



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**  
Instituto de Física  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física  
Mestrado Profissional em Ensino de Física

## **A velocidade das ondas em águas rasas e profundas**

Anderson R. Souza

&

Carlos Eduardo Aguiar

Material instrucional associado à dissertação de mestrado de Anderson R. Souza, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro  
2011

# DEMONSTRAÇÃO DA VELOCIDADE DE FASE DAS ONDAS EM ÁGUAS PROFUNDAS E RASAS

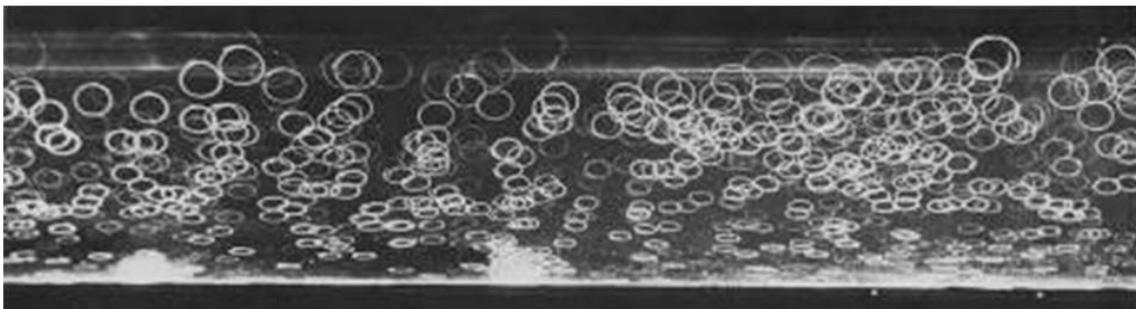
Material instrucional baseado na dissertação de mestrado “Experimentos em ondas mecânicas”, de Anderson Ribeiro de Souza, apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro em 24/02/2011.

## Resumo

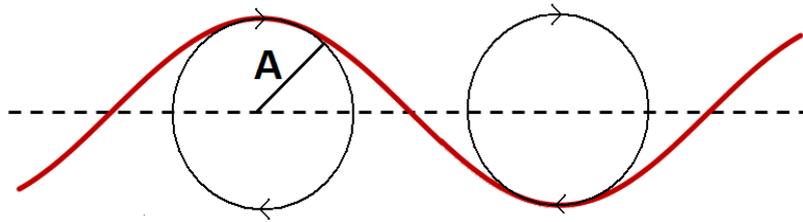
Apresentamos a seguir o cálculo da velocidade de fase de ondas na superfície da água. Consideraremos dois casos: águas profundas e rasas.

## Propagação das ondas em águas profundas

Em águas profundas as partículas próximas à superfície executam um movimento aproximadamente circular, como indicado na fotografia da figura 1 e no diagrama da figura 2.

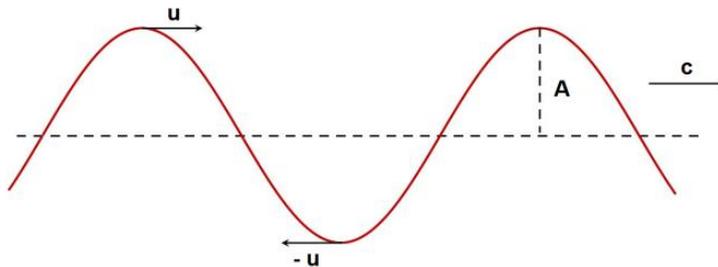


**Figura 1** Partículas próximas à superfície da água executam movimento aproximadamente circular. Conforme a profundidade aumenta, o movimento torna-se uma elipse com excentricidade cada vez maior (Dyke, 1982).



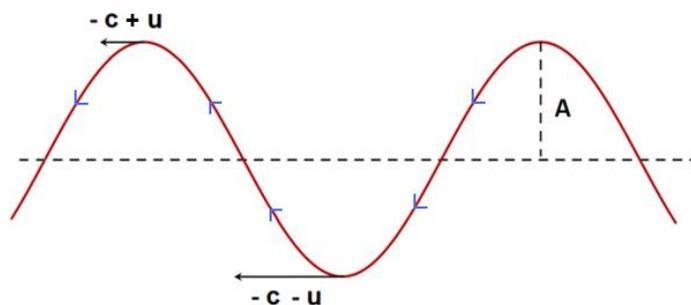
**Figura 2** Partículas próximas à superfície da água executam movimento aproximadamente circular.

Considere uma onda que se desloca para a direita com velocidade  $c$  em relação a um referencial fixo na água (figura 3). Neste referencial, as partículas que passam pelos vales e cristas da onda deslocam-se, respectivamente, com velocidades  $-u$  e  $u$ .



**Figura 3** Uma onda deslocando-se com velocidade de fase  $c$ ;  $u$  e  $-u$  são as velocidades das partículas que estão na crista e no vale desta onda, respectivamente.

Em um referencial que se movimenta junto com a onda (figura 4), as velocidades das partículas no vale e na crista da onda tornam-se, respectivamente,  $-c - u$  e  $-c + u$ .



**Figura 4** Velocidade das partículas de água na crista e no vale em um referencial que acompanha a onda.

A figura 4 exibe o fluxo estacionário da corrente de água no referencial da onda. Aplicando a relação de Bernoulli a essa corrente,

$$p + \frac{1}{2}\rho(u - c)^2 + \rho gA = p + \frac{1}{2}\rho(-u - c)^2 - \rho gA \quad (1)$$

obtemos uma relação entre as velocidades  $c$  e  $u$ ,

$$uc = gA \quad (2)$$

onde  $g$  é a aceleração de gravidade e  $A$  é a amplitude da onda.

No regime de águas profundas, as partículas executam um movimento aproximadamente circular cujo raio corresponde à amplitude  $A$  da onda, como mostra a figura 2. Desse modo, os módulos das velocidades das partículas no vale e na crista são dados por

$$u = \omega A \quad (3)$$

Reunindo as equações (2) e (3), obtemos

$$\omega c = g \quad (4)$$

Lembrando que

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad (5)$$

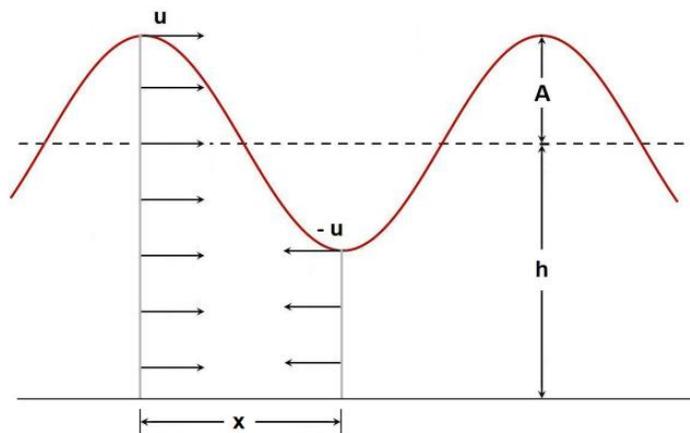
e substituindo este resultado em (4), obtemos a velocidade (de fase) das ondas em águas profundas,

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (6)$$

A equação (6) mostra que a velocidade de fase  $c$  depende do comprimento de onda  $\lambda$ . Esse fenômeno é denominado **dispersão**.

### Propagação das ondas em águas rasas

No regime de águas rasas, um fato experimental nos permite simplificar a análise: as partículas situadas numa mesma linha vertical têm todas, aproximadamente, a mesma velocidade.

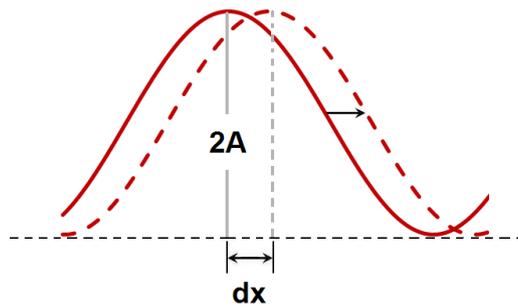


**Figura 5** Volume delimitado pela região de largura  $x$ . Em águas rasas, as partículas situadas numa mesma linha vertical apresentam velocidades aproximadamente iguais.

Analisando o fluxo da massa de água no volume de comprimento  $x$  e largura  $L$  entre uma crista a um vale adjacentes (figura 5), obtemos

$$\frac{dM}{dt} = \rho Lu(h + A) + \rho Lu(h - A) = 2\rho Luh . \quad (7)$$

Por outro lado, num intervalo de tempo infinitesimal, a onda sofre um deslocamento  $dx = c dt$ , como ilustrado pela figura 6.



**Figura 6** Deslocamento da onda num intervalo infinitesimal  $dt$ .

No intervalo  $dt$ , a variação da massa de água é dada pela equação

$$dM = (\rho L 2A) dx = (2\rho L A c) dt , \quad (8)$$

ou seja, o fluxo de massa é dado por:

$$\frac{dM}{dt} = 2\rho L A c . \quad (9)$$

Comparando as equações (7) e (9), temos

$$u = c \frac{A}{h} . \quad (10)$$

Substituindo a equação (10) na relação de Bernoulli (2), segue que a velocidade de fase  $c$  da onda em águas rasas é

$$c = \sqrt{gh} . \quad (11)$$

Neste caso, todas as ondas viajam com a mesma velocidade, ou seja, não há dispersão.