens por quase cento e cinquenta anos <sup>9</sup>. Somente com os experimentos de Thomas Young (1773-1829) do início do século XIX e a teoria desenvolvida por Fresnel poucos anos mais tarde para explicar a difração é que a teoria ondulatória ganhou mais credibilidade dos cientistas da época. Afinal, como explicar que “**luz + luz = escuridão**” com a teoria corpuscular?

Há uma interessante história sobre o declínio da teoria corpuscular da luz ocorrida no início do século XIX que merece ser contada. Em 1818, a Academia de Paris instituiu um prêmio para o melhor trabalho sobre difração. Fresnel, que havia desenvolvido uma teoria para a difração a partir do princípio de Huygens e dos experimentos de interferência de Young, concorreu a esse prêmio, entregando à Academia seus cálculos sobre o assunto. Na banca estava Siméon Poisson (1781-1842), matemático de mão cheia e adepto da teoria corpuscular de Newton. Rapidamente, Poisson percebeu que a teoria de Fresnel previa a existência de uma mancha brilhante no centro da sombra de um disco circular e opaco iluminado por uma fonte puntiforme, o que para ele parecia absurdo (uma teoria corpuscular jamais explicaria a existência de tal mancha). Com esse argumento, Poisson esperava refutar a teoria ondulatória utilizada por Fresnel. No entanto, Dominique Arago (1786-1853) realizou um experimento e observou a tão “inesperada” mancha

---

<sup>9</sup>Para termos uma idéia desse domínio, vale a pena mencionar que o tratado de Huygens sobre a luz só foi traduzido para a língua inglesa após, aproximadamente, duzentos anos de sua publicação.

brilhante que, ironicamente, é conhecida hoje em dia com o nome de “mancha brilhante de Poisson”<sup>10</sup>. A observação de Arago fortaleceu a idéia da natureza ondulatória da luz e, certamente, foi determinante na conquista do prêmio por Fresnel.

Mesmo que Young, Arago e Fresnel, com seus experimentos e desenvolvimentos teóricos, tenham colocado a teoria ondulatória em bases muito sólidas, podemos dizer que o tiro de misericórdia na teoria corpuscular de Newton ocorreu quando, pela primeira vez, em 1850, Leon Foucault (1819-1868) mostrou experimentalmente que a velocidade da luz dentro d’água era menor do que no ar. Note que para explicar a lei da refração com sua teoria corpuscular, Newton supunha justamente o oposto, isto é, que a velocidade da luz dentro d’água fosse maior do que no ar.

No entanto, um passo grandioso na história das ondas luminosas seria dado muito em breve. Em seu trabalho intitulado “*Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo*”, publicado pela primeira vez em 1873, o físico e matemático escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) expôs sua teoria que não só unificava a eletricidade e o magnetismo (daí a utilização do termo “campo eletromagnético”), mas mostrava que a ótica era apenas um pequeno ramo da teoria eletromagnética. De fato, após completar a lei de Ampère incluindo o termo da chamada corrente de deslocamento, Maxwell percebeu que as equações que hoje em dia levam seu nome admitiam soluções de ondas propagantes. Maxwell calculou a velocidade de propagação de tais ondas e verificou que o valor encontrado coincidia com aqueles medidos para a velocidade da luz, obtidos em experimentos de ótica. Daí sua conclusão de que luz era apenas um tipo de onda eletromagnética.

Maxwell propôs que ondas eletromagnéticas de outros comprimentos de onda também deveriam existir mas, infelizmente, não viveu o suficiente para ver suas ondas criadas e detectadas em laboratório, o que ocorreu somente em 1887, oito anos após a sua morte. Embora Maxwell não tenha feito toda a teoria eletromagnética sozinho, pelo contrário, se baseou nos desenvolvimentos

---

<sup>10</sup>A primeira observação dessa mancha brilhante foi feita pelo astrônomo e matemático italo-francês Giacomo Fillipo Maraldi, em 1723, mas tal feito não foi reconhecido até sua redescoberta por Arago no século XIX.

anteriores de pessoas como Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), Hans Christian Oersted (1777-1851), André Marie Ampère (1775-1836) e Michael Faraday (1791-1867), entre outros, podemos afirmar sem dúvida alguma que, em seu tratado, Maxwell estabeleceu novos padrões para o tratamento dos problemas eletromagnéticos. As quatro equações de Maxwell, juntamente com as leis do movimento de Newton e a teoria da relatividade de Einstein estão entre as mais fundamentais contribuições à física.

Foi o físico alemão Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), em 1887, o primeiro a gerar e detectar em laboratório ondas eletromagnéticas, no caso, ondas de rádio, confirmando assim a previsão de Maxwell (ondas de rádio têm comprimentos de onda bem maiores do que os da luz). Hertz também demonstrou em outros experimentos que as ondas eletromagnéticas se refletiam em superfícies metálicas do mesmo modo que a luz o fazia em um espelho e se refratavam por um bloco de parafina satisfazendo as mesmas leis da refração da luz.

A descoberta posterior dos raios X foram mais uma confirmação das previsões de Maxwell (em oposição às ondas de rádio, raios X têm comprimentos de onda muito menores do que os da luz, por exemplo, podendo ser da ordem do espaçamento entre átomos vizinhos em uma rede cristalina, isto é, alguns angstroms). O desenvolvimento da tecnologia de comunicação desde o final do século XIX até os dias de hoje deve muito ao trabalho de Maxwell: as comunicações via rádio, televisão, radar ou satélite, todas elas têm suas origens na teoria eletromagnética.

Após o trabalho de Maxwell, tudo parecia mostrar inequivocamente que luz era uma onda, uma onda eletromagnética. Mas, por ironia da história da ciência, nem Huygens e tampouco Newton estavam corretos (ou errados). Na verdade, a luz tem uma “dupla personalidade”: ora se comporta como onda, ora como partícula. Essa dualidade onda-partícula está no cerne da teoria quântica moderna que descreve não apenas a luz, mas também a matéria e a interação da radiação com a matéria.

O curioso é que foi justamente no experimento realizado por Hertz no ano de 1887, que consagrava a luz como onda eletromagnética, que apareceram os primeiros indícios que levariam Einstein, anos mais tarde, ao ex-

plicar o chamado efeito fotoelétrico, a considerar a luz como um conjunto de partículas <sup>11</sup> .

Louis de Broglie (1892-1987), em sua dissertação apresentada em 1923, propôs que também partículas, como o elétron, deveriam ter um comportamento ondulatório, já que a luz, que nada mais era do que onda eletromagnética, se comportava como partícula. A história da dualidade onda-partícula ou, melhor dizendo, de toda a criação da teoria quântica, que ocorreu essencialmente nas três primeiras décadas do século XX é fascinante e pode ser considerada como um dos períodos mais efervescentes da história da física, senão da ciência. No entanto, esse assunto já nos levaria longe demais dos objetivos desse capítulo, de modo que devemos retornar aos últimos anos de vida de nosso Christiaan Huygens.

Em 1693, Huygens fez sua última publicação sobre relógios e em 1695 faleceu em sua cidade natal, sentindo solidão e melancolia. Huygens não se limitou à astronomia, física e matemática. Trabalhou, por exemplo, em música, na já existente escala de 31 tons (divisão temperada de uma oitava em 31 intervalos iguais) e suas idéias influenciaram a música de seu país. E nos últimos anos de sua vida, escreveu um livro sobre vida extraterrestre, cuja publicação póstuma ocorreu em 1698, sob o título “*Conjecturas a Respeito de Mundos Planetários, seus Habitantes e Produções*”.

Não é exagero afirmar que Christiaan Huygens foi um dos maiores físicos do século XVII, século de gênios como Galileu, Kepler, Descartes, Fermat, Torricelli, Pascal, Hooke e Newton, entre outros. Apelidado por Newton de “*Summus Ingenius*”, foi considerado por Arnold Sommerfeld (1868-1951) como o “*especialista em relógios mais brilhante de todos os tempos*”. E nada mais verdadeiro do que as palavras do grande matemático e físico francês Louis Lagrange (1736 - 1813):

*Huygens foi destinado a melhorar e desenvolver a maioria dos descobrimentos importantes de Galileu*

---

<sup>11</sup>De fato, em seu experimento, Hertz observou que a luz das centelhas da antena emissora facilitava a ocorrência de centelhas na antena receptora. Isso ocorria porque a luz das centelhas da antena emissora causava a emissão de elétrons das esferas metálicas que se encontravam nos extremos da antena receptora, mas esse fato só foi entendido mais tarde, após a explicação de Einstein do efeito fotoelétrico.

De fato, era como se um Galileu, décadas mais tarde, rejuvenecido, retornasse para dar continuidade à sua obra. Na tabela mostrada abaixo, onde apontamos alguns dos feitos de Galileu e os respectivos desenvolvimentos posteriores feitos por Huygens, fica evidente a veracidade da afirmativa anterior:

<b>Galileu</b>	$\implies$	<b>Huygens</b>
• Telescópio (20×)	$\implies$	melhorou telescópio (92×);
• Luas de Júpiter	$\implies$	Lua de Saturno;
• Saturno (3 estrelas?)	$\implies$	desvendou o mistério de Saturno (anel)
• Princípio de Inércia	$\implies$	Teoria do Movimento Relativo;
• Quase chegou na $A_{cent.}$	$\implies$	obteve a fórmula para $A_{cent.}$ ;
• Isocronismo do pêndulo (peq. oscil.)	$\implies$	pêndulo cicloidal;
• Sugeriu a construção de relógios de pêndulo	$\implies$	construiu!

Sugerimos a referência [18], como consulta às obras completas, inclusive às cartas de Huygens. Finalizamos esta seção com um trecho de uma carta datada de 1687 escrita pelo próprio Huygens para Enrefried Walther von Tschirnhaus (1651-1708), na qual ele explica um pouco o seu modo de proceder:

*“... grandes dificuldades são sentidas inicialmente e elas não podem ser superadas a não ser que comecemos pelos experimentos ... e então concebemos algumas hipóteses ... Mas ainda assim, um trabalho muito duro permanece para ser feito e precisa-se não apenas de muita perspicácia, mas frequentemente de uma boa dose de sorte.”*

De fato, como veremos na história que passaremos a contar, as descobertas de Huygens envolveram, em geral, um pouco de experimentos, algumas hipóteses, trabalho muito duro e o acaso jogando a favor.

## 1.2 Em busca de um pêndulo isócrono

Frequentemente ouvimos a história de que Galileu, ainda muito jovem (teria dezenove anos, aproximadamente), ao observar as oscilações de uma lamparina pendurada por um cabo muito longo dentro da catedral de Pisa, percebeu que o período das oscilações executadas pela lamparina independia de quão longe se movia a lamparina. Em outras palavras, o período do movimento da lamparina parecia independe da amplitude de suas oscilações. Reza a lenda de que Galileu teria utilizado o próprio pulso para medir os intervalos de tempo. Galileu também sabia que pêndulos com maiores comprimentos tinham maiores períodos de oscilação, mas foi Huygens, como já mencionamos, que chegou à expressão para o período de pequenas oscilações  $\tau = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ , onde  $\ell$  é o comprimento do pêndulo e  $g$ , o módulo da aceleração da gravidade.

Sabemos, hoje em dia, que as oscilações de um pêndulo são isócronas apenas para pequenas amplitudes (que foi o caso observado por Galileu dentro da catedral de Pisa, devido ao grande comprimento do cabo que sustentava a lamparina) mas que, para amplitudes cada vez maiores, o período passa a depender da amplitude. Na verdade, já no século XVII esse fato era conhecido. Mersenne e muitos outros, incluindo Huygens, já haviam observado que um pêndulo não era isócrono, mas que seu período era tanto maior quanto maior fosse a amplitude das oscilações. A Figura A mostra um pêndulo simples de comprimento  $\ell$  e amplitude  $\theta_0$ .

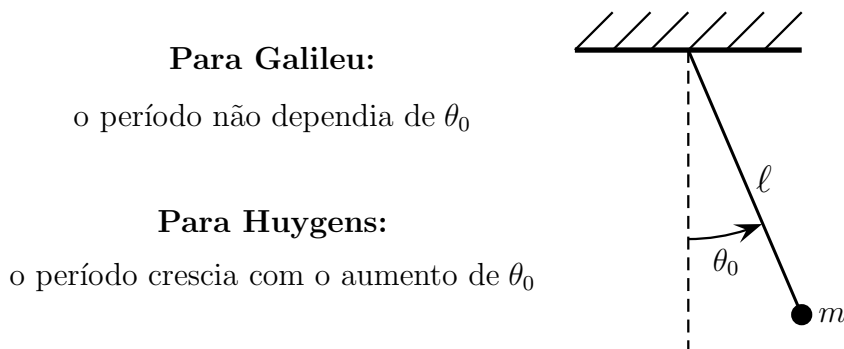


Figura 1.6: Pêndulo simples de comprimento  $\ell$  e amplitude  $\theta_0$



Huygens chegou a relatar, inclusive, um experimento no qual comparava o período de um pêndulo que oscilava com uma amplitude muito pequena com o período de um pêndulo idêntico que oscilava com uma amplitude bem grande, no caso,  $\theta_0 = \pi/2$ . O valor encontrado por Huygens para a razão entre esses períodos foi

$$\frac{\tau(\pi/2)}{\tau_0} \approx \frac{34}{29} \approx 1,17,$$

sendo  $\tau_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$  o período para pequenas oscilações. Pode-se mostrar que o período de um pêndulo simples de comprimento  $\ell$  e amplitude  $\theta_0$ , com  $0 < \theta_0 \leq \pi/2$  é dado por (veja uma rápida demonstração desse resultado no Apêndice A)

$$\frac{\tau(\theta_0)}{\tau_0} = 1 + \frac{1^2}{2^2} \text{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{1^2 \times 3^2}{2^2 \times 4^2} \text{sen}^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \dots \quad (1.1)$$

Ingenuamente, devido aos coeficientes cada vez menores dos termos da série (1/4, 9/64, ...), poderíamos imaginar que bastaria considerar alguns termos da mesma, por exemplo, até quarta ordem na amplitude, para obtermos um bom resultado para o período. No entanto, isso não é bem verdade pois, para valores cada vez maiores de  $\theta_0$ , a convergência da série anterior se torna cada vez mais lenta. Isso significa que, para grandes amplitudes de oscilação, devemos considerar muitos termos da série para encontrarmos um valor confiável para o período. Por exemplo, para a amplitude  $\theta_0 = \pi/2$  os valores para o período com os termos até quarta ordem e com todos os termos da série são dados, respectivamente, por

$$\frac{\tau(\pi/2)}{\tau_0} \Big|_{4^{\text{a}} \text{ ordem}} \approx 1,16 ; \quad \frac{\tau(\pi/2)}{\tau_0} \Big|_{\text{serie}} \approx 2,08 . \quad (1.2)$$

Note que a diferença entre esses valores é de, aproximadamente, quarenta e cinco por cento do valor correto do período. É curioso que o valor observado por Huygens seja muito próximo do valor obtido com apenas os termos até quarta ordem.

Como já mencionamos, medir o tempo era fundamental, naquela época, para se medir a longitude durante as navegações. Como as ondas do mar alteravam as amplitudes dos pêndulos, Huygens se dedicou à construção de um pêndulo isócrona que pudesse ser utilizado como cronômetro marítimo, imune ao balanço do mar. Mas como fazê-lo?

Huygens tentou solucionar esse problema de uma forma extremamente simples mas, ao mesmo tempo, genial. Uma espécie de “ovo de Colombo”, um artifício que depois de conhecê-lo nos parece totalmente trivial. Uma vez que o período de um pêndulo era tanto maior quanto mais longo fosse o seu comprimento, Huygens pensou em compensar esse fato diminuindo o comprimento efetivo de um pêndulo sempre que o ângulo do pêndulo com a vertical aumentasse o seu valor. Com esse objetivo em mente, Huygens inseriu obstáculos laterais, como ilustra a Figura 1.7.

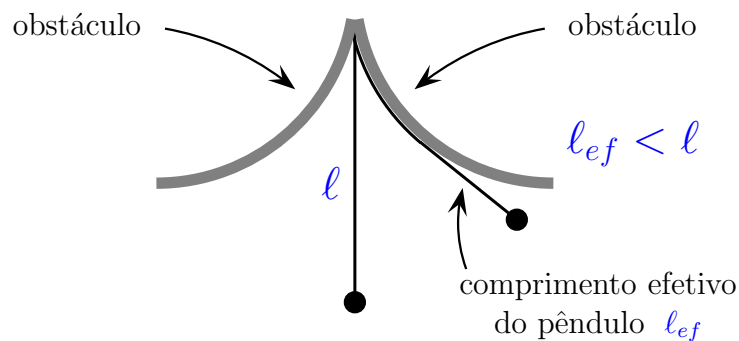


Figura 1.7: Pêndulo submetido a obstáculos laterais fazendo com que, durante suas oscilações, seu comprimento efetivo diminua sempre que o ângulo entre o fio e a vertical aumente.

Mas que forma deve ter cada obstáculo lateral para que a diminuição do comprimento efetivo do pêndulo ( $l_{ef}$ ) compense o aumento de seu período ( $\tau$ ) com a amplitude ( $\theta_0$ )? Huygens tentou, em vão, estabelecer um método experimental para determinar a forma dos obstáculos laterais. Desistiu da idéia em 1658, voltando a restringir a amplitude de oscilação do pêndulo, para garantir o seu isocronismo. No entanto, uma “feliz” coincidência o aguardava: “a dor de dente de Pascal” (não tão feliz assim para Pascal).

### 1.3 Ciclóide: a Helena da Geometria

A definição cinemática da cicloide pode ser enunciada da seguinte maneira: um ponto na periferia de um círculo que rola sem deslizar sobre uma superfície plana perpendicular ao plano do círculo descreve uma cicloide. A Figura 1.8 mostra uma cicloide obtida exatamente do modo descrito anteriormente. O círculo cujo movimento dá origem à cicloide é chamado “círculo gerador” da cicloide.

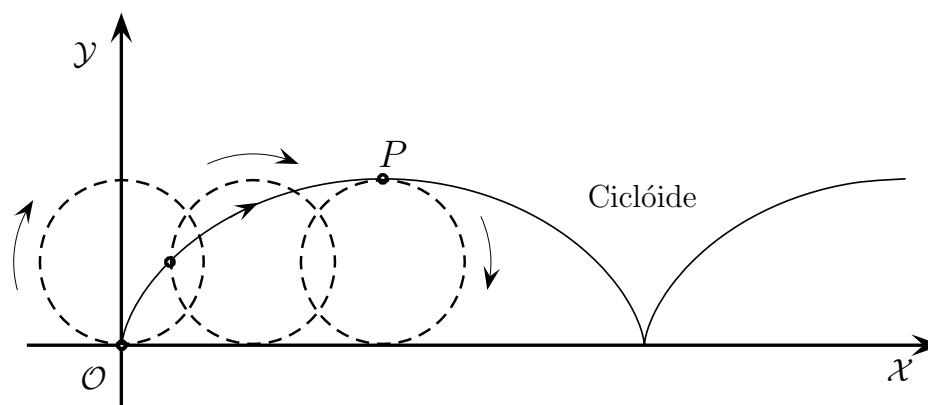


Figura 1.8: A linha contínua indica a cicloide descrita pelo ponto  $P$  localizado na periferia de um disco que rola sem deslizar sobre uma superfície horizontal. O disco se move em um mesmo plano vertical. A figura mostra o ponto  $P$  em três instantes de seu movimento.

Vale a pena apreciar as palavras de Pascal a respeito dessa curva:

*“A cicloide é uma curva tão usual e corrente que depois da reta e da circunferência nenhuma outra curva é tão comumente encontrada. É descrita tão frequentemente diante de nossos olhos que é surpreendente que não tenha sido considerada pelos antigos..”*

É comum a afirmação de que a cicloide foi descoberta por Galileu ( $\sim 1599$ ) e, independentemente, na França, por Mersenne (*la roulette*). Na verdade, essa curva já fora discutida por Charles Bouvelles (1475-1566), em 1501, como um meio mecânico de “*quadrar o círculo*”<sup>12</sup>. Galileu, juntamente com seu estudante Viviani, estudou bastante a cicloide e chegou a sugerir que arcos de

<sup>12</sup>A expressão “*quadrar o círculo*” se refere a um problema proposto pelos geômetras da antiguidade, a saber, o de construir um quadrado com a mesma área de um dado

pontes fossem construídos com a forma dessa curva. Mersenne popularizou a cicloide entre as pessoas com quem se correspondia com mais frequência, em particular, com Roberval que, já em torno de 1630 havia determinado muitas das mais importantes propriedades dessa curva como, por exemplo, o fato de que a área sob um arco completo de uma cicloide é exatamente três vezes a área do círculo gerador da mesma <sup>13</sup> .

Na época, havia a necessidade de novas curvas, para testar por exemplo a eficiência de novos métodos de cálculo de tangentes, etc. Rapidamente, a cicloide se tornou muito popular entre os matemáticos. Curvas como a cicloide, cuja relação entre as coordenadas cartesianas de seus pontos não é dada por uma simples relação algébrica, foram de fato objetos de grande interesse por muitos cientistas importantes. Em particular, devido ao grande número de disputas e controvérsias provocadas entre os matemáticos para demonstrarem as propriedades da cicloide, essa curva foi apelidada de “*Helena da Geometria*” [16], em alusão ao episódio da história grega de Helena de Tróia, mulher de Menelau, cobiçada e disputada por vários homens.

Além dos nomes de Galileu, Mersenne, Roberval e Torricelli, há vários outros nomes de cientistas importantes relacionados à cicloide, como por exemplo, Wren, Pascal, Huygens, os irmãos Bernoulli, Newton e Leibniz, entre outros.

A seguir, enunciaremos uma propriedade da cicloide que será fundamental para a compreensão da solução feita por Huygens para o problema do pêndulo isócrona, ou pêndulo cicloidal, a ser apresentada na próxima seção. Com esse intuito, indicamos na Figura 1.9 por uma linha contínua um trecho

---

círculo, mas utilizando apenas um número finito de passos com régua e compasso. Em 1882, como consequência do Teorema de Lindemann-Weierstrass que demonstra ser  $\pi$  um número irracional transcendental e não um número irracional algébrico, demonstrou-se que quadrar o círculo era uma tarefa impossível ( $\pi$  é um número irracional transcendental porque não é a raiz de qualquer polinômio com coeficientes racionais).

<sup>13</sup>Por manter em segredo muitas de suas técnicas de solução de problemas, Roberval perdeu a prioridade da descoberta de vários resultados importantes e acabou se envolvendo em muitas disputas. Uma das pessoas acusadas por Roberval de plágio foi Torricelli que, em 1644, foi o primeiro a publicar a explicação a respeito da área sob o arco total da cicloide e de tangentes à cicloide. Acredita-se que Torricelli tenha chegado a esses resultados de forma independente (lembre-se de que Torricelli foi assistente de Galileu por um curto período e, provavelmente, foi com ele que tomou conhecimento da cicloide).

da trajetória cicloidal descrita por um ponto  $P$  localizado na periferia de um círculo que rola sem deslizar sobre a superfície horizontal. Na figura, também estão traçadas a reta tangente à cicloide em  $P$  e a reta perpendicular à cicloide nesse ponto, ambas desenhadas por linhas tracejadas.

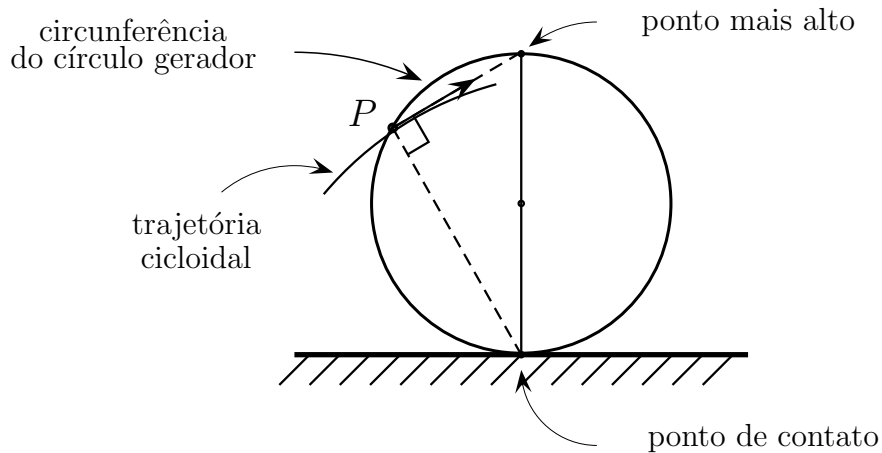


Figura 1.9: Ilustração da propriedade fundamental da cicloide: a reta tangente à cicloide em  $P$  passa pelo ponto mais alto do círculo gerador.

Enunciamos, então, a seguinte propriedade da cicloide:

*a reta tangente a uma cicloide em dado ponto  $P$  passa, necessariamente, pelo ponto mais alto do círculo gerador dessa cicloide, qualquer que seja o ponto  $P$ .*

Vejamos como demonstrar essa propriedade lançando mão de conhecimentos da física. Como, por hipótese, o círculo gerador rola sem deslizar sobre a superfície, o ponto do círculo que está em contato com a mesma não desliza sobre ela, ou seja, no instante do contato, esse ponto encontra-se em repouso. Conseqüentemente, podemos afirmar que todos os pontos do círculo gerador, e não apenas os de sua circunferência, têm um movimento de rotação pura em torno de um eixo instantâneo de rotação que passa pelo ponto de contato e é perpendicular ao plano do círculo. Sendo esse o caso, a velocidade do ponto  $P$  é, necessariamente, perpendicular à semi-reta que liga o ponto  $P$  ao ponto de contato, por onde passa o eixo instantâneo de rotação. Em

contrapartida, da definição de velocidade, sabemos que a velocidade de um ponto é tangente à trajetória desse ponto no instante considerado. Ou seja, a direção da reta tangente à cicloide em  $P$  é a mesma que a da velocidade do ponto  $P$ . Usando o fato de que o ângulo formado pelas semi-retas que saem de um ponto de uma circunferência a dois outros pontos da mesma, diametralmente opostos entre si, é um ângulo reto, concluímos que a reta tangente à cicloide em  $P$  passa, necessariamente, pelo ponto mais alto do círculo gerador (veja novamente a Figura 1.9).

## 1.4 Pascal e a competição de 1658

Em 1658, um curioso episódio ocorrido na vida de Pascal acaba influenciando os rumos da mecânica daquele século. Nessa época, Pascal havia se distanciado da matemática e se dedicava à religião<sup>14</sup>. Certa noite, para suportar uma forte dor de dente que o impossibilitava de dormir, Pascal, em um ato de desespero, resolveu se distrair pensando em alguns problemas sobre a cicloide que haviam sido propostos por Mersenne. Inexplicavelmente, sua dor se atenuou enormemente e Pascal interpretou sua melhora como um sinal de Deus para que ele procedesse com seus estudos sobre a cicloide, o que fez intensamente nos dias que se seguiram. Durante esse período, Pascal redescobriu a maior parte dos resultados conhecidos a respeito da cicloide até então, assim como encontrou outros tantos resultados novos sobre essa curva. Por exemplo, ele calculou a área sob qualquer segmento de cicloide e calculou o centro de gravidade de qualquer segmento dessa curva. Ele ainda resolveu problemas relacionados aos cálculos do volume e da área da superfície do sólido gerado pela revolução de uma cicloide em torno do eixo formado pelo lugar geométrico dos pontos de contato do círculo gerador com a superfície sobre a qual esse círculo rola sem deslizar.

Pascal decidiu, então, propor uma competição sobre a cicloide, oferecendo dois prêmios para quem resolvesse a contento um conjunto de problemas desafiadores sobre essa curva. Roberval foi escolhido como um dos juizes da

---

<sup>14</sup>De fato, na noite de 23 de novembro de 1654, Pascal experimentou um êxtase religioso que o fez abandonar a matemática e a ciência pela religião.

competição. Somente dois conjuntos de soluções foram entregues pleiteando os prêmios, a saber, as soluções de Antoine de Lalouvière e as soluções de John Wallis, mas Pascal e Roberval decidiram que nenhum desses autores merecia ganhar algum prêmio, por não resolverem satisfatoriamente os problemas propostos.

Vários outros matemáticos e físicos da época, entre eles Huygens, Wren e Fermat, cientes da competição, comunicaram a Pascal suas descobertas a respeito da cicloide sem, no entanto, entrarem na competição. Dentre elas, a mais notável foi a contribuição de Wren. Ele mostrou que o comprimento de arco total de uma cicloide é  $8R$ , sendo  $R$  o raio do círculo gerador da cicloide. Como veremos mais adiante, Huygens também desenvolveu um método com o qual também foi capaz de retificar corretamente a cicloide <sup>15</sup>. Pascal publicou, então, suas próprias soluções para os problemas desafiadores sendo, portanto, o vencedor da competição. Essa publicação foi precedida por uma “*Histoire de la roulette*” (História da cicloide) escrita numa série de cartas e foi assinada por Amos Dettonville, anagrama de Louis de Montalte, pseudônimo utilizado por Pascal. (nesse texto, Pascal toma partido de Roberval em uma disputa entre este e Torricelli).

A conduta de Pascal relativa à competição deixou muitas pessoas descontentes mas, pelo menos, teve um efeito extremamente benéfico, a saber, chamou a atenção de Huygens para a cicloide. Foi isso, como veremos, que possibilitou Huygens a resolver o problema que tanto queria, encontrar a curva tautócrona, pois conhecendo essa curva, estaria a um passo de encontrar, finalmente, o pêndulo isócrona.

---

<sup>15</sup>A primeira curva a ser retificada foi a espiral logarítmica. Essa curva foi estudada pela primeira vez por Descartes em 1638 e retificada por Torricelli em 1640. A segunda curva a ser retificada parece ter sido a cicloide, por Wren em 1658. No entanto, o matemático inglês William Neile, pupilo de Wallis, introduziu a parábola semicúbica (essencialmente,  $x = cy^{3/2}$ , com  $c$  constante) em 1657 e parece tê-la retificado na mesma época, mas seus resultados foram publicados por Wallis somente em 1659.

## 1.5 Huygens e a tautócrona

Dominando bem a maioria das propriedades da cicloide, Huygens decidiu considerar o movimento de um pequeno corpo deslizando sobre uma superfície lisa com o perfil de uma cicloide invertida, como ilustra a Figura 1.10.

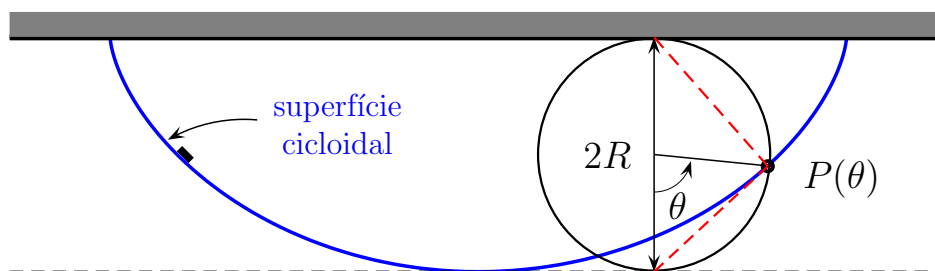


Figura 1.10: Pequeno bloco deslizando sobre uma superfície cicloidal lisa, gerada por um círculo de raio  $R$  que rola sem deslizar em contato com uma superfície horizontal em sua parte superior (região preta e hachurada com cinza).

Nessa figura também está mostrado o círculo gerador da cicloide, de raio  $R$  e um ponto genérico da curva,  $P(\theta)$ , sendo  $\theta$  o ângulo de giro do círculo gerador de tal forma que  $\theta = 0$  corresponda ao ponto mais baixo da cicloide.

Para sua surpresa e felicidade, Huygens mostrou no final de 1659 que as oscilações desse corpo independiam de onde o corpo era abandonado, ou seja, da amplitude das oscilações. Em outras palavras, Huygens tinha descoberto, dessa forma, que a cicloide nada mais era do que a tautócrona, resultado que só foi publicado em 1673, no “*Horologium Oscillatorium*” e que será descrito, detalhadamente, nesta seção.

Novamente, a genialidade de Huygens se fez presente. Utilizando um procedimento comum nos dias de hoje, sempre que atacamos um problema difícil, ele tentou relacionar o problema em questão com um outro, muito mais simples e de solução conhecida. Na verdade, Huygens analisou a projeção vertical do movimento do bloco sobre a superfície cicloidal e conseguiu mostrar que tal projeção coincidia com a projeção vertical do movimento de um outro corpo, apropriadamente escolhido. Ou seja, Huygens teve uma enorme capacidade de abstração ao criar um movimento auxiliar para ajudá-lo na solução de seu problema real.



Na Figura 1.11 estão indicadas duas posições do bloco, a saber, sua posição no instante inicial  $t = 0$  em que é abandonado a partir do repouso, caracterizada pela altura  $H$ , e sua posição em um instante genérico  $t$  de seu movimento, caracterizada pela altura  $h$ . As alturas são relativas ao ponto mais baixo da trajetória cicloidial do bloco. Note que no intervalo de tempo entre o instante inicial e o instante genérico  $t$  a altura do bloco diminuiu de um valor  $H - h$ .

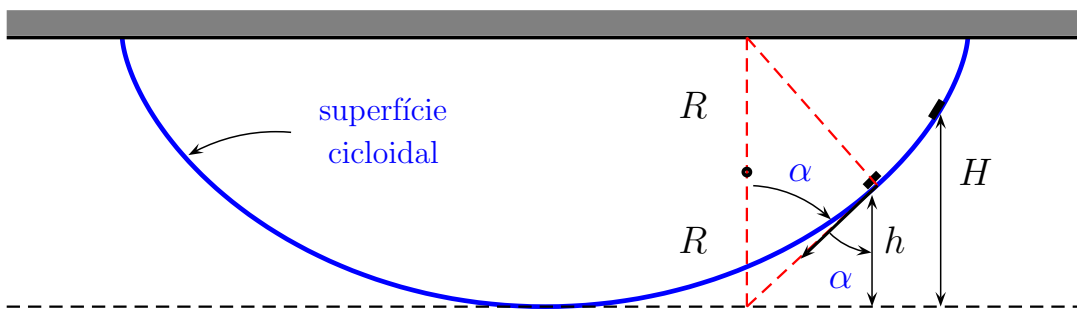


Figura 1.11: Posição inicial e posição genérica do bloco em seu movimento sobre a superfície cicloidial.

A figura ainda mostra a semi-reta que vai da posição genérica do bloco até o ponto de contato do círculo gerador (não desenhado aqui para não sobrecarregar a figura), e a semi-reta que vai dessa mesma posição e segue a direção da reta tangente à trajetória cicloidial do bloco até tocar a linha horizontal correspondente à altura zero, ambas indicadas por linhas tracejadas vermelhas. Devido à propriedade fundamental da cicloide demonstrada anteriormente, as linhas tracejadas em vermelho formam um triângulo retângulo, com a hipotenusa na vertical e tendo um comprimento  $2R$ . Por conveniência futura, o ângulo  $\alpha$  foi definido na Figura 1.11 como aquele entre a direção da reta tangente à trajetória cicloidial na posição genérica do bloco e a vertical.

Huygens já havia demonstrado que o módulo da velocidade adquirida por um corpo que é abandonado do repouso sobre uma superfície curva, mas lisa, é dada pela raiz quadrada do dobro do produto do módulo da aceleração da gravidade pelo valor da queda na altura do corpo [17], resultado que hoje obtemos diretamente da conservação da energia mecânica.

Com isso, temos a relação

$$v^2 = 2g(H - h),$$

ou seja, o módulo da velocidade do bloco quando ele está a uma altura  $h$  relativa ao ponto mais baixo de sua trajetória é dado por

$$v = \sqrt{2g} \sqrt{H - h}. \quad (1.3)$$

Da definição de  $\alpha$  (veja a Figura 1.11), o módulo da componente vertical da velocidade do bloco é dado por

$$v_{vert} = v \cos\alpha, \quad (1.4)$$

Fazendo uma rápida inspeção na Figura 1.11, e usando a propriedade fundamental da cicloide, temos, também

$$(2R \cos\alpha) \cos\alpha = h,$$

donde,

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{h}{2R}} \quad (1.5)$$

Substituindo as equações (1.3) e (1.5) na equação (1.4), obtemos

$$v_{vert} = \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{h(H - h)}. \quad (1.6)$$

A última equação descreve como o módulo da componente vertical da velocidade do bloco varia com  $h$  em seu movimento de descida sobre a superfície cicloidal lisa.

Com uma intuição espetacular, Huygens introduziu um movimento auxiliar de um corpo, no caso, escolheu um movimento circular uniforme de raio  $H/2$  e velocidade de módulo  $u$ , e tentou ajustar o valor de  $u$  para que as projeções verticais dos dois movimentos coincidissem perfeitamente. E,

como veremos a seguir, deu certo! Nada indicava, pelo menos de maneira óbvia, que tais projeções pudessem coincidir com perfeição. Aqui foi um dos momentos onde se juntaram a genialidade, a sorte e certamente muitas horas de trabalho de Huygens.

Na Figura 1.12, além dos dados contidos na figura anterior, está indicado um trecho da trajetória circular do movimento auxiliar. O movimento circular auxiliar é escolhido de tal forma que, nele, o corpo esteja inicialmente no ponto mais alto do círculo e que esse ponto coincida com a posição inicial do bloco sobre a superfície cicloidal. Para não sobrecarregar a figura, desenhamos somente uma semicircunferência. Além disso, faremos a análise apenas para o trecho de descida do bloco desde sua posição inicial até o ponto mais baixo de sua trajetória. O intervalo de tempo transcorrido nesse trecho corresponde a um quarto do período procurado.

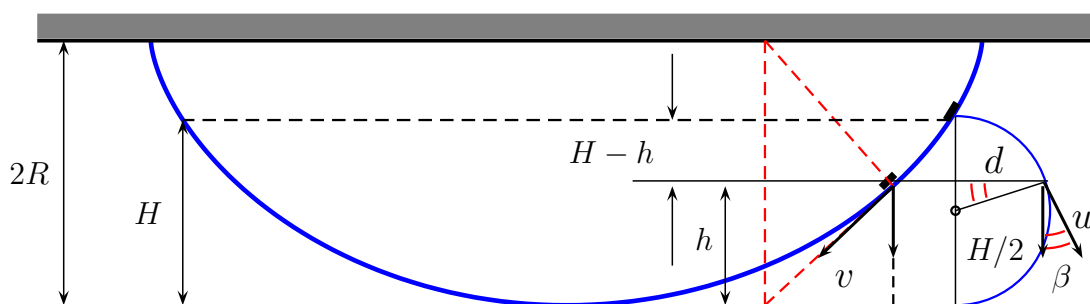


Figura 1.12: A figura mostra o movimento cicloidal real do bloco e o movimento circular auxiliar introduzido por Huygens para simplificar o problema (semicircunferência à direita).

Analisemos, agora, a projeção vertical do movimento circular uniforme auxiliar introduzido por Huygens. Inicialmente, sendo  $\beta$  o ângulo entre a velocidade do corpo no movimento auxiliar em um instante genérico e a vertical, o módulo da componente vertical da velocidade desse corpo é

$$u_{vert} = u \cos\beta. \quad (1.7)$$

Da Figura 1.12, a partir do triângulo retângulo cuja hipotenusa vale  $H/2$  e que um de seus catetos está na horizontal, vemos que

$$\cos\beta = \frac{d}{H/2}, \quad (1.8)$$

onde  $d$  é a distância da posição do corpo no movimento circular até o diâmetro vertical desse círculo (de raio  $H/2$ ). Substituindo (1.8) em (1.7), obtemos,

$$u_{vert} = \frac{ud}{H/2}. \quad (1.9)$$

A fim de expressarmos  $d$  em termos de  $H$  e  $h$ , basta utilizarmos a propriedade bem conhecida da geometria que nos permite escrever a relação (basta utilizar a semelhança entre triângulos retângulos).

$$\frac{d}{H-h} = \frac{h}{d} \implies d = \sqrt{h(H-h)}. \quad (1.10)$$

Substituindo (1.10) em (1.7), obtemos

$$u_{vert} = \frac{u}{H/2} \sqrt{h(H-h)}. \quad (1.11)$$

Comparando a última equação com a expressão obtida anteriormente para  $v_{vert}$ , dada por (1.6) e que por conveniência repetimos a seguir,

$$v_{vert} = \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{h(H-h)},$$

percebemos, imediatamente, que as expressões de  $v_{vert}$  e  $u_{vert}$  têm a mesma dependência funcional com a altura  $h$ , diferindo apenas por um fator multiplicativo. Conseqüentemente, basta escolhermos apropriadamente o valor da velocidade  $u$  no movimento auxiliar para que as projeções verticais de ambos os movimentos, o real e o auxiliar, coincidam perfeitamente. Impondo, então, que  $v_{vert} = u_{vert}$ , obtemos

$$\frac{u}{H/2} = \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad \implies \quad u = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (1.12)$$

Portanto, o intervalo de tempo transcorrido desde que o bloco é abandonado até atingir o ponto mais baixo da superfície cicloidal é o mesmo que o corpo no movimento circular uniforme auxiliar gasta para dar meia volta. Como esse intervalo de tempo corresponde a um quarto do período do movimento oscilante do bloco, podemos escrever

$$\frac{1}{4}\tau = \frac{\pi H/2}{u} = \frac{\pi H/2}{H/2\sqrt{g/R}}, \quad (1.13)$$

onde, na última passagem, utilizamos a equação (1.12). Portanto, o período procurado é dado por

$$\tau = 4\pi\sqrt{R/g}. \quad (1.14)$$

Observe que o período não depende de  $H$ ! Em outras palavras, qualquer que seja o ponto sobre uma superfície cicloidal lisa de onde abandonarmos um pequeno bloco, o tempo gasto por ele para atingir o ponto mais baixo da superfície será exatamente o mesmo.

Note que para que um pêndulo simples oscilando com pequenas amplitudes tenha seu período igual ao que aparece em (1.14), o seu comprimento deve ser  $\ell = 4R$ . Isso significa que o raio de curvatura da cicloide em seu ponto mais baixo é  $4R$ , e não  $2R$ , como poderíamos ingenuamente esperar, já que o diâmetro do círculo que rola sem deslizar para gerar a cicloide é  $2R$ .

No Apêndice A, apresentamos três soluções alternativas para o problema da tautócrona:

(i) na primeira, utilizamos cálculo diferencial e integral sem nos preocuparmos em simplificar o problema por meio de alguma propriedade geométrica da cicloide;

(ii) na segunda, apresentamos um procedimento híbrido, no qual misturamos algumas idéias de Huygens com um mínimo de conhecimento de cálculo diferencial e integral e

(iii) na última, apresentamos um procedimento que pode ser compreendido até mesmo por um (bom) aluno do ensino médio. Nessa última solução, usamos o resultado de que um oscilador harmônico simples tem período  $2\pi/\omega$ , sendo  $\omega$  a sua frequência angular de oscilação.

## 1.6 Huygens e o pêndulo cicloidal

Tendo demonstrado que a cicloide é a tautócrona, Huygens concluiu, corretamente, que se o corpo preso no extremo inferior de um pêndulo for obrigado a descrever uma trajetória cicloidal, seu período não dependerá de sua amplitude de oscilação. No entanto, isso ainda não resolve o problema, pois persiste a questão: qual é a forma dos obstáculos a serem colocados nas laterais do pêndulo para que o corpo em seu extremo descreva uma cicloide? Sem saber como atacar o problema de uma forma sistemática, Huygens se perguntou, por que não tentar obstáculos cicloidais? E o tiro foi na mosca, sua intuição o levou novamente à tão desejada solução do problema do pêndulo isócrona, também chamado pêndulo cicloidal, por razões que agora estão evidentes. A seguir, mostraremos os detalhes de como Huygens demonstrou esse resultado a partir de uma impecável construção geométrica.

Para demonstrar seu resultado, Huygens precisou desenvolver a teoria das evolutas e involutas, que passamos a descrever brevemente. A Figura 1.13 mostra um pêndulo que à medida que seu ângulo com a vertical vai aumentando, ele vai encostando em um obstáculo lateral, descrito pela curva  $L$ , fazendo com que seu comprimento efetivo diminua. Devido à presença do obstáculo, o corpo na extremidade inferior do pêndulo não mais descreverá um arco de círculo, mas uma outra curva, denotada na figura por curva  $M$ .

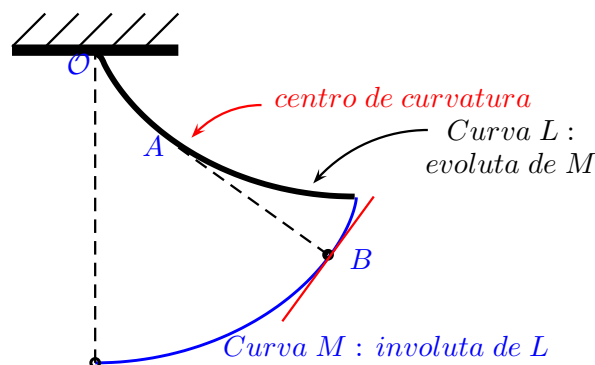


Figura 1.13: A curva  $L$ , em preto, é a evoluta da curva  $M$ , em azul; essa última, por sua vez, é a involuta da curva  $L$ . O ponto  $A$  é centro de curvatura da curva  $M$  associado ao ponto  $B$ . Trata-se do ponto de suspensão efetivo do pêndulo quando o corpo no extremo inferior do pêndulo está no ponto  $B$ .

Por definição, a evoluta de uma curva é o lugar geométrico dos centros de curvatura dessa curva. Por exemplo, como o fio do pêndulo na Figura 1.13 não desliza sobre o obstáculo lateral, a curva  $L$  é a evoluta da curva  $M$ . Chamamos a curva  $M$  de uma involuta da curva  $L$ . Huygens percebeu que, dada uma curva só há uma evoluta para ela; no entanto, dada uma curva, há várias involutas possíveis (basta trocar o comprimento do fio no pêndulo da Figura 1.13). Na verdade, em seu estudo de evolutas e involutas, Huygens fez várias conjecturas a esse respeito, enunciadas a seguir. Elas se referem à Figura 1.13.

- i)* A reta perpendicular à curva  $M$  em  $B$  (perpendicular à reta tangente em  $B$ ) é tangente à curva  $L$  em  $A$ , isto é, as perpendiculares à curva  $M$  são tangentes à curva  $L$ ;
- ii)* Dada uma curva, só há uma evoluta, pois uma curva pode ser traçada a partir de suas tangentes (é a envolvente das tangentes);
- iii)* A evoluta da cicloide é a própria cicloide, deslocada e defasada de  $\pi$  radianos (Huygens foi feliz em sua suposição, pois nem sempre a evoluta de uma curva é a própria curva).

A Figura 1.14 mostra a trajetória cicloidal do corpo no extremo inferior do pêndulo, assim como os obstáculos laterais cujos perfis são dados por cicloides idênticas à que descreve a trajetória do corpo, mas deslocadas e defasadas. Na figura ainda estão desenhados os círculos geratrizes da trajetória cicloidal (círculo inferior) e do obstáculo cicloidal da direita (círculo superior).

Imagine que cada círculo gerador se mova da esquerda para a direita. Ou seja, tanto o círculo gerador inferior (que gera a trajetória cicloidal do corpo) quanto o círculo gerador superior (que gera o obstáculo cicloidal da direita) giram no sentido anti-horário. Com isso, no ponto de contato entre os círculos, ponto  $C$ , enquanto o ponto do círculo inferior está em repouso, o ponto do círculo superior se move para a direita. No entanto, não há motivo algum para preocupação com esse fato, pois tais círculos não são materiais, fazem parte apenas de uma construção matemática conveniente para a demonstração.

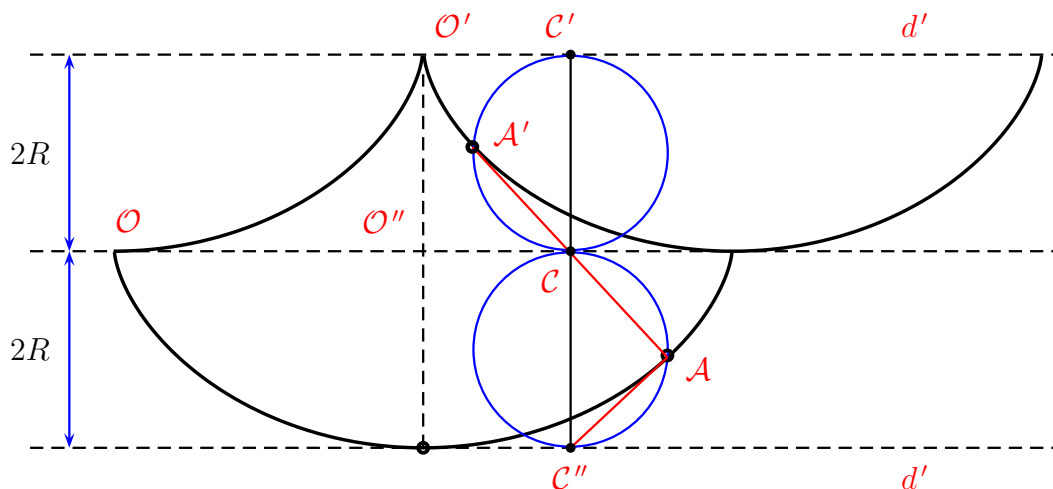


Figura 1.14: Trajetória cicloidial do corpo no extremo inferior do pêndulo e os obstáculos cicloidais laterais, formados por ciclóides idênticas à primeira, mas deslocadas e defasadas.

Aplicando a propriedade fundamental da ciclóide às curvas desenhadas na Figura 1.14, vemos que a tangente à trajetória cicloidial em  $A$  passa por  $C''$  (ponto mais baixo do círculo gerador inferior) e a perpendicular à trajetória cicloidial em  $A$  passa por  $C$  (ponto mais alto do círculo gerador inferior). Pelo mesmo motivo, sabemos que a tangente ao obstáculo cicloidial da direita no ponto  $A'$  passa pelo ponto  $C$ . Para demonstrarmos que a evoluta de uma ciclóide é a própria ciclóide, devemos mostrar, então, que

$$\widehat{C''CA} = \widehat{C'CA'}, \quad (1.15)$$

ou, em termos de comprimentos de arco, que

$$\widetilde{AC''} = \widetilde{A'C'}. \quad (1.16)$$

Inicialmente, note que  $\widetilde{A'C'} = \overline{O'C'}$ . Temos, também,  $\widetilde{C''A} = \overline{OC}$ , o que nos permite escrever

$$\widetilde{C''} + \widetilde{C''A} = \overline{OO''} + \overline{O''C} \quad (1.17)$$

Como  $\widetilde{C''} = \overline{OO''}$ , pois esses comprimentos são iguais a  $\pi R$ , concluímos que

$$\widetilde{C''A} = \overline{O''C}. \quad (1.18)$$



Acabamos de demonstrar que a evoluta da cicloide é a própria cicloide, defasada e deslocada! Não é comum uma curva ser a evoluta dela mesma. Por exemplo, a evoluta de um arco de círculo é um ponto e se pusermos obstáculos circulares ao lado de um pêndulo o corpo em sua extremidade inferior não mais descreverá um arco de círculo. Com seu resultado, Huygens foi capaz de construir relógios de pêndulo nos quais as amplitudes das oscilações não precisavam ser pequenas. A Figura 1.15 mostra um esquema desenhado por Huygens de um de seus relógios utilizando um pêndulo cicloidal.

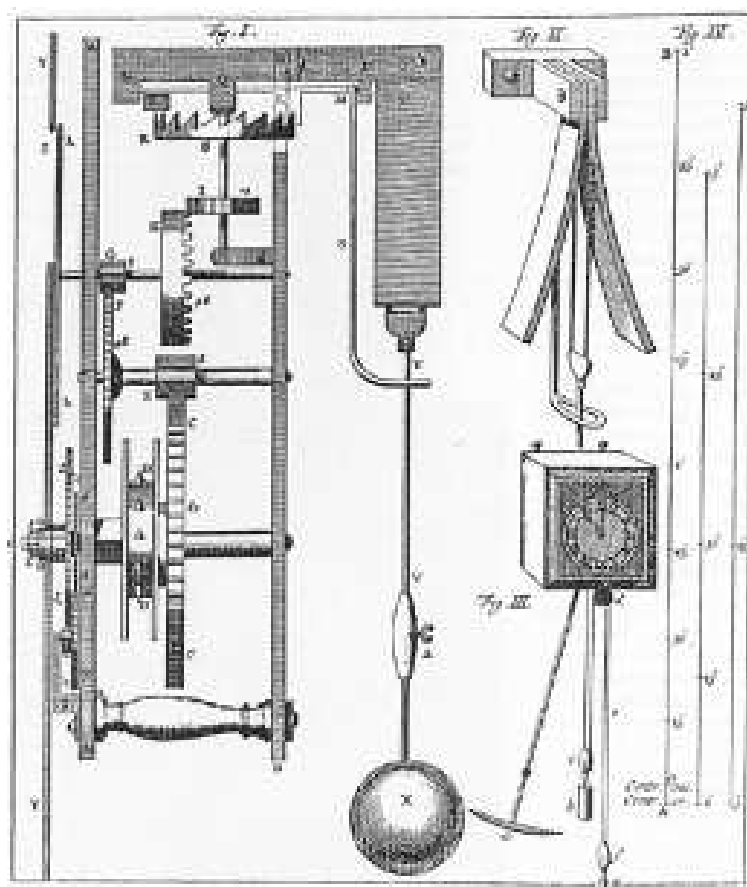


Figura 1.15: Desenho de um relógio de pêndulo cicloidal extraído da obra de Huygens “*Horologium Oscillatorium*”. Note, na figura, os obstáculos laterais.

Encerramos esta seção apreciando as palavras de Huygens a respeito de relógios de pêndulo e da cicloide (retiradas de “*Horologium Oscillatorium*”):

*O pêndulo simples não pode ser considerado como uma medida do tempo segura e uniforme, porque as oscilações amplas demoram mais tempo que as de menor amplitude; com ajuda da geometria tenho encontrado um método, até agora desconhecido, de suspender o pêndulo; pois tenho pesquisado a curvatura de uma determinada curva que se presta admiravelmente para conseguir a desejada uniformidade. Uma vez que tive aplicado esta forma de suspensão aos relógios, sua marcha se fez tão causal e segura, que após numerosas experiências sobre a terra e sobre a água, não há dúvida de que estes relógios oferecem a maior segurança à astronomia e à navegação. A linha mencionada é a mesma que descreve no ar um prego sujeito a uma roda quando esta avança girando; os matemáticos denominam-na cicloide, e tem sido cuidadosamente estudada porque possui muitas outras propriedades; mas eu a estudei por sua aplicação à medida do tempo já mencionada, que descobri enquanto a estudava com interesse puramente científico, sem suspeitar o resultado.*

## 1.7 O pêndulo cônico isócrono

É comum no ensino médio, e até mesmo em cursos introdutórios sobre mecânica da partícula ministrados em universidades, o estudo do pêndulo cônico como um exemplo de movimento circular uniforme. Na expressão “pêndulo cônico” está subentendido que o corpo no extremo inferior do fio (ideal, por hipótese) executa um movimento circular uniforme em um plano horizontal sob a ação, apenas, de seu peso e da força exercida pelo fio. Como veremos, para cada ângulo entre o pêndulo e a vertical existe apenas um valor para o módulo da velocidade do corpo para que o movimento seja circular uniforme. Esse movimento é um caso bem particular do conjunto dos movimentos possíveis para esse sistema <sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup>Na verdade, um pequeno corpo preso à extremidade inferior de um fio inextensível, e cuja extremidade superior está presa a um suporte fixo, pode descrever movimentos bastante complexos, incluindo trajetórias não-periódicas. Podemos afirmar, no entanto,

Na Figura 1.16 estão ilustrados dois movimentos possíveis de um pêndulo cônico de comprimento  $L$ . Num deles, o ângulo entre o pêndulo e a vertical é  $\theta$  e no outro o ângulo é  $\theta' > \theta$ , de modo que o raio da trajetória circular do corpo no segundo caso é maior do que no primeiro. Note que essas duas trajetórias circulares pertencem à mesma calota esférica, de raio  $L$  e centro no ponto de suspensão do pêndulo, e seus raios valem, respectivamente,  $L \sin\theta$  e  $L \sin\theta'$ . Essa calota esférica é gerada pela revolução de um arco de círculo de raio  $L$  em torno de um eixo vertical.

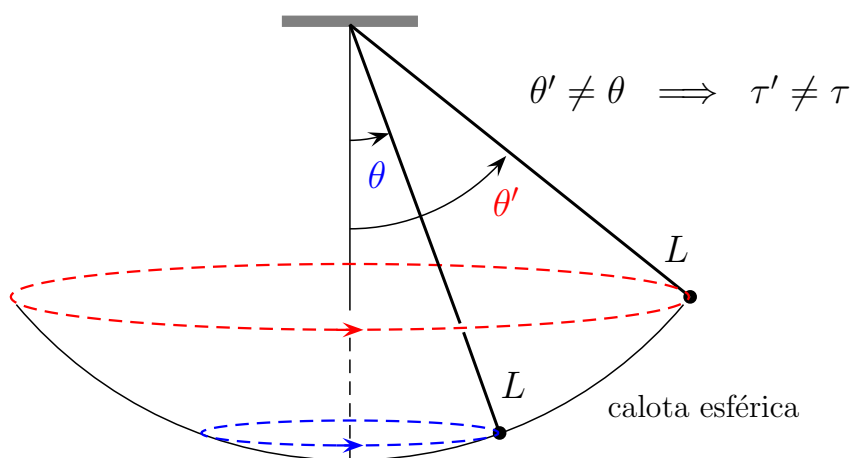


Figura 1.16: Dois movimentos de um pêndulo cônico com inclinações diferentes. Note que os respectivos períodos não são os mesmos nos dois casos.

Antes de calcularmos o período de revolução de um pêndulo cônico e verificarmos que esse período depende de sua inclinação relativamente à vertical, isto é, do ângulo  $\theta$ , usaremos argumentos simples para chegarmos a essa conclusão. Note que, como as únicas forças que atuam sobre o corpo são o seu peso e a força exercida pelo fio sobre ele, à medida que consideramos valores de  $\theta$  cada vez mais altos, a tensão no fio também deve assumir valores mais altos, para que a sua componente vertical possa cancelar o peso do corpo.

---

que, sendo o fio inextensível, e se este se mantiver sempre esticado, a trajetória do corpo ocorrerá, necessariamente, sobre uma superfície esférica, centrada no ponto de suspensão do fio e com raio igual ao comprimento do fio. Por esse motivo, dá-se o nome “pêndulo esférico” a esse sistema sempre que o objetivo do estudo estiver nesses movimentos mais gerais. Infelizmente, o estudo do pêndulo esférico, que nos permitiria analisar, por exemplo, a estabilidade das órbitas circulares do pêndulo cônico, está fora do escopo dessa tese.

No caso em que  $\theta \rightarrow \pi/2$ , isto é, situação em que o pêndulo tende a girar com o fio na horizontal, a tensão deve tender ao infinito para que sua componente vertical permaneça finita. Consequentemente, a frequência angular de revolução,  $\omega$ , também deve tender ao infinito pois, nesse caso,  $T = m\omega^2 L$ .

Já no limite oposto, ou seja, para valores de  $\theta$  cada vez menores, tendendo a zero, podemos pensar no movimento circular resultante como a superposição de dois movimentos de um pêndulo simples, de comprimento  $L$ , mas perpendiculares entre si e defasados de  $\pi/2$  radianos. Logo, como cada um desses movimentos tem período  $\tau = 2\pi\sqrt{L/g}$ , também o pêndulo cônico terá esse período (para valores bem pequenos de  $\theta$ ). Resumindo, esperamos que o período de um pêndulo cônico diminua à medida que sua inclinação aumenta, variando de  $\tau = 2\pi\sqrt{L/g}$ , para valores pequenos de  $\theta$ , até zero, para  $\theta \rightarrow \pi/2$ .

É oportuno enfatizar que os comentários anteriores também valem no caso de uma partícula deslizando sobre a superfície lisa de uma calota esférica de raio  $L$  (calota virada para cima), com a normal desempenhando, nesse problema, o papel que a tensão do fio o faz no caso do pêndulo cônico.

Da Segunda Lei de Newton ao pêndulo cônico, temos  $\mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$ . Separando a equação anterior em suas componentes vertical e centrípeta, e usando o fato de que  $|\mathbf{a}| = \omega^2 L \sin\theta$ , obtemos

$$T \sin\theta = m\omega^2 L \sin\theta ; \quad T \cos\theta = mg \quad (1.19)$$

A divisão da segunda equação pela primeira nos leva ao resultado

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 L} \quad \implies \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L \cos\theta}{g}}. \quad (1.20)$$

Observe que o período de um pêndulo cônico depende tanto de seu comprimento quanto de sua inclinação. No entanto, essa dependência aparece em uma combinação muito especial, a saber, na forma  $L \cos\theta$ , que nada mais é do que a projeção vertical do comprimento do pêndulo. Ou seja, podemos ter dois pêndulos cônicos de comprimentos e inclinações diferentes mas ainda com o mesmo período, basta para isso que as projeções verticais dos com-

primitos dos dois pêndulos sejam iguais. A Figura 1.17 ilustra bem essa propriedade do pêndulo cônico.

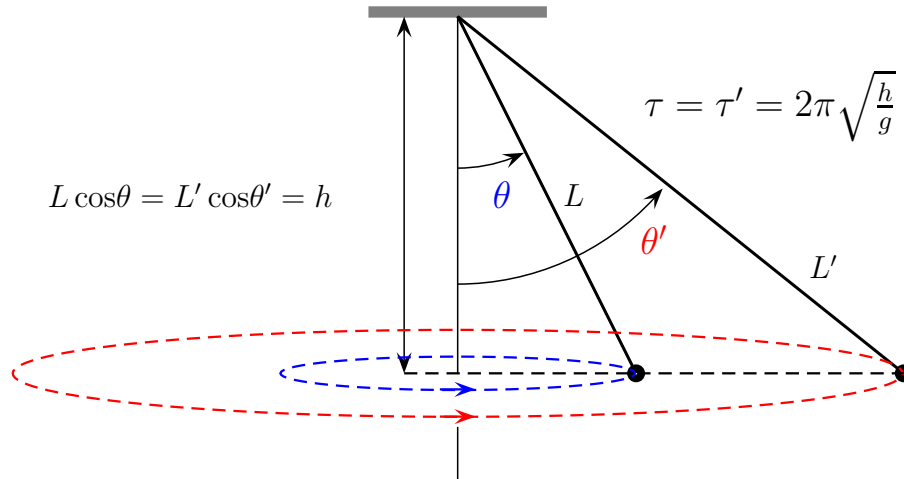


Figura 1.17: Pêndulos cônicos distintos com o mesmo período de revolução.

Com esses resultados, vemos que se um pêndulo cônico for diminuindo gradativamente a sua inclinação, por exemplo, devido aos efeitos dissipativos da resistência do ar que provocam uma diminuição de sua energia mecânica, seu período de revolução também irá variar gradativamente (irá aumentar de valor, como vimos anteriormente). Nesse sentido, o pêndulo cônico (talvez devêssemos chamá-lo aqui de pêndulo esférico) não é isócrono. Surge, naturalmente, a pergunta: é possível construir um pêndulo cônico isócrono?

A fim de responder a essa pergunta, Huygens, inicialmente, fez a seguinte pergunta: existe alguma superfície de revolução (lisa) cuja forma faça com que os movimentos circulares de uma partícula que deslize em seu interior tenham o mesmo período qualquer que seja o raio da trajetória circular da partícula? Huygens respondeu a essa pergunta de uma forma muito bonita, descrita em seu trabalho sobre a força centrípeta que aparece em “*Horologium Oscillatorium*”.

Por meio proposições e lemas, e suas respectivas demonstrações, Huygens concluiu que a superfície deveria ser a de um parabolóide de revolução <sup>17</sup>.

A seguir, apresentaremos uma demonstração simples desse resultado, ou seja, de que o parabolóide de revolução é, de fato, a superfície de revolução sobre a qual deve se mover uma partícula em movimento circular uniforme para que seu período de revolução seja o mesmo, qualquer que seja o plano horizontal de seu movimento. Por esse motivo, poderíamos chamá-la “superfície tautócrona”, em alusão à “curva tautócrona”. Como ficará evidente, qualquer aluno do ensino médio está apto a entender nossa demonstração, que é bem similar à de Huygens, mas faz uso de uma linguagem e notação mais familiares ao aluno do ensino médio.

A Figura 1.18 mostra uma superfície de revolução, com eixo de simetria na vertical, eixo  $OZ$ , sobre a qual um pequeno corpo descreve um movimento circular uniforme de raio  $\rho$ . Por se tratar de uma superfície de revolução em torno de  $OZ$ , a descrevemos pela função  $f$  tal que  $z = f(\rho)$ .

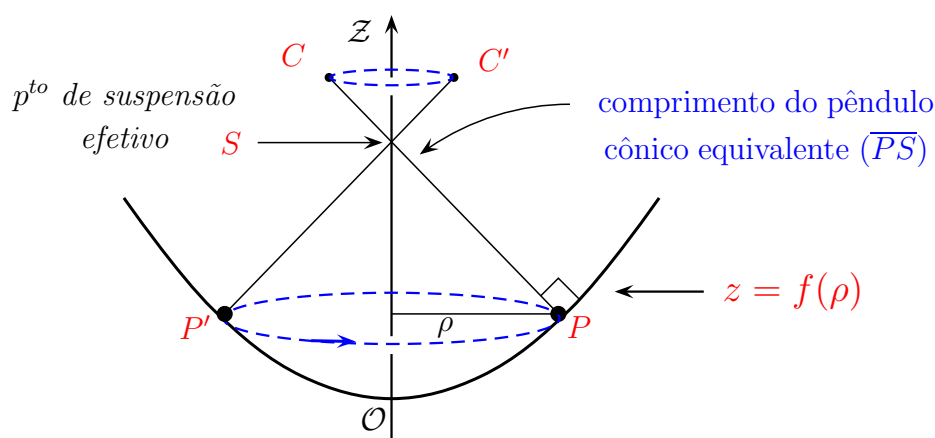


Figura 1.18: Superfície de revolução lisa, descrita por  $z = f(\rho)$ , sobre a qual um pequeno corpo se move em movimento circular uniforme.

<sup>17</sup>O primeiro a propor o estudo e aplicações de um pêndulo cônico foi Hooke. Já em 1667 ele também conhecia a propriedade do “pêndulo cônico parabólico”. Huygens não fez nenhuma menção a Hooke em sua obra “*Horologium Oscillatorium*”. Um ano após essa publicação, Hooke escreveu a Huygens se mostrando insatisfeito por não levar os créditos em relação ao pêndulo cônico parabólico, ao que Huygens respondeu afirmando que já estudava esse problema desde antes de 1667, mas somente em 1673 é que publicou seus resultados.

Nessa figura também estão marcados os pontos  $P$  e  $P'$ , assim como os respectivos centros de curvatura  $C$  e  $C'$  relativos a esses pontos.

O ponto crucial de nossa demonstração se baseia na propriedade do pêndulo cônico de que o seu período só depende da projeção vertical de seu comprimento, discutida anteriormente. Como estamos analisando aqui o movimento de uma partícula em movimento circular uniforme sobre uma superfície lisa de revolução, e não de um pêndulo cônico, devemos, inicialmente, determinar o comprimento do pêndulo cônico equivalente ao nosso problema. Tal comprimento é obtido da seguinte maneira: traçamos uma perpendicular à superfície de revolução em um ponto  $P$  genérico da trajetória circular da partícula. Tal perpendicular está, necessariamente, em um plano vertical e, portanto, intercepta o eixo  $OZ$  em algum ponto, o ponto  $S$  da Figura 1.18. Identificamos, então, o comprimento do pêndulo equivalente como a distância entre o ponto  $S$  e o ponto  $P$ ,  $(\overline{PS})$ .

Para encontrarmos a superfície de revolução com a propriedade desejada (isocronismo dos movimentos circulares com diferentes raios), devemos impor que a projeção vertical do comprimento do pêndulo equivalente associado a um dado ponto seja a mesma, qualquer que seja a altura do plano do movimento da partícula. Mas essa propriedade é satisfeita somente pelo parabolóide de revolução, o que completa a nossa demonstração (veja o Apêndice A para uma explicação simples dessa afirmativa).

Com esse resultado em mente, vemos que, se por algum motivo, o corpo no extremo inferior de um pêndulo cônico for obrigado a se mover sobre um parabolóide de revolução, e não mais sobre uma calota esférica, o seu período de revolução será o mesmo qualquer que seja a sua inclinação. Esse resultado parecia ser bastante útil e promissor no aprimoramento de relógios de pêndulo.

Mas como fazer para garantir que se a inclinação do pêndulo cônico mudar o corpo no extremo inferior do pêndulo se mova sobre um parabolóide de revolução?





## 1.8 Comentários finais

Neste capítulo, após termos feito alguns comentários gerais sobre a vida e a obra de Christiaan Huygens, passamos a discutir um dos mais belos problemas de mecânica propostos no século XVII, a saber, o de encontrar não somente a curva tautócrona mas também, com ela, construir um pêndulo isócrono. Esse problema, que hoje em dia nos toma apenas alguns minutos para ser resolvido utilizando-se o cálculo diferencial e integral, exigiu anos de trabalho de Huygens, uma das mentes mais brilhantes do século XVII. Mais do que isso, além de muita perseverança e engenhosidade, Huygens precisou ter como aliados o acaso e a sorte, como tentamos mostrar em nosso relato anterior. Relacionado, ainda, à tentativa de Huygens de melhorar a precisão dos cronômetros marítimos, discutimos o problema do chamado pêndulo cônico isócrono, ou pêndulo cônico parabólico, problema que foi resolvido por Hooke e Huygens independentemente. A solução por nós apresentada está ao alcance de um aluno do ensino médio. Foi similar à de Huygens, mas com uma notação e linguagem mais familiares a esses alunos.

Por um lado, poderíamos afirmar que a beleza das soluções de Huygens para os problemas anteriores, está em sua simplicidade, uma vez que ele não utilizou o cálculo diferencial e integral, ferramentas matemáticas aprendidas, usualmente, no primeiro semestre do curso universitário. Por outro lado, no entanto, deve-se ter em mente que tais ferramentas ainda não haviam sido criadas por Newton e Leibniz (independentemente), de modo que Huygens utilizou todas as ferramentas de que dispunha na época, além de uma grande capacidade de abstração, como em sua solução da curva tautócrona ao imaginar um movimento auxiliar, irreal, mas que simplificou enormemente o problema. Nesse sentido, Huygens estava muito à frente de sua época, tendo sido levado, inclusive, a inventar nova matemática para resolver o problema, como por exemplo no desenvolvimento da teoria de evolutas e involutas. Os pontos singulares presentes nas involutas foram descobertos por Huygens, tema presente hoje em dia em pesquisas modernas sobre quase cristais de acordo com V.I. Arnold [5]. E ainda nas palavras desse mesmo autor,

*Huygens investigou muitos problemas em análise, ótica e mecânica. Por exemplo, 11 anos antes da primeira publicação de Leibniz em análise e 13 anos antes do surgimento das “leis de Newton”, Huygens publicou seus cálculos sobre força centrífuga em movimento circular (ou seja, ele diferenciou duas vezes uma função que toma valores vetoriais e usou a “segunda lei de Newton”).*

Para os que gostam de ver como o raciocínio é uma arma poderosa na solução de novos problemas, é difícil não se emocionar ao ver, por exemplo, como Huygens discutiu a propagação da luz na atmosfera e explicou a dupla refração com sua teoria ondulatória, ou resolveu o problema da tautócrona, ou ainda como determinou o perfil dos obstáculos laterais que deveriam ser colocados ao lado do pêndulo para torná-lo isócrono, o que o levou a retificar a cicloide (Wren também retificara a cicloide em carta para Pascal). Ainda que tivesse resolvido somente esses problemas, Huygens já mereceria estar imortalizado na história da Física. Mas quis a história que ele fizesse muito mais e foi ele que desvendou o mistério de Saturno (anel de Saturno) e descobriu uma de suas luas (Titan), que construiu o primeiro relógio de pêndulo da história da humanidade, que obteve a expressão para a força centrípeta, que discutiu pela primeira vez o acoplamento entre pêndulos, etc. De acordo com A.E. Bell, em seu livro “*Christian Huygens and the Development of Science in the Seventeenth Century*” [2],

*Huygens foi o maior mecanicista do século dezessete. Ele combinou o tratamento matemático dos fenômenos de Galileu com a visão de Descartes do plano definitivo da natureza. Tendo iniciado como um ardente cartesiano que procurou corrigir os erros mais flagrantes do sistema, ele terminou como um de seus críticos mais afiados ... as idéias de massa, peso, momentum, força, e trabalho foram finalmente esclarecidas no tratamento de Huygens sobre colisões, força centrípeta e o primeiro sistema dinâmico já- mais estudado - o pêndulo composto.*

Uma vez que a cicloide foi o tema central desse capítulo, não poderíamos deixar de comentar um outro episódio da história da Mecânica no qual essa curva teve um papel fundamental, a saber, no problema da chamada “braquistócrona” (do grego *brakhisto* = mais curto, e *chronos* = tempo). O problema da braquistócrona foi proposto por Jean Bernoulli na *Acta Eruditorum* de junho de 1696 que, antes de seu enunciado, teve a seguinte introdução:

*Eu, Jean Bernoulli, me dirijo aos matemáticos mais brilhantes do mundo. Nada é mais atraente às pessoas inteligentes do que um problema desafiador, honesto, cujas soluções possíveis darão fama e permanecerão como um duradouro monumento. Seguindo o exemplo estabelecido por Pascal, Fermat, etc., Eu espero ganhar a gratidão de toda a comunidade científica por apresentar diante dos melhores matemáticos de nosso tempo um problema que testará seus métodos e o poder de seus intelectos. Caso alguém me comunique a solução do problema proposto, Eu o declararei publicamente merecedor de elogio.*

O problema proposto por Jean Bernoulli foi o seguinte:

*Dados dois pontos  $A$  e  $B$  em um plano vertical, qual é a curva traçada por um ponto sobre o qual atua somente a gravidade, que começa em  $A$  e atinge  $B$  no menor tempo.*

O desafio de Jean Bernoulli foi resolvido por várias pessoas, a saber, seu irmão Jacques Bernoulli, Newton, Leibniz, L'Hopital e ele próprio. E a solução vem a ser precisamente a cicloide. Como não poderia deixar de ser, para continuar fazendo juz ao seu apelido de “Helena da Geometria”, o desafio proposto por Jean acabou dando origem a uma desavença entre os irmãos Bernoulli, que perdurou até a morte de Jacques. O problema da braquistócrona, embora não tenha sido o primeiro problema em que se buscava um tempo mínimo (o Princípio de Fermat para a propagação da luz foi introduzido em 1657 e até mesmo na Grécia antiga já se sabia que, em certas situações, a luz percorria o menor caminho entre dois pontos) pode ser considerado o marco inicial do chamado cálculo variacional.

Jean Bernoulli terminou sua solução para o problema da braquistócrona com as seguintes palavras:

*Antes de terminar devo declarar mais uma vez a admiração que sinto pela semelhança inesperada da tautócrona de Huygens e minha braquistócrona. Considero especialmente notável que esta coincidência ocorra somente sob a hipótese de Galileu, acarretando inclusive em uma prova de sua validade. A natureza sempre tende a agir da maneira mais simples, e então ela deixa aqui uma única curva servir a duas funções diferentes, enquanto para qualquer outra hipótese precisaríamos de duas curvas...*

É interessante notar que o desafio mais famoso de Pascal envolvia a cicloide, que a esta altura, Jean Bernoulli já sabia ser solução para o problema da braquistócrona, e seu método de resolver o problema utilizava as idéias de Fermat. Se esses fatos já estavam claros para Jean quando propôs o problema, motivo pelo qual teria então mencionado os nomes de Pascal e Fermat na introdução ao desafio (como uma espécie de brincadeira, ou até mesmo uma dica para a solução), provavelmente nunca saberemos.

É difícil escolher as palavras certas para resumir e finalizar nossa história sobre Huygens e seus feitos geniais, mas o texto de S.S. Gindikin [1] certamente o faz com bastante maestria:

*“A dramática história do trabalho de Huygens é muito instrutiva. Num certo sentido, sua maior ambição não foi realizada: ele nunca teve êxito na construção de cronômetros marítimos e o pêndulo cicloidal, que Huygens considerava seu principal invento, não sobreviveu aos relógios terrestres (restrições na amplitude eram suficientes). O pêndulo cônico sofreu do mesmo problema. Mas seus resultados físicos e matemáticos, que foram motivados por problemas de aperfeiçoamento de relógios, sobreviveram até os nossos dias, na análise infinitesimal, geometria diferencial e mecânica, e não se pode subestimar seus significados”*

S.G. Gindikin, “*Tales of Physicists and Mathematicians*”

## Capítulo 2

# Teoria básica do movimento planetário

Por problema de Kepler, ou problema da gravitação universal, entende-se o estudo do movimento de uma partícula sob a ação de uma força central, isto é, cuja direção está sempre voltada para um mesmo ponto, chamado centro de força, e cujo módulo varia com o inverso do quadrado da distância da partícula ao centro de força. A sua história não tem um início bem determinado. Na verdade, ela começa na antiguidade, uma vez que explicar o cosmos sempre foi um desejo dos filósofos antigos e, mais recentemente, dos físicos, matemáticos e astrônomos. Trata-se, hoje em dia, de um dos mais belos problemas de mecânica elementar. No entanto, na época de Isaac Newton, esse problema desafiou as mentes mais brilhantes a descobrirem qual era a lei de força que levava às órbitas elípticas dos planetas observadas tão cuidadosamente por Kepler.

O objetivo principal deste capítulo, porém, não é apresentar uma abordagem histórica ao problema de Kepler ou ao movimento planetário em geral, mas sim estabelecer a teoria necessária ao assunto para que o leitor possa entender a discussão feita no próximo capítulo. Por esse motivo, inserimos apenas uma pequena seção histórica sobre o assunto. Neste capítulo, abordaremos, essencialmente, aspectos básicos do problema de Kepler e do que chamaremos problema de Kepler perturbado. Demonstraremos que todas

as órbitas limitadas permitidas no problema de Kepler são fechadas, dando ênfase particular ao estudo de pequenas perturbações a esse problema. Mais especificamente, discutiremos com algum detalhe o problema das órbitas perturbadas por pequenos desvios da lei do inverso do quadrado. Nossa análise contemplará tanto perturbações centrais, como a correção advinda da Teoria da Relatividade Geral, quanto não-centrais, como os efeitos do achatamento da Terra nas órbitas de seus satélites e, até mesmo, perturbações provocadas por forças dissipativas, como a resistência do ar.

Esse capítulo está organizado da seguinte forma. Começamos com uma breve seção a respeito de Hooke e Newton descrevendo como, a partir da correspondência entre eles, surgiu a teoria da gravitação. Em seguida, após introduzirmos algumas definições e discutirmos as propriedades básicas de movimentos sob forças centrais, utilizamos o conceito de energia potencial efetiva para analisar qualitativa e quantitativamente as órbitas de partículas sujeitas a uma força central. Como aplicação do método anterior, encontramos explicitamente as órbitas possíveis no problema de Kepler. Como um procedimento alternativo, estabelecemos a chamada equação de Binet, uma equação diferencial de segunda ordem cuja solução nos leva diretamente às órbitas possíveis de uma partícula sob a ação de uma força central. Analisamos novamente o problema de Kepler, mas agora resolvendo a equação de Binet. Discutimos, brevemente, a solução temporal do problema de Kepler, usualmente ausente dos livros introdutórios em mecânica da partícula. Em seguida, demonstramos que os únicos potenciais centrais para os quais todas as órbitas limitadas são fechadas são o de Kepler e o de um oscilador harmônico isotrópico, resultado conhecido como Teorema de Bertrand. Introduzimos o chamado vetor de Laplace-Runge-Lenz, que desempenha um papel fundamental no problema de Kepler e mais ainda no problema de Kepler perturbado, motivo pelo qual será um “personagem” muito presente daí em diante. Contamos brevemente a sua história, mostramos que se trata de uma constante de movimento que aponta na direção do eixo de simetria da órbita e que seu módulo está diretamente relacionado à excentricidade da órbita. Passamos, então, a discutir o problema de Kepler perturbado e mostramos como podemos utilizar o vetor de Laplace-Runge-Lenz na determinação da

velocidade de precessão da órbita. Na última seção, destacamos os pontos mais importantes do conteúdo desse capítulo e tecemos alguns comentários sobre a utilização do vetor de Laplace-Runge-Lenz no contexto da Mecânica Quântica, na obtenção do espectro de energia do átomo de Hidrogênio, muito embora esse tema já esteja totalmente fora do escopo desta tese. A maior parte desse capítulo está baseada fortemente em um minicurso ministrado pelo Professor C. Farina na Universidade Estadual de Feira de Santana, em 2006, e publicado na referência [20].

## 2.1 Hooke, Newton e a teoria da gravitação

O nome de Isaac Newton e sua enorme contribuição para a Física e Matemática são muito conhecidos. Nascido no ano da morte de Galileu, 1642, Newton viveu mais de oitenta anos, falecendo em 1727. Seu trabalho sobre a teoria gravitacional apareceu em seu famoso livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ("Princípios Matemáticos da Filosofia Natural"), publicado em julho de 1687. Essa obra ficou famosa na Europa, em parte, graças à divulgação da mesma feita por Voltaire <sup>1</sup>, que ficou impressionado após visitar Newton na Inglaterra. Os três volumes que formam os *Principia* estão entre os livros que mais influenciaram a física, em toda a sua história. Neles estão contidas as tão conhecidas Leis de Newton para o movimento dos corpos, com particular atenção ao problema da gravitação, comumente denominado nos livros didáticos como problema de Kepler. Entre muitas outras coisas, Newton demonstrou explicitamente que é elíptica a órbita de um planeta sob a influência da lei do inverso do quadrado da distância ao Sol, problema de muito interesse na época.

Quase que a totalidade dos resultados de Newton em ciências naturais foram obtidos em um período de dez anos, aproximadamente. Devido à

---

<sup>1</sup>Voltaire era o pseudônimo de François-Marie Arouet, escritor e filósofo iluminista francês que defendia, entre outras coisas, liberdades civis, religiosas e de comércio, assim como reformas sociais. Suas idéias influenciaram muitos pensadores de seu tempo, época da guerra da independência dos Estados Unidos, cujos conflitos se iniciaram em 1775, e da revolução francesa, que teve início em 1789, onze anos depois da morte de Voltaire, em 1778.

peste negra, em 1666, Newton voltou a morar em uma fazenda com sua mãe, local onde teria caído sobre sua cabeça uma maçã fazendo com que ele percebesse que o mesmo agente que faz a maçã cair, também faz a Lua cair. A Lua estaria, então, em uma eterna queda em direção à Terra, queda que nunca termina pois, à medida que cai, se translada, de tal maneira que fica em órbita em torno da Terra. Nos anos que se seguiram Newton descobriu o espectro da luz, acabou de desenvolver o teorema binomial, criou o cálculo, construiu o primeiro telescópio de reflexão (evitando aberração cromática nas lentes) e elaborou sua teoria corpuscular da luz, entre outras coisas. Em 1669 foi nomeado professor de matemática em Cambridge e, em 1672, entrou para a *Royal Society*. Foi membro do parlamento britânico de 1687 a 1690, representando a Universidade de Cambridge e trabalhou na Casa da Moeda britânica. Em 1699 foi eleito sócio estrangeiro da Academia de Ciências da França e tornou-se presidente da Sociedade Real de Londres em 1703. Seu tratado de ótica foi publicado depois da morte de Hooke, em 1704.

Robert Hooke era contemporâneo de Newton, porém menos conhecido. Nasceu em 1635 e viveu por quase setenta anos, falecendo em 1703. Hooke era pobre e começou seu trabalho nas Filosofias Naturais como ajudante de Boyle<sup>2</sup>. Em seguida, passou a trabalhar na Academia Britânica de Ciências como curador, trabalho que lhe rendia bastante dinheiro. Como competência do cargo, Hooke deveria demonstrar, toda semana, com exceção das férias de verão, de três a quatro experimentos provando as novas leis que surgiam na época. No cumprimento de seu dever, Hooke obteve, aproximadamente, 500 descobertas próprias. Muitas delas eram concebidas quase que em paralelo com outros cientistas, de modo que algumas eram conhecidas e atribuídas a outras pessoas. Por exemplo, Hooke aprimorou e utilizou de forma majestosa o microscópio, e foi o primeiro a observar que plantas são constituídas de células<sup>3</sup>. Uma das descobertas de Hooke tratava da natureza ondulatória da luz (como afirmado por Huygens). Suas conclusões se basearam no estudo das

---

<sup>2</sup>Boyle é muito conhecido pela lei de Boyle-Mariotte, que foi descoberta por Hooke. No entanto, em seu trabalho publicado em 1660, Boyle mencionou Hooke como autor da descoberta.

<sup>3</sup>Hooke desenhava e descrevia tudo que observava com auxílio de seu microscópio, com detalhes inimagináveis, como pode ser apreciado em sua obra intitulada *Micrographia*.



cores observadas em finas camadas transparentes, como bolhas de sabão por exemplo. Ele supôs que tal observação demonstrava a natureza ondulatória da luz. Isso promoveria o primeiro conflito com Newton.

Newton tinha sua própria teoria para a luz. Foi ele o primeiro decompor a luz branca nas cores do arco-íris, determinando o espectro da luz solar. A teoria newtoniana tratava a luz como partícula. O som era uma onda, pois conseguia se encurvar ao passar por obstáculos, mas a luz não! Logo, a luz não poderia ser tratada como onda, segundo Newton, muito embora ele tenha calculado os comprimentos de onda da luz por meio dos chamados “anéis de Newton” (que já haviam sido observados por Hooke).

A diferença entre as duas teorias sobre a natureza da luz traria a primeira divergência entre Newton e Hooke, que poderia ter sido evitada devido às circunstâncias. Newton vivia em Cambridge e Hooke, em Londres. Eles se correspondiam por intermédio de Oldenburg, secretário da Academia Britânica de Ciências. Ao que tudo indica, Oldenburg não era um sujeito de boa índole, tinha histórico de semear discórdia entre as pessoas. Com opiniões diferentes sobre a natureza da luz, e tendo Oldenburg como intermediário das discussões, a relação entre Newton e Hooke não era das melhores. Porém, após a morte do secretário, Hooke, em 24 de novembro de 1679, escreveu a Newton uma carta conciliatória. Nela, Hooke propunha a Newton um trabalho em conjunto e reconhecia os famosos feitos de Newton. Sugeriu verificações experimentais de todas as suas ideias e teorias. Hooke se mostrou disposto a compartilhar seus pensamentos e prometeu não ficar ofendido com as possíveis críticas que lhe fossem feitas. Além disso, no texto da carta, Hooke descreveu suas últimas descobertas, sendo uma delas a respeito de movimento planetário.

Havia duas teorias fortemente divulgadas no continente europeu. Uma delas supunha a existência de turbilhões no espaço que estavam em constante movimento sendo eles os responsáveis pelo movimento dos planetas ao redor do Sol. A segunda era a teoria de Hooke sobre a atração, na qual ele propunha a lei do inverso do quadrado da distância. No entanto, Hooke não tinha domínio matemático suficiente para dar a descrição exata das órbitas, apesar de ter ideia sobre a forma elíptica (lembre-se de que, sendo obrigado a realizar

vários experimentos por semana, Hooke não tinha tempo disponível para aprofundar suas idéias ou mesmo verificar suas conjecturas).

Com uma rápida resposta (quatro dias após a carta de Hooke), Newton admitiu não ter mais interesse no estudo da Física e Matemática, e que se envolvera recentemente com outros assuntos <sup>4</sup>. Porém, mesmo com uma resposta desinteressada, Newton propôs um problema sobre queda dos corpos que valeria a pena ser testado experimentalmente por algum experimentador tão bom quanto o Hooke. De uma forma bem resumida, tratava-se do problema de saber se um corpo abandonado do alto de uma torre, no equador, por exemplo, cairia mais ao leste, mais a oeste ou exatamente na base da torre. O resultado do experimento poderia, então, comprovar uma das afirmativas da teoria copernicana, a de que a Terra possuía movimento de rotação em torno de seu eixo. Em sua carta, Newton afirmou, corretamente, que o corpo deveria cair mais ao leste, embora seus argumentos não sejam totalmente verdadeiros [5].

Nessa mesma carta, Newton ainda propôs o problema de se encontrar a trajetória de uma bola que pudesse se movimentar dentro da Terra, sem que nenhuma força de resistência atuasse sobre ela, apenas a força gravitacional de uma esfera homogênea. Newton supôs que dentro da Terra a bola descreveria uma espiral, chegando, inclusive, a fazer na própria carta o desenho da espiral. A carta de Newton foi lida na seção de 4 de dezembro de 1679 da Sociedade Real de Londres e gerou grandes discussões. Na seção seguinte, ocorrida em 11 de dezembro, Hooke fez algumas críticas a vários argumentos de Newton. Por não suportar qualquer tipo de crítica, Newton respondeu a Hooke em 13 de dezembro uma longa carta, na qual fica evidente que, naquela época, Newton não sabia como deveria ser a trajetória da queda do corpo da torre. Hooke havia dito, inclusive, que dentro da Terra a trajetória de uma bola (sem sofrer força de resistência) deveria se parecer com uma elipse, e nunca uma espiral, como Newton havia sugerido. Na seção de 18 de dezembro da Sociedade Real de Londres, Hooke relatou experimentos que

---

<sup>4</sup>Aos 37 anos de idade, Newton confessou não querer competir com mentes jovens em matemática e outros ramos das ciências naturais. Entre outras coisas, seu interesse havia se voltado ao estudo da alquimia.

comprovavam o desvio na queda dos corpos causados pela rotação da Terra.

Ainda nessa mesma carta, datada de 18 de dezembro de 1679, Hooke deixa evidente que, dentro da Terra, a força sobre uma bola que não sofresse resistência alguma deveria ser parecida com a que ocorria em um pêndulo, ou sobre um corpo que se movesse sobre uma superfície esférica côncava, problemas nos quais a força diminuía à medida que o corpo se aproximava do centro. E os planetas bem distantes do Sol sofriam uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância ao centro do Sol. Hooke ficou muito feliz ao ouvir de Halley o relato de que a frequência de um pêndulo simples no alto de uma montanha era menor do que ao nível do mar. Isso mostrava que a atração gravitacional caía com a distância ao centro da Terra. A seguir está um pequeno trecho da carta de Hooke a Newton:

*“... Mas em movimentos celestiais, o Sol, a Terra ou corpos centrais são a causa da atração, e embora eles não possam ser considerados pontos matemáticos eles podem ainda ser concebidos como físicos, e a atração a uma distância considerável pode ser calculada de acordo com a primeira proporção [lei do inverso do quadrado] a partir precisamente do centro ...”*

Para Hooke, o movimento de uma bola fora da Terra, ou seja, sob a ação de uma força atrativa com um único centro (o centro da Terra), deveria ser o que chamou trajetória do tipo elíptica excêntrica. No entanto, por não dominar a técnica matemática necessária, não foi capaz de resolver exatamente as equações de movimento para a lei do inverso do quadrado. Tentou integrá-las numericamente, ou graficamente ou ainda fazendo analogias com movimentos de corpos sobre superfícies de revolução. Para Hooke, as trajetórias pareciam elipses, mas ele não conseguiu demonstrar que, de fato, eram elipses. Ele, então, sugeriu que Newton fizesse essa demonstração, por dominar métodos de cálculo superiores aos seus. Ou seja, sugeriu que Newton verificasse que a primeira lei de Kepler seguia da lei do inverso do quadrado. Newton permaneceu calado e nunca mais escreveu para Hooke, exceto em uma ocasião quando enviou a Hooke o pedido de um italiano que desejava colaborar com a Sociedade Real de Londres e aproveitou a oportunidade para agradecer pelas

informações a respeito dos experimentos sobre a queda dos corpos. Newton nunca se referiu a essa correspondência com Hooke e tampouco disse que Hooke havia proposto o problema da gravitação.

No entanto, Newton seguiu adiante, investigou a lei do movimento e verificou que órbitas elípticas saíam como soluções (no caso de órbitas limitadas). Fez, também, o caminho inverso, ou seja, mostrou que a lei do inverso do quadrado decorre da primeira lei de Kepler. Em 28 de abril de 1686, com investimento feito pelo astrônomo Edmond Halley (1656 - 1742) na publicação, uma das maiores obras da Física foi enviada à Sociedade Real de Londres, os *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. No manuscrito, Hooke não era citado sequer uma vez. Halley, que era amigo tanto de Newton quanto de Hooke, acabou convencendo Newton a fazer alguma menção a Hooke. A fim de diminuir a importância de Hooke, Newton o citou juntamente com Wren e o próprio Halley, em uma passagem na qual menciona que a lei do inverso do quadrado corresponde à terceira lei de Kepler, “como afirmaram independentemente Wren, Hooke e Halley”. Não seguiremos com os detalhes dessa história fascinante pois isso nos desviaria dos objetivos principais desse capítulo. Mais detalhes sobre o assunto podem ser encontrados em [5].

## 2.2 Forças centrais: definição e propriedades fundamentais

Nesta seção, analisaremos os movimentos possíveis de uma partícula de massa  $m$  sob a ação de uma classe especial de forças, chamadas forças centrais.<sup>5</sup> Definimos força central como aquela cuja reta suporte passa por um certo ponto  $C$ , denominado centro de força, qualquer que seja a posição da

---

<sup>5</sup>Por movimentos possíveis queremos dizer o conjunto de todos os movimentos que satisfazem à Segunda Lei de Newton. Note que, dentre todos os movimentos possíveis de um dado sistema isolado, dadas as condições iniciais, isto é, as posições e as velocidades de todas as partículas do sistema, o movimento do sistema fica univocamente determinado. Em outras palavras, dentre todos os movimentos possíveis, um e somente um deles satisfará às condições iniciais, resultado conhecido como determinismo newtoniano. Vale mencionar que em certas situações especiais o determinismo newtoniano pode ser violado, como ocorre, por exemplo, quando a condição de Cauchy não é satisfeita ou em casos nos quais idealizações estão presentes (existência de um corpo totalmente rígido). Para maiores detalhes sobre esse tópico fascinante, veja a dissertação de Jorge Dias [21].

partícula, e tem seu módulo dependente apenas da distância entre o ponto  $C$  e o ponto no qual a partícula se encontra. Conseqüentemente, sendo  $\mathbf{r}$  o vetor-posição da partícula em um instante genérico e  $\mathbf{r}_C$  o vetor-posição do centro de força  $C$ , uma força central  $\mathbf{F}$  é sempre paralela ao vetor  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_C$  e seu módulo é uma função apenas de  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_C|$ . Escolhendo, por conveniência, a origem no centro de força, escrevemos uma força central na forma

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(r)\hat{\mathbf{r}}, \quad (2.1)$$

onde  $\hat{\mathbf{r}}$  significa vetor unitário na direção radial apontando para fora da origem. Observe o pequeno abuso de linguagem ao adotarmos o nome “força central” para qualquer força com as características anteriores, uma vez que a palavra central sugere apenas que a direção da força seja a da reta que passa pela posição da partícula e pelo centro de força (ponto  $C$ ), mas não que seu módulo dependa apenas da distância da partícula ao ponto  $C$ . Ainda assim, manteremos essa nomenclatura, universalmente adotada, de modo que um problema no qual uma partícula está sob a ação apenas de uma força central exibe simetria esférica <sup>6</sup>. Devido às particularidades dos movimentos sob a ação de uma força central, algumas considerações podem ser feitas antes mesmo de utilizarmos a expressão explícita do problema específico em questão, simplificando bastante o problema de encontrar os movimentos possíveis, como veremos a seguir.

Multiplicando vetorialmente à esquerda por  $\mathbf{r}$  a expressão da Segunda Lei de Newton,  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ , escrevemos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (2.2)$$

Usando o fato de que

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}), \quad (2.3)$$

---

<sup>6</sup>No problema de uma partícula sob ação de uma força central, se um dado movimento for um movimento possível da partícula, qualquer outro obtido a partir desse por uma rotação em torno do centro de força também será um movimento possível.

pois é nulo o produto vetorial de dois vetores paralelos (no caso,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ), reescrevemos a equação (2.2) na forma

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}). \quad (2.4)$$

Definindo torque da força  $\mathbf{F}$  sobre a partícula e o momento angular da partícula, ambos relativos à origem, como segue,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad ; \quad \boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (2.5)$$

obtemos,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt}. \quad (2.6)$$

Observe, então, que o torque de uma força central relativo ao centro de força, escolhido como origem, é nulo, como fica evidente a partir da definição de torque,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathcal{F}(r)\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

onde, novamente, usamos o fato de que é nulo o produto vetorial de dois vetores paralelos. Conseqüentemente, a partir da equação (2.6), concluímos que o momento angular da partícula relativo ao centro de força é uma constante de movimento. Enfatizamos que esse resultado vale qualquer que seja a força central. Esse resultado nos permite tirar alguns conclusões importantes.

Em primeiro lugar, observe que a constância da direção de  $\boldsymbol{\ell}$  nos permite afirmar que o movimento da partícula ocorre sempre em um mesmo plano. Em segundo lugar, o fato de que o sentido de  $\boldsymbol{\ell}$  permanece o mesmo garante que o sentido de giro da partícula em torno do centro de força é sempre o mesmo. Por fim, a constância do módulo de  $\boldsymbol{\ell}$  também nos traz uma informação extremamente valiosa e de bonita interpretação, e que será mostrada logo após introduzirmos as coordenadas polares.

Como o movimento de uma partícula sob a ação de uma força resultante central é plano, podemos utilizar apenas duas coordenadas para descrevê-lo. Não é difícil perceber que as coordenadas polares são bem mais convenientes do que as cartesianas, devido à simetria do problema sob rotações. Por

conveniência futura, escrevemos a seguir o vetor-posição, a velocidade e a aceleração da partícula em termos dos vetores unitários da base polar,  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ :

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{\mathbf{r}} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (2.10)$$

Um ponto genérico  $P$  da trajetória da partícula fica univocamente determinado pelo par de coordenadas  $(r, \varphi)$ , como ilustra a Figura 2.1. Nela, estão desenhados, os vetores unitários da base polar,  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ , o vetor-posição da partícula quando ela se encontra no ponto  $P$  e a força central (considerada no desenho como atrativa).

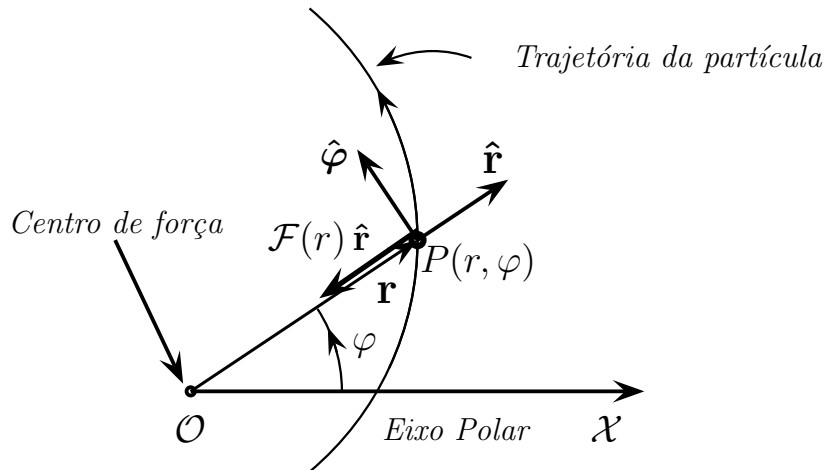


Figura 2.1: Trajetória genérica da partícula sob a ação de uma força central. A figura mostra o seu vetor-posição, os unitários da base polar,  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ , e a força central que atua sobre a partícula, escolhida no desenho como atrativa (por clareza, a seta representativa da força foi desenhada um pouco deslocada).

A partir das equações (2.5), (2.8), (2.9), escrevemos o momento angular da partícula relativo à origem como

$$\boldsymbol{\ell} = r\hat{\mathbf{r}} \times m(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = mr^2\dot{\varphi}\hat{\mathbf{z}}, \quad (2.11)$$

onde definimos  $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ . Sem nenhuma perda de generalidade, podemos considerar  $\dot{\varphi} > 0$ . Com isso, o módulo do momento angular da partícula

relativo à origem é dado, em coordenadas polares, por

$$\ell := mr^2\dot{\varphi} \quad \implies \quad \dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}. \quad (2.12)$$

Como  $\ell$  é uma constante de movimento,  $\ell = mr^2\dot{\varphi}$  também se conserva ao longo de cada movimento possível da partícula. Como veremos, esse resultado é bastante útil, pois nos permite eliminar  $\dot{\varphi}$  das equações diferenciais a serem integradas, deixando-as escritas somente em termos da função-movimento radial  $r(t)$  (e suas derivadas temporais). No entanto, no momento, apenas chamamos a atenção para o fato de que  $\dot{\varphi}$  varia com o inverso do quadrado da distância da partícula ao centro de força. Ao longo de todo o texto suporemos que  $\ell \neq 0$ , de modo que  $\dot{\varphi} \neq 0$ . No caso em que  $\ell = 0$ , os únicos movimentos possíveis são retilíneos e cujas retas suportes passam, necessariamente, pelo centro de força.

A constância de  $\ell$  tem uma interpretação geométrica simples e interessante. A Figura 2.2 mostra as posições da partícula em dois instantes muito próximos, a saber,  $t$  e  $t + \varepsilon$ .

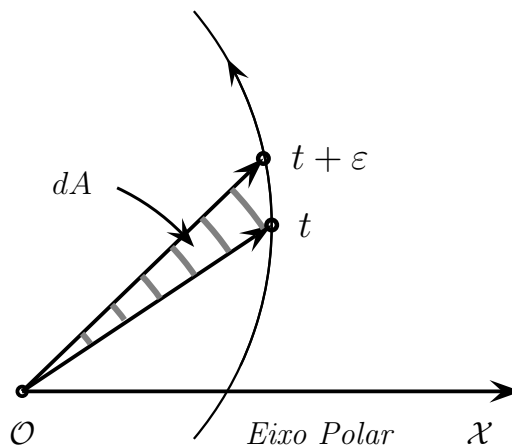


Figura 2.2: Área infinitesimal  $dA$  varrida pelo vetor-posição da partícula entre os instantes  $t$  e  $t + \varepsilon$ .

Uma rápida inspeção nessa figura nos mostra que a área infinitesimal  $dA$  varrida pelo raio vetor da partícula no intervalo de tempo infinitesimal de



duração  $\varepsilon$  é pela área do “triângulo” hachurado da figura,

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\varphi. \quad (2.13)$$

Portanto, a taxa temporal com que o raio vetor da partícula varre uma área no plano da órbita, denominada velocidade areolar, está diretamente relacionada ao módulo do momento angular da partícula, podendo ser escrita como

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{\ell}{2m}, \quad (2.14)$$

onde usamos a equação (2.12). Uma vez que  $\ell$  é uma constante de movimento, o raio vetor da partícula varre áreas iguais em tempos iguais, resultado conhecido como Lei das Áreas ou Segunda Lei de Kepler. A Figura 2.3 ilustra esse resultado. Observe que, em um mesmo intervalo de tempo  $\Delta t$ , o ângulo varrido pelo raio vetor da partícula quando ela está longe da origem,  $\Delta\varphi_2$ , é menor do que o ângulo varrido quando ela está perto da origem,  $\Delta\varphi_1$ , justamente para que a área varrida pelo raio vetor da partícula seja a mesma durante o mesmo intervalo de tempo.

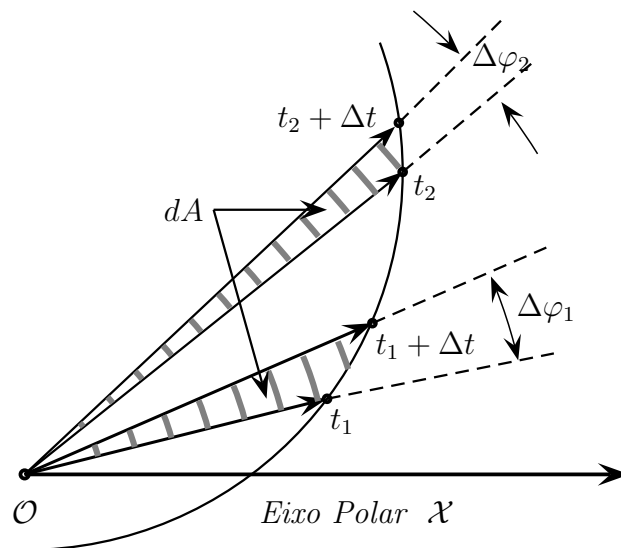


Figura 2.3: Como a área varrida entre  $t_1$  e  $t_1 + \Delta t$  é a mesma que a varrida entre  $t_2$  e  $t_2 + \Delta t$ , o ângulo  $\Delta\varphi_1$  é maior do que o ângulo  $\Delta\varphi_2$ , pois em  $t_2$  a partícula está mais afastada da origem.

Além de possuir torque nulo relativo ao centro de força, há uma segunda propriedade importante de uma força central, a saber, toda força central é conservativa (a recíproca não é verdadeira, nem toda força conservativa é central). De fato, é fácil mostrar que o trabalho realizado por uma força central entre dois pontos  $A$  e  $B$  quaisquer não depende do caminho entre eles usado no cálculo, mas apenas dos pontos  $A$  e  $B$  e, obviamente, da força central em consideração. Esse fato nos permite definir uma função escalar, chamada energia potencial associada a essa força conservativa, pela expressão

$$U(P) = - \int_{P_p}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{r_p}^r \mathcal{F}(r) dr, \quad (2.15)$$

onde  $P_p$  é um ponto padrão, arbitrariamente escolhido, no qual, por hipótese  $U(P_p) = 0$ . Segue, diretamente de (2.15), que a diferença de energia potencial entre dois pontos quaisquer onde ela esteja definida é dada por

$$U(B) - U(A) = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{r_A}^{r_B} \mathcal{F}(r) dr. \quad (2.16)$$

A escolha do ponto padrão é arbitrária e é feita da forma mais conveniente possível. Enfatizamos que não são os valores da energia potencial que importam, mas sim as diferenças de energia potencial entre dois pontos e tais diferenças não dependem do ponto padrão, como está evidente (2.16).

A versão diferencial da equação anterior pode ser obtida facilmente. Lembrando que  $U(B) - U(A) = \int_A^B dU$ , a comparação com a última equação nos permite fazer a seguinte identificação:  $dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\mathcal{F}(r)dr$ . Com isso, vemos que  $\mathcal{F}(r) = -dU/dr$  e a relação entre a força central  $\mathbf{F}$  e a energia potencial associada é dada, simplesmente, por

$$\mathbf{F} = -\frac{dU(r)}{dr} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.17)$$

Para uma força não-central, mas ainda conservativa, pode-se mostrar que, dada a energia potencial, a força conservativa correspondente é obtida por

$$\mathbf{F} = -\nabla U. \quad (2.18)$$

No caso particular de uma força central,  $U$  é uma função apenas de  $r$ , de modo que  $\nabla U = (dU/dr)\hat{\mathbf{r}}$  e recaímos na equação (2.17).

Do teorema do trabalho e energia cinética e da definição de energia potencial, é fácil perceber que quando só realizam trabalho forças conservativas, a soma da energia cinética com a potencial total, denominada energia mecânica da partícula, é uma constante de movimento. Em outras palavras,  $E = (1/2)m\mathbf{v}^2 + U$  é uma constante ao longo de um movimento possível da partícula. Em geral, para diferentes movimentos da partícula, associados a diferentes condições iniciais, o valor de  $E$  é diferente.

No caso em consideração, há apenas a energia potencial  $U(r)$  associada à força central que atua sobre a partícula. Utilizando a equação (2.9) temos  $\mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$ , de modo que a energia mecânica da partícula pode ser escrita na forma

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + U(r) \quad (2.19)$$

Cada vez que obtemos uma constante de movimento independente das constantes já estabelecidas estamos dando um passo a mais na solução do problema. Como veremos mais adiante, a equação anterior e a conservação do momento angular nos permitirão obter a equação polar da órbita da partícula.

## 2.3 Energia potencial efetiva

Iniciaremos esta seção fazendo uma discussão qualitativa das órbitas possíveis de uma partícula que está sujeita, unicamente, a ação de uma força central. Utilizando apropriadamente o fato de a energia mecânica ser uma constante de movimento, veremos em que circunstâncias e para que valores da energia mecânica a órbita da partícula é limitada ou ilimitada e em que situações as órbitas circulares (quando existirem) são estáveis. Em seguida, mostraremos como se pode obter a equação polar da órbita da partícula a partir das conservações da energia mecânica e do momento angular. Em particular, aplicaremos esse procedimento para obter as órbitas possíveis no problema de Kepler.

Devido à simetria esférica, o movimento radial da partícula poderá ser descrito qualitativamente de um modo análogo à discussão feita para movimentos unidimensionais de uma partícula sujeita a uma força resultante conservativa  $F_x = -dU(x)/dx$ . Nesse caso, conhecida a energia potencial  $U(x)$ , e tendo em mente a relação anterior entre a força e a energia potencial, podemos utilizar a conservação da energia mecânica para fazer uma discussão dos movimentos possíveis da partícula. Com esse intuito, escrevemos

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - U(x). \quad (2.20)$$

Como, por definição, a energia cinética pode assumir apenas valores positivos ou nulo, vemos que, dada uma energia mecânica  $E$ , a partícula só pode se movimentar nos intervalos do eixo  $\mathcal{OX}$  tais que a condição  $E \geq U(x)$  seja satisfeita. Nos pontos em que  $E = U(x)$ , a energia cinética é nula e, portanto, também é nula a velocidade da partícula. Esses pontos são chamados pontos de retorno, desde que, neles,  $F_x \neq 0$ . O nome é bastante sugestivo, uma vez que a partícula inverte o sentido de seu movimento justamente quando atinge um ponto de retorno.

No caso de uma partícula sob a ação de uma força central, os movimentos possíveis, embora sejam planos, não são necessariamente unidimensionais. No entanto, podemos analisar o movimento radial da partícula de uma forma análoga à descrita anteriormente para movimentos unidimensionais. Com esse intuito, reescrevemos (2.19) em uma forma conveniente, isolando o termo da energia cinética que envolve a componente radial da velocidade,

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - \left( \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + U(r) \right). \quad (2.21)$$

Usando o fato de que  $\dot{\varphi} = \ell/mr^2$ , podemos eliminar  $\dot{\varphi}$  da expressão anterior,

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - U_{ef}(r), \quad (2.22)$$

onde definimos, por conveniência, a energia potencial efetiva  $U_{ef}$  como

$$U_{ef}(r) := U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}. \quad (2.23)$$

É justamente  $U_{ef}(r)$ , e não  $U(r)$ , que desempenha para o movimento radial da partícula um papel análogo ao desempenhado por  $U(x)$  em movimentos unidimensionais. Analogamente, derivando ambos os lados da equação (2.22) em relação ao tempo, vemos que o movimento radial é descrito pela equação diferencial

$$m\ddot{r} = \mathcal{F}_{ef}(r), \quad (2.24)$$

onde definimos a chamada força efetiva,

$$\mathcal{F}_{ef}(r) := -\frac{dU_{ef}(r)}{dr} = \mathcal{F}(r) + \frac{\ell^2}{mr^3}. \quad (2.25)$$

Fazendo novamente uma analogia com o movimento unidimensional, vemos, então, que é  $-dU_{ef}(r)/dr$ , e não  $-dU(r)/dr$ , que desempenha o papel da força no movimento radial.<sup>7</sup>

Podemos obter algumas informações sobre o movimento da partícula a partir das equações anteriores antes mesmo de tentarmos integrá-las. O termo  $\ell^2/mr^3$  no lado direito da equação anterior tem o efeito de uma força centrífuga no movimento radial da partícula. A esse termo corresponde, na energia potencial efetiva dada pela equação (2.23), o termo  $\ell^2/2mr^2$ , chamado barreira centrífuga. Dizemos que a barreira centrífuga se opõe à aproximação da partícula ao centro de força. Essa oposição desaparece com  $\ell = 0$ , mas para  $\ell \neq 0$  ela impede a partícula de passar pelo centro de força (a menos, é claro, que  $U(r)$  em (2.23) tenha um termo que vença a ação da barreira centrífuga). Para uma dada energia mecânica, digamos  $E$ , o movimento da partícula pode existir somente para distâncias do centro que satisfaçam à condição  $E \geq U_{ef}(r)$ . Nos pontos em que  $U_{ef}(r) = E$  a componente radial da velocidade da partícula será nula. Por um pequeno abuso de linguagem, tais pontos são também chamados pontos de retorno pois, neles, o movimento radial da partícula inverte o sentido. Mas lembre-se de que, para  $\ell \neq 0$ , a velocidade da partícula não é nula nesses pontos, pois  $\dot{\varphi} \neq 0$ , ou seja, a

---

<sup>7</sup>Pode-se mostrar que se analisarmos o movimento de um referencial não-inercial, com origem também no centro de força, mas girante em relação ao inercial com uma velocidade angular  $\boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\varphi}(t)\hat{\mathbf{z}}$ , a resultante das forças sobre a partícula incluindo todas as forças de inércia é igual a  $\mathcal{F}_{ef}(r)\hat{\mathbf{r}}$ . O termo  $(\ell^2/mr^3)\hat{\mathbf{r}}$  corresponde ao termo centrífugo (os termos de Coriolis e Euler se cancelam).

partícula continua orbitando em torno do centro de força.

A fim de fixarmos as idéias, consideremos uma energia potencial efetiva genérica com o aspecto da que aparece na Figura 2.4. Deliberadamente, escolhemos uma energia potencial efetiva cujo gráfico apresenta um poço de potencial e cujas órbitas podem ser limitadas ou ilimitadas, dependendo do valor da energia mecânica da partícula (no problema de Kepler, a energia potencial efetiva tem a mesma forma que a da Figura 2.4). Na figura estão marcados diversos valores para a energia mecânica, a saber,  $E_0$ ,  $E_1$  e  $E_2$ .

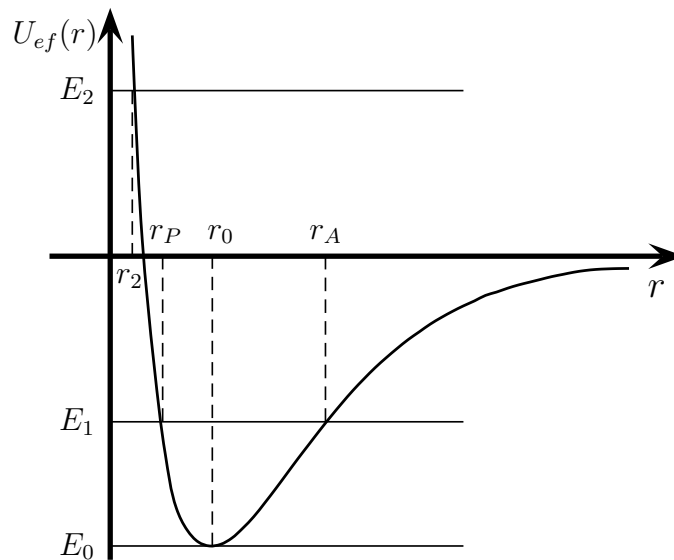


Figura 2.4: Energia potencial efetiva que permite tanto órbitas limitadas quanto ilimitadas.

No caso em que a energia mecânica da partícula vale  $E_1$ , a condição  $E \geq U_{ef}(r)$  nos mostra que seus movimentos possíveis devem ocorrer entre uma distância mínima e uma máxima do centro de força  $\mathcal{O}$ , denotados, respectivamente, por  $r_P$  e  $r_A$ . Um ponto da trajetória cuja distância ao centro de força seja mínima é chamado **pericentro**. Analogamente, um ponto da trajetória cuja distância ao centro de força seja máxima é chamado **apocentro**. Da equação (2.12), vemos que a velocidade angular da partícula (nesse contexto, velocidade angular da partícula significa  $\dot{\varphi}$ ) é máxima quando ela se encontra no pericentro e é mínima quando se encontra no apocentro. Na posição em que a energia potencial é mínima, o módulo da componente radial da veloci-

dade da partícula é máximo (lembre que  $(1/2)mv^2 = E - U_{ef}(r)$  é máxima nesse ponto). Denotaremos por  $r_0$  a distância da partícula ao centro de força quando ela estiver em uma posição de energia potencial mínima. Nos casos em que a energia mecânica da partícula é positiva, como o valor  $E_2$  mostrado na Figura 2.4, só há um ponto de retorno, cuja distância ao centro de força vale  $r_2$ . A condição  $E \geq U_{ef}(r)$  nos permite concluir que, nesse caso, o movimento da partícula é ilimitado e que a sua distância ao centro de força nunca fica inferior ao valor  $r_2$ . No caso em que a energia mecânica da partícula vale  $E_0$ , isto é, tem um valor igual ao mínimo da energia potencial efetiva,  $E_0 = U_{ef}(r_0)$ , vemos que  $r = r_0$  durante todo o movimento da partícula pois, do contrário, a condição  $E \geq U_{ef}(r)$  seria violada. Nesse caso, a partícula se move em uma trajetória circular de raio  $r_0$ , com velocidade angular  $\ell/mr_0^2$ .

No exemplo em questão, podemos afirmar que para  $E_0 \leq E < 0$  as órbitas são limitadas, enquanto para  $E \geq 0$  elas são ilimitadas. A Figura 2.5 ilustra um trecho de uma órbita limitada na qual a energia mecânica da partícula vale  $E_1$ .

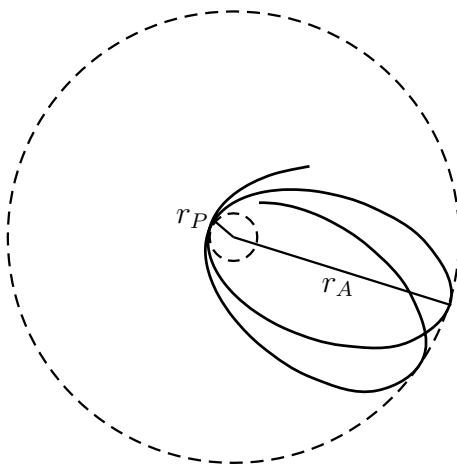


Figura 2.5: Órbita limitada mas não, necessariamente, fechada. A partícula se move mantendo uma distância finita ao centro de força ( $r_P \leq r \leq r_A$ ).

Observe que a partícula nunca se aproxima do centro de força mais do que a distância  $r_P$  e, dele, nunca se afasta mais do que a distância  $r_A$ . É oportuno ressaltar que o fato de uma órbita ser limitada não significa, necessariamente, que ela seja fechada. Voltaremos a esse ponto mais adiante.

Os movimentos circulares uniformes estão associados aos pontos de inclinação nula no gráfico de  $U_{ef}(r)$  versus  $r$  pois, nesses pontos, temos o seguinte:  $\mathcal{F}_{ef}(r_0) = -U'_{ef}(r_0) = 0$ . Portanto, lembrando a definição de  $U_{ef}(r)$  dada por (2.23), buscar tais movimentos significa impor a condição

$$U'_{ef}(r_0) = U'(r_0) - \frac{\ell^2}{mr_0^3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad U'(r_0) = \frac{\ell^2}{mr_0^3}. \quad (2.26)$$

Por conveniência futura, escrevemos abaixo uma expressão para  $U''_{ef}(r_0)$  em termos de  $U'(r_0)$  e  $U''(r_0)$ , a saber,

$$U''_{ef}(r_0) = \frac{3}{r_0}U'(r_0) + U''(r_0). \quad (2.27)$$

Suponhamos, agora, que a energia mecânica seja ligeiramente superior ao valor de  $U_{ef}$  no fundo do poço de potencial, ou seja, ligeiramente superior a  $U_{ef}(r_0)$ . Qual será o movimento da partícula? Observe, nesse caso, que surgirão pontos de retorno (pericentro e apocentro) cujas respectivas distâncias ao centro de força serão muito próximas de  $r_0$  ( $r_P$  ligeiramente inferior a  $r_0$  e  $r_A$  ligeiramente superior a  $r_0$ ). Isso dará origem a pequenas oscilações radiais.

Supondo que  $U''_{ef}(r_0) \neq 0$ , podemos aproximar o poço de energia potencial na vizinhança de  $r_0$  por um poço parabólico, ou seja, podemos escrever (isso corresponde a fazer uma expansão em série de Taylor da função  $U_{ef}$  em torno de  $r_0$ ),

$$U_{ef}(r) \approx U_{ef}(r_0) + \frac{1}{2}U''_{ef}(r_0)(r - r_0)^2 \quad (2.28)$$

Lembrando que  $m\ddot{r} = \mathcal{F}_{ef}$ , e substituindo a equação anterior em  $\mathcal{F}_{ef} = -U'_{ef}$ , obtemos

$$m\ddot{r} = -U''_{ef}(r_0)(r - r_0). \quad (2.29)$$

A última equação nos permite afirmar que as oscilações radiais serão harmônicas e de período igual a

$$\tau_r = \frac{2\pi}{\omega_r}, \quad (2.30)$$



sendo a frequência angular de tais oscilações radiais dada por

$$\omega_r := \sqrt{\frac{1}{m} \frac{d^2 U_{ef}(r)}{dr^2} \Big|_{r=r_0}}. \quad (2.31)$$

Para valores da energia mecânica que não estejam próximos de  $U_{ef}(r_0)$ , as oscilações radiais, em geral, não serão mais harmônicas. Em princípio, podemos obter o movimento radial da partícula, isto é, obter  $r$  como função do tempo, para qualquer valor de  $E$ . Com efeito, a partir da equação (2.22) podemos escrever, diretamente,

$$\int_{r_i}^r \frac{dr'}{\sqrt{E - U_{ef}(r')}} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} t, \quad (2.32)$$

onde  $r_i$  é a distância entre a partícula e o centro de força no instante inicial  $t_i = 0$ . Dessa equação obtemos uma relação entre os instantes de tempo e as respectivas distâncias da partícula à origem. Em princípio, esse resultado pode ser manipulado para nos fornecer a função que dá a distância à origem em função do tempo,  $r(t)$ . De posse dessa função, podemos utilizar a equação (2.14) a fim de obter a relação entre o ângulo polar varrido pela partícula e o tempo,

$$\varphi(t) = \varphi_i + \int_0^t \frac{\ell/m}{[r(t')]^2} dt', \quad (2.33)$$

onde  $\varphi_i$  é o ângulo polar no instante  $t_i = 0$ . Desse modo, a solução completa do problema fica reduzida às duas quadraturas (2.32) e (2.33).

Como a equação (2.32) nos dá o intervalo de tempo transcorrido para que a partícula se mova radialmente desde  $r_i$  até um valor genérico  $r$ , desde que ela não mude o sentido de seu movimento radial, essa equação nos permite calcular o período das oscilações radiais para qualquer valor de  $E$  (lembre-se de que a fórmula (2.31) só é válida para pequenas oscilações radiais). Se os valores da energia potencial efetiva e da energia mecânica da partícula restringirem o seu movimento de tal modo que  $r$  varie de um valor mínimo,  $r_P$ , a um máximo,  $r_A$ , então o tempo gasto pela partícula para sair de um pericentro até o apocentro seguinte será exatamente metade do período de

seu movimento, o que nos permite escrever, a partir da equação (2.32),

$$\int_{r_P}^{r_A} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{ef}(r)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\tau_r}{2}, \quad (2.34)$$

Conseqüentemente, o período das oscilações radiais é dado pela expressão

$$\tau_r = \sqrt{2m} \int_{r_P}^{r_A} \frac{dr'}{\sqrt{E - U_{ef}(r')}}. \quad (2.35)$$

Um movimento radial periódico não significa, necessariamente, que o movimento da partícula seja periódico. Para que a partícula execute, de fato, um movimento periódico é necessário que a razão entre o período de revolução,  $\tau_\varphi$ , e o período de oscilação radial,  $\tau_r$ , seja um número racional  $q$ . Ou seja, a condição necessária e suficiente para que a trajetória da partícula seja fechada pode ser escrita na forma

$$\frac{\tau_\varphi}{\tau_r} = q, \quad q \in Q. \quad (2.36)$$

Se, além disso, a razão  $\tau_\varphi/\tau_r$  for um número inteiro positivo, a trajetória da partícula será uma curva fechada simples; nesse caso, a área encerrada pela órbita,  $A_{orb}$ , será igual à área varrida pelo vetor-posição da partícula durante um período de revolução que, em virtude da conservação de  $\ell$ , é dada por

$$A_{orb} = \frac{\ell}{2m} \tau_\varphi. \quad (2.37)$$

Em contrapartida, se o movimento da partícula for ilimitado, a órbita se estenderá a distâncias infinitas do centro, podendo ou não dar uma ou mais revoluções quando  $r \rightarrow \infty$ , dependendo da taxa de variação de  $\varphi$  em relação a  $r$ .

Em princípio, as equações (2.32) e (2.33) nos fornecem, juntamente com as condições iniciais, a solução completa do problema. No entanto, para muitos propósitos, não estamos interessados na dependência temporal de  $r$  e  $\varphi$ , mas sim na relação entre essas coordenadas durante o movimento da partícula. Em outras palavras, muitas vezes necessitamos apenas da equação polar de sua trajetória.

Para relacionarmos diretamente  $r$  e  $\varphi$ , utilizaremos a conservação do momento angular da partícula a fim de eliminarmos  $\dot{\varphi}$  das expressões anteriores e obtermos uma equação diferencial para  $r$  como função de  $\varphi$ . Com isso em mente, escrevemos, inicialmente, a relação

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\ell}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi}, \quad (2.38)$$

onde usamos a equação (2.12). Substituindo o resultado anterior na equação (2.22), eliminamos o tempo dessa equação e a reescrevemos na forma

$$\frac{\ell^2}{2mr^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + U_{ef}(r) = E. \quad (2.39)$$

Embora essa equação diferencial seja não-linear, é de primeira ordem, o que nos permite calcular  $\varphi$  em função de  $r$  por meio de uma simples quadratura. Por exemplo, em um trecho da órbita no qual  $r$  aumenta à medida que o tempo passa, temos (lembre-se de que escolhemos  $\boldsymbol{\ell} = \ell \hat{\mathbf{z}}$ , com  $\ell > 0$ , de modo que  $\varphi$  sempre aumenta com o passar do tempo),

$$\varphi - \varphi_i = \int_{r_i}^r \frac{\ell dr'}{r'^2 \sqrt{2m[E - U_{ef}(r')]}}, \quad (2.40)$$

Caso, no trecho em consideração,  $r$  diminua com o tempo, a equação anterior ganharia um sinal negativo adicional na frente do membro no lado direito dessa equação. A partir da equação (2.40), o ângulo varrido pelo raio vetor da partícula desde o instante em que ela se encontra em um pericentro até o instante em que ela se encontra no apocentro seguinte, denotado por  $\Delta\varphi_{PA}$ , é dado então por

$$\Delta\varphi_{PA} = \int_{r_P}^{r_A} \frac{\ell dr'}{r'^2 \sqrt{2m[E - U_{ef}(r')]}}, \quad (2.41)$$

A partir da discussão anterior, é imediato mostrar que o ângulo varrido pelo raio vetor da partícula desde o instante em que ela se encontra em um apocentro até o instante em que ela se encontra no pericentro seguinte, denotado

por  $\Delta\varphi_{AP}$ , é igual a  $\Delta\varphi_{PA}$ , pois

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{AP} &= - \int_{r_A}^{r_P} \frac{\ell dr'}{r'^2 \sqrt{2m[E - U_{ef}(r')]}} \\ &= \int_{r_P}^{r_A} \frac{\ell dr'}{r'^2 \sqrt{2m[E - U_{ef}(r')]}} \\ &= \Delta\varphi_{PA}.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Esse resultado será utilizado mais adiante, na discussão do Teorema de Bertrand.

## 2.4 O problema de Kepler

A título de ilustração dos resultados gerais estabelecidos na seção anterior, e também por conveniência futura, suponhamos que  $U(r)$  seja a energia potencial gravitacional, isto é,  $U(r) = -k/r$ , onde  $k = GMm$ , sendo  $G$  a constante da gravitação universal,  $m$  a massa da Terra e  $M$  a massa do Sol. Para nossos propósitos, podemos considerar o Sol fixo na origem do sistema de eixos escolhido. Isso significa que, devido ao fato de a massa do Sol ser muito maior do que a da Terra, estamos desprezando, numa primeira aproximação, o movimento do Sol sob a ação da força exercida pela Terra <sup>8</sup>.

Usando na equação (2.40) a energia potencial gravitacional e, em seguida, fazendo a transformação de variável  $r' = 1/u'$ , obtemos

$$\begin{aligned}\varphi - \varphi_i &= - \int_{u_i}^u \frac{\ell du'}{\sqrt{2mE + 2mku' - \ell^2 u'^2}} \\ &= - \int_{u_i}^u \frac{du'}{\sqrt{\left(\frac{mk\varepsilon}{\ell^2}\right)^2 - \left(u' - \frac{mk}{\ell^2}\right)^2}},\end{aligned}\tag{2.43}$$

onde, na última passagem, rearrumamos convenientemente os termos dentro

---

<sup>8</sup>Para levarmos em consideração o movimento do Sol, basta trabalharmos com o conceito de massa reduzida do sistema. No entanto, não faremos essa discussão aqui, pois é totalmente irrelevante para nossos propósitos.

da raiz quadrada, e definimos  $u = 1/r$ ,  $u_i = 1/r_i$  e o parâmetro

$$\varepsilon := \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}, \quad (2.44)$$

cuja interpretação ficará evidente mais adiante. O modo como escrevemos a equação (2.43) nos sugere a seguinte transformação de variável de integração:

$$u' - \frac{mk}{\ell^2} = \frac{mk\varepsilon}{\ell^2} \cos\alpha'. \quad (2.45)$$

Diferenciando a equação anterior, temos  $du' = -(mk\varepsilon/\ell^2) \text{sen}\alpha' d\alpha'$  e invertendo essa equação, escrevemos  $\alpha'$  em termos de  $u'$ ,

$$\alpha' = \cos^{-1} \left[ \frac{\ell^2}{mk\varepsilon} \left( u' - \frac{mk}{\ell^2} \right) \right]. \quad (2.46)$$

Utilizando essa transformação de variável em (2.43), obtemos

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_i &= - \int_{\alpha_i}^{\alpha} \frac{-(mk\varepsilon/\ell^2) \text{sen}\alpha' d\alpha'}{(mk\varepsilon/\ell^2) (1 - \cos^2\alpha')^{1/2}} \\ &= \int_{\alpha_i}^{\alpha} d\alpha' \\ &= \alpha - \alpha_i, \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde definimos

$$\alpha = \cos^{-1} \left[ \frac{\ell^2}{mk\varepsilon} \left( u - \frac{mk}{\ell^2} \right) \right]; \quad \alpha_i = \cos^{-1} \left[ \frac{\ell^2}{mk\varepsilon} \left( u_i - \frac{mk}{\ell^2} \right) \right]. \quad (2.48)$$

Substituindo a primeira das equações escritas em (2.48) na equação (2.47), obtemos

$$\varphi + \alpha_i - \varphi_i = \alpha = \cos^{-1} \left[ \frac{\ell^2}{mk\varepsilon} \left( u - \frac{mk}{\ell^2} \right) \right]. \quad (2.49)$$

Lembrando que  $u = 1/r$ , a equação anterior nos permite escrever

$$\frac{1}{r} - \frac{mk}{\ell^2} = \frac{mk\varepsilon}{\ell^2} \cos(\varphi + \alpha_i - \varphi_i). \quad (2.50)$$

Sem perda de generalidade, podemos fazer  $\alpha_i - \varphi_i = 0$ . Isso corresponde a escolher o eixo polar como o eixo de simetria da órbita. Obtemos, finalmente, a equação polar da órbita,

$$r(\varphi) = \frac{\ell^2/mk}{1 + \varepsilon \cos\varphi}. \quad (2.51)$$

Pode-se mostrar que essa é a equação polar de uma cônica de excentricidade  $\varepsilon$  com um dos focos localizados na origem do eixo polar. Da definição (2.44), vemos que  $\varepsilon \geq 0$ . No caso em que  $\varepsilon = 0$ , temos uma órbita circular de raio  $r_0 = \ell^2/mk$ . Para valores de  $\varepsilon$  tais que  $0 < \varepsilon < 1$ , vemos que a órbita é limitada, pois o denominador em (2.51) nunca se anula, e fechada, uma vez que  $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi$ , para qualquer  $\varphi$ . Nesse caso, temos órbitas elípticas. Para  $\varepsilon \geq 1$  passa a existir a possibilidade de o denominador se anular para certos valores de  $\varphi$ , de modo que a distância da partícula ao centro de força tende a infinito e a órbita é ilimitada. Pode-se mostrar que com  $\varepsilon = 1$  a órbita é parabólica e com  $\varepsilon > 1$  as órbitas da partícula são hipérbolas (lembre-se de que estamos considerando sempre  $\ell \neq 0$ , de modo que estamos excluindo órbitas retilíneas).

Devido à equação (2.44), podemos estabelecer as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0 & \iff E = -\frac{mk^2}{2\ell^2}; \quad \text{órbita circular} \\ 0 < \varepsilon < 1 & \iff -\frac{mk^2}{2\ell^2} < E < 0; \quad \text{órbitas elípticas} \\ \varepsilon = 1 & \iff E = 0; \quad \text{órbita parabólica} \\ \varepsilon > 1 & \iff E > 0; \quad \text{órbitas hiperbólicas.} \end{aligned} \quad (2.52)$$

## 2.5 Equação de Binet

Consideremos, agora, um método alternativo para determinar o movimento da partícula sob a ação de um força resultante central. Em vez de determinarmos  $r(t)$  e  $\varphi(t)$  por meio de (2.32) e (2.33), determinaremos ini-

cialmente a equação polar da trajetória da partícula, isto é, a expressão de  $r(\varphi)$  e, então, obteremos  $\varphi$  como função de  $t$ . Com o intuito de obtermos a equação diferencial para  $r(\varphi)$  devemos eliminar a segunda derivada temporal presente na equação (2.24). Para isso, repetimos, por conveniência, a equação (2.38), a saber,

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi},$$

e, utilizando novamente a equação (2.14), obtemos  $\ddot{r}$  em termos de derivadas de  $r(\varphi)$  com respeito a  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\ell}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) \frac{\ell}{mr^2} \\ &= \frac{\ell^2}{m^2 r^4} \frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{2\ell^2}{m^2 r^5} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Usando as equações (2.53), (2.24) e (2.25), obtemos a equação diferencial da órbita,

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = r + \frac{mr^4}{\ell^2} \mathcal{F}(r). \quad (2.54)$$

É conveniente fazer aqui a transformação de variável  $u = 1/r$ , pois ela elimina de (2.54) o termo com a derivada primeira, simplificando a equação diferencial da órbita, que toma a forma

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{\ell^2 u^2} \mathcal{F} \left( \frac{1}{u} \right), \quad (2.55)$$

conhecida como equação de Binet. As soluções dessa equação dão as órbitas possíveis da partícula sob a ação da força central em consideração. Por exemplo, no caso do problema de Kepler, temos  $\mathcal{F}(1/u) = -ku^2$ , de modo

que a equação da órbita se reduz a

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{mk}{\ell^2}. \quad (2.56)$$

A solução geral da equação anterior pode ser escrita na forma

$$u(\varphi) = \frac{mk}{\ell^2} + A \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (2.57)$$

onde  $A$  e  $\varphi_0$  são constantes arbitrárias de integração. No entanto, sem perda de generalidade, tomamos  $\varphi_0 = 0$ , o que corresponde a escolher o eixo polar como o eixo de simetria da órbita. Observe que, da definição de pericentro e apocentro, podemos escrever as relações

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_P} &= \frac{mk}{\ell^2} + A \\ \frac{1}{r_A} &= \frac{mk}{\ell^2} - A, \end{aligned} \quad (2.58)$$

de modo que a constante  $A$  pode ser escrita em termos de  $r_P$  e  $r_A$  como

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A} \right). \quad (2.59)$$

Para mostrarmos, então, que a solução escrita em (2.57) é equivalente à escrita na equação (2.51), devemos expressar a constante  $A$  em termos da energia mecânica e do momento angular. Com esse objetivo, basta expressarmos  $1/r_P$  e  $1/r_A$  em termos de  $E$  e  $\ell$ . Essa tarefa é bastante simples, uma vez que  $1/r_P$  e  $1/r_A$  são as raízes da equação algébrica  $E = U_{ef}$ , escrita em termos de  $1/r = u$ , ou seja, da equação

$$E = -ku + \frac{\ell^2}{2m}u^2 \quad \implies \quad u^2 - \frac{2mk}{\ell^2}u - \frac{2mE}{\ell^2} = 0. \quad (2.60)$$

É imediato mostrar que as duas raízes são

$$u_{\pm} = \frac{mk}{\ell^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{mk^2}} \right] = \frac{mk}{\ell^2} [1 \pm \varepsilon]. \quad (2.61)$$



onde, na última passagem, usamos a relação existente entre a excentricidade, o momento angular e energia mecânica da partícula, equação (2.44). Uma vez que  $u = 1/r$ , identificamos  $u_+$  com  $1/r_P$  e  $u_-$  com  $1/r_A$ , de modo que

$$A = \frac{1}{2}(u_+ - u_-) = \frac{mk}{\ell^2} \varepsilon, \quad (2.62)$$

Substituindo (2.62) em (2.57), usando o fato de que  $u = 1/r$  e lembrando que já havíamos escolhido  $\varphi_0 = 0$ , obtemos

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{\ell^2}(1 + \varepsilon \cos\varphi), \quad (2.63)$$

que está de acordo com o nosso resultado anterior, dado pela equação (2.51).

É oportuno comentar que a equação diferencial da órbita (2.55) também pode ser resolvida, com um pouco mais de esforço, para o problema de um oscilador harmônico isotrópico. Nesse caso, temos  $\mathcal{F}(1/u) = -k/u$ , de modo que a equação da órbita toma a forma

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{mk}{\ell^2 u^3}. \quad (2.64)$$

Pode-se mostrar que, como no caso das órbitas limitadas do problema de Kepler, as soluções da equação anterior também são elipses. No entanto, as trajetórias elípticas do oscilador têm o seu centro geométrico, e não um de seus focos, localizado no centro de força (escolhido como origem em nossa discussão). Esse resultado é trivialmente obtido se utilizarmos coordenadas cartesianas. No problema do oscilador, todas as órbitas são limitadas. Note que, todas as órbitas do oscilador assim como todas as órbitas limitadas do problema de Kepler são fechadas.

Finalizamos essa seção enfatizando que, de posse de uma órbita possível  $r(\varphi)$ , podemos usá-la em (2.12) para obter

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi} [r(\varphi')]^2 d\varphi' = \frac{\ell}{m} t. \quad (2.65)$$

que nos fornece, implicitamente, a solução  $\varphi(t)$  obtida em (2.33).

## 2.6 A equação de Kepler temporal

Na discussão que fizemos até o momento, não obtivemos as funções-movimento possíveis de uma partícula sujeita a uma força resultante  $\mathbf{F} = -(k/r^2) \hat{\mathbf{r}}$ , onde  $k$  é uma constante positiva. Em outras palavras, não resolvemos totalmente o problema de Kepler, uma vez que não obtivemos  $r$  e  $\varphi$  como funções do tempo. Obtivemos, somente, a relação entre  $r$  e  $\varphi$ , ou seja, a chamada equação polar da órbita da partícula. Isso não foi por acaso. De fato, a obtenção da solução completa do problema de Kepler é bem mais sutil, pois envolve equações transcendentais. Nesta subseção, nosso objetivo é, justamente, preencher essa lacuna, apresentando a chamada equação de Kepler temporal, muito utilizada pelos astrônomos. Isso será feito no caso de órbitas elípticas.

A Figura 2.6 mostra a trajetória elíptica de um planeta em torno do sol. Este, por sua vez, se encontra fixo (por hipótese) num dos focos da elipse, o ponto  $S$  da figura. A posição do planeta em um instante genérico está representada, na figura, pelo ponto  $P$ . As coordenadas polares utilizadas anteriormente,  $(r, \varphi)$ , correspondem, respectivamente, à distância entre os pontos  $S$  e  $P$  e ao ângulo formado pelos segmentos de reta  $SP$  e  $SA$ .

Para obtermos a solução dependente do tempo, é conveniente introduzirmos uma nova coordenada, chamada anomalia excêntrica  $\psi$ . Supondo que em  $t = 0$  o planeta esteja no perihélio, ponto  $A$ , a anomalia excêntrica no instante  $t$  é o ângulo formado pelos segmentos de reta  $OQ$  e  $OA$ , sendo  $O$  o centro geométrico da elipse e  $Q$  o ponto do círculo de centro em  $O$  e raio igual ao comprimento do segmento de reta  $OA$  tal que a semi-reta  $QP$  seja perpendicular à semi-reta  $OA$ . Define-se anomalia média no instante  $t$  como  $\omega t$ , onde  $\omega = 2\pi/\tau = \sqrt{GM/a^3}$ , sendo  $\tau$  o período da órbita elíptica e  $a$  o seu semi-eixo maior. A equação de Kepler temporal relaciona a anomalia média  $\omega t$  diretamente com a anomalia excêntrica  $\psi$ . Vejamos, então, como essa relação pode ser estabelecida.

A velocidade areolar do planeta é dada por

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{\tau} = \frac{1}{2}\omega ab, \quad (2.66)$$

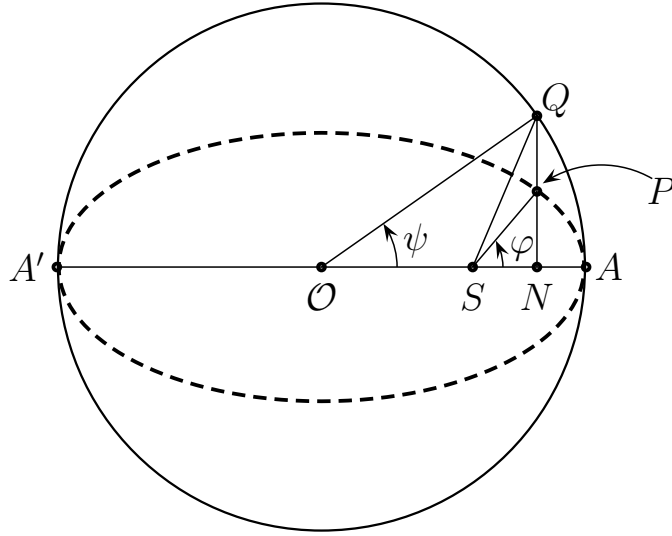


Figura 2.6: Órbita elíptica do planeta em torno do Sol, localizado num dos focos da elipse, o ponto  $S$ ; nesta órbita, o ponto mais próximo ao Sol se chama perihélio, ponto  $A$ , e o mais distante, afélio, ponto  $A'$ ; o ponto  $P$  representa o planeta em um instante genérico;  $\varphi$  é o ângulo polar, também chamado anomalia verdadeira. Foi desenhado um círculo de centro coincidente com o da elipse, ponto  $O$  e raio igual ao semi-eixo maior da elipse;  $\psi$  é a anomalia excêntrica e  $Q$  e  $N$  são pontos auxiliares.

onde  $b$  é o semi-eixo menor da elipse e  $\pi ab$ , a sua área. Como essa velocidade é constante, temos

$$t = \frac{Area(ASP)}{(1/2)\omega ab}, \quad (2.67)$$

onde  $Area(ASP)$  significa a área da superfície delimitada pelos segmentos de reta  $AS$  e  $SP$  e o arco de elipse  $PA$ , ou seja, a área varrida pelo raio vetor do planeta desde  $t = 0$  até o instante  $t$ . Seja, agora,  $Area(ASQ)$  a área delimitada pelos segmentos de reta  $AS$  e  $SQ$  e o arco de círculo  $QA$ . Existe uma relação bastante simples entre  $Area(ASP)$  e  $Area(ASQ)$ . De fato, usando as equações cartesianas que definem uma elipse de semi-eixos  $a$  e  $b$  e um círculo de raio  $a$ , dadas, respectivamente, por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad (2.68)$$

pode-se mostrar facilmente que

$$\frac{NP}{NQ} = \frac{b}{a}. \quad (2.69)$$

Por sua vez, a partir desse resultado, pode-se estabelecer a relação:

$$Area(ASP) = \frac{b}{a} Area(ASQ), \quad (2.70)$$

Substituindo a equação (2.70) em (2.67), obtemos

$$\begin{aligned} t &= \frac{2}{\omega ab} \frac{b}{a} Area(ASQ) \\ &= \frac{2}{\omega a^2} \left( Area(AOQ) - Area(SOQ) \right) \\ &= \frac{2}{\omega a^2} \left( \frac{a^2 \psi}{2} - \frac{a^2 \varepsilon \operatorname{sen} \psi}{2} \right), \end{aligned} \quad (2.71)$$

onde, ao calcularmos  $Area(SOQ)$ , utilizamos o fato de que  $OS = \varepsilon a$ . Reescrevemos a equação anterior na forma

$$\omega t = \psi - \varepsilon \operatorname{sen} \psi. \quad (2.72)$$

Embora esse resultado tenha um aspecto simples, ele não nos permite obter uma expressão analítica para  $\psi$  em função do tempo. Trata-se de uma equação transcendental, que deve ser resolvida numericamente por métodos apropriados. Para relacionarmos  $\psi$  e  $\varphi$ , lembramos a equação polar da órbita,

$$r(\varphi) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (2.73)$$

a partir da qual escrevemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \psi &= \frac{\overline{QN}}{a} \\ &= \frac{(a/b) PN}{a} \\ &= \frac{r(\varphi) \operatorname{sen} \varphi}{a \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{sen} \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

onde usamos as relações  $PN = r(\varphi) \operatorname{sen}\varphi$  e  $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$  e a equação (2.73). As equações (2.72) e (2.74) são usadas pelos astrônomos na determinação da posição do planeta em um certo instante ou, também, para descobrirem em que instante o planeta passará por uma determinada posição.

## 2.7 Teorema de Bertrand

Como já mencionamos, uma órbita limitada não é necessariamente fechada, pois uma partícula pode girar em torno do centro de força mantendo-se entre um raio mínimo e um raio máximo sem nunca retornar ao mesmo ponto com a mesma velocidade. Caso isso ocorresse, o movimento subsequente se repetiria a partir desse instante e teríamos, então, uma trajetória fechada. Surge, naturalmente, a pergunta: quais são os potenciais centrais para os quais todas as órbitas limitadas são fechadas? A palavra “todas” é fundamental, uma vez que dependendo das condições iniciais podemos encontrar órbitas fechadas para uma infinidade de potenciais. De fato, qualquer potencial central atrativo admite órbitas circulares como soluções possíveis.

A resposta a essa pergunta foi respondida em 1873 por Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) [22] e esse resultado é conhecido com o nome de Teorema de Bertrand, que enunciamos da seguinte forma <sup>9</sup> :

*As únicas forças centrais para as quais todas as órbitas limitadas são fechadas são  $\mathbf{F} = -(k/r^2)\hat{\mathbf{r}}$  e  $\mathbf{F} = -kr\hat{\mathbf{r}}$ , com  $k > 0$ . Ou seja, ou é a força inversamente proporcional ao quadrado da distância, ou obedece à lei de Hooke.*

As diversas demonstrações existentes desse teorema fazem uso, em geral, de métodos perturbativos de altas ordens, além do fato de que as soluções para os potenciais de Kepler e do oscilador harmônico isotrópico são conhecidas. A seguir, apresentaremos uma demonstração desse teorema que, embora comece com um procedimento perturbativo, analisando órbitas próximas às circulares, trata-se, na verdade, de uma demonstração não-perturbativa,

---

<sup>9</sup>Uma tradução para o português do trabalho original de Bertrand foi feita por F.C. Santos, V. Soares e A.C. Tort, e pode ser encontrada em [23].

como veremos. Esse procedimento pode ser encontrado no livro texto *Mecânica Analítica*, de Nivaldo A. Lemos [24] que, por sua vez, se inspirou no bem conhecido livro texto *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, de V.I. Arnold [25]. Esta seção foi inserida apenas por completeza e não é necessária para o entendimento das próximas seções desse capítulo ou mesmo dos tópicos abordados no próximo capítulo.

Vale enfatizar, inicialmente, que devemos considerar órbitas limitadas, pois ser limitada é uma condição necessária, embora não-suficiente, para que uma órbita seja fechada. Consideremos, então, uma órbita genérica descrita por uma partícula que ocorre entre um raio mínimo,  $r_{min}$ , e um raio máximo,  $r_{max}$ . Como anteriormente, seja  $\Delta\varphi_{PA}$  o ângulo varrido pelo raio vetor da partícula desde o instante em que ela está em um pericentro até o instante em que ela atinge o apocentro seguinte. Analogamente, seja  $\Delta\varphi_{AP}$  o ângulo varrido pelo raio vetor da partícula desde o instante em que ela está em um apocentro até o instante em que ela atinge o pericentro seguinte, como indica a Figura 2.7.

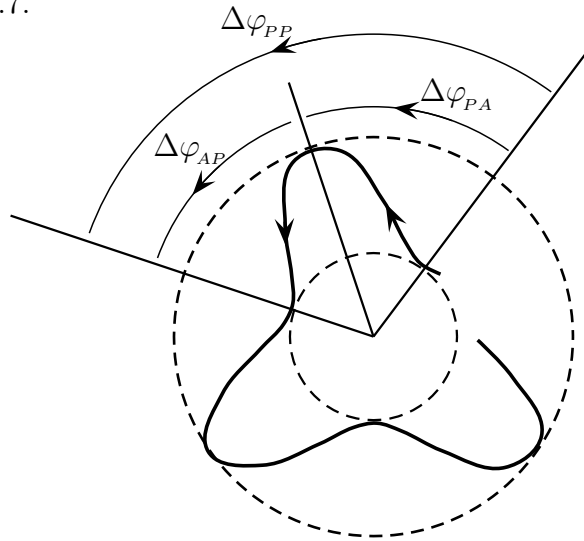


Figura 2.7: Ângulo  $\Delta\varphi_{PP} = \Delta\varphi_{PA} + \Delta\varphi_{AP}$  varrido pelo raio vetor da partícula entre dois pericentros consecutivos.

Como até o momento a força central que atua sobre a partícula é genérica, desde que permita órbitas limitadas, desenhamos na Figura 2.7 uma órbita que facilitasse a visualização dos ângulos  $\Delta\varphi_{PA}$ ,  $\Delta\varphi_{AP}$ . Note que na órbita da figura há uma inversão na concavidade, o que é possível desde que na expressão da força haja um termo repulsivo que domine a curtas distâncias.

O ângulo subtendido por dois pericentros (ou apocentros) consecutivos é dado, então, por

$$\Delta\varphi_{PP} = \Delta\varphi_{PA} + \Delta\varphi_{AP}. \quad (2.75)$$

Utilizando o fato, demonstrado na equação (2.42), de que  $\Delta\varphi_{PA} = \Delta\varphi_{AP}$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{PP} &= 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\ell dr}{r^2 \sqrt{2m[E - U_{ef}(r)]}} \\ &= 2 \int_{u_{min}}^{u_{max}} \frac{\ell du}{\sqrt{2m[E - W(u)]}}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

onde, como de costume,  $u = 1/r$ , e definimos a função  $W$  por

$$W(u) := U_{ef}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\ell^2 u^2}{2m} + U\left(\frac{1}{u}\right). \quad (2.77)$$

Note, então, que  $\Delta\varphi_{PP}$  é o deslocamento angular da partícula em torno do centro de força ocorrido durante uma oscilação radial completa, de  $r_{min}$  até  $r_{max}$  e de volta até  $r_{min}$ . Uma órbita limitada é fechada se, e somente se, depois de um número inteiro  $n$  de oscilações radiais completas da partícula, o seu deslocamento angular é igual a um número inteiro  $n'$  vezes  $2\pi$  radianos. Em outras palavras, como durante cada oscilação radial completa o raio vetor da partícula gira de um ângulo  $\Delta\varphi_{PP}$ , deve valer a condição

$$n\Delta\varphi_{PP} = n'2\pi \quad \implies \quad \Delta\varphi_{PP} = \frac{n'}{n}2\pi =: \frac{2\pi}{q}, \quad (2.78)$$

onde  $q$  é um número racional positivo. Em todas as demonstrações do Teorema de Bertrand, a condição anterior (ou alguma outra equivalente a ela) é tomada como ponto de partida.

Consideremos, agora, uma órbita muito próxima de uma órbita circular. Suponhamos, então, que a energia mecânica da partícula seja ligeiramente superior ao valor da energia potencial efetiva em um mínimo local, ou seja,  $E = E_0 + \Delta E$ , onde  $E_0 = U_{ef}(r_0)$ , sendo  $r_0$  um mínimo de  $U_{ef}$ . Expandindo  $W(u)$  em torno de  $u = u_0 := 1/r_0$  e mantendo termos somente até a ordem quadrática em  $u - u_0$ , obtemos

$$E - W(u) = E_0 + \Delta E - W(u_0) - W'(u_0)(u - u_0) - \frac{1}{2}W''(u_0)(u - u_0)^2. \quad (2.79)$$

A partir da definição de  $W$ , dada pela equação (2.77), pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} W'(u_0) &= \left[ \frac{\ell^2 u}{m} - \frac{1}{u^2} U' \left( \frac{1}{u} \right) \right]_{u=1/r_0} \\ &= \frac{1}{r_0} \left[ \frac{\ell^2}{m} - r_0^3 U'(r_0) \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.80)$$

resultado que substituído na equação (2.79) nos permite escrever, nessa ordem,

$$E - W(u) = \Delta E - \frac{1}{2}W''(u_0)(u - u_0)^2. \quad (2.81)$$

O valor de  $W''(u_0)$  também pode ser facilmente obtido de (2.77) e é dado por

$$\begin{aligned} W''(u_0) &= \left[ \frac{\ell^2}{m} + \frac{2}{u^3} U' \left( \frac{1}{u} \right) + \frac{1}{u^4} U'' \left( \frac{1}{u} \right) \right]_{u=1/r_0} \\ &= 3r_0^3 U'(r_0) + r_0^4 U''(r_0) \\ &= r_0^4 U''_{ef}(r_0), \end{aligned} \quad (2.82)$$

onde, na penúltima passagem, utilizamos a relação da órbita circular,  $\ell^2/m = r_0^3 U'(r_0)$ , e na última passagem, a equação (2.27). Substituindo a equação (2.81) na expressão de  $\Delta\varphi_{PP}$  escrita em (2.76), obtemos

$$\Delta\varphi_{PP} = 2\ell \int_{u_{min}}^{u_{max}} \frac{du}{\sqrt{2m\Delta E - mW''(u_0)(u - u_0)^2}}, \quad (2.83)$$



Definindo o parâmetro  $a^2 = 2\Delta E/W''(u_0)$ , fazendo a transformação de variável  $u = u_0 + a \sin\theta$  e utilizando a equação (2.82), reescrevemos a expressão anterior na forma

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi_{PP} &= \frac{2\ell}{\sqrt{mW''(u_0)}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a \cos\theta d\theta}{\sqrt{a^2(1 - \sin^2\theta)}} \\
&= \frac{2\pi\ell}{r_0^2 \sqrt{mU''_{ef}(r_0)}} \\
&= 2\pi \sqrt{\frac{U'(r_0)}{3U'(r_0) + r_0U''(r_0)}}, \tag{2.84}
\end{aligned}$$

onde, na última passagem, também utilizamos a equação (2.27).

Imagine, agora, que variemos continuamente o módulo do momento angular  $\ell$ . Como  $\ell$  aparece explicitamente na expressão de  $U_{ef}(r)$  (no termo centrífugo), o poço de potencial irá se deslocar e, conseqüentemente, o valor de  $r_0$  irá variar continuamente. No entanto, para que a órbita seja fechada para quaisquer condições iniciais (na aproximação de órbitas próximas das circulares) a condição de fechamento escrita em (2.78) deve continuar sendo satisfeita. Isso não nos deixa outra escolha a não ser concluir que  $\Delta\varphi_{PP}$  dada pela equação anterior deve ser uma função constante, já que  $\Delta\varphi_{PP}$  não pode variar continuamente e, ao mesmo tempo, ser um múltiplo racional de  $2\pi$ . Podemos afirmar, então, que os potenciais para os quais todas as órbitas limitadas próximas de órbitas circulares são fechadas devem satisfazer à equação:

$$\frac{U'(r_0)}{3U'(r_0) + r_0U''(r_0)} = \frac{1}{\alpha}, \tag{2.85}$$

onde  $\alpha$  é uma constante positiva independente de  $r_0$ . Tendo em mente a última equação e comparando a condição de fechamento (2.78) com a equação (2.84),  $1/\sqrt{\alpha}$  deve ser um número racional positivo, ou seja,  $\alpha$  é o quadrado de um número racional ( $\alpha = q^2$ ). Como na equação anterior  $r_0$  é arbitrário, ela é, de fato, uma equação diferencial para  $U$ :

$$rU''(r) + 3U'(r) = \alpha U'(r). \tag{2.86}$$

Em princípio, as soluções possíveis para a equação anterior são as seguintes:

(i) para  $\alpha \neq 2$ , temos

$$U(r) = \kappa r^\beta \quad (2.87)$$

onde  $\beta = \alpha - 2 > -2$ ,  $\beta \neq 0$  e  $\kappa$  é uma constante arbitrária não-nula;

(ii) para  $\alpha = 2$ , temos

$$U(r) = \kappa \log(r/b) \quad (2.88)$$

onde  $\kappa$  é uma constante arbitrária não-nula e  $b$  é uma constante arbitrária com dimensão de comprimento. No entanto, como devemos ter  $\alpha = q^2$ , onde  $q$  é um número racional não-nulo, o último caso fica descartado, pois a equação anterior quando substituída em (2.86) nos fornece  $1/\alpha = 1/\sqrt{2}$  e  $\sqrt{2}$  não é um número racional. Portanto, as energias potenciais admissíveis são apenas as seguintes:

$$U(r) = \kappa r^\beta = \kappa r^{q^2-2}; \quad q \in Q^*, \quad (2.89)$$

onde, dependendo do valor de  $\beta$ , a constante  $\kappa$  deve ser positiva ou negativa. Com efeito, como essas energias potenciais devem dar origem a forças atrativas (pois se não for esse o caso, nem sequer órbitas circulares elas admitirão), temos  $\kappa > 0$  para  $\beta > 0$  e  $\kappa < 0$  para  $-2 < \beta < 0$ . Isso dá origem a duas famílias de energias potenciais com características distintas: na primeira, caracterizada por  $\beta > 0$  e  $\kappa < 0$ , todas as órbitas são limitadas. A energia mecânica é sempre positiva e pode, em princípio, assumir valores indefinidamente grandes. Na segunda família, caracterizada por  $-2 < \beta < 0$ , nem todas as órbitas possíveis são limitadas. Para  $E \geq 0$  as órbitas são ilimitadas.

Para as energias potenciais admissíveis escritas anteriormente, usando as equações (2.84) e (2.85) e lembrando que  $\sqrt{\alpha}$  deve ser um número racional positivo  $q$ , concluímos que o ângulo varrido pelo raio vetor da partícula entre dois apocentros consecutivos é dado por

$$\Delta\varphi_{PP} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta+2}} = \frac{2\pi}{q}. \quad (2.90)$$

Para continuarmos a eliminar energias potenciais que não satisfazem aos requisitos necessários para o fechamento de órbitas, a nossa estratégia será a seguinte: voltaremos à expressão genérica para  $\Delta\varphi_{PP}$ , equação (2.76), e nela substituiremos as energias potenciais admissíveis, isto é, as leis de potência descritas anteriormente. Mesmo com essa simplificação, não sabemos resolver essa integral para qualquer valor admissível de  $\beta$ . No entanto, sabemos que  $\Delta\varphi_{PP}$  é uma função constante e que seu valor para um dado  $\beta$  não varia com a energia mecânica da partícula. Desse modo, podemos tomar algum limite no valor de  $E$  que simplifique o cálculo da integral em (2.76). Não é difícil perceber que tais limites são  $E \rightarrow \infty$  para a primeira família e  $E \rightarrow 0$  para a segunda. Com tais simplificações seremos capazes de calcular  $\Delta\varphi_{PP}$  e, de posse desse resultado, verificar que valores de  $\beta = q^2 - 2$  são admissíveis dentro de cada família.

**(a) Primeira família:**  $\kappa > 0$  e  $\beta > 0$

Nesse caso, no limite em que  $E \rightarrow \infty$  (com  $\ell$  fixo) temos  $r_{min} \rightarrow 0$  e  $r_{max} \rightarrow \infty$ , de modo que  $u_{min} \rightarrow 0$  e  $u_{max} \rightarrow \infty$ . Fazendo a mudança de variável  $u =: yu_{max}$ , a expressão (2.76) para  $\Delta\varphi_{PP}$  toma a forma

$$\Delta\varphi_{PP} = \frac{2\ell}{\sqrt{2m}} \int_{y_{min}}^1 \frac{dy}{\sqrt{\chi(1) - \chi(y)}}, \quad (2.91)$$

onde definimos

$$\chi(y) := y^2 \left[ \frac{\ell^2}{2m} + \frac{k}{(y u_{max})^{\beta+2}} \right]. \quad (2.92)$$

Fazendo  $E \rightarrow \infty$  e lembrando que, nesse limite,  $u_{max} \rightarrow \infty$ , (2.91) se reduz a

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{PP} &= \frac{2\ell}{\sqrt{2m}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{\ell^2/2m - \ell^2 y^2/2m}} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \\ &= \pi. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Comparando o resultado anterior com a equação (2.90), temos

$$\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta+2}} \implies \sqrt{\beta+2} = 2 \implies \beta = 2, . \quad (2.94)$$

Concluimos então que, dentro dessa família, só há um valor permitido para  $\beta$ , a saber,  $\beta = 2$  (ou  $q^2 = \beta + 2$ , isto é,  $q = 2$ ), que ainda pode satisfazer a condição desejada de que toda órbita limitada seja fechada <sup>10</sup>. Esse caso corresponde ao oscilador harmônico isotrópico. Como conhecemos todas as soluções possíveis para esse potencial, e todas elas fornecem órbitas fechadas, não precisamos calcular  $\Delta\varphi_{PP}$  para outros valores de  $E$ .

**(b) Segunda família:**  $\kappa < 0$  e  $-2 < \beta < 0$

No caso em que  $k$  e  $\beta$  são negativos, é conveniente escrever  $k = -\sigma$  e  $\beta = -\lambda$ , com  $\sigma > 0$  e  $0 < \lambda < 2$ . No limite em que  $E \rightarrow 0$  os valores extremos de  $u$  são dados pelas raízes da equação

$$0 = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{\sigma}{r^\lambda} = \frac{\ell^2 u^2}{2m} - \sigma u^\lambda, \quad (2.95)$$

ou seja,

$$u_{min} = 0 \quad \text{e} \quad u_{max} = \left( \frac{2m\sigma}{\ell^2} \right)^{1/(2-\lambda)}. \quad (2.96)$$

Utilizando a mesma transformação de variável anterior, a saber,  $u =: y u_{max}$  e tomando o limite  $E \rightarrow 0$  na equação (2.76), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{PP} &= \frac{2\ell}{\sqrt{2m}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{-\ell^2 y^2/2m + \sigma y^\lambda/u_{max}^{2-\lambda}}} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^\lambda - y^2}} \\ &= \frac{4}{2-\lambda} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2\pi}{2+\beta}, \end{aligned} \quad (2.97)$$

---

<sup>10</sup>Note que nossa análise não foi feita para qualquer valor de  $E$  mas, apenas, no limite em que  $E \rightarrow \infty$ . E só isso já nos deixou com apenas uma possibilidade de valor para  $\beta$ .

onde na penúltima passagem fizemos a transformação de variável  $x = y^{(2-\lambda)/2}$  e, usando o fato de que  $\lambda = -\beta$ , escrevemos o resultado final em termos de  $\beta$ . Analogamente ao que fizemos no caso da primeira família, devemos comparar esse resultado com a equação (2.90). Isso nos leva a

$$\frac{2\pi}{\beta + 2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta + 2}} \implies \beta = -1. \quad (2.98)$$

Também dentro dessa família, vemos que há somente um valor permitido para  $\beta$  que ainda pode satisfazer à condição desejada (de que toda órbita limitada seja fechada), que corresponde ao problema de Kepler. Analogamente ao caso anterior, uma vez que conhecemos todas as soluções para o problema de Kepler e sabemos que, nesse problema, todas as órbitas limitadas são fechadas, fica então demonstrado o Teorema de Bertrand. Outras demonstrações podem ser encontradas nas referências [26–32].

Finalizamos esta seção interpretando os valores encontrados para  $\Delta\varphi$  nos problemas do oscilador harmônico e de Kepler. No primeiro caso, o fato de  $\Delta\varphi = \pi$  ( $q = 2$ ) significa que, sob a ação desse potencial, a partícula executa duas oscilações radiais enquanto dá uma volta em torno do centro de força. Já no problema de Kepler, temos  $\Delta\varphi = 2\pi$  ( $q = 1$ ), o que significa que, sob a ação desse potencial, a partícula executa apenas uma oscilação radial enquanto dá uma volta em torno do centro de força (estamos considerando aqui órbitas elípticas, já que no caso de órbitas circulares não há oscilações radiais). O leitor poderia achar estranha essa diferença, uma vez que em ambos os casos, as órbitas limitadas são elipses (ou círculos). No entanto, no caso do oscilador, é o centro geométrico da elipse que coincide com o centro de força (tomado na origem), enquanto no problema de Kepler, um dos focos da elipse é que coincide com o centro de força.

## 2.8 O vetor de Laplace-Runge-Lenz

Pode-se mostrar que, em um sistema de  $n$  graus de liberdade <sup>11</sup>, há  $2n$  constantes de movimento independentes. Por constante de movimento entendemos qualquer função das posições e velocidades das partículas do sistema e, eventualmente, do tempo, que assuma um mesmo valor ao longo de um movimento possível do sistema. Para diferentes movimentos possíveis do sistema essa constante tem, em geral, valores diferentes, mas nada impede que em dois ou mais movimentos diferentes o valor da constante seja o mesmo. Pode-se mostrar que, pelo menos uma das constantes de movimento (dentro o número total de constantes de movimento independentes entre si) deve depender explicitamente do tempo.

Como descobrir todas as constantes de movimento independentes entre si em um dado problema? Responder a essa pergunta é, na prática, resolver o problema. Cada vez que encontramos uma nova constante de movimento independente das previamente obtidas estamos dando um passo no sentido de resolver o problema em questão <sup>12</sup>.

As simetrias exibidas em um dado sistema físico nos sugerem que quantidades são conservadas naquele problema. De fato, simetrias e constantes de movimento estão estreitamente relacionadas. Há, inclusive, um poderoso teorema, demonstrado no início do século passado pela matemática E. Noether, que relaciona diretamente simetrias contínuas e constantes de movimento. Esse teorema nos garante que, para cada simetria contínua de um sistema está associada uma constante de movimento. Além disso, conhecida a transformação de simetria, o teorema fornece uma expressão para a quantidade conservada. Trata-se de um teorema de grande utilidade não apenas em Mecânica Clássica, mas em muitas outras teorias, incluindo teorias modernas como por exemplo as teorias clássicas e quânticas de campo. Apenas como um exemplo simples, e que pode ser útil em nossa discussão, vale co-

---

<sup>11</sup>Para os sistemas que nos interessam, número de graus de liberdade é o número  $n$  de coordenadas reais necessário e suficiente para estabelecermos uma correspondência biunívoca entre as configurações do sistema e as  $n$ -uplas formadas pelas coordenadas.

<sup>12</sup>Na verdade, pode-se mostrar que se encontrarmos  $n$  constantes de movimento independentes, poderemos reduzir o problema a simples quadraturas. Nesse caso, o problema é dito integrável.

mentar que a simetria esférica de um sistema mecânico está relacionada com a conservação do momento angular do sistema. Com efeito, devido à simetria esférica em torno do centro de força, o momento angular de uma partícula sob a ação de uma força central, calculado tomando como ponto base o centro de força, é uma constante de movimento, como vimos no início deste capítulo.

As simetrias de um sistema também estão estreitamente relacionadas às chamadas degenerescências presentes no sistema. Dizemos que um problema em mecânica clássica possui degenerescência quando duas ou mais órbitas diferentes possuem a mesma energia mecânica. Por exemplo, em um problema de força central, duas órbitas congruentes, mas giradas entre si em torno do centro de força, são ditas degeneradas pois, embora diferentes, possuem a mesma energia mecânica. Assim, no problema de Kepler, duas órbitas elípticas idênticas em tudo, exceto pelo fato de que estão em planos diferentes, têm a mesma energia mecânica (têm, também, o mesmo módulo do momento angular, mas não mesmo momento angular, pois seus momentos angulares possuem direções diferentes).

No entanto, há uma degenerescência adicional, inesperada, no problema de Kepler. Não é difícil mostrar, nesse problema, que a energia mecânica da partícula em uma órbita elíptica é dada por  $E = -k/(2a)$ , onde  $a$  é o semi-eixo maior da elipse (um resultado análogo vale também para as órbitas ilimitadas). Consequentemente, mesmo órbitas não-congruentes, mas que tenham o mesmo “tamanho”, ou seja, o mesmo semi-eixo maior, terão necessariamente a mesma energia (e também o mesmo período, devido à Terceira Lei de Kepler). A Figura 2.8 mostra algumas dessas órbitas degeneradas inesperadas.

Essa degenerescência adicional parece estar relacionada ao fato de a órbita ser fechada (no caso das órbitas ilimitadas parabólicas e hiperbólicas, isso está ligado ao fato de existir um eixo de simetria para a trajetória da partícula). Esse fato sugere que busquemos uma outra constante de movimento que, de alguma forma, esteja relacionada com o fato de a orientação da órbita não sofrer precessão (lembre-se de que a energia mecânica e o momento angular já formam um conjunto de 4 constantes de movimento independentes entre si). Além disso, esperamos que tal constante seja uma função simples da posição

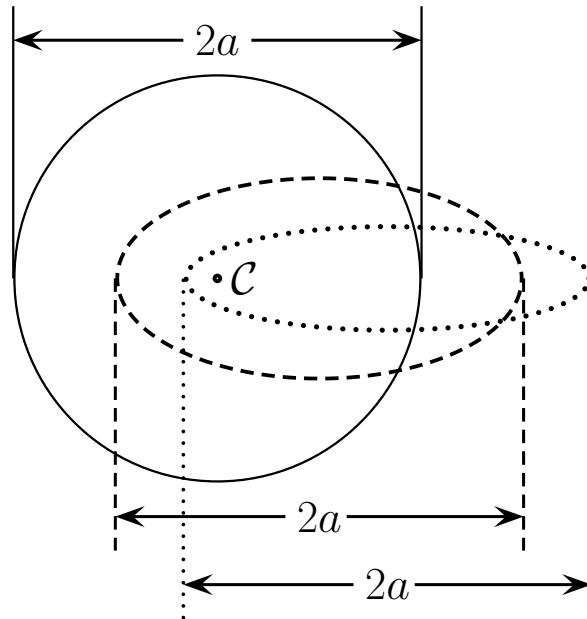


Figura 2.8: Órbitas não-congruentes degeneradas, uma circular e duas elípticas. O centro do círculo e um foco de cada elipse estão no centro de força  $\mathcal{C}$ . Note que todas elas têm o mesmo semi-eixo maior  $a$ .

e da velocidade da partícula. Como veremos, essa constante de movimento existe, é o chamado vetor de Laplace-Runge-Lenz, definido por

$$\mathbf{A} := \mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - mk\hat{\mathbf{r}}. \quad (2.99)$$

Por ser um vetor, temos aqui três constantes de movimento independentes entre si, mas não independentes da energia e do momento angular, como ficará evidente mais adiante. Estudaremos, agora, algumas das propriedades desse vetor e veremos como elas serão úteis tanto no problema de Kepler usual, quanto no problema de Kepler perturbado. Em uma primeira aproximação, veremos que, em geral, as órbitas no problema de Kepler perturbado são praticamente iguais às do problema não-perturbado, mas girando com uma certa velocidade de precessão. Por conveniência, dividimos esta seção em algumas subseções. Na primeira delas, apresentamos um breve histórico do vetor de Laplace-Runge-Lenz, tentando mostrar como o nome que lhe é



atribuído é equivocado. Na segunda parte, mostramos explicitamente que esse vetor é uma constante de movimento no problema de Kepler e interpretamos fisicamente tanto seu módulo quanto a sua direção. Por fim, na última seção, consideramos pequenas perturbações ao problema de Kepler e mostramos como o vetor de Laplace-Runge-Lenz, que daqui para a frente será denotado por LRL, nos permite introduzir um método de cálculo da velocidade de precessão de uma órbita extremamente eficiente.

### 2.8.1 Um breve histórico

Curiosamente, nem C. Runge e tampouco W. Lenz estão entre os primeiros a utilizar o vetor  $\mathbf{A}$  definido pela última equação. Como veremos, nem mesmo P.S. de Laplace, que discutiu em detalhe as propriedades desse vetor já em 1799, em seu *Traité de mécanique celeste*, foi o primeiro a descobrir que tal vetor é, de fato, uma constante de movimento no problema de Kepler.

Quando, em 1924, Lenz utilizou o vetor  $\mathbf{A}$  definido em (2.99) para calcular níveis de energia no problema de Kepler perturbado dentro do contexto da mecânica quântica velha, ele se referiu a esse vetor como pouco conhecido e mencionou um livro escrito por Runge sobre análise vetorial publicado em 1919. Em seu livro, Runge mostrava explicitamente que se a força central que agisse sobre uma partícula variasse com o inverso do quadrado da distância da partícula ao centro de força o vetor  $\mathbf{A}$  seria uma constante de movimento.

Em 1926, W. Pauli mostrou como o vetor  $\mathbf{A}$  pode ser utilizado no cálculo do espectro do átomo de hidrogênio por meio de um método baseado no formalismo matricial da mecânica quântica. Em seu artigo, Pauli comentou que esse vetor já fora utilizado por Lenz. Com isso, praticamente em todos os trabalhos subsequentes envolvendo o vetor  $\mathbf{A}$ , ele foi chamado vetor de Runge-Lenz. Ultimamente, e com muita justiça, o nome de Laplace tem sido agregado ao nome desse vetor, daí chamá-lo vetor de Laplace-Runge-Lenz. De fato, Laplace apresentou uma discussão relativamente detalhada sobre o assunto, deixando claro que das sete constantes de movimento dadas pela energia mecânica, pelas três componentes do momento angular e pelas três componentes de  $\mathbf{A}$ , apenas cinco delas são independentes entre si (é oportuno

lembrar nesse momento que em um problema de seis graus de liberdade há, no máximo, cinco constantes de movimento independentes entre si e que não dependem explicitamente do tempo). No entanto, Laplace deixou claro que, com essas cinco constantes de movimento, é possível obter a equação da órbita, como podemos apreciar lendo suas próprias palavras:

*Embora essas integrais sejam insuficientes para determinar  $x$ ,  $y$  e  $z$  como funções do tempo, elas determinam a natureza da órbita.*

W.R. Hamilton, dois anos depois de ter inventado os chamados *quaternions* em 1843, parece ter redescoberto independentemente o vetor  $\mathbf{A}$ . Com efeito, em 1845, Hamilton enviou para a Real Academia da Irlanda um artigo intitulado “*Applications of Quaternions to Some Dynamical Questions*”, no qual mostrou a existência de uma nova constante de movimento no problema de Kepler, que passou a chamar vetor de excentricidade. Na verdade, depois de Laplace e antes de Runge e Lenz, muitos outros utilizaram de uma forma ou de outra o vetor  $\mathbf{A}$  como, por exemplo, J.C. Maxwell, W. Thomson e P.G. Tait, E.J. Routh e J.W. Gibbs.

Vejamos, então, quais foram os primeiros a discutirem a existência do vetor  $\mathbf{A}$  no problema de Kepler. Foi Jakob Hermann, um discípulo dos Bernoullis, que, em 1710, publicou um artigo numa revista italiana pouco conhecida (*Giornale de Letterati D'Italia* (1710), Vol.2, pp. 447-467), no qual utilizou as novas técnicas de cálculo introduzidas por Leibniz para obter a equação da órbita no problema de Kepler. Em seu cálculo, a magnitude do vetor  $\mathbf{A}$  surge como uma constante de integração. Hermann foi capaz, ainda, de reconhecer a relação dessa constante com a excentricidade da órbita. No mesmo ano, Hermann enviou uma carta a Jean Bernoulli que imediatamente generalizou o seu resultado permitindo orientações arbitrárias para a órbita. Os resultados de Bernoulli para o vetor  $\mathbf{A}$  coincidem com os que Laplace obteve nove décadas mais tarde. Tanto a carta de Hermann quanto a resposta de Bernoulli foram publicadas em *Histoires et Memoires de l'Academie Royale des Sciences* [Paris (1710), 1712], nas páginas 102-103 e 519-523, respectivamente. Como vemos, a prioridade sobre a descoberta da constante de movimento  $\mathbf{A}$  no problema de Kepler pertence a Jakob Hermann

e Jean Bernoulli. Devido à longa associação entre esse vetor e o nome de Laplace, talvez fosse apropriado designá-lo, como sugere H. Goldstein, vetor de Hermann-Bernoulli-Laplace. Manteremos, porém, o nome vetor de Laplace-Runge-Lenz para evitar qualquer confusão com a literatura.

## 2.8.2 Interpretação do vetor de Laplace-Runge-Lenz

Antes de tudo, demonstraremos que o vetor de Laplace-Runge-Lenz é, de fato, uma constante de movimento o problema de Kepler. Com esse objetivo, calcularemos explicitamente a sua derivada temporal e mostraremos que ela é nula se supusermos que a partícula esteja sob a ação única e exclusivamente da força gravitacional, ou seja, se utilizarmos a equação de movimento

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \quad (2.100)$$

onde  $k$  é uma constante positiva ( $k = GMm$ ). Temos, então,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \boldsymbol{\ell} + \mathbf{p} \times \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} - mk \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \\ &= -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \times (mr^2\dot{\varphi})\hat{\mathbf{z}} - mk\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.101)$$

onde usamos o fato de que o momento angular é uma constante de movimento (toda força central tem torque nulo relativo ao centro de força) e também a relação  $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}} = -\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ . Ingenuamente, poderíamos pensar que a constância de  $\mathbf{A}$  nos traria três novas constantes de movimento, independentes das que já conhecíamos, a saber, a energia mecânica  $E$  e o momento angular  $\boldsymbol{\ell}$  relativo ao centro de força. No entanto, isso não é verdade. Em primeiro lugar, o número total de constantes de movimento independentes no problema de Kepler é seis, uma vez que se trata de uma partícula movendo-se em três dimensões. Além disso, veremos que há duas relações entre  $\mathbf{A}$ ,  $E$  e  $\boldsymbol{\ell}$ , fazendo com que ao agregarmos o vetor  $\mathbf{A}$  em nossa lista de constantes de movimento, tenhamos apenas cinco constantes independentes.

Uma relação bem simples entre  $\mathbf{A}$  e  $\boldsymbol{\ell}$  decorre do fato de que o vetor  $\mathbf{A}$  pertence ao plano da órbita, como pode ser verificado mostrando que é nulo seu produto escalar com  $\boldsymbol{\ell}$ , ou seja,

$$\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{\ell} \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - mk\hat{\mathbf{r}}) = 0, \quad (2.102)$$

Uma segunda relação entre as constantes  $\mathbf{A}$ ,  $E$  e  $\boldsymbol{\ell}$  pode ser obtida calculando-se o módulo ao quadrado de  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - mk\hat{\mathbf{r}}) \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - mk\hat{\mathbf{r}}) \\ &= (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell})^2 + m^2k^2 - 2mk(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ &= p^2\ell^2 + m^2k^2 - \frac{2mk}{r} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell}). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Usando a relação  $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\ell} = \ell^2$  e lembrando que a partir da conservação da energia  $p^2$  pode ser escrito como  $p^2 = 2mE + 2mk/r$ , a última equação toma a forma

$$A^2 = \left(2mE + \frac{2mk}{r}\right) \ell^2 + m^2k^2 - \frac{2mk}{r} \ell^2, \quad (2.104)$$

o que nos permite escrever

$$\frac{A^2}{m^2k^2} = 1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}. \quad (2.105)$$

Utilizando a relação entre a excentricidade da órbita, o módulo do momento angular e a energia mecânica, dada pela equação (2.44), reescrevemos a equação anterior como

$$|\mathbf{A}| = mk\varepsilon, \quad (2.106)$$

ou seja, o módulo do vetor de LRL mede, essencialmente, a excentricidade da órbita no problema de Kepler.

As equações (2.102) e (2.105) nos fornecem duas relações entre as sete quantidades conservadas,  $E$ ,  $\ell_x$ ,  $\ell_y$ ,  $\ell_z$ ,  $A_x$ ,  $A_y$  e  $A_z$ , fazendo com que so-

mente cinco delas sejam independentes entre si. No entanto, como o próprio Laplace deixou claro em seu tratado de 1799, com cinco constantes de movimento independentes já podemos obter diretamente a equação da órbita, como veremos a seguir. Tomando, então, o produto escalar de  $\mathbf{A}$  com o vetor-posição da partícula, obtemos

$$r|\mathbf{A}| \cos(\varphi - \varphi_0) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} - mk\hat{\mathbf{r}}) = \ell^2 - mkr, \quad (2.107)$$

onde  $\varphi_0$  é o ângulo que o vetor  $\mathbf{A}$  faz com o eixo polar e usamos, novamente, o fato de que  $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell}) = \ell^2$ . Rearrmando os termos da equação anterior, obtemos

$$r = \frac{\ell^2/mk}{1 + \frac{|\mathbf{A}|}{mk} \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (2.108)$$

Caso ainda não soubéssemos a interpretação do módulo de  $\mathbf{A}$ , a última expressão deixaria evidente que  $|\mathbf{A}|/mk$  nada mais é do que a excentricidade  $\varepsilon$  da cônica. Devido à paridade da função cosseno, vemos que  $\mathbf{A}$  tem a direção do eixo de simetria da órbita (seja ela limitada ou ilimitada), uma vez que para  $\varphi = \varphi_0 \pm \alpha$  temos o mesmo valor para  $r$ . Por esse motivo, é comum escolhermos o eixo polar na direção do vetor de LRL, ou seja, é usual tomarmos  $\varphi_0 = 0$  ou  $\pi$ . Tomando  $\varphi_0 = 0$ , reescrevemos a equação anterior, simplesmente, como

$$r = \frac{\ell^2/mk}{1 + \varepsilon \cos\varphi}. \quad (2.109)$$

ou, ainda, na forma

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos\varphi}, \quad (2.110)$$

onde  $a$  é o semi-eixo maior da elipse.

### 2.8.3 O problema de Kepler perturbado e o cálculo da velocidade de precessão

Uma vez que só há duas forças centrais para as quais todas as órbitas limitadas são fechadas, e tais forças são bem diferentes entre si, ao considerarmos modificações num desses dois casos as órbitas resultantes não mais serão

fechadas. No caso de adicionarmos pequenas perturbações a uma dessas forças, as novas órbitas serão parecidas com as antigas órbitas elípticas e, em geral, sofrerão uma precessão. Nesses casos, é como se a partícula descrevesse praticamente a órbita elíptica antiga, mas de tal forma que, com o passar do tempo, o semi-eixo de sua órbita elíptica girasse lentamente. A velocidade angular de giro desse semi-eixo é denominada velocidade de precessão da órbita. Nosso objetivo, nesta seção, é tratar apenas o problema de Kepler perturbado (mas o mesmo tipo de estudo pode ser feito também no caso do oscilador harmônico isotrópico perturbado) e mostrar como podemos utilizar o vetor de LRL no cálculo da velocidade de precessão da órbita perturbada.

Consideremos uma partícula de massa  $m$  sujeita à força resultante

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \delta\mathbf{f}, \quad (2.111)$$

onde  $k$  é uma constante positiva e  $\delta\mathbf{f}$  é uma perturbação que pode ou não ter o caráter central. Suponha que o módulo de  $\delta\mathbf{f}$  seja bem menor do que o módulo da força de Kepler na região onde ocorre o movimento. Se designarmos por  $r_0$  o raio da órbita circular estável associada ao mínimo local de  $U_{ef}(r)$  na ausência de  $\delta\mathbf{f}$ , essa condição é satisfeita se  $|\delta\mathbf{f}| \ll k/r_0^2$ .

Calculando a taxa de variação temporal  $d\mathbf{A}/dt$  no problema perturbado e utilizando as equações

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{k}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \delta\mathbf{f}, \\ \frac{d\boldsymbol{\ell}}{dt} &= \mathbf{r} \times \delta\mathbf{f}, \end{aligned} \quad (2.112)$$

obtemos

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \delta\mathbf{f} \times \boldsymbol{\ell} + \mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \delta\mathbf{f}), \quad (2.113)$$

Note que, na obtenção da equação anterior, usamos a relação

$$-\frac{k}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\ell} - mk \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \mathbf{0}, \quad (2.114)$$

que já havia sido utilizada ao estabelecermos a equação (2.101). O método a

ser apresentado se baseia no fato de que o vetor de LRL aponta na direção do semi-eixo maior da órbita elíptica (do modo como definimos, com o sentido do foco para o perihélio). Determinar a taxa de variação temporal com que a órbita gira é a mesma coisa que determinar a taxa de variação temporal com que gira o vetor de LRL. Calcularemos valores médios no tempo, onde a média temporal será calculada em um período da órbita não-perturbada. Em uma primeira aproximação, como de costume em teorias de perturbação, nos cálculos dos valores médios utilizaremos as relações válidas na órbita não-perturbada. Tomando, então, a média temporal da equação (2.113), escrevemos

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle \delta\mathbf{f} \times \boldsymbol{\ell} \rangle + \langle \mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \delta\mathbf{f}) \rangle, \quad (2.115)$$

onde, por definição, a média temporal de uma função  $f$  no intervalo  $[t, t + \Delta t]$  é dada por

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(t') dt'. \quad (2.116)$$

Caso a função seja periódica, de período  $\tau$ , a média temporal em um período é independente do tempo, de modo que a equação anterior pode ser escrita na forma

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} f(t') dt' = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t') dt'. \quad (2.117)$$

Se ao calcularmos as médias temporais presentes no lado direito da equação (2.115) pudermos escrever

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}, \quad (2.118)$$

poderemos identificar, imediatamente, a velocidade média de precessão da órbita como  $\boldsymbol{\Omega}$ . No entanto, vale adiantar que algumas perturbações não causam precessão da órbita, como ficará evidente em um de nossos exemplos. Nesse caso,  $\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle$  terá a própria direção de  $\mathbf{A}$ . Vejamos, então, em dois exemplos, como calcular a média temporal  $\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle$  e como interpretar os resultados, em particular, extraindo a velocidade de precessão da órbita quando for o caso. Antes de passarmos aos exemplos, faremos um comentário técnico a respeito de como calcular as médias temporais necessárias sem utilizar a solução temporal do problema de Kepler que, como vimos, é bem complicada.

Como já mencionamos, em primeira aproximação, utilizaremos a relação entre  $r$  e  $\varphi$  dada pela equação da órbita não-perturbada. Conseqüentemente, nos problemas que discutiremos a seguir, estaremos interessados em calcular médias de funções periódicas do tipo  $f(r(t), \varphi(t))$ . Nesse caso, a equação (2.116) se reduz a

$$\langle f(r(t), \varphi(t)) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(r(t'), \varphi(t')) dt'. \quad (2.119)$$

Como não temos as dependências temporais de  $r$  e  $\varphi$ , mas apenas a equação da órbita  $r(\varphi)$ , é conveniente transformarmos a integração no tempo em uma integração no ângulo  $\varphi$ . Isso pode ser feito com o auxílio da relação  $\dot{\varphi} = \ell/mr^2$ , que nos leva ao resultado

$$\begin{aligned} \langle f(r(t), \varphi(t)) \rangle &= \frac{1}{\tau} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} \\ &= \frac{m}{\ell\tau} \int_0^{2\pi} r^2(\varphi) f(r(\varphi), \varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (2.120)$$

A seguir, utilizaremos a equação (2.118) no problema de Kepler perturbado em duas situações interessantes e com características bem diferentes. Num primeiro exemplo, a perturbação será dada também por uma força central, enquanto no segundo exemplo, levaremos em consideração o efeito de forças dissipativas como a resistência do ar, de caráter evidentemente não-central.

### (a) Perturbação central proporcional a $1/r^4$

Consideremos o problema de Kepler perturbado no qual a  $\delta\mathbf{f}$  é dada por

$$\delta\mathbf{f} = -3\frac{\beta}{r^4} \hat{\mathbf{r}}; \quad \beta > 0, \quad (2.121)$$

onde, por hipótese,  $\beta \ll kr_0^2$ , sendo  $r_0$  o raio da órbita circular no problema de Kepler não-perturbado associado a um momento angular da partícula de módulo igual a  $\ell$ .

Essa pequena força pode representar, por exemplo, o efeito do achata-



mento da Terra nas órbitas de satélites terrestres no plano equatorial. A restrição de órbitas no plano equatorial se faz necessária pois o achatamento da Terra quebra a simetria esférica e dá origem a forças não-centrais (gera um termo de quadrupolo no potencial gravitacional). No entanto, como no plano equatorial o ângulo entre o raio vetor do satélite e o eixo da Terra permanece constante, a expressão anterior pode, de fato, representar a correção de quadrupolo ao potencial de Kepler. Pode-se mostrar, ainda, que tal perturbação também descreve a primeira correção proveniente da teoria da relatividade geral à teoria newtoniana da gravitação.

Como a perturbação em questão tem caráter central, temos  $\mathbf{r} \times \delta\mathbf{f} = \mathbf{0}$  e a equação (2.115) se reduz a

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle \delta\mathbf{f} \times \boldsymbol{\ell} \rangle = 3\beta\boldsymbol{\ell} \times \left\langle \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^4} \right\rangle = 3\beta \left\langle \frac{\cos\varphi}{r^4} \right\rangle \boldsymbol{\ell} \times \hat{\mathbf{x}}, \quad (2.122)$$

onde, devido à simetria da órbita não-perturbada em relação ao eixo polar, usamos a relação

$$\left\langle \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^4} \right\rangle = \left\langle \frac{\cos\varphi\hat{\mathbf{x}} + \sin\varphi\hat{\mathbf{y}}}{r^4} \right\rangle = \left\langle \frac{\cos\varphi}{r^4} \right\rangle \hat{\mathbf{x}}, \quad (2.123)$$

sendo  $\hat{\mathbf{x}}$  o vetor unitário que aponta na direção do eixo polar, ou seja, na direção e sentido do vetor de LRL. Utilizando a equação (2.120) e a equação polar da órbita não-perturbada dada por (2.109), obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\cos\varphi}{r^4} \right\rangle &= \frac{m}{\ell\tau} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r^2(\varphi)} d\varphi \\ &= \frac{m}{\ell\tau a^2(1-\varepsilon^2)^2} \int_0^{2\pi} \cos\varphi(1+\varepsilon\cos\varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{m}{\ell\tau a^2(1-\varepsilon^2)^2} \int_0^{2\pi} 2\varepsilon\cos^2\varphi d\varphi \\ &= \frac{(2\pi/\tau)m\varepsilon}{\ell a^2(1-\varepsilon^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Substituindo esse resultado na equação (2.122), definindo  $\omega := 2\pi/\tau$  e mul-

tiplicando em cima e em baixo por  $k$  o resultado assim encontrado, obtemos.

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \left\{ \frac{3\beta\omega}{ka^2(1-\varepsilon^2)^2} \frac{\boldsymbol{\ell}}{\ell} \right\} \times (mk\varepsilon) \hat{\mathbf{x}}. \quad (2.125)$$

Lembrando que  $\mathbf{A} = (mk\varepsilon) \hat{\mathbf{x}}$  e comparando as equações (2.118) e (2.125), identificamos a velocidade de precessão média do problema em consideração como

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{3\beta\omega}{ka^2(1-\varepsilon^2)^2} \frac{\boldsymbol{\ell}}{\ell}. \quad (2.126)$$

Observe que se  $\beta > 0$ , isto é, se a perturbação for atrativa,  $\boldsymbol{\Omega}$  e  $\boldsymbol{\ell}$  têm a mesma direção e o mesmo sentido. Nesse caso, o ângulo varrido pela partícula em torno do centro de força entre dois pericentros consecutivos é maior que  $2\pi$ . Com isso, o intervalo de tempo entre a ocorrência de dois pericentros consecutivos é **maior** que na órbita não-perturbada. Temporalmente, houve um **atraso** na ocorrência do pericentro. No entanto, para  $\beta > 0$ , o vetor de LRL gira no sentido de giro da órbita, de modo que o pericentro na órbita perturbada avançou no sentido da órbita, o que leva à nomenclatura “**avanço do pericentro**”. Caso  $\beta < 0$  (perturbação repulsiva), ocorre exatamente o oposto, a saber, temporalmente o pericentro ocorre **antes** que na órbita não-perturbada e, portanto, há um “**retrocesso**” do pericentro (no sentido do movimento orbital da partícula).

### (b) Força perturbadora dissipativa: resistência do ar

Consideremos o movimento de um satélite artificial em torno da Terra, pensada como uma esfera uniforme de massa. Suponhamos que, devido à resistência imposta pela atmosfera, a perturbação na força de Kepler seja dada por

$$\delta\mathbf{f} = -\beta v^{n-1} \mathbf{v}, \beta > 0, \quad (2.127)$$

onde  $v = |\mathbf{v}|$ . Substituindo a última equação em (2.115), temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle &= \langle -\beta v^{n-1} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\ell} \rangle + \langle m\mathbf{v} \times [\mathbf{r} \times (-\beta v^{n-1} \mathbf{v})] \rangle \\ &= \langle -2\beta v^{n-1} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\ell} \rangle. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Da definição de vetor de LRL, podemos escrever

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\ell} = \frac{\mathbf{A}}{m} + k \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.129)$$

expressão que substituída na equação (2.128) nos fornece

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = -\frac{2\beta}{m} \langle v^{n-1} \rangle \mathbf{A} - 2\beta k \langle v^{n-1} \hat{\mathbf{r}} \rangle, \quad (2.130)$$

onde usamos o fato de que na órbita não-perturbada  $\mathbf{A}$  permanece constante. Novamente, devido à simetria da órbita não-perturbada em relação ao eixo polar, temos

$$\langle v^{n-1} \hat{\mathbf{r}} \rangle = \langle v^{n-1} \cos\varphi \rangle \hat{\mathbf{x}}. \quad (2.131)$$

Lembrando que  $\mathbf{A} = mk\varepsilon \hat{\mathbf{x}}$ , a equação (2.130) pode ser escrita na forma

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = -\lambda(\varepsilon, k, \beta) \mathbf{A}, \quad (2.132)$$

onde  $\lambda(\varepsilon, k, \beta)$  é uma constante positiva dada por

$$\lambda(\varepsilon, k, \beta) = \frac{2\beta}{m\varepsilon} \langle v^{n-1} (\varepsilon + \cos\varphi) \rangle. \quad (2.133)$$

Como  $\langle d\mathbf{A}/dt \rangle$  é proporcional a  $\mathbf{A}$ , concluímos que não há precessão, nesse caso. Ou seja, a resistência do ar não causa precessão nas órbitas dos satélites em torno da Terra. No entanto, o fato de  $\lambda$  ser positiva indica que o módulo de  $\mathbf{A}$  vai decrescendo à medida que o tempo passa, fazendo com que a excentricidade da órbita perturbada vá diminuindo (a órbita vai tendendo a ficar mais circular). Caso  $\lambda$  não dependesse de  $\varepsilon$ , a equação (2.132) poderia ser integrada facilmente e  $\mathbf{A}$  decresceria exponencialmente. No entanto,  $\lambda$  depende de  $\varepsilon$ , ou seja,  $\lambda$  depende de  $|\mathbf{A}|$  e a solução de (2.132) não é uma exponencial decrescente.

É interessante analisar o caso particular em que  $n = 1$ , isto é, no qual a resistência do ar é linear com a velocidade. Nesse caso, a equação (2.130) se

reduz a

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = -\frac{2\beta}{m}(\mathbf{A} + mk\langle \hat{\mathbf{r}} \rangle). \quad (2.134)$$

No entanto, pode-se mostrar que  $\langle \hat{\mathbf{r}} \rangle = \langle \cos\varphi \rangle \hat{\mathbf{x}} = -\varepsilon \hat{\mathbf{x}}$ , de modo que, nesse caso, temos

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = -\frac{2\beta}{m}(\mathbf{A} - mk\varepsilon \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}. \quad (2.135)$$

Conseqüentemente, para uma resistência do ar do tipo  $\delta\mathbf{f} = -\beta\mathbf{v}$ , o vetor de Laplace-Runge-Lenz  $\mathbf{A}$  é constante durante o movimento do satélite. Isso significa que, embora o tamanho de sua órbita vá diminuindo com o tempo (há dissipação de energia) a sua órbita nem precessa nem muda de excentricidade.

## 2.9 Comentários finais

A fim de facilitar a compreensão dos principais tópicos discutidos nesse capítulo, como por exemplo o Teorema de Bertrand e o cálculo da velocidade de precessão de órbitas no problema de Kepler perturbado, decidimos fazer uma revisão geral do movimento de uma partícula sob a ação de uma força resultante central. Além disso, como nosso objetivo principal era estudar o efeito de pequenas perturbações no problema de Kepler, demos particular ênfase a este problema.

Embora o Teorema de Bertrand seja pouco conhecido entre os alunos que estão iniciando seus estudos em mecânica clássica, trata-se de um teorema importante que contém um resultado profundo e abrangente sobre órbitas de partículas sob a ação de forças centrais. Ainda assim, há uma vasta literatura sobre o assunto, que pode ser encontrada em artigos publicados em periódicos de caráter pedagógico ou mesmo em livros mais especializados em mecânica clássica [24]- [32]. Esperamos ter escolhido, nesse capítulo, uma demonstração adequada a uma exposição didática.

Com o objetivo de calcular velocidades de precessão de órbitas no problema de Kepler perturbado, definimos o vetor de Laplace-Runge-Lenz, denotado por  $\mathbf{A}$  ao longo do texto, e mostramos, explicitamente, que se trata de

uma constante de movimento no problema de Kepler não-perturbado. Obtivemos a equação polar da órbita diretamente a partir da constância desse vetor e mostramos que o vetor  $\mathbf{A}$  aponta na direção do eixo de simetria da órbita, direção do semi-eixo maior da elipse no caso de órbitas limitadas (lembre-se de que, ao longo desse capítulo, consideramos  $\ell \neq 0$ , o que exclui órbitas retilíneas). Mostramos, ainda, que o módulo desse vetor é proporcional à excentricidade da órbita. Passamos, então, a discutir órbitas de Kepler perturbadas e, calculando a taxa de variação temporal do vetor  $\mathbf{A}$ , determinamos a velocidade de precessão da órbita em consideração, nos casos em que há precessão. Como ficou evidente em exemplo no qual estudamos o efeito da resistência do ar na órbita da partícula, nem sempre o vetor  $\mathbf{A}$  precessa. De fato, nesse exemplo,  $\langle d\mathbf{A}/dt \rangle$  aponta na própria direção de  $\mathbf{A}$ , mostrando que a excentricidade da órbita muda, mas sem haver precessão. Vale ressaltar que o método de cálculo baseado no giro do vetor de Laplace-Runge-Lenz se aplica com a mesma eficácia a órbitas com qualquer excentricidade, não apenas a órbitas próximas das circulares <sup>13</sup>.

Embora tenhamos aplicado o método do vetor de Laplace-Runge-Lenz em casos de órbitas limitadas do problema de Kepler perturbado, esse vetor também pode ser utilizado no estudo das órbitas ilimitadas do problema de Kepler. Em particular, pode-se obter a seção de choque de espalhamento associada a esse problema diretamente a partir da constância desse vetor. Até mesmo no problema de Kepler perturbado, no qual o vetor de Laplace-Runge-Lenz não mais é uma constante de movimento, mas varia com o passar do tempo, a utilização desse vetor nos permite obter a seção de choque correspondente de um modo bastante econômico [37].

Por fim, não poderíamos deixar de mencionar que as aplicações do vetor de Laplace-Runge-Lenz não se restringem ao escopo da Mecânica Clássica. Existem aplicações interessantes também no contexto da Mecânica Quântica. Apenas para citar um exemplo, o vetor de Laplace-Runge-Lenz pode ser utilizado na obtenção do espectro de energia do átomo de hidrogênio por

---

<sup>13</sup>No cálculo da velocidade de precessão de órbitas, tanto no problema de Kepler perturbado quanto no problema do oscilador harmônico tridimensional perturbado, há métodos bem mais simples, porém, menos poderosos, como por exemplo, os apresentados nas referências [33, 39, 40].

meio de um método algébrico apresentado por W. Pauli, em 1926. Nesse método, o operador momento angular  $\ell$  e o operador Laplace-Runge-Lenz, esse último multiplicado por um fator apropriado, e denotado por  $\mathbf{a}$  após essa multiplicação, se combinam para formar os seis geradores das rotações em um espaço quadridimensional. Mais especificamente, pode-se mostrar que  $\ell \pm \mathbf{a}$  formam os seis geradores associados ao grupo  $O(4)$ . Esse método nos mostra como as simetrias escondidas de um problema podem simplificar a sua solução. No caso do átomo de hidrogênio, o método algébrico nos ajuda, inclusive, a entender um pouco mais o seu alto grau de degenerescência. O leitor interessado no assunto pode consultar as referências [45, 46].

Incluimos, ainda, nesse capítulo, uma pequena seção contendo a solução temporal do problema de Kepler, já que raramente ela é apresentada em livros elementares de mecânica, muito embora essa discussão não seja relevante para a compreensão do restante dessa tese.

## Capítulo 3

# Satélites terrestres em órbitas não-equatoriais

Neste capítulo, aplicaremos a teoria desenvolvida no capítulo anterior a um problema ligeiramente mais complexo do que os analisados naquele capítulo. Mais especificamente, faremos uma discussão introdutória aos efeitos causados pelo achatamento da Terra nas órbitas de satélites artificiais que não estejam no plano equatorial terrestre. Como veremos, o caráter não-central da força perturbadora, consequência da não-esfericidade da Terra, provocará uma precessão no momento angular da partícula. Isso significa que, agora, o plano da órbita também sofrerá uma precessão. Consequentemente, para termos uma idéia do que ocorre com a órbita do satélite, deveremos calcular as taxas de variação temporal médias de  $\ell$  e  $\mathbf{A}$ , e não apenas de  $\mathbf{A}$ . Nos exemplos tratados no capítulo anterior, após introduzida a perturbação, a órbita da partícula permanecia no mesmo plano, motivo pelo qual a orientação da órbita era descrita apenas pelo vetor de LRL.

Determinaremos  $d\ell/dt$  por meio do mesmo método perturbativo utilizado anteriormente no cálculo da velocidade de precessão da órbita via o vetor LRL. Nosso objetivo aqui é modesto. Não pretendemos fazer uma discussão completa do problema, o que seria possível resolvendo-se (perturbativamente) as complicadas equações diferenciais da Mecânica Celeste para os elementos orbitais relevantes, mas sim tentar extrair informações relevantes sobre a

dinâmica da órbita com um mínimo de conhecimento possível. Em outras palavras, nosso intuito é explorar ao máximo as técnicas simples aprendidas no capítulo anterior.

O capítulo está organizado da seguinte forma: inicialmente, com o objetivo de calcular o potencial gravitacional aproximado de uma distribuição de matéria sem simetria esférica, revisamos brevemente o método perturbativo de expansão em multipólos gravitacionais. Em seguida, por simplicidade, suporemos que em uma primeira aproximação a Terra seja um elipsóide de revolução, com o raio polar ligeiramente menor do que o raio equatorial. Com isso, calculamos o potencial gravitacional criado pela Terra até a ordem de quadrupolo. Desse resultado, obtemos diretamente a expressão para a força perturbadora que, nesse exemplo, não é uma força central, embora tenha simetria axial (em torno do eixo de rotação da Terra). De posse da perturbação, calculamos a taxa de precessão do momento angular da partícula, o que nos dá a taxa de precessão do plano da órbita. Na seção seguinte, calculamos a taxa de precessão do vetor de LRL e ao compará-la com a taxa de variação de  $\ell$ , vemos que, em geral, a orientação da órbita muda dentro do plano da órbita (que por sua vez está mudando com o tempo), podendo avançar, retroceder ou mesmo permanecer invariante, dependendo do ângulo de inclinação do plano da órbita relativo ao plano equatorial.

### 3.1 Efeito do achatamento da Terra

Nesta seção, calcularemos as primeiras correções que devem ser levadas em consideração no potencial gravitacional gerado pela Terra supondo que esta não seja uma esfera homogênea perfeita, mas que seja ligeiramente achatada nos pólos. Para calcularmos o potencial perturbado utilizaremos a chamada expansão em multipólos gravitacionais, que passamos a descrever.

Consideremos uma distribuição de matéria em uma região cotada do espaço  $\mathcal{M}$ , isto é, a região está contida em alguma esfera de raio suficientemente grande. À medida que nos afastamos da distribuição, podemos considerá-la cada vez mais como uma massa puntiforme, localizada, por exemplo, no centro da distribuição. Desse modo, é intuitivo que a grandes distâncias



da distribuição o seu campo gravitacional seja, aproximadamente, o mesmo que aquele gerado por uma partícula de massa igual à massa total da distribuição. Para explorarmos essa idéia de modo mais preciso, consideremos a expressão geral para o potencial gravitacional criado por uma certa distribuição de massa, a saber,

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{M}} G \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (3.1)$$

mas para pontos do espaço bem distantes da distribuição, de tal modo que

$$r > r'_{\max}, \quad (3.2)$$

onde  $r'_{\max}$  é o valor máximo de  $|\mathbf{r}'|$  para pontos de  $\mathcal{M}$ . É conveniente escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2}} \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \left(\frac{r'}{r}\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Devido à condição (3.2), a raiz quadrada na expressão anterior pode ser expandida em potências de  $r'/r$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \left(\frac{r'}{r}\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \left(\frac{r'}{r}\right)^n \quad (r' < r), \quad (3.4)$$

onde os coeficientes  $P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}')$  são, por definição, os polinômios de Legendre. Podemos, então, escrever

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \frac{r'^n}{r^{n+1}}. \quad (3.5)$$

Substituindo esse resultado em (3.1), obtemos:

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \sum_{n=0}^{\infty} G \frac{M_n(\hat{\mathbf{r}})}{r^{n+1}}, \quad (3.6)$$

onde definimos as quantidades

$$M_n(\hat{\mathbf{r}}) := \int_{\mathcal{M}} r'^n P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.7)$$

O polinômio de Legendre  $P_n$  é de ordem  $n$  e os 4 primeiros são dados por

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & ; & \quad P_1(x) = x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & ; & \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x). \end{aligned} \quad (3.8)$$

É imediato perceber que

$$M_0(\hat{\mathbf{r}}) = \int_{\mathcal{M}} \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = M. \quad (3.9)$$

De um modo geral devemos observar que  $M_n(\hat{\mathbf{r}})$  não depende da distância  $r$ , mas apenas da maneira como a matéria está distribuída em relação a  $\mathbf{r}$ .

Substituindo (3.7) em (3.6), obtemos

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r} - G \frac{M_1(\hat{\mathbf{r}})}{r^2} - G \frac{M_2(\hat{\mathbf{r}})}{r^3} - \dots. \quad (3.10)$$

O primeiro termo da expansão anterior é o potencial gravitacional de uma partícula com massa igual à massa total da distribuição. É o termo dominante a grandes distâncias, isto é,

$$r \gg r'_{\max} \implies \Phi(\mathbf{r}) \approx -G \frac{M}{r}, \quad (3.11)$$

resultado já esperado. A expansão (3.10) é chamada de expansão em multipolos ou, simplesmente, expansão multipolar do potencial gravitacional. O termo  $-GM_n(\hat{\mathbf{r}})/r^{n+1}$  dessa expansão é chamado termo do multipolo de

ordem  $n$ . O termo de dipolo é proporcional a

$$M_1(\hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{r}} \cdot M\mathbf{r}_{cm} , \quad (3.12)$$

onde  $\mathbf{r}_{cm}$  é a posição do centro de massa relativa à origem escolhida. Esse termo mede o quanto a origem do sistema de coordenadas está deslocada do centro de massa e desaparece se tomarmos as posições em relação ao centro de massa, ou seja, se escolhermos a origem no centro de massa da distribuição. Com essa escolha, a primeira correção ao termo de monopolo será dada pelo termo de quadrupolo gravitacional, proporcional a  $M_2(\hat{\mathbf{r}})$ . Se levarmos em conta que o potencial de uma esfera homogênea só apresenta o termo de monopolo em (3.10), podemos dizer que os termos de multipolos de ordem superior descrevem o quanto a distribuição se desvia de uma distribuição esféricamente simétrica. Na expansão multipolar (3.10) o primeiro termo a descrever o desvio da simetria esférica é, portanto, o termo de quadrupolo, no qual  $M_2(\hat{\mathbf{r}})$  pode ser escrito na forma

$$M_2(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{r}} \cdot Q(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2r^2} \mathbf{r} \cdot Q(\mathbf{r}) , \quad (3.13)$$

onde definimos o operador linear

$$Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.14)$$

por meio de

$$Q(\mathbf{r}) := \int_{\mathcal{M}} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \left[ 3\mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) - r'^2\mathbf{r} \right] . \quad (3.15)$$

O operador  $Q$  é chamado operador quadrupolar da distribuição de massa descrita pela densidade volumar  $\rho$ .

Em uma base ortonormal  $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ , a equação anterior toma a forma

$$Q(\mathbf{r}) = Q_{ij}x_j\hat{\mathbf{e}}_i , \quad (3.16)$$

onde, nessa base, os elementos de matriz  $Q_{ij}$  são dados por

$$Q_{ij} = \int_{\mathcal{M}} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) . \quad (3.17)$$

Uma rápida inspeção na definição anterior, deixa evidente que  $Q$  é um operador simétrico de traço nulo, isto é,

$$Q_{ji} = Q_{ij} , \quad Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0 . \quad (3.18)$$

Suponhamos, agora, que a distribuição de massa seja simétrica em relação a um eixo, digamos o eixo  $\mathcal{OZ}$  ( $\mathcal{OX}_3$ ). Neste caso, temos em (3.17)  $Q_{ij} = \delta_{ij} Q_{ii}$ , já que para  $i \neq j$  cada contribuição de  $x'_i x'_j$  no integrando de (3.17) é anulada por uma contribuição  $-x'_i x'_j$ . Temos pois <sup>1</sup>

$$Q_{ij} = \delta_{ij} Q_{ii} .$$

Além disso, a mesma simetria garante que os eixos  $\mathcal{OX}_1$  e  $\mathcal{OX}_2$  são equivalentes, de modo que  $Q_{11} = Q_{22}$ . Usando esse resultado na segunda igualdade em (3.18), podemos escrever

$$Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2} Q_{33} . \quad (3.19)$$

Nesse caso, a partir das equações (3.16) e (3.19), reescrevemos  $Q(\mathbf{r})$  como

$$Q(\mathbf{r}) = \frac{Q_{33}}{2} (2x_3 \hat{\mathbf{e}}_3 - x_1 \hat{\mathbf{e}}_1 - x_2 \hat{\mathbf{e}}_2) . \quad (3.20)$$

Conseqüentemente, no caso em que  $\mathcal{OZ}$  é um eixo de simetria da distribuição, o elemento  $Q_{33}$  (ou em notação alternativa  $Q_{zz}$ ) determina completamente o operador de quadrupolo  $Q$ . Nesse caso, esse elemento é comumente chamado

---

<sup>1</sup>Poderíamos, também, argumentar do seguinte modo: uma vez que a matriz formada pelos elementos  $\{Q_{ij}\}$  é real e simétrica, ela pode ser diagonalizada por uma transformação ortogonal. Em outras palavras, existe pelo menos um sistema de eixos ortogonais entre si em relação ao qual essa matriz é diagonal. Quando houver simetria em relação a um eixo, digamos o eixo  $\mathcal{OZ}$ , basta escolhermos esse eixo juntamente com outros dois perpendiculares a ele e perpendiculares entre si que teremos a matriz na forma diagonal, isto é,  $Q_{ij} = \delta_{ij} Q_{ii}$ .

momento quadrupolar da distribuição de massa e pode ser representado por  $Q$  se não houver perigo de confusão com o operador quadrupolar. Usando (3.20) em (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} M_2(\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{(2z^2 - x^2 - y^2)}{4r^2} Q_{zz} \\ &= \frac{(3 \cos^2\theta - 1)}{4} Q_{zz}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathcal{OZ}$  e  $\mathbf{r}$ , ou seja,  $\cos\theta = \hat{z} \cdot \hat{r}$ . Conseqüentemente, a contribuição do termo quadrupolar ao potencial da distribuição na expansão (3.10), que denotaremos por  $\Phi_2$ , é dada por

$$\Phi_2(\mathbf{r}) = -G \frac{Q_{zz}}{4r^3} (3 \cos^2\theta - 1). \quad (3.22)$$

Note que para pontos pertencentes ao plano definido por  $\theta = \pi/2$  a contribuição de quadrupolo dá origem a um termo para o campo gravitacional que aponta sempre para a origem e é proporcional a  $1/r^4$ . Observe que essa dependência com a distância da partícula ao centro de força é exatamente a mesma que ocorre quando consideramos a correção advinda da teoria da relatividade geral sobre a teoria da gravitação de Newton, tratada explicitamente no capítulo anterior.

Para uma distribuição esfericamente simétrica, é fácil demonstrar que  $Q_{zz} = 0$ . Com efeito, a partir da expressão (3.17), com  $i = j = z$ , temos

$$Q_{zz} = \int_{\mathcal{M}} d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') (2x_3'^2 - x_1'^2 - x_2'^2), \quad (3.23)$$

e, devido à simetria esférica, os termos no integrando provenientes de  $x_1'^2$ ,  $x_2'^2$  e  $x_3'^2$  dão integrais idênticas. Para uma distribuição uniforme de massa,  $Q_{zz} > 0$  sempre que a distribuição for prolata e  $Q_{zz} < 0$  sempre que a distribuição for oblata. No caso de um elipsoide de revolução em torno do eixo  $\mathcal{OZ}$ , pode-se mostrar que a integração anterior fornece o resultado

$$Q_{zz} = \frac{2}{5} M(c^2 - a^2), \quad (3.24)$$

onde  $c$  é o semi-eixo do elipsóide ao longo de  $\mathcal{OZ}$  e  $a$  é o semi-eixo ortogonal a  $\mathcal{OZ}$ . Esse resultado é particularmente importante porque a Terra é, aproximadamente, um elipsóide de revolução oblato, cujo raio equatorial  $a$  excede o semi-eixo polar  $c$  por cerca de 21,5 km. Chamamos achatamento do elipsóide de revolução a grandeza

$$\eta := \frac{a - c}{a}. \quad (3.25)$$

O achatamento da Terra é aproximadamente 1/300. Se a Terra tivesse densidade uniforme, seu momento quadrupolar seria dado por

$$\begin{aligned} Q_{zz} &= -\frac{2}{5} M_T (a + c)(a - c) \\ &\approx -\frac{4}{5} M_T a^2 \eta + \mathcal{O}(\eta^2), \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde usamos a definição de achatamento da Terra,  $(a - c) = \eta a$ , o fato de que  $a + c = 2a + \mathcal{O}(\eta)$  e definimos  $M_T$  como a massa da Terra <sup>2</sup>.

Substituindo o resultado (3.26) na contribuição de quadrupolo para o potencial gravitacional, equação (3.22), e somando o resultado com a contribuição de monopolo, obtemos, finalmente

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{GM}{r} - \frac{GMR^2}{5r^3} \eta (1 - 3\cos^2\theta). \quad (3.27)$$

Como o campo gravitacional é dado por  $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi = g_r \hat{\mathbf{r}} + g_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ , obtemos

$$g_r(r, \theta) = -\frac{GM}{r^2} + \frac{3GMR^2}{5r^4} \eta (3\cos^2\theta - 1), \quad (3.28)$$

$$g_\theta(r, \theta) = \frac{3GMR^2}{5r^4} \eta \sin 2\theta. \quad (3.29)$$

Note que a presença do termo de quadrupolo adiciona ao campo gravitacional duas contribuições, sendo uma delas de caráter não central ( $g_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ ).

---

<sup>2</sup>Para se levar em conta que a Terra é mais densa no centro do que na superfície pode-se usar no lugar de (3.26) o seguinte momento quadrupolar:  $Q_{zz} = -\frac{4}{5} M_T a^2 \lambda$ , onde  $\lambda$  é um número positivo menor do que  $\eta$ .

Note também que o termo de quadrupolo se anula quando tomamos o limite  $\eta \rightarrow 0$  (distribuição esférica), como esperado. De posse do termo de quadrupolo, temos imediatamente a força perturbadora ao problema original de Kepler, no qual a força era central e inversamente proporcional ao quadrado da distância ao centro de força. Nas duas próximas seções, veremos quais os efeitos dessa perturbação (não-esfericidade da Terra) na dinâmica do momento angular da partícula, que orienta o plano da órbita, e na dinâmica do vetor de LRL, que orienta a órbita no plano.

## 3.2 Precessão do plano da órbita

Da definição de momento angular de uma partícula em relação à origem dos eixos escolhidos,  $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , vemos de imediato que esse vetor, em cada instante, é perpendicular ao plano do movimento da partícula. Nesse sentido, além de nos dar uma idéia de quanto a partícula gira em torno da origem (lembre-se de que a taxa de variação temporal da área varrida pelo vetor posição da partícula é proporcional ao módulo do momento angular da partícula), o momento angular determina a orientação instantânea do plano da órbita da partícula, ou seja, no caso em questão, do plano da órbita do satélite terrestre cujo movimento queremos estudar nesta seção. Como vimos no capítulo anterior, no caso de uma força central o momento angular da partícula relativo ao centro de força (tomado como a origem) é uma constante de movimento e, por conseguinte, o movimento da partícula é plano. Por exemplo, caso a Terra fosse uma esfera com sua massa distribuída uniformemente qualquer satélite se moveria em um movimento plano <sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Por simplicidade, estamos considerando um sistema formado por apenas dois corpos, a Terra oblata e um satélite em órbita ao seu redor. Não estamos considerando a presença do Sol que atrai tanto a Terra quanto o satélite. Ou seja, não estamos levando em consideração o movimento da Terra em torno do Sol, o que já seria suficiente para considerarmos a Terra como um referencial não-inercial. Tampouco estamos considerando o movimento de rotação da Terra em torno de seu eixo. No entanto, a força de inércia sobre o satélite que deveria ser incluída devido ao movimento de revolução da Terra em torno do Sol praticamente anula a força exercida pelo Sol sobre o satélite, por ser a distância do satélite à Terra suficientemente pequena quando comparada à distância entre a Terra e o Sol. Quanto ao movimento de rotação da Terra, basta, numa primeira aproximação, adicionar ao movimento do satélite uma rotação no sentido oposto ao do giro da Terra.

No caso do problema de Kepler perturbado por uma força também de caráter central, o momento angular do satélite continua sendo uma constante de movimento e a orientação do plano da órbita permanece a mesma, embora a órbita dentro de seu plano sofra uma precessão, como ocorreu no exemplo de precessão de órbita descrito no capítulo anterior.

No entanto, caso a perturbação seja não-central, como é o caso da correção causada pela não-esfericidade da Terra, há um torque não-nulo e, por conseguinte, o momento angular do satélite não mais é conservado. Consequentemente, nesse caso, o plano da órbita muda com o passar do tempo. É nosso objetivo, nesta seção, determinar o que ocorre com o plano da órbita de um satélite que se move fora do plano equatorial terrestre.

Uma vez que o momento angular do satélite é perpendicular ao plano da órbita, para responder a essa pergunta basta analisarmos a sua evolução temporal. É justamente isso que faremos a seguir. Porém, por simplicidade, calcularemos a média temporal da taxa de variação  $d\ell/dt$ , média essa avaliada na órbita não-perturbada (órbita elíptica fechada), no mesmo espírito do capítulo anterior, no cálculo de  $\langle d\mathbf{A}/dt \rangle$ . Deixaremos para a próxima seção a análise da dinâmica do vetor de LRL, que nos dará informações relevantes sobre o que ocorre com a orientação da órbita no plano do movimento (veremos que o satélite executa muitas voltas sem que o plano de seu movimento mude substancialmente sua orientação).

Consideremos, então, um satélite de massa  $\mu$  em uma órbita elíptica de excentricidade  $\epsilon$  em torno da Terra oblata, considerada como o elipsóide de revolução discutido na seção anterior. Suporemos ainda que, inicialmente, o plano da órbita do satélite esteja inclinado de um ângulo  $\alpha$  em relação ao plano  $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}$ , plano equatorial da Terra, por hipótese.

De acordo com a Figura 3.1, definimos também, por conveniência, os eixos  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$  de tal modo que as origens  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{O}'$  coincidem, o mesmo ocorrendo com os eixos  $\mathcal{O}\mathcal{X}$  e  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'$ , mas os eixos  $\mathcal{O}'\mathcal{Y}'$  e  $\mathcal{O}'\mathcal{Z}'$  estão girados, em torno do eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$  de um ângulo  $\alpha$ . O plano da órbita é o plano  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'$  e, por simplicidade, escolhemos o eixo de simetria da órbita (semi-eixo maior da “elipse”) coincidente com o eixo  $\mathcal{O}'\mathcal{Y}'$ .



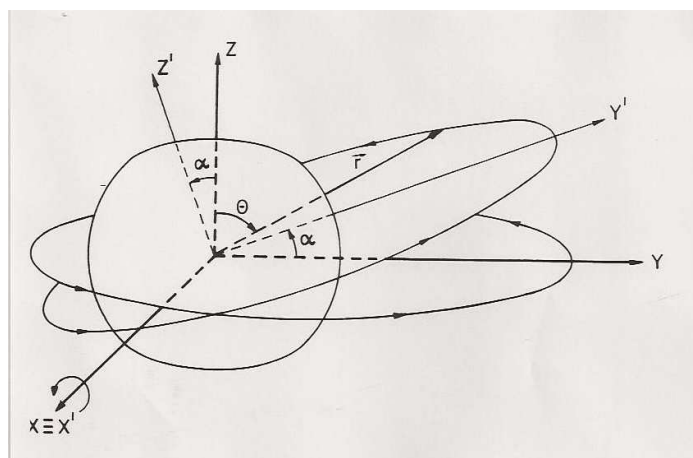


Figura 3.1: A Figura mostra a Terra achatada, com plano equatorial no plano  $OXYZ$  e o plano da órbita do satélite, plano  $O'X'Y'Z'$ , que está inclinado de um ângulo  $\alpha$  em relação ao plano equatorial.

A falta de simetria esférica da Terra faz com que o torque sobre o satélite relativo ao centro da Terra seja dado em um instante genérico por (para não confundir com o símbolo de período, usaremos  $\mathbf{N}$  para denotar o torque sobre o satélite)

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mu \mathbf{g} = \mathbf{r} \times \mu(g_r \hat{\mathbf{r}} + g_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mu r g_\theta \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (3.30)$$

Substituindo (3.29) na equação anterior, obtemos,

$$\mathbf{N} = N_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (3.31)$$

onde

$$N_\phi = \frac{3GM\mu R^2}{5r^3} \eta \sin 2\theta. \quad (3.32)$$

A equação (3.31) mostra claramente que a direção do torque varia ao longo da órbita do satélite, uma vez que  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  não é constante ao longo da órbita, mas depende da coordenada  $\phi$ ). Também sua magnitude varia com o tempo, já que  $N_\phi$  depende de  $\theta$  e esse ângulo não é constante em uma órbita não-equatorial (em uma órbita equatorial  $\theta = \pi/2$ ).

Por conta da magnitude do torque ser muito pequena ( $\eta \ll 1$ ), a taxa de precessão é pequena. Isso significa, como já mencionamos, que o satélite

descreve muitas revoluções em torno da Terra antes que seja apreciável a mudança da orientação de sua órbita. Esse fato justifica, numa primeira aproximação, calcularmos a média temporal  $\langle N_\phi \hat{\phi} \rangle$ , onde, como no capítulo anterior,  $\langle \dots \rangle$  significa média na órbita não-perturbada (ou seja, com a Terra considerada uma esfera de massa uniformemente distribuída), na qual o momento angular é uma constante de movimento.

Expressando  $\hat{\phi}$  em termos da base cartesiana, obtemos

$$\langle \mathbf{N} \rangle = 2C \left\langle \frac{\text{sen}\theta \text{cos}\theta}{r^3} (-\text{sen}\phi \mathbf{i} + \text{cos}\phi \mathbf{j}) \right\rangle, \quad (3.33)$$

onde definimos

$$C = \frac{3}{5} GM\mu R^2 \eta \quad (3.34)$$

e usamos a relação  $\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta \text{cos}\theta$ . O valor médio em (3.33) é definido como no capítulo anterior,  $\langle F(t) \rangle = (1/\tau) \int_t^{t+\tau} f(t') dt'$ . Como a órbita do satélite está no plano  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'$ , é mais natural calcularmos o valor médio utilizando as coordenadas relativas aos eixos  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'\mathcal{Z}'$ . A transformação de variáveis  $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$  é dada por uma rotação de um ângulo  $\alpha$  em torno do eixo  $\mathcal{O}\mathcal{X}$ ,

$$\begin{aligned} x' &= x; \\ y' &= y \text{cos}\alpha + z \text{sen}\alpha; \\ z' &= -y \text{sen}\alpha + z \text{cos}\alpha. \end{aligned} \quad (3.35)$$

As relações entre a antiga base cartesiana e a nova base cartesiana são dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{i}'; \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}' \text{cos}\alpha - \mathbf{k}' \text{sen}\alpha; \\ \mathbf{k} &= \mathbf{j}' \text{sen}\alpha + \mathbf{k}' \text{cos}\alpha. \end{aligned} \quad (3.36)$$

A partir das equações (3.35) e da definição de coordenadas esféricas, podemos relacionar facilmente as antigas coordendas antigas  $(r, \theta, \phi)$  com as novas

coordenadas  $(r' = r, \theta', \phi')$  e obter

$$\begin{aligned}\cos\phi' \operatorname{sen}\theta' &= \operatorname{sen}\theta \cos\phi ; \\ \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\phi' &= \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \cos\alpha + \cos\theta \operatorname{sen}\alpha ; \\ \cos\theta' &= -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\alpha + \cos\theta \cos\alpha .\end{aligned}\quad (3.37)$$

Como o plano da órbita do satélite é o plano  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'$ , vemos que  $\phi' = \pi/2$  em todos os pontos da órbita. Assim, para pontos da órbita do satélite, valem as relações

$$\begin{aligned}\cos\phi' &= \operatorname{sen}\theta \cos\phi ; \\ \operatorname{sen}\phi' &= \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \cos\alpha + \cos\theta \operatorname{sen}\alpha ; \\ \cos\theta \cos\alpha &= \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\alpha .\end{aligned}\quad (3.38)$$

Invertendo as equações (3.38), obtemos <sup>4</sup>

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \operatorname{sen}\phi' \operatorname{sen}\alpha ; \\ \operatorname{sen}\theta &= (1 - \operatorname{sen}^2\phi' \operatorname{sen}^2\alpha)^{1/2} ; \\ \cos\phi &= \frac{\cos\phi'}{(1 - \operatorname{sen}^2\phi' \operatorname{sen}^2\alpha)^{1/2}} .\end{aligned}\quad (3.39)$$

Substituindo as equações (3.36) e (3.39) na equação (3.33), obtemos a seguinte expressão para a média temporal do torque na órbita não-perturbada

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{N} \rangle &= 2C \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \left( \left\langle \frac{-\operatorname{sen}^2\phi'}{r^3} \right\rangle \mathbf{i}' + \left\langle \frac{\operatorname{sen}\phi' \cos\phi'}{r^3} \right\rangle \mathbf{j}' \right) \\ &\quad - 2C \operatorname{sen}^2\alpha \left\langle \frac{\operatorname{sen}\phi' \cos\phi'}{r^3} \right\rangle \mathbf{k}' ,\end{aligned}\quad (3.40)$$

onde  $r(\phi')$  se refere à órbita não-perturbada, cuja expressão em coordenadas

---

<sup>4</sup>Por exemplo, multiplicando a segunda equação em (3.38) por  $\operatorname{sen}\alpha$  e utilizando a terceira equação em (3.38), obtemos imediatamente a primeira equação em (3.39).

polares é dada simplesmente por

$$r(\phi') = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos(\phi' - \pi/2)} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \sin\phi'}. \quad (3.41)$$

onde  $a$  é o semi-eixo maior da órbita e  $\varepsilon$ , a sua excentricidade. Em (3.41), ao escrevermos  $\cos(\phi' - \pi/2) = \sin\phi'$  no lugar de  $\cos\phi'$ , supusemos que o periélio estivesse na direção do eixo  $\mathcal{O}'\mathcal{Y}'$ , e não na direção do eixo  $\mathcal{O}'\mathcal{X}'$ , como de costume.

Como temos a equação polar da órbita, e não a sua equação temporal, devemos calcular a média temporal do torque utilizando uma integração em  $\phi'$  e não uma integração temporal, como explicado no capítulo 2. Por conveniência, reescrevemos a expressão do valor médio na órbita não-perturbada de uma função genérica  $F(\phi')$ :

$$\langle F(\phi'(t)) \rangle = \frac{\mu}{l\tau} \int_0^{2\pi} F(\phi') r^2(\phi') d\phi', \quad (3.42)$$

onde  $\tau$  é o período da órbita não-perturbada.

Devido à simetria da órbita, é fácil perceber que  $\langle \sin\phi' \cos\phi' / r^3 \rangle = 0$ ,

$$\left\langle \frac{\sin\phi' \cos\phi'}{r^3} \right\rangle = \frac{\mu}{l\tau a(1 - \varepsilon^2)} \int_0^{2\pi} \sin\phi' \cos\phi' (1 + \varepsilon \sin\phi') d\phi' = 0. \quad (3.43)$$

Consequentemente, as componentes da média temporal do torque ao longo das direções de  $\mathbf{j}$  e de  $\mathbf{k}$  são nulas. Para encontrarmos a componente ao longo da direção de  $\mathbf{i}$ , devemos calcular

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\sin^2\phi'}{r^3(\phi')} \right\rangle &= \frac{\mu}{l\tau a(1 - \varepsilon^2)} \int_0^{2\pi} \sin^2\phi' (1 + \varepsilon \sin\phi') d\phi' \\ &= \frac{\mu\pi}{l\tau a(1 - \varepsilon^2)}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Substituindo os resultados anteriores na expressão da média temporal do

torque sobre o satélite, obtemos, finalmente,

$$\langle \mathbf{N} \rangle = -\frac{2C\mu\pi}{\ell\tau a(1-\epsilon^2)} \text{sen}\alpha \text{cos}\alpha \mathbf{i}' . \quad (3.45)$$

Note que  $\langle \mathbf{N} \rangle$  é perpendicular a  $\ell$ . Observe ainda que  $|\langle \mathbf{N} \rangle|$  e, conseqüentemente,  $|\langle d\ell/dt \rangle|$ , é zero para  $\alpha = 0$ , cresce até atingir seu valor máximo em  $\alpha = \pi/4$  e, a partir daí, decresce novamente até zero para  $\alpha = \pi/2$ , caso em que o plano da órbita é perpendicular ao plano equatorial.

Lembrando que  $\ell = \ell \mathbf{k}'$  e que o ângulo entre  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$  é  $\alpha$ , podemos escrever

$$\text{sen}\alpha \mathbf{i}' = \mathbf{k} \times \mathbf{k}' = \frac{\mathbf{k} \times \ell}{\ell} . \quad (3.46)$$

Substituindo (3.46) em (3.45), reescrevemos a média temporal do torque em uma forma mais conveniente, a saber,

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \left\{ \frac{-2C\mu\pi\text{cos}\alpha}{\tau\ell^2 a(1-\epsilon^2)} \mathbf{k} \right\} \times \ell . \quad (3.47)$$

Lembrando que  $\mathbf{N} = d\ell/dt$ , a equação anterior nos permite escrever

$$\left\langle \frac{d\ell}{dt} \right\rangle = \boldsymbol{\Omega}_\ell \times \ell , \quad (3.48)$$

onde identificamos a velocidade média de precessão do momento angular

$$\boldsymbol{\Omega}_\ell = -\frac{2C\mu\pi\text{cos}\alpha}{\tau\ell^2 a(1-\epsilon^2)} \mathbf{k} . \quad (3.49)$$

Conseqüentemente, a orientação do plano da órbita muda de tal modo que o vetor momento angular, que é perpendicular a esse plano, descreve uma superfície cônica.

A magnitude do momento angular na órbita não-perturbada é dada por

$$\ell = 2\mu \frac{dA}{dt} = 2\mu \frac{\pi ab}{\tau} , \quad (3.50)$$

onde  $dA/dt$  é a velocidade areolar e  $a$  e  $b$  são, respectivamente, o semi-eixo maior e o semi-eixo menor da dessa órbita. Substituindo a equação (3.50) e

a expressão para  $C$  escrita em (3.34) na equação (3.49), e usando a terceira lei de Kepler ( $\tau^2/a^3 = 4\pi^2/(GM)$ ), obtemos

$$\mathbf{\Omega}_\ell = -\frac{3R^2\eta\cos\alpha}{5a^2(1-\epsilon^2)^2}\omega\mathbf{k}, \quad (3.51)$$

onde definimos a frequência angular média de revolução do satélite em torno da Terra,  $\omega = 2\pi/\tau$ . Note que  $|\mathbf{\Omega}_\ell|$  decresce à medida que  $\alpha$  cresce, desde um valor finito para  $\alpha \rightarrow 0$  até o valor nulo para  $\alpha = \pi/2$ . Poderia nos causar espanto o fato de que para  $\alpha \rightarrow 0$ , caso em que o plano da órbita está no plano equatorial,  $|\mathbf{\Omega}_\ell|$  permanece finito. No entanto, note que  $\mathbf{\Omega}_\ell$  e  $\ell$  se tornam vetores paralelos nesse caso e, portanto,  $\langle d\ell/dt \rangle = 0$ . Ou seja, para  $\alpha = 0$  o plano da órbita não muda.

O resultado anterior nos permite obter o período de precessão do plano da órbita do satélite,

$$\tau_\ell = \frac{2\pi}{|\mathbf{\Omega}_\ell|} = \frac{5a^2(1-\epsilon^2)^2}{3R^2\eta\cos\alpha}\tau. \quad (3.52)$$

Para órbitas circulares, ou muito próximas a estas, podemos fazer  $\epsilon = 0$  na equação (3.51), onde  $a$  passa então a ser o raio da órbita e  $\frac{2\pi}{\tau} = \omega$ , a frequência angular de revolução ao redor da Terra. Nesse caso, temos

$$\mathbf{\Omega}_\ell = -\frac{3R^2\eta\cos\alpha}{5a^2}\omega\mathbf{k}, \quad (3.53)$$

de acordo com a referência [47], após, é claro, a identificação correta dos parâmetros.

Finalizamos esta seção fazendo uma estimativa numérica para a razão  $\tau_\ell/\tau$ , a fim de verificarmos a consistência do método, cuja hipótese era de que o plano da órbita girava pouco durante uma revolução do satélite em torno da Terra. Com esse objetivo, tomaremos uma órbita a, aproximadamente, 640km da superfície da Terra, de modo que  $a/R \approx 11/10$ . Para  $\alpha$ , escolheremos o valor que fornece a maior velocidade de precessão, a saber,  $\alpha = \pi/4$ . Substituindo esses valores na equação (3.52), tomando  $\epsilon = 0$  e

lembrando que  $\eta \approx 1/300$ , pode-se mostrar que

$$\frac{\tau_\ell}{\tau} \approx 856, \quad (3.54)$$

mostrando a autoconsistência do método perturbativo. Apenas para completar as informações, pode-se mostrar, utilizando a terceira lei de Kepler, que o período dessa órbita não-perturbada circular não chega a duas horas, é dado por  $\tau \approx 1,6$ h.

### 3.3 Dinâmica do vetor de Laplace-Runge-Lenz

Vimos, na seção anterior, que a taxa de variação temporal do momento angular do satélite nos dá a velocidade de giro do plano de sua órbita. Mas, à medida que o plano da órbita gira, o satélite executa várias revoluções em torno da Terra (lembre-se de que  $\tau_\ell \gg \tau$ ). Uma pergunta natural é a seguinte: o que ocorre depois que o plano da órbita volta à sua orientação inicial? Mais especificamente, como a órbita do satélite estará orientada dentro do plano de sua órbita depois que esse plano girar de  $2\pi$  radianos em torno do eixo  $\mathcal{OZ}$ ? E, se for o caso, em que sentido gira essa órbita? Avança, retrocede ou não muda sua orientação relativa ao plano da órbita?

Esses problemas, e muitos outros desse tipo, são estudados em mecânica celeste e há equações muito bem estabelecidas desde a época de Lagrange para os chamados parâmetros da órbita. Por exemplo, há equações diferenciais que descrevem as evoluções temporais da inclinação da órbita, da linha nodal (que nos diz com que taxa gira o plano da órbita), da direção do pericentro dentro do plano da órbita, etc. Resolvendo-se equações desse tipo (em geral, perturbativamente), é possível responder às perguntas anteriores. Para maiores detalhes, veja, por exemplo, a referência [48].

No entanto, não queremos fazer aqui um estudo detalhado de mecânica celeste, mas sim explorar um pouco mais o método apresentado no capítulo anterior em problemas mais complexos como o que estamos considerando, a saber, satélites terrestres em órbitas não-equatoriais. A idéia é, usando uma relação baixa de custo/benefício, chegarmos em alguns resultados interessantes que normalmente são obtidos por métodos mais elaborados.

Nossos objetivos serão modestos: inicialmente, calcularemos a evolução temporal do vetor de LRL causada pelo achatamento da Terra e mostraremos que a velocidade de precessão desse vetor depende da inclinação, assim como ocorreu com o vetor momento angular do satélite. Veremos que, em geral, tais velocidades não coincidem, indicando que a orientação da órbita gira dentro de seu plano. Em segundo lugar, tentaremos obter, supondo uma condição inicial simples, a inclinação do plano da órbita para que essa não mude a sua orientação dentro do seu plano.

Sendo  $\mathbf{F} = -(k/r^2)\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{f}$  a força com que a Terra achatada atrai o satélite, calculamos a média temporal da taxa de variação do vetor de LRL e obtemos

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle \mathbf{f} \times \boldsymbol{\ell} \rangle + \langle \mathbf{p} \times \mathbf{N} \rangle, \quad (3.55)$$

onde  $\mathbf{f}$  é a força perturbadora devido à não-esfericidade da Terra e  $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  é o torque sobre o satélite. Das equações (3.28) e (3.29), identificamos  $\mathbf{f}$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= f_r \hat{\mathbf{r}} + f_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= \frac{3GMR^2\eta}{5r^4} (3\cos^2\theta - 1) \hat{\mathbf{r}} + \frac{3GMR^2\eta}{5r^4} \sin(2\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Analisaremos separadamente os dois termos do lado direito da equação (3.55). Usando o fato de que, no plano da órbita,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  é paralelo a  $\mathbf{k}'$  e  $\mathbf{r} = \cos\phi' \mathbf{i}' + \sin\phi' \mathbf{j}'$ , obtemos, para o primeiro termo

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \times \boldsymbol{\ell} &= (f_r \hat{\mathbf{r}} + f_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times \ell \mathbf{k}' \\ &= f_r (\cos\phi' \mathbf{i}' + \sin\phi' \mathbf{j}') \times \ell \mathbf{k}' \\ &= \ell f_r (\sin\phi' \mathbf{i}' - \cos\phi' \mathbf{j}'). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Calculando, inicialmente, o termo na direção de  $\mathbf{i}'$  e usando a expressão de  $f_r(r, \theta)$ , dada pela equação (3.56), obtemos

$$\ell f_r \sin\phi' \mathbf{i}' = C \ell \frac{(3\cos^2\theta - 1)\sin\phi'}{r^4} \mathbf{i}', \quad (3.58)$$

onde  $C = 3GM\mu R^2\eta/5$ , como na equação (3.34). Usando o fato de que



$\cos\theta = \text{sen}\phi' \text{sen}\alpha$  (veja a primeira equação escrita em (3.39)), reescrevemos (3.58) na forma

$$\ell f_r \text{sen}\phi' \mathbf{i}' = Cl \frac{(3\text{sen}^2\phi' \text{sen}^2\alpha - 1)\text{sen}\phi'}{r^4} \mathbf{i}'. \quad (3.59)$$

Calculando, então, a média temporal em ambos os lados de (3.59), obtemos

$$\langle \ell f_r \text{sen}\phi' \mathbf{i}' \rangle = \frac{\mu C}{\tau} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{3\text{sen}^3\phi' \text{sen}^2\alpha}{r^2} - \frac{\text{sen}\phi'}{r^2} d\phi' \right\} \mathbf{i}'. \quad (3.60)$$

Substituindo em (3.60) a equação polar da órbita,  $r(\phi') = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon \text{sen}\phi'}$ , e utilizando os resultados das integrais

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \text{sen}\phi' (1 + \epsilon \text{sen}\phi')^2 d\phi' &= 2\pi\epsilon \\ \int_0^{2\pi} \text{sen}^3\phi' (1 + \epsilon \text{sen}\phi')^2 d\phi' &= \frac{3\pi\epsilon}{2}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

obtemos

$$\langle \ell f_r \text{sen}\phi' \mathbf{i}' \rangle = \frac{C\mu\epsilon}{\tau a^2(1-\epsilon^2)^2} \left[ \frac{9\pi}{2} \text{sen}^2\alpha - 2\pi \right] \mathbf{i}'. \quad (3.62)$$

Para o 2º termo do lado direito de (3.57), obtemos um resultado nulo,

$$\langle f_r \cos\phi' \mathbf{j}' \rangle = \mathbf{0}, \quad (3.63)$$

consequência dos resultados das integrações

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos\phi' (1 + \epsilon \text{sen}\phi')^2 d\phi' &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \text{sen}^2\phi' \cos\phi' (1 + \epsilon \text{sen}\phi')^2 d\phi' &= 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Com isso, substituindo os resultados (3.65) e (3.63) em (3.57), obtemos

$$\langle \mathbf{f} \times \boldsymbol{\ell} \rangle = \frac{C\mu\epsilon}{\tau a^2(1-\epsilon^2)^2} \left[ \frac{9\pi}{2} \text{sen}^2\alpha - 2\pi \right] \mathbf{i}'. \quad (3.65)$$

Passemos, agora, para o cálculo do segundo termo do lado direito de (3.55). Usando o fato de que  $\mathbf{p} = \mu(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\text{sen}\theta\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}})$  e  $\mathbf{N} = N_{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$ , temos

$$\langle \mathbf{p} \times \mathbf{N} \rangle = \mu \langle -\dot{r}N_{\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}N_{\phi}\hat{\mathbf{r}} \rangle, \quad (3.66)$$

onde  $N_{\phi} = 2C\text{sen}\theta\text{cos}\theta/r^3$  e  $C = \frac{3}{5}GM\mu R^2\eta$ , como definidos anteriormente. Escrevendo os unitários da base esférica em termos dos unitários da base cartesiana,

$$\hat{\mathbf{r}} = \text{sen}\theta\text{cos}\phi\mathbf{i} + \text{sen}\theta\text{sen}\phi\mathbf{j} + \text{cos}\theta\mathbf{k}; \quad (3.67)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \text{cos}\theta\text{cos}\phi\mathbf{i} + \text{cos}\theta\text{sen}\phi\mathbf{j} - \text{sen}\theta\mathbf{k}, \quad (3.68)$$

e calculando apenas a componente ao longo de  $\mathbf{i} = \mathbf{i}'$ , pois estamos interessados no giro do vetor  $\mathbf{A}$ , obtemos

$$\langle \mathbf{p} \times \mathbf{N} \rangle_{\mathbf{i}'} = \mu \left\langle \left( -\dot{r}N_{\phi}\text{cos}\theta\text{cos}\phi + r\dot{\theta}N_{\phi}\text{sen}\theta\text{cos}\phi \right) \right\rangle \mathbf{i}'. \quad (3.69)$$

Para podermos avaliar o valor médio  $\langle \mathbf{p} \times \mathbf{N} \rangle_{\mathbf{i}'}$ , devemos reescrever o termo do lado direito de (3.69) em função de  $\phi'$ , pois é sobre essa variável que devemos integrar no cálculo de valores médios.

Inicialmente, usando o fato de que  $\text{sen}\theta\text{cos}\theta = \text{sen}\phi'\text{sen}\alpha(1 - \text{sen}^2\phi'\text{sen}^2\alpha)^{1/2}$ , reescrevemos  $N_{\phi}$  na forma

$$N_{\phi} = 2C\frac{\text{sen}\theta\text{cos}\theta}{r^3} = 2C\frac{(1 - \text{sen}^2\phi'\text{sen}^2\alpha)^{1/2}\text{sen}\phi'\text{sen}\alpha}{r^3}. \quad (3.70)$$

Na equação (3.69) aparecem as quantidades  $\text{cos}\theta\text{cos}\phi$  e  $\text{sen}\theta\text{cos}\phi$ , cujas expressões em termos de  $\phi'$  podem ser obtidas a partir das equações (3.38),

$$\text{cos}\theta\text{cos}\phi = \frac{\text{sen}\phi'\text{sen}\alpha\text{cos}\phi'}{(1 - \text{sen}^2\phi'\text{sen}^2\alpha)^{1/2}} \quad (3.71)$$

$$\text{sen}\theta\text{cos}\phi = \text{cos}\phi'. \quad (3.72)$$

Devemos ainda expressar  $\dot{r}$  em termos de  $\phi'$ , o que pode ser feito derivando

diretamente a equação polar da órbita e usando o fato de que  $\dot{\phi}' = \ell/(\mu r^2)$ :

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \operatorname{sen}\phi'} \right) \\ &= -\frac{\varepsilon r^2}{a(1-\varepsilon^2)} \cos\phi' \frac{d\phi'}{dt} \\ &= -\frac{\ell\varepsilon}{\mu a(1-\varepsilon^2)} \cos\phi'.\end{aligned}\quad (3.73)$$

Por fim, precisamos ainda da expressão de  $\dot{\theta}$  em termos de  $\phi'$ , que pode ser obtida diferenciando-se a relação  $\cos\theta = \operatorname{sen}\phi' \operatorname{sen}\alpha$ , isto é, escrevendo

$$-\operatorname{sen}\theta \dot{\theta} = \cos\phi' \operatorname{sen}\alpha \frac{d\phi'}{dt} = \frac{\ell}{\mu r^2} \cos\phi' \operatorname{sen}\alpha. \quad (3.74)$$

Lembrando, então, que  $\operatorname{sen}\theta = (1 - \operatorname{sen}^2\phi' \operatorname{sen}^2\alpha)^{1/2}$ , obtemos

$$\dot{\theta} = -\frac{\ell}{\mu r^2} \frac{\cos\phi' \operatorname{sen}\alpha}{(1 - \operatorname{sen}^2\phi' \operatorname{sen}^2\alpha)^{1/2}}. \quad (3.75)$$

Substituindo as equações (3.70), (3.71), (3.72), (3.73) e (3.75) na equação (3.69), obtemos, finalmente

$$\langle \mathbf{p} \times \mathbf{N} \rangle_{i'} = 2C \left\langle \left( \frac{\varepsilon l}{a(1-\varepsilon^2)} \frac{\operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\phi' \cos^2\phi'}{r^3} - l \frac{\operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}\phi' \cos^2\phi'}{r^4} \right) \right\rangle \mathbf{i}'. \quad (3.76)$$

Utilizando os resultados das integrais

$$\left\langle \frac{\operatorname{sen}^2\phi' \cos^2\phi'}{r^3} \right\rangle = \frac{\mu}{\tau l} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\phi' \cos^2\phi'}{r} d\phi' = \frac{\pi}{4} \frac{\mu}{\tau l a (1-\varepsilon^2)} \quad (3.77)$$

$$\left\langle \frac{\operatorname{sen}\phi' \cos^2\phi'}{r^4} \right\rangle = \frac{\mu}{\tau l} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\phi' \cos^2\phi'}{r^2} d\phi' = \frac{\pi}{4} \frac{2\mu\varepsilon}{\tau l a^2 (1-\varepsilon^2)^2} \quad (3.78)$$

obtemos

$$\langle \mathbf{p} \times \mathbf{N} \rangle_{i'} = -\frac{C\mu\varepsilon\pi \operatorname{sen}^2\alpha}{2\tau a^2 (1-\varepsilon^2)^2}. \quad (3.79)$$

Com cálculos análogos aos anteriores, pode-se mostrar que as outras componentes cartesianas de  $\langle \mathbf{p} \times \mathbf{N} \rangle$  são nulas. Conseqüentemente, juntando todas as contribuições para a média temporal da taxa de variação instantânea do vetor de Laplace-Runge-Lenz, obtemos, finalmente

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle &= \langle \mathbf{f} \times \boldsymbol{\ell} \rangle + \langle \mathbf{p} \times \mathbf{N} \rangle \\
&= \frac{C\mu\epsilon}{\tau a^2(1-\epsilon^2)^2} \left[ \frac{9\pi}{2} \text{sen}^2\alpha - 2\pi \right] \mathbf{i}' - \frac{C\mu\epsilon}{\tau a^2(1-\epsilon^2)^2} \frac{\pi}{2} \text{sen}^2\alpha \mathbf{i}' \\
&= \frac{2\pi C\mu\epsilon}{\tau a^2(1-\epsilon^2)^2} (2\text{sen}^2\alpha - 1) \hat{\mathbf{i}}' \tag{3.80}
\end{aligned}$$

Lembrando que o vetor de Laplace-Runge-Lenz da órbita considerada é dado por  $\mathbf{A} = k\mu\epsilon\mathbf{j}'$ , onde  $k = GM\mu$ , que  $C = (3/5)GM\mu R^2\eta$  e que o vetor unitário  $\mathbf{i}'$  pode ser escrito na forma  $\mathbf{i}' = -(\mathbf{k} \times \mathbf{j}')/\cos\alpha$ , a equação anterior pode ser escrita como

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \left\{ -\frac{3R^2\eta}{5a^2(1-\epsilon^2)^2} \frac{2\pi}{\tau} \left[ \frac{2\text{sen}^2\alpha - 1}{\cos\alpha} \right] \mathbf{k} \right\} \times \mathbf{A}, \tag{3.81}$$

resultado que nos permite identificar, finalmente, a velocidade angular de precessão do vetor  $\mathbf{A}$ ,

$$\boldsymbol{\Omega}_A = -\frac{3R^2\eta}{5a^2(1-\epsilon^2)^2} \frac{2\pi}{\tau} \left[ \frac{2\text{sen}^2\alpha - 1}{\cos\alpha} \right] \mathbf{k} \tag{3.82}$$

Por conveniência, repetimos, abaixo, a velocidade de precessão do plano da órbita, ou seja, de  $\boldsymbol{\ell}$ ,

$$\boldsymbol{\Omega}_\ell = -\frac{3R^2\eta}{5a^2(1-\epsilon^2)^2} \frac{2\pi}{\tau} \cos\alpha \mathbf{k} \tag{3.83}$$

Uma rápida inspeção nas duas últimas equações deixa evidente o fato de que as taxas de giro do momento angular e do vetor de Laplace-Runge-Lenz dependem da inclinação do plano da órbita relativa ao plano equatorial, como esperado, e, em geral, são diferentes entre si. Isso significa que à medida que o plano da órbita gira, a orientação da órbita dentro do plano varia. Na

verdade, pode-se mostrar que, dependendo da inclinação do plano da órbita relativo ao plano equatorial, a órbita do satélite pode avançar, retroceder ou mesmo permanecer inalterada dentro do plano inclinado.

As velocidades de precessão obtidas nesse capítulo,  $\Omega_\ell$  e  $\Omega_A$  são quantidades úteis no estudo de órbitas não equatoriais de satélites em torno de planetas cujas distribuições de massa não possuem simetria esférica perfeita. Certamente, é possível relacionar tais taxas de variação com alguns dos elementos das órbitas, mas isso já exige um aprofundamento em mecânica celeste que está fora do escopo desta tese. Nesse capítulo, nosso objetivo principal foi apenas mostrar como com conceitos tão básicos de mecânica clássica e ferramentas tão rudimentares do cálculo diferencial e integral é possível discutir propriedades tão interessantes de órbitas planetárias.

### 3.4 Comentários finais

Nesse capítulo, baseando-nos nos métodos apresentados no capítulo anterior, nos propusemos a estudar os efeitos do achatamento da Terra no movimento de satélites terrestres em órbitas não-equatoriais. Com esse objetivo, calculamos inicialmente a primeira correção ao potencial gravitacional da Terra causada pela sua não-esfericidade, dada pelo termo de quadrupolo gravitacional. Como vimos, essa contribuição já não tem um caráter central. Por simplicidade, consideramos a Terra como um elipsóide de revolução, com raio polar ligeiramente menor do que o equatorial. No caso de uma órbita no plano do equador, por questões de simetria, o termo de quadrupolo causaria apenas uma precessão da órbita nesse plano, mas o satélite continuaria a se movimentar no plano equatorial. O cálculo da velocidade de precessão da órbita seria, nesse caso, totalmente análogo ao apresentado como exemplo no capítulo anterior.

No entanto, para uma órbita não-equatorial, mostramos que, devido ao torque causado pelo termo de quadrupolo, o momento angular do satélite precessa em torno do eixo de simetria da Terra que passa por seus polos norte e sul. Vimos que o momento angular descreve uma superfície cônica em torno desse eixo, de forma análoga ao que ocorre em movimentos particulares de

um pião sob ação da gravidade. Calculamos explicitamente a taxa de giro do plano dessa órbita não-equatorial.

Em seguida, usando o mesmo método perturbativo, estudamos a evolução temporal do vetor de Laplace-Runge-Lenz causada pelo termo de quadrupolo gravitacional (na ausência desse termo, o vetor de LRL permanece constante ao longo do tempo). Comparamos as velocidades de precessão do momento angular e do vetor de LRL, mostrando que não apenas dependem da inclinação do plano da órbita como também, em geral, não são as mesmas. Finalizamos enfatizando que, em ambos os cálculos, utilizamos um método perturbativo bastante simples, no qual avaliamos médias temporais na órbita não perturbada, já que supusemos que as precessões fossem pequenas (hipótese confirmada *a posteriori* como teste de consistência). Esse foi, talvez, o maior mérito desse capítulo, o de conseguir estudar algumas propriedades de um problema um pouco mais complexo com técnicas simples e um conhecimento básico de mecânica clássica, sem que tivéssemos que estudar mais profundamente tópicos avançados de mecânica celeste.

## Capítulo 4

### Comentários Finais

Deliberadamente, apresentamos nesta tese alguns tópicos de mecânica clássica que podem ser estudados separadamente. Como já mencionamos, a escolha desses tópicos foi feita, por um lado, com o objetivo de divulgar problemas interessantes que desempenharam um papel importante na história da mecânica e, por outro lado, devido à riqueza e, porque não dizer, à beleza desses problemas. É claro que a noção de beleza é subjetiva e o leitor pode compartilhar ou não dessa opinião. Essencialmente, foram dois os temas escolhidos, a saber, Huygens e a construção de um pêndulo isócrona e o movimento planetário. Em ambos os casos, iniciamos nossa discussão tentando fazer uma breve contextualização histórica, mostrando a longa jornada que é a consolidação de teorias e descobertas científicas.

No primeiro tema, nos aprofundamos um pouco mais do que imaginávamos sobre a vida e a obra de Huygens. Dedicamos uma longa seção ao relato de suas descobertas e seus desenvolvimentos teóricos, tentando mostrar quão vasta é a lista de tópicos abordados por ele, desde a construção dos melhores telescópios da época, com os quais desvendou o mistério de Saturno e descobriu uma de suas luas, até sua longa lista de trabalhos em matemática (geometria, teoria da probabilidade, desenvolvimento de curvas, etc.) e em física, particularmente em ótica (teoria ondulatória da luz, dupla refração, etc.), em mecânica (força centrípeta, conservação da energia mecânica, teoria das colisões, tautócrona, catenária, pêndulo composto, pêndulos acoplados,

achatamento da Terra, etc) e na construção de relógios de pêndulo. Sem dúvida alguma, Huygens merecia uma posição de maior destaque tanto na história da astronomia, quanto na história da matemática e na história da física. Nas seções seguintes, tentamos descrever o interessante caminho trilhado por Huygens para solucionar o problema da tautócrona e, a partir desse resultado, construir o pêndulo isócrono. Nessa história, o acaso jogou a favor. Porém, como o próprio Huygens pensava, a sorte ajuda mas não é tudo. Em nosso relato, tentamos deixar evidente que também a engenhosidade, a genialidade e a perseverança de Huygens se uniram de uma forma única para que ele pudesse resolver o problema da tautócrona que por tantos anos o desafiou. Em sua solução, ele teve a incrível intuição de que poderia chegar à solução desejada resolvendo um outro problema, auxiliar mas imaginário, bem mais simples e de solução conhecida. Esse é um procedimento moderno de resolver problemas, de modo que Huygens muitas vezes esteve à frente de seu tempo.

Como segundo tema, escolhemos o movimento planetário. Dois capítulos foram dedicados a esse assunto. No Capítulo 2, após um breve histórico sobre o problema de Kepler, no qual resumimos a correspondência entre Hooke e Newton que levou esse último a desenvolver a teoria da gravitação, fizemos uma discussão detalhada de forças centrais, com particular ênfase ao problema de Kepler. Para tornarmos um pouco mais completa a nossa discussão a respeito do problema de Kepler, obtivemos a solução temporal desse problema, pouco usual em livros introdutórios de mecânica, e apresentamos uma demonstração do teorema de Bertrand. Introduzimos, ainda, uma discussão sobre o chamado vetor de Laplace-Runge-Lenz, constante de movimento no problema de Kepler que tem propriedades muito interessantes, como por exemplo a de apontar sempre ao longo do eixo de simetria da órbita e ter seu módulo proporcional à excentricidade da mesma. Finalizamos o Capítulo 2 analisando o efeito de perturbações ao problema de Kepler. Mostramos como o vetor de Laplace-Runge-Lenz pode ser útil no estudo das órbitas perturbadas, em particular, no cálculo de velocidades de precessão de órbitas. Trata-se de um método poderoso, uma vez que pode ser usado para perturbações de caráter central ou não-central e que não pressupõe que as órbitas



sejam próximas de órbitas circulares, exigência comum em alguns métodos. Por questões de espaço, fizemos apenas algumas aplicações (perturbação central proporcional a  $1/r^4$  e resistência do ar), mas o método pode ser aplicado em inúmeras outras situações como, por exemplo, no efeito da reação de radiação na órbita de uma carga sob ação da força coulombiana [41], ou efeitos de correções quânticas ao potencial newtoniano [42]. Um de nossos objetivos com esse capítulo foi justamente tentar popularizar mais esse método tão poderoso, mas ao mesmo tempo não muito conhecido. No Capítulo 3, utilizando todo o aparato desenvolvido no Capítulo 2, analisamos o efeito do achatamento da Terra no movimento de satélites em órbitas não-equatoriais ao seu redor. Após calcularmos a contribuição de quadrupolo ao potencial gravitacional da Terra oblata, calculamos as taxas de giro do momento angular do satélite e do vetor de Laplace-Runge-Lenz. Lembre-se de que o momento angular do satélite nos dá informação sobre a orientação do plano da órbita e o vetor de Laplace-Runge-Lenz nos dá informações da orientação da órbita em seu plano. Finalizamos, chamando a atenção para o fato de que, enquanto o plano da órbita precessa, dependendo da inclinação desse plano relativamente ao plano equatorial, a órbita pode mudar sua orientação dentro do plano, avançando ou retrocedendo, e pode até mesmo ficar fixa relativa ao plano.

Introduzimos, ainda, dois apêndices, que não só ajudam na consolidação da teoria apresentada no Capítulo 1, como também possuem propostas a serem levadas ao ensino médio, como discutiremos a seguir.

Para finalizar, gostaríamos de comentar a respeito de um ponto muito importante de nosso trabalho, a saber, o de como essa tese pode ser utilizada e para que público. Sendo uma dissertação de mestrado profissionalizante em ensino de física, cabem as perguntas: quem pode se beneficiar com essa tese, alunos, professores? E de que forma ela deve ser utilizada? Claramente, essa tese tem duas partes endereçadas a públicos diferentes.

Em relação à primeira parte da tese, as maravilhosas descobertas de Huygens, seus conflitos e relações, enfim, todo o conteúdo do Capítulo 1 pode ser discutido e analisado na íntegra dentro de sala de aula do ensino médio. Nesse sentido, o material exposto nesse capítulo pode enriquecer

muito as aulas relativas a oscilações e problemas de mecânica da partícula, uma vez que nenhum livro do ensino médio, até onde vai nosso conhecimento, aborda essas questões. Na maioria das vezes Huygens é lembrado, de forma abreviada, apenas por ter seu nome atribuído a um princípio na propagação de ondas. O problema do pêndulo cicloidal e toda a bela história que o cerca, raramente é apresentado até mesmo em disciplinas de mecânica da partícula ministradas em cursos de bacharelado em física, nos quais os alunos já dominam bastante o cálculo diferencial e integral. Nesse sentido, é muito gratificante perceber que podemos apresentar no nível do ensino médio a solução da curva tautócrona, problema que marcou sua época na história da mecânica e desafiou mentes prodigiosas dessa época. Provocar um desafio na mente dos alunos do ensino médio com esse mesmo problema é, no mínimo, uma boa tentativa para motivá-los ao estudo da física e da matemática. Vale enfatizar que apresentamos várias soluções diferentes para o problema da tautócrona, quatro para sermos mais precisos. Duas delas, a saber, a solução do próprio Huygens (apresentada no corpo do Capítulo 2) e a terceira solução apresentada no Apêndice A podem ser ensinadas sem problema algum em escolas do ensino médio. Um pequeno artigo sobre isso, incluindo nossa discussão sobre o pêndulo cônico isócrono, está em fase de preparação [?].

Em relação à segunda parte, é bem verdade que o conteúdo dos Capítulos 2 e 3 estão mais direcionados a alunos de licenciatura ou bacharelado em física servindo, por exemplo, como complemento de seus cursos de mecânica da partícula. No entanto, professores do ensino médio, particularmente aqueles que estão se reciclando ou fazendo mestrado profissionalizante, utilizarão indiretamente o conteúdo desses capítulos em sala de aula. Certamente, um professor que costumava dar, no máximo, uma ou duas aulas sobre a teoria da gravitação universal, após ler (e dominar) os capítulos 2 e 3 desta tese se sentirá muito mais seguro no assunto e, mesmo evitando usar matemática avançada em sala de aula, poderá passar informações preciosas aos alunos. Isso poderá motivá-los a estudarem mais profundamente o problema do movimento planetário, tema tão rico, cheio de nuances e sutilezas, e que, justamente por isso, exerce esse mágico fascínio sobre todos nós.

# Apêndice A

## Período de um pêndulo simples

O objetivo desta seção é calcular o período de um pêndulo simples qualquer que seja o valor da amplitude de suas oscilações. A Figura A.1 mostra um pêndulo simples constituído por um fio ideal de comprimento  $\ell$  e uma esfera de massa  $m$  e dimensões desprezíveis presa no extremo inferior do fio, cujo extremo superior está preso a um suporte fixo, tomado como origem dos eixos cartesianos. Seja  $\theta_0$  a amplitude das oscilações e  $\theta$  o ângulo entre o fio e a vertical em um instante genérico. Na figura, estão marcadas ainda todas as forças que atuam sobre a esfera, a saber, seu peso  $m\mathbf{g}$  e a tração do fio  $\mathbf{T}$ .

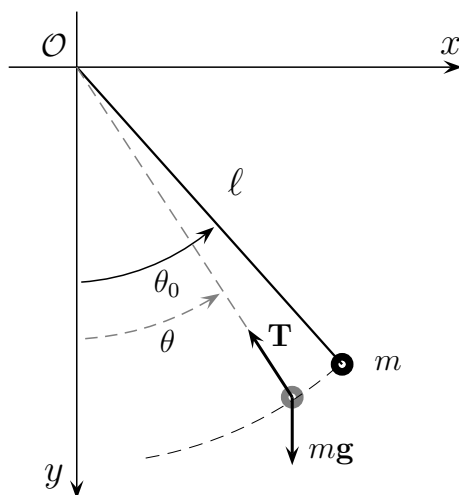


Figura A.1: Pêndulo simples de comprimento  $\ell$  e amplitude  $\theta_0$ .

Sendo  $U(\theta)$  a energia potencial gravitacional, com a escolha  $U(\pi/2) = 0$ ,

a lei da conservação da energia mecânica do sistema nos permite escrever,

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell\cos\theta = -mg\ell\cos\theta_0 . \quad (\text{A.1})$$

onde usamos o fato de que  $E = -mg\ell\cos\theta_0$ , uma vez que para  $\theta = \theta_0$  a velocidade do pêndulo é nula. Temos, então,

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0)} . \quad (\text{A.2})$$

Por argumentos de simetria, é fácil verificar que o intervalo de tempo transcorrido desde um instante em que o pêndulo se encontra com inclinação máxima, por exemplo, quando  $\theta = \theta_0$ , até o instante em que a esfera atinge o ponto mais baixo de sua trajetória pela primeira vez é igual a um quarto do período das oscilações. Denotando por  $\tau$  o período, a última equação nos permite escrever

$$\frac{\tau}{4} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} d\theta . \quad (\text{A.3})$$

Essa integral não pode ser expressa em termos de funções elementares, mas pode ser reescrita como uma integral elíptica de primeira espécie. Usando a identidade trigonométrica  $\text{sen}^2(\alpha/2) = (1 - \cos\alpha)/2$ , reescrevemos a equação anterior na forma

$$\tau = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \text{sen}^2(\theta/2)}} , \quad (\text{A.4})$$

onde definimos  $k = \text{sen}(\theta_0/2)$ . Fazendo a mudança de variável de integração

$$\text{sen}(\theta/2) = k \text{sen}\phi \quad \Longrightarrow \quad \cos(\theta/2) \frac{d\theta}{2} = k \cos\phi d\phi , \quad (\text{A.5})$$

obtemos, para o período,

$$\tau(\theta_0) = \frac{2\tau_0}{\pi} K(\text{sen}^2(\theta_0/2)) , \quad (\text{A.6})$$

onde  $\tau_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$  é o período do pêndulo para pequenas oscilações e  $K$  é a integral elíptica completa de primeira espécie, definida como

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-x^2\text{sen}\phi}}. \quad (\text{A.7})$$

Expandindo a expressão anterior em série de Taylor e integrando termo a termo, pode-se mostrar que

$$K(x) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \frac{1^2}{2^2} x^2 + \frac{1^2 \times 3^2}{2^2 \times 4^2} x^4 + \dots \right] \quad (\text{A.8})$$

Substituindo esse resultado na equação (A.6), obtemos, finalmente, o resultado desejado,

$$\frac{\tau(\theta_0)}{\tau_0} = 1 + \frac{1^2}{2^2} \text{sen}^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{1^2 \times 3^2}{2^2 \times 4^2} \text{sen}^4 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) + \dots \quad (\text{A.9})$$

Na última equação, escrevemos apenas os primeiros termos da série. No entanto, da maneira como eles foram escritos, fica evidente qual é a forma do n-ésimo termo da série.

## Apêndice B

### Tautócrona: solução padrão

Nesta seção mostraremos que o período das oscilações de uma partícula que se move sobre uma superfície cicloidial lisa sob a ação da gravidade independe da posição de onde é abandonada na superfície. Ou seja, mostraremos que a ciclóide é a curva tautócrona. A solução que apresentaremos faz uso do cálculo diferencial e integral. Para cumprirmos nosso objetivo, necessitaremos das equações paramétricas da ciclóide. A Figura B.1 mostra uma ciclóide e seu círculo geratriz correspondente, sendo  $P(\theta)$  um ponto genérico dessa curva caracterizado pelo ângulo  $\theta$  de giro do círculo geratriz a partir da posição central (na qual o centro do círculo está no eixo  $\mathcal{OY}$ ).

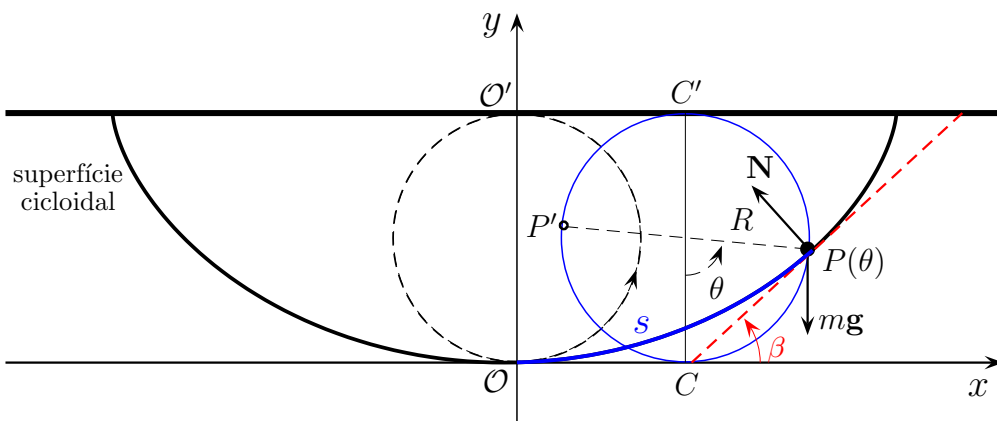


Figura B.1: Partícula em uma posição genérica de seu movimento sobre uma superfície cicloidial lisa sob a ação de seu peso e da reação normal da superfície.

Como, por definição, o círculo geratriz rola sem deslizar com relação à superfície plana com a qual está em contato, podemos afirmar que a distância de  $\mathcal{O}'$  a  $C'$  é igual ao comprimento de arco  $\widehat{P'C'}$ , ou seja,  $\overline{\mathcal{O}'C'} = \widehat{P'C'}$ . Em contrapartida, vemos da figura que  $\widehat{P'C'} = \widehat{PC} = R\theta$ , de modo que podemos escrever  $\overline{\mathcal{O}C} = \overline{\mathcal{O}'C'} = R\theta$ . Consequentemente, a coordenada  $x$  do ponto  $P(\theta)$  é dada por  $x(\theta) = \overline{\mathcal{O}C} + R \operatorname{sen}\theta$ , enquanto a coordenada  $y$ , por  $y(\theta) = R - R \operatorname{cos}\theta$ . Lembrando que  $\overline{\mathcal{O}C} = R\theta$ , podemos, finalmente, escrever as equações paramétricas para a cicloide,

$$x(\theta) = R(\theta + \operatorname{sen}\theta) , \quad (\text{B.1})$$

$$y(\theta) = R(1 - \operatorname{cos}\theta) . \quad (\text{B.2})$$

onde  $R$  é o raio do círculo geratriz da cicloide.

Definimos a coordenada  $s$  ao longo da cicloide tomando como origem seu ponto mais baixo (origem dos eixos cartesianos) como sendo igual ao comprimento de arco da origem até  $P(\theta)$ , caso  $P(\theta)$  esteja à direita da origem, e igual a menos o comprimento de arco da origem até  $P(\theta)$ , caso  $P(\theta)$  esteja à esquerda da origem. O valor de  $s$  correspondente ao ponto  $P(\theta)$  marcado na figura é positivo e vale o comprimento de arco desenhado em azul.

Para um comprimento de arco  $ds$  infinitesimal, temos

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 , \\ &= R^2 [(1 + \operatorname{cos}\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta] (d\theta)^2 \\ &= 4R^2 \operatorname{cos}^2(\theta/2) (d\theta)^2 , \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde usamos a identidade  $1 + \operatorname{cos}\theta = 2\operatorname{cos}^2(\theta/2)$ . Temos, então,

$$ds = 2R \operatorname{cos}(\theta/2) d\theta \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi) . \quad (\text{B.4})$$

Integrando desde a origem até um ponto arbitrário da cicloide, obtemos

$$s = \int_0^\theta 2R \operatorname{cos}(\theta'/2) d\theta' = 4R \operatorname{sen}(\theta/2) . \quad (\text{B.5})$$

Um pequeno comentário é oportuno nesse momento. Observe que fazendo

$\theta = \pm\pi/2$  temos  $s = \pm 4R$ , de modo que ao retificarmos a cicloide completa obtemos  $s(\pi/2) - s(-\pi/2) = 8R$ , de acordo com o resultado encontrado no texto utilizando o método de Huygens.

Para estudarmos o movimento da partícula sobre a superfície cicloidal, devemos aplicar a segunda lei de Newton. No entanto, para nossos propósitos, basta considerarmos a componente tangencial, o que nos leva à equação

$$\ddot{s} = -g \operatorname{sen}\beta , \quad (\text{B.6})$$

onde, por definição,  $\operatorname{tg}\beta$  é o coeficiente angular da reta tangente à cicloide no ponto  $P(\theta)$ . Devemos, então, relacionar  $\beta$  com  $\theta$ , já que a equação (B.5) nos dá  $s$  em função de  $\theta$ . Com esse objetivo, note que, por definição,  $\operatorname{tg}\beta = dy/dx$ , de modo que, após usarmos as equações paramétricas da cicloide, obtemos

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{2 \operatorname{sen}(\theta/2) \cos(\theta/2)}{2 \cos^2(\theta/2)} = \operatorname{tg}(\theta/2) , \quad (\text{B.7})$$

ou seja, no intervalo de valores desejados, concluímos que

$$\beta = \frac{\theta}{2} . \quad (\text{B.8})$$

Utilizando esse último resultado, juntamente com as equações (B.5) e (B.6), obtemos de imediato a equação diferencial satisfeita por  $s$ ,

$$\ddot{s} + \frac{g}{4R} s = 0 , \quad (\text{B.9})$$

que identificamos como a equação diferencial de movimento de um oscilador harmônico simples na coordenada  $s$ . Portanto, concluímos que o período independe do ponto de onde o corpo é abandonado e vale  $\tau = 2\pi \sqrt{4R/g}$ .



## Apêndice C

### Tautócrona: solução híbrida

Neste apêndice, mostraremos novamente que a cicloide é a tautócrona, mas o faremos por meio de um procedimento alternativo. Trata-se de uma solução mais simples do que a anterior, por utilizar de forma mais parcimoniosa o cálculo integral. Seguiremos o desenvolvimento apresentado em [19]. Na verdade, faremos um procedimento híbrido, que se baseia inicialmente em algumas ideias geométricas utilizadas por Huygens, mas não deixa de lançar mão de conhecimentos rudimentares de cálculo diferencial e integral. Por questões de completeza, começaremos com o cálculo da componente vertical da velocidade da partícula (discutido anteriormente no Capítulo 1) e, por esse motivo, repetimos a figura apresentada naquele capítulo.

A Figura C.1 mostra um pequeno corpo que é abandonado sobre uma superfície cicloidal lisa a partir do repouso de um altura  $H$  do ponto mais baixo dessa curva. Em um instante genérico,  $t$ , sua altura é  $y$ , de modo que, desde o instante inicial, o corpo desceu de uma altura  $(H - y)$ .

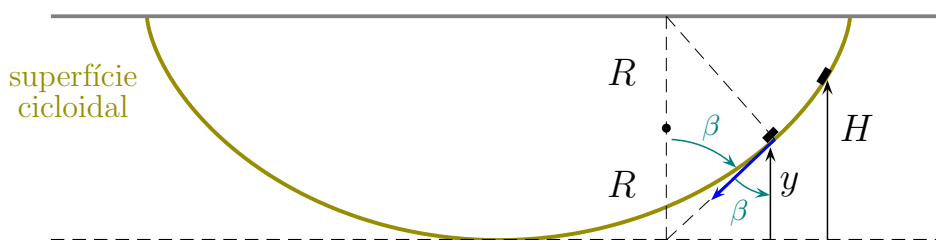


Figura C.1: Partícula se movendo sobre uma superfície cicloidal lisa.

Da lei da conservação de energia, temos

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(H - y) \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{2g(H - y)} . \quad (\text{C.1})$$

Como a velocidade da partícula é sempre tangente à trajetória, a componente vertical de sua velocidade ( $v_y$ ) é dada por

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\sqrt{2g(H - y)} \cos\beta , \quad (\text{C.2})$$

onde o ângulo  $\beta$  está representado na Figura C.1. O sinal negativo surge por estarmos analisando o movimento da partícula em sua descida. Para obtermos uma equação diferencial para  $y$ , precisaremos, então, relacionar as variáveis  $\beta$  e  $y$ . Das propriedades da cicloide, sabemos que se traçarmos de um ponto da trajetória cicloidial da partícula as retas tangente e perpendicular à cicloide nesse ponto, elas passarão pelos pontos mais baixo e mais alto do círculo geratriz, respectivamente, como indicam as linhas tracejadas da Figura C.1. Consequentemente, podemos escrever

$$(2R \cos\beta) \cos\beta = y \quad \Longrightarrow \quad \cos\beta = \sqrt{\frac{y}{2R}} . \quad (\text{C.3})$$

Substituindo esse resultado em (C.2), temos

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{(H - y)y} . \quad (\text{C.4})$$

Por argumentos de simetria, é imediato perceber que o intervalo de tempo transcorrido desde o instante inicial até o instante em que a partícula atinge o ponto mais baixo da superfície cicloidial pela primeira vez é  $\tau/4$ , onde  $\tau$  é o período de suas oscilações. Assim, integrando a última equação, obtemos

$$\int_H^0 \frac{dy}{\sqrt{(H - y)y}} = -\sqrt{\frac{g}{R}} \int_0^{\tau/4} dt ,$$

donde,

$$\tau = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^H \frac{dy}{\sqrt{(H - y)y}} . \quad (\text{C.5})$$

Não é necessário resolver a integral para mostrarmos que o período  $\tau$  depende de  $H$ . De fato, basta definirmos a variável adimensional  $\eta := h/H$ , o que nos permite escrever

$$\tau = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta)\eta}} , \quad (\text{C.6})$$

resultado que deixa evidente o fato de que o período não depende de  $H$ , uma vez que  $H$  não aparece em lugar nenhum nessa fórmula (note que a integração fornece apenas um fator numérico).

No entanto, se desejarmos saber o valor do período das oscilações, devemos efetuar a integração. Com esse objetivo, observamos inicialmente que

$$(1-\eta)\eta = \frac{1}{4} - \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 , \quad (\text{C.7})$$

o que nos sugere fazer a seguinte mudança de variáveis,

$$\eta - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{sen}\theta , \implies d\eta = \frac{1}{2} \text{cos}\theta d\theta .$$

Com essa mudança de variáveis, temos

$$\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta)\eta}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{cos}\theta d\theta}{\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}} = \pi . \quad (\text{C.8})$$

Substituindo o último resultado na equação (C.6), obtemos, finalmente

$$\tau = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}} . \quad (\text{C.9})$$

## Apêndice D

# Tautócrona: uma solução para o ensino médio

Faremos, neste apêndice, a quarta demonstração de que a cicloide é a curva tautócrona. Apenas lembrando, a primeira demonstração e, de longe a mais engenhosa, corresponde à solução feita por Huygens e apresentada no Capítulo 1. A segunda solução foi apresentada no Apêndice B e se baseou na segunda lei de Newton e na utilização de cálculo diferencial e integral. A terceira solução foi apresentada no Apêndice C e se trata de uma solução na qual se utilizam alguns argumentos geométricos feitos por Huygens juntamente com conhecimentos rudimentares de cálculo integral. Aqui, nossa proposta é utilizar apenas conhecimentos de matemática e física lecionados no ensino médio, fornecendo, desse modo, uma solução alternativa à de Huygens, para aqueles que desejam evitar derivadas e integrais.

Nossa solução consiste de três etapas. Inicialmente, mostraremos que o ângulo que a reta tangente à cicloide faz com a horizontal é sempre metade do ângulo girado pelo círculo geratriz a partir da posição em que esse círculo está no ponto médio da cicloide. Ou seja, demonstraremos geometricamente que  $\beta = \theta/2$ , com  $\beta$  e  $\theta$  definidos na Figura D.1. Em seguida, estabeleceremos a relação  $s = 4R \operatorname{sen} \beta$  sem fazer uso explícito de métodos de integração. Por fim, aplicando a segunda lei de Newton, mostraremos que a equação de movimento de uma partícula deslizando sobre uma superfície cicloidal

é equivalente à de um oscilador harmônico simples. Isso completa nossa demonstração, uma vez que são bem conhecidas todas as características do movimento harmônico simples, em particular, o fato de que o período de suas oscilações não dependem da amplitude das mesmas.

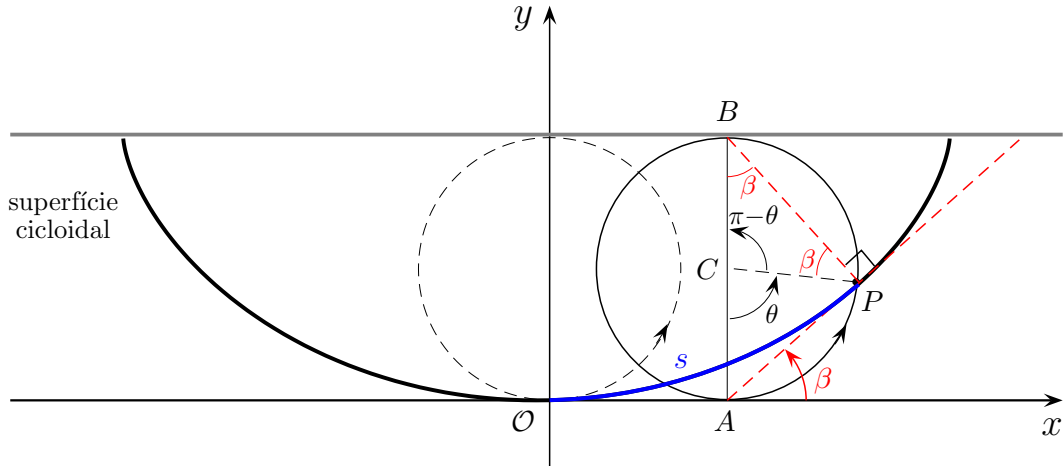


Figura D.1: Partícula em uma posição genérica de sua trajetória cicloidial e o círculo geratriz de raio  $R$ . A figura mostra o ângulo  $\beta$  que a reta tangente à cicloide na posição da partícula faz com a horizontal e o ângulo  $\theta$  girado pelo círculo geratriz, medido a partir da direção vertical, correspondente a essa posição.

Na Figura D.1 estão indicados os ângulos  $\beta$  e  $\theta$  definidos anteriormente. Devido à propriedade fundamental da cicloide, a reta tangente à superfície cicloidial em  $P$ , que forma um ângulo  $\beta$  com o eixo  $\mathcal{O}x$ , intersecta esse eixo no ponto  $A$ . Sabemos, também, que a reta que parte do ponto  $P$  e intersecta a circunferência no ponto  $B$  é perpendicular à reta tangente descrita em  $P$ . Note, então, que  $\overline{AB}$  é perpendicular ao eixo  $\mathcal{O}x$  e  $\overline{AP}$  é perpendicular a  $\overline{PB}$ , de modo que

$$\widehat{ABP} = \beta , \quad (\text{D.1})$$

Além disso, como o triângulo  $CPB$  é isósceles, pois  $\overline{CB} = \overline{CP}$ , temos as igualdades

$$\widehat{CPB} = \widehat{CBP} = \beta , \quad (\text{D.2})$$

Usando o fato de que a soma dos ângulos internos do triângulo  $CPB$  deve

ser igual a  $\pi$ , obtemos

$$\beta + \beta + (\pi - \theta) = \pi \implies \beta = \theta/2. \quad (\text{D.3})$$

Passemos, agora, ao cálculo da coordenada  $s$  da cicloide em função do ângulo  $\beta$ . Com esse objetivo, é conveniente relembrarmos a definição de raio de curvatura  $\rho$  e centro de curvatura  $C$  associados a um ponto de uma curva. Isso será feito com o auxílio da Figura D.2.

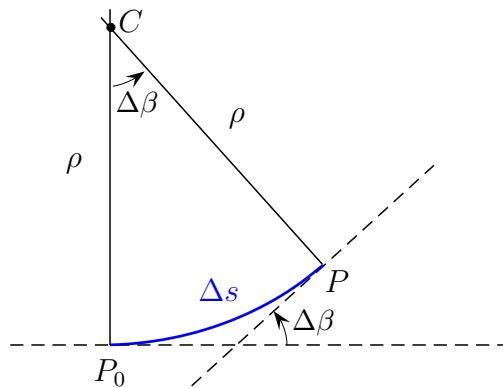


Figura D.2: Trecho da curva em consideração entre dois pontos próximos,  $P_0$  e  $P$ , de comprimento de arco  $\Delta s$ , raio de curvatura  $\rho$  e centro de curvatura  $C$ , e o ângulo  $\Delta\beta$  entre as retas tangentes à curva em  $P_0$  e  $P$ , respectivamente.

Tracemos as retas tangentes à curva em consideração em dois pontos muito próximos,  $P_0$  e  $P$ . Tracemos, então, as retas perpendiculares a essas duas retas tangentes passando por esses mesmos pontos. O ponto de encontro dessas retas, ponto  $C$  da Figura D.2, é o centro de curvatura da curva no ponto  $P$  (ou  $P_0$ , pois no limite em que  $\Delta s \rightarrow 0$ , temos  $P_0 \rightarrow P$ ). A distância de  $C$  ao ponto  $P$  é o chamado raio de curvatura da curva no ponto  $P$ . Por definição, podemos então escrever

$$\Delta s = \rho \Delta\beta. \quad (\text{D.4})$$

No caso em que a curva em consideração é uma cicloide, como o círculo geratriz possui movimento de rotação pura em torno de um eixo instantâneo de rotação que passa pelo ponto de contato desse círculo com a superfície

plana, podemos escrever o mesmo  $\Delta s$  da seguinte forma

$$\Delta s = b \Delta\theta \quad , \quad (D.5)$$

onde definimos  $b$  como a distância do ponto  $P$  da trajetória cicloidal ao eixo instantâneo de rotação, ou seja,  $b = \overline{PB}$  na Figura D.1, sendo  $\Delta\theta$  o ângulo girado pelo círculo geratriz correspondente à variação  $\Delta\beta$  do ângulo girado pela reta tangente à curva. Igualando as duas últimas expressões para  $\Delta s$ , obtemos

$$b \Delta\theta = \rho \Delta\beta \quad . \quad (D.6)$$

Lembrando que em uma cicloide  $\Delta\theta = 2\Delta\beta$ , resultado que segue imediatamente da equação (D.3), concluímos que

$$\rho = 2b \quad . \quad (D.7)$$

Vejam, então, como expressar  $b$  em termos de  $\beta$ , o que nos dará, diretamente,  $\rho$  em termos de  $\beta$ . Uma vez que  $b = \overline{BP}$ , e usando o fato de que o triângulo  $OPB$  da Figura D.1 é isósceles, essa figura nos permite escrever, diretamente, que

$$b = 2R \operatorname{sen} \left( \frac{\pi - \theta}{2} \right) = 2R \cos(\theta/2) = 2R \cos\beta \quad . \quad (D.8)$$

Conseqüentemente, temos <sup>1</sup>

$$\Delta s = \rho \Delta\beta = 2b \Delta\beta = 4R \cos\beta \Delta\beta \quad . \quad (D.9)$$

Da propriedade trigonométrica

$$\operatorname{sen}(\beta + \Delta\beta) = \operatorname{sen}\beta \cos(\Delta\beta) + \operatorname{sen}(\Delta\beta) \cos\beta \quad , \quad (D.10)$$

---

<sup>1</sup>Na verdade, para obtermos a equação (D.9) não é necessário introduzirmos o raio de curvatura da cicloide. No entanto, isso foi feito por acharmos interessante mostrar que, na cicloide,  $\rho = 2b$ .

com  $\Delta\beta$  muito pequeno ( $\Delta\beta \rightarrow 0$ ), podemos escrever

$$\text{sen}(\beta + \Delta\beta) - \text{sen}\beta = \cos\beta(\Delta\beta) \quad (\text{D.11})$$

ou seja,

$$\Delta(\text{sen}\beta) = \cos\beta(\Delta\beta) \quad , \quad (\text{D.12})$$

Substituindo esse resultado na equação (D.9), obtemos

$$\Delta s = 4R \Delta(\text{sen}\beta) \quad . \quad (\text{D.13})$$

Isso significa que ao subdividirmos a curva em  $N$  trechos muito pequenos ( $N$  bastante grande), de comprimentos de arco  $\Delta s_n = s_{n+1} - s_n$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots, N + 1$ , onde  $s_n = s(\beta_n)$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} s_1 - s_0 &= 4R \text{sen}\beta_1 - 4R \text{sen}\beta_0 \\ s_2 - s_1 &= 4R \text{sen}\beta_2 - 4R \text{sen}\beta_1 \\ s_3 - s_2 &= 4R \text{sen}\beta_3 - 4R \text{sen}\beta_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Somando as  $n$  primeiras equações, obtemos

$$s_n - s_0 = 4R \text{sen}\beta_n - 4R \text{sen}\beta_0 \quad . \quad (\text{D.15})$$

Escolhendo  $\beta_0 = 0$  e  $s_0 = 0$ , temos, então,

$$s_n = s(\beta_n) = 4R \text{sen}\beta_n \quad . \quad (\text{D.16})$$

Ao tomarmos o limite em que  $N \rightarrow \infty$ ,  $s_n$  e  $\beta_n$  se tornam variáveis contínuas, de modo que podemos escrever

$$s(\beta) = 4R \text{sen}\beta \quad . \quad (\text{D.17})$$



Estamos aptos, portanto, para resolvermos o problema proposto. Utilizando, então, a segunda lei de Newton ao movimento de uma partícula deslizando sobre a superfície cicloidal lisa e considerando apenas a componente tangencial, podemos escrever

$$F_t = -mg \operatorname{sen} \beta = m a_t , \quad (\text{D.18})$$

que juntamente com a equação (D.17) nos fornece

$$a_t = -\frac{g}{4R} s . \quad (\text{D.19})$$

Essa equação pode ser escrita na forma

$$a_t = -\omega^2 s . \quad (\text{D.20})$$

onde  $\omega = \sqrt{g/(4R)}$ . Nesse momento, devemos lembrar que

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} ; \quad \text{e} \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} , \quad (\text{D.21})$$

onde  $v$  é a velocidade escalar instantânea da partícula. No entanto, a equação de movimento (D.20) é totalmente análoga à equação de movimento de um oscilador harmônico simples,  $\ddot{a}_x = -\omega^2 x$ , de modo que, por comparação, podemos afirmar que o movimento será oscilatório com período independente da amplitude e dado por  $\tau = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{4R/g}$ , como queríamos demonstrar.

## Apêndice E

# Demonstração da propriedade da parábola

Nesta seção, demonstraremos uma propriedade da parábola que foi utilizada no final do Capítulo 1 em nossa discussão sobre o pêndulo cônico isócrono. Mais especificamente, dada a parábola formada pelos pontos  $(x, y)$  tais que  $y = \alpha x^2$ , demonstraremos que a semi-reta perpendicular à parábola em um ponto arbitrário  $P_1(x_1, y_1)$  que vai desse ponto até o ponto de interseção entre essa semi-reta e o eixo  $\mathcal{O}y$  possui projeção vertical constante, isto é, independente das coordenadas de  $P_1$ . Por simplicidade, utilizaremos em nossa demonstração conceitos básicos da cinemática do movimento retilíneo uniformemente variado.

Consideremos o movimento de uma partícula ao longo do eixo  $\mathcal{O}x$  com aceleração constante  $a$ . Supondo que no instante inicial a partícula esteja na origem, a sua posição em um instante genérico será  $x(t) = (1/2)at^2$  e sua velocidade, nesse instante, será  $v(t) = at$ . Nesse tipo de movimento, é bem conhecido por qualquer aluno do ensino médio que a velocidade média no intervalo  $[t_1, t_2]$ , denotada por  $\langle v \rangle [t_1, t_2]$ , é dada por

$$\langle v \rangle [t_1, t_2] = \frac{v(t_1) + v(t_2)}{2} , \quad (\text{E.1})$$

onde  $v(t_1)$  e  $v(t_2)$  são, naturalmente, as velocidades da partícula nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ . Em um gráfico de  $x(t)$  *versus*  $t$ , interpretamos graficamente a veloci-

dade média da partícula no intervalo  $[t_1, t_2]$  como o coeficiente angular da reta secante que intersecta a curva nos pontos  $(t_1, x(t_1))$  e  $(t_2, x(t_2))$ . Segue, dessa interpretação (por um processo de limite) que a velocidade instantânea da partícula em um instante genérico  $t_1$  é dada pelo coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $x$  versus  $t$  no ponto  $(t_1, x(t_1))$ .

Em particular, considerando o intervalo  $[0, 2t_1]$ , temos

$$\langle v \rangle [0, 2t_1] = \frac{v(2t_1)}{2} = at_1 = v(t_1) \quad , \quad (\text{E.2})$$

ou seja, o coeficiente angular da reta **tangente** ao gráfico de  $x$  versus  $t$  no ponto  $(t_1, x(t_1))$  é o mesmo que o coeficiente angular da reta **secante** que passa pela origem e pelo ponto  $(2t_1, x(2t_1))$ , como ilustra a Figura E.1.

$\langle v \rangle [0, 2t_1] \quad \longrightarrow \quad$  *coeficiente angular da reta secante  $r_2$*   
 $v(t_1) \quad \longrightarrow \quad$  *coeficiente angular da reta tangente  $r_1$*

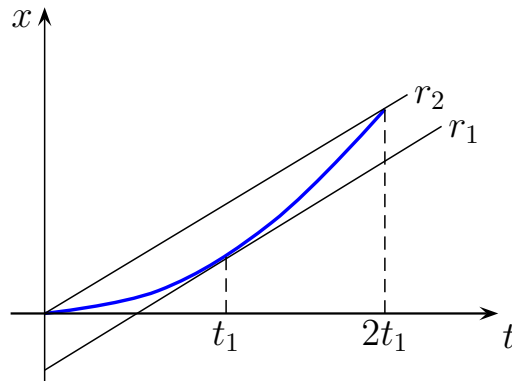


Figura E.1: Gráfico da posição da partícula em função do tempo no caso de aceleração constante  $a$  e as seguintes condições iniciais:  $x(0) = 0$  e  $v(0) = 0$ .

Vimos então, que a reta tangente à parábola no ponto de abscissa  $t_1$  é paralela à reta secante à parábola que passa pela origem e intersecta o gráfico no ponto de abscissa  $2t_1$ . Aplicaremos essa relação à próxima figura e, em seguida, demonstraremos a propriedade comentada no início desse apêndice.

A Figura E.2 mostra o gráfico de uma parábola na qual  $y = \alpha x^2$ , onde  $\alpha$  é uma constante positiva. Nela estão marcados o ponto genérico  $P(x_1, y_1)$ , a reta tangente à parábola em  $P$  (reta  $r$ ), reta perpendicular à parábola

em  $P$  (reta  $t$ ) e o ponto de interseção entre a reta  $t$  e o eixo  $\mathcal{O}y$  (ponto  $I$ ). Obviamente, as retas  $r$  e  $t$  são perpendiculares entre si.

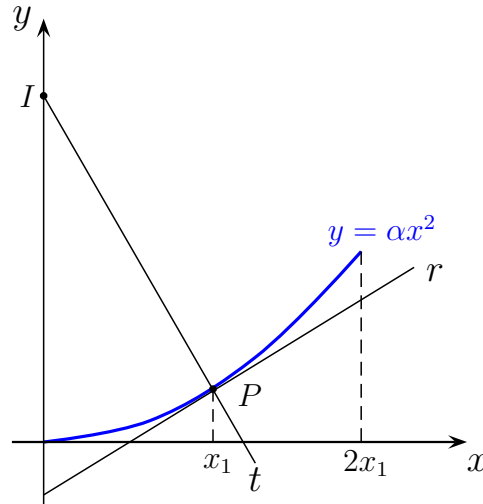


Figura E.2: A figura mostra a parábola na qual  $y = \alpha x^2$ , o ponto genérico  $P(x_1, y_1)$ , a reta tangente à parábola em  $P$  (reta  $r$ ), a reta perpendicular à parábola em  $P$  (reta  $t$ ) e o ponto  $I$  de interseção da reta  $t$  com o eixo  $\mathcal{O}y$ .

De acordo com o resultado mostrado na Figura E.1, o coeficiente angular da reta  $r$  é o mesmo que o da reta secante que passa pela origem e o ponto  $(2x_1, 4\alpha x_1^2)$ , dado por  $4\alpha x_1^2 / (2x_1) = 2\alpha x_1$ , de modo que a equação da reta  $r$  é dada por (lembre-se de que essa reta passa pelo ponto  $(x_1, \alpha x_1^2)$ )

$$\text{Reta } r : y = (2\alpha x_1)x - \alpha x_1^2 \quad (\text{E.3})$$

Como a reta  $t$  é perpendicular à reta  $r$ , seu coeficiente angular é dado por  $-1/(2\alpha x_1)$  e, com isso, a equação dessa reta é dada por

$$\text{Reta } t : y = -\frac{1}{2\alpha x_1}x + \frac{1}{2\alpha} + \alpha x_1^2 \quad (\text{E.4})$$

A partir desse último resultado, vemos que o ponto de interseção da reta  $t$  com o eixo  $\mathcal{O}y$ , ponto  $I(0, y_i)$ , tem o ordenada dada por

$$y_i = \frac{1}{2\alpha} + \alpha x_1^2 . \quad (\text{E.5})$$

Portanto, o seguimento  $\overline{PI}$  possui projeção vertical dada por

$$\begin{aligned}\overline{PI}_y &= y_i - y_1 \\ &= \frac{1}{2\alpha} + \alpha x_1^2 - \alpha x_1^2 \\ &= \frac{1}{2\alpha},\end{aligned}\tag{E.6}$$

que não depende das coordenadas do ponto  $P$ . Ou seja, é a parábola que possui a propriedade desejada que soluciona o problema do pêndulo cônico isócrono.

# Apêndice F

## Proposta de atividade experimental

Apresentamos, aqui, uma pequena proposta de atividades experimentais de baixo custo que podem ajudar na compreensão e consolidação de alguns tópicos da teoria abordada no Capítulo 1. As atividades podem ser feitas em grupo ou individualmente.

### F.1 Construindo uma cicloide

#### 1. Construção cinemática

Fixe um lápis ou caneta na extremidade de um disco (um CD por exemplo), faça-o girar sem deslizar sobre uma superfície plana horizontal até que complete uma volta. Desenhe a trajetória descrita por ele sobre uma cartolina.

#### 2. Construção algébrica

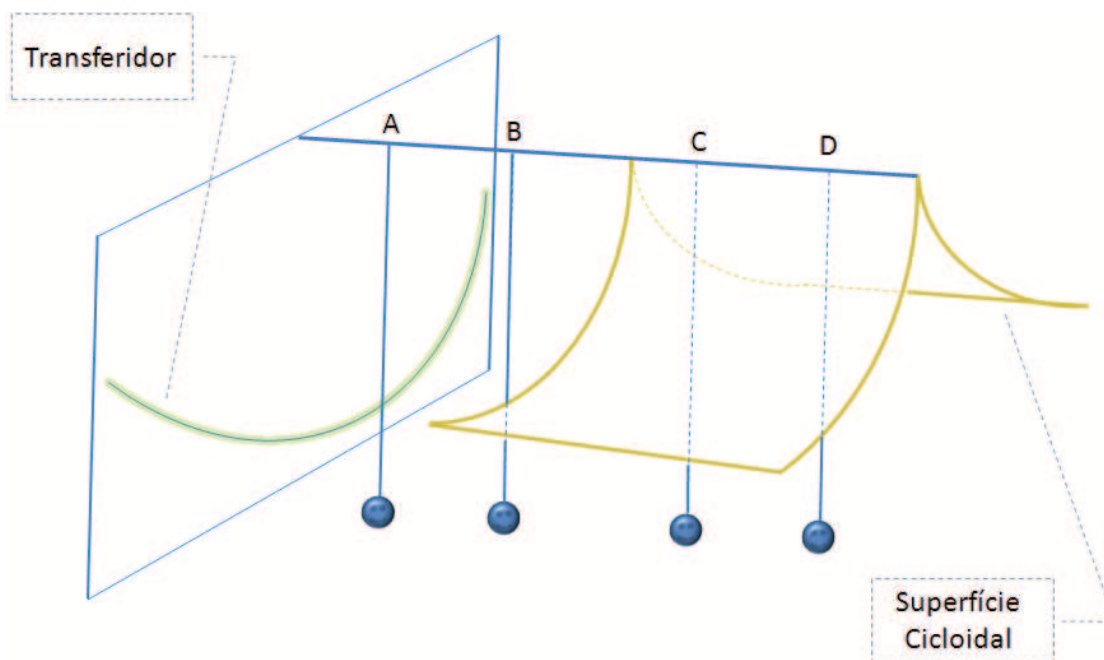
A partir das equações paramétricas da cicloide, marque, num papel milimetrado, os pontos de  $x(\theta)$  e  $y(\theta)$  escolhendo valores genéricos para  $\theta$  (em radianos), com raio  $R$  sendo igual ao raio do disco utilizado na construção cinemática anterior.

Agora, verifique que os desenhos coincidem.

As cicloides geradas poderão servir como moldes para as superfícies cicloidais a serem utilizadas como obstáculos laterais na confecção de um pêndulo ciloidal a ser construído (caso você ache pequeno o raio de um CD, pode redimensionar o problema utilizando, por exemplo, um disco de vinil).

## F.2 Construindo uma estrutura de pêndulos

Construa obstáculos cicloidais rígidos, de madeira (procure um marceneiro) ou usando folhas de alumínio. Com os obstáculos cicloidais prontos, prenda-os em uma haste que, por sua vez, deverá ser fixada a um anteparo rígido. Nesse anteparo fixe um transferidor grande e de fácil leitura. Agregue à haste quatro pêndulos de comprimento duas vezes maior do que o diâmetro do disco geratriz dos obstáculos cicloidais construídos. Verifique se a haste está suficientemente fixa, para que não esteja balançando com as oscilações dos pêndulos. Apresentamos, abaixo, um esquema simplificado da estrutura de pêndulos sugerida.



### F.3 Isocronismo do pêndulo cicloidal

De posse da estrutura de pêndulos que você acabou de construir, você realizará pequenos experimentos demonstrativos a respeito do período de pêndulos simples e pêndulos cicloidas.

1. Abandone simultaneamente os pêndulos **A** e **B** a partir do repouso e com pequenas amplitudes de oscilação (entre  $0^\circ$  e  $20^\circ$ ) mas faça isso escolhendo amplitudes diferentes para cada pêndulo. Verifique que os pêndulos **A** e **B** começam a se movimentar em fase e permanecem em fase por muitas oscilações, mostrando que, para pequenas amplitudes, o pêndulo simples é isócrono, como descoberto por Galileu. Repita muitas vezes esse procedimento, mantendo sempre pequenas amplitudes de oscilação e veja quanto tempo (medido em número de oscilações) leva para que se defasem substancialmente (de  $\pi/2$ , por exemplo, caso em que quando um deles está com amplitude máxima, o outro está na vertical).
2. Agora, abandone o pêndulo **A** com grande amplitude (ângulos próximos a  $70^\circ$  ou  $80^\circ$ , por exemplo) e, simultaneamente, o pêndulo **B** com uma amplitude tão pequena quanto no item anterior (por exemplo, menor do que  $10^\circ$ ). Verifique que os pêndulos **A** e **B** rapidamente se defasam. Veja, por exemplo, quantas oscilações de um deles se passaram até que a defasagem entre os dois fosse de  $\pi/2$  e verifique que esse número foi bem menor do que no experimento anterior. Esse experimento deixa evidente que, na verdade, o pêndulo simples não é isócrono, mas seu período depende da amplitude de oscilação.
3. Repita mais uma vez o experimento anterior, mas agora se preocupando em observar qual dos pêndulos irá se atrasar em relação ao outro. Você irá verificar que o de maior amplitude é o que se atrasa, mostrando que, quanto maior a amplitude, maior será o período das oscilações.



4. Por fim, você verificará agora o isocronismo do pêndulo cicloidal. Com esse objetivo, abandone simultaneamente o pêndulo simples **B** e o pêndulo cicloidal **C**, mas escolhendo pequenas amplitudes para o primeiro e grandes amplitudes para o segundo. Verifique que tais pêndulos permanecerão em fase por muito tempo, mesmo que suas amplitudes sejam muito diferentes entre si. Caso venham a se defasar com o passar do tempo, provavelmente é porque a superfície cicloidal não foi construída com perfeição (os comprimentos dos pêndulos e os objetos em seus extremos devem ser idênticos para que novas fontes de erros sejam evitadas).
5. Bem, nesse último item deixamos você à vontade para criar seu próprio experimento. Por exemplo, você pode construir pêndulos com comprimentos diferentes e verificar o que acontece ao repetir alguns dos procedimentos anteriores, ou pode tentar verificar de forma mais quantitativa a dependência do período com a amplitude, uma vez que você tem a expressão exata do período de um pêndulo simples para qualquer amplitude de oscilação, fórmula escrita no Capítulo 1 desta tese (e tem um transferidor na estrutura de pêndulos construída).

# Referências Bibliográficas

- [1] Gindikin S G 1988 *Tales of Physicists and Mathematicians* (Boston: Birkhäuser)
- [2] Bell A E 1947 *Christian Huygens and the Development of Science in the Seventeenth Century* (London: Billing and Sons Ltd., Guildford and Esher)
- [3] Andriess C D 2005 *Huygens: The Man Behind the Principle* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [4] Yoder J G 1988 *Unrolling Time: Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [5] Arnold V I 1990 *Huygens and Barrow, Newton and Hooke* (Berlin: Birkhäuser Verlag)
- [6] Rouse Ball W W 1908 *A Short Account of the History of Mathematics* (London: Macmillan)
- [7] Christiaan Huygens MDCLIX *SYSTEMA SATURNIUM; sive De causis mirandorum SATURNI phaenomenôn, et comite ejus PLANETA NOVO* (Hagae-Comitis, ex typographia Adriani Vlacq.)  
<<http://www.sil.si.edu/DigitalCollections/HST/Huygens/huygens-text.htm>>
- [8] Christiaan Huygens MDCXC *Traité de la Lumiere* (Leiden: Chez Pierre Vander AA, Marchand Libraire).
- [9] Christiaan Huygens MDCLXXIII *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometriae* (Paris)
- [10] Christiaan Huygens 1938 *Oeuvres Complètes* (Société Hollandaise des Sciences, Hague: Nifhoff)

- [11] Talavera L.M.B 2008 Dissertação de Mestrado *Parábola e catenária: história e aplicações* Capítulo 3: *Um famoso problema da história do cálculo* (São Paulo: USP)
- [12] Erlichson H 1997 *The Young Huygens solves the problem of elastic collisions* Am. J. Phys. **65** 149
- [13] Gobel D 1995 *Longitude* (New York: Walker Publishing Company Inc.)
- [14] Kell G S 1983 *Early observations of negative pressures in liquids* Am. J. Phys. **51** 11
- [15] Cajori F 1991 *A History of Mathematics* (New York: AMS Chelsea Publishing)
- [16] Bell E T 1948 *Los grandes matemáticos* (Buenos Aires: Editorial Losada)
- [17] Esse resultado aparece como proposição em *Horologium Oscillatorium*
- [18] As obras completas de Huygens, incluindo suas correspondências com outros matemáticos, físicos e astrônomos da época pode ser encontrada no site <<http://www.clas.ufl.edu/users/ufhatch/pages/03-sci-rev/SCI-REV-Home/resource-ref-read/sci-rev-primary/sr-prim-index.htm>>
- [19] Burrowes M, Farina C 2005 *Sobre o pêndulo isócrono de Christiaan Huygens* Revista Brasileira de Ensino de Física **27** (2) 175
- [20] Farina C 2006 *O Vetor de Laplace-Runge-Lenz no Problema de Kepler* Ca. Fís. UEFS **05** (1-2) 115
- [21] Jorge Luiz Gomes Dias 2011 Dissertação de Mestrado Profissionalizante em Física *Idealizações e violações do determinismo em mecânica newtoniana* (Rio de Janeiro: UFRJ)
- [22] Bertrand J 1873 *Mécanique analytique* C.R. Acad. Sci. **77** 849
- [23] Santos F C, Soares V, Tort A C 2011 *Uma tradução da demonstração original do teorema de Bertrand* Revista Brasileira de História da Ciência **4** 92
- [24] Lemos N A 2004 *Mecânica Analítica* (São Paulo: Editora Livraria da Física)
- [25] Arnold V I 1978 *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York: Springer-Verlag)

- [26] Goldstein H 1981 *Classical Mechanics* (New York: Addison Wesley)
- [27] José J V, Saletan E J 1998 *Classical Dynamics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [28] Brown L S 1978 *Forces giving no orbit precession* Am.J. Phys. **46** 930
- [29] Tikochinsky Y 1988 *A simplified proof of Bertrand's theorem* Am. J. Phys. **56** 1073
- [30] Zarmi Y 2002 *The Bertrand theorem revisited* Am J. Phys.**70** 446
- [31] Martínez-Romero R P, Núñez-Yépez H N, Salas-Brito A L *Comment on "The Bertrand theorem revisited"*, Am.J. Phys. **70** 1059
- [32] Santos F C, Tort A C, Soares V 2009 *Determination of the apsidal angles and Bertrand's theorem* Phys. Rev. E **79** 036605
- [33] Farina C 1985 *On the Lissajous figures for orbits* Am. J. Phys. **53** 903
- [34] Goldstein H 1975 *Prehistory of the "Runge-Lenz" vector* Am. J. Phys. **43** 737
- [35] Goldstein H 1976 *More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector* Am. J. Phys. **44** 1123
- [36] Sivardière J 1984 *Precession of elliptic orbits* Am. J. Phys. **52** 909
- [37] Aguiar C E, Barroso M F 1996 *The Runge-Lenz vector and perturbed Rutherford scattering* Am. J. Phys. **64** 1042
- [38] McDonald K T, Farina C, Tort A C 1990 *Right and Wrong Use of the Lenz Vector for Non-Newtonian Potentials* Am. J. Phys. **58** 540.
- [39] Farina C, Tort A C 1988 *A Simple Way of Evaluating the Speed of Precession of Orbits* Am. J. Phys. **56** 761.
- [40] Tort A C, Farina C, Ritter O M 1989 *Perturbed Isotropic Harmonic Oscillator* Eur. J. Phys. **10** 220
- [41] Para o caso de órbitas abertas, veja o artigo: Aguiar C E, Barone F A 2009 Am. J. Phys. **77**, 344
- [42] Farina C, Kort-Kamp W J M, Filho S M, Shapiro I L 2011 *Dynamics of the Laplace-Runge-Lenz vector in the quantum-corrected Newton gravity* arXiv:1101.5611 (astro-ph.EP)

- [43] Rutherford D E 1964 *Classical Mechanics* (University Mathematical Texts, traduzido para o castellano por Editorial DOSSAT, S.A., Madrid)
- [44] Pauli W 1926, traduzido em *Sources of Quantum Mechanics* 1968 (New York: Dover)
- [45] Borowitz S 1967 *Fundamentals of Quantum Mechanics; Particles, Waves and Wave Mechanics* (New York: W.A. Benjamin).
- [46] Schiff L I 1968 *Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill).
- [47] Kibble T W B, Berkshire F H 2005 *Classical Mechanics* (London: Imperial College Press)
- [48] Brouwer D, Clemence G. M. 1961 *Methods of Celestial Mechanics* (New York: Academic Press)