

A ÓRBITA DA LUA VISTA DO SOL

Carlos Eduardo Aguiar [carlos@if.ufrj.br]
Douglas Baroni [douglasbaroni@pop.com.br]
Carlos Farina de Souza [farina@if.ufrj.br]

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro

RESUMO

O movimento da Lua tem aspectos pouco intuitivos quando observado de um referencial fixo no Sol. Existem muitas concepções errôneas sobre este movimento, encontradas em vários textos de referência e aceitas pela maioria das pessoas como parte do senso comum. Neste trabalho nós discutimos porque as noções usuais sobre a trajetória da Lua em torno do Sol estão erradas, e apresentamos uma descrição simples da geometria da órbita lunar.

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é discutir a órbita da Lua tal como é vista de um referencial fixo no Sol. Existem várias noções intuitivas sobre esta órbita, provavelmente motivadas por analogias com problemas de natureza semelhante. Como veremos, estas noções estão frequentemente erradas. Uma possível origem para o erro é que a idéia usual de satélite enfatiza naturalmente a força que a Terra faz sobre a Lua e tende a ignorar o papel da interação Sol-Lua. O problema é que a força Sol-Lua é bem maior que a força Terra-Lua. Isso cria restrições sobre o tipo de movimento que a Lua pode apresentar quando observada do Sol, dando à órbita neste referencial um aspecto que, para a maioria das pessoas, parece surpreendente e pouco intuitivo. Nós confirmamos este último aspecto fazendo uma “pesquisa de opinião” entre alunos e professores do Instituto de Física da UFRJ. Os resultados mostraram que a grande maioria tinha uma idéia qualitativamente errada a respeito da órbita da Lua vista do Sol. O mais curioso é que o mesmo equívoco pode ser encontrado em livros-texto e enciclopédias bem conhecidos.

Esta questão já foi abordada anteriormente. Há um interessante artigo de Antonio Teixeira Jr [Tei80] que discute a trajetória da Lua vista do Sol, aponta várias fontes bibliográficas contendo equívocos a esse respeito e propõe atividades sobre o tema para sala de aula.

No presente trabalho nós discutimos um modelo simples para a órbita de um satélite vista do Sol, e analisamos em que condições ela terá o aspecto pouco intuitivo apresentado pela Lua. O modelo é implementado em uma simulação computacional que permite desenhar a órbita e estudar a sua forma. Com a simulação podemos não apenas visualizar a órbita “real” da Lua, mas, principalmente, modificá-la de modo a realçar os aspectos que a tornam tão pouco intuitiva.

Este artigo está organizado da seguinte maneira. Na seção 2 discutimos as forças que agem sobre a Lua e seu papel na definição da forma geométrica da órbita. Na seção 3 mostramos exemplos tirados de diversas publicações, onde a forma da órbita da Lua é apresentada de maneira equivocada. Na seção 4 apresentamos uma “pesquisa de opinião” sobre a órbita da Lua e discutimos os resultados. O modelo simplificado que usamos para descrever as órbitas planetárias é tratado na seção 5. A forma geométrica da órbita da Lua é analisada em detalhe na seção 6, com auxílio de simulações computacionais. Alguns comentários e observações finais estão na seção 7.

2. FORÇAS TERRA-LUA E SOL-LUA: A CURVATURA DA ÓRBITA LUNAR

As principais forças que atuam sobre a Lua são as atrações gravitacionais da Terra e do Sol. Para calcular essas forças precisamos dos seguintes dados:

- Distância média Terra-Lua: $r = 3,85 \times 10^8$ m (apogeu $4,08 \times 10^8$ m, perigeu $3,61 \times 10^8$ m)
- Distância média Terra-Sol: $R = 1,50 \times 10^{11}$ m (afélio $1,52 \times 10^{11}$ m, periélio $1,47 \times 10^{11}$ m)
- Massa do Sol: $M_S = 1,99 \times 10^{30}$ kg
- Massa da Terra: $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg
- Massa da Lua: $M_L = 7,35 \times 10^{22}$ kg
- Constante gravitacional: $G = 6,672 \times 10^{-11}$ m³/kg/s²

Vamos supor que a órbita da Lua em torno da Terra é circular (essa é uma boa aproximação; com o apogeu e perigeu dados acima vemos que o erro cometido é da ordem de 5%). Assim, a força entre a Terra e a Lua é

$$F_{TL} \approx G \frac{M_T M_L}{r^2} = 2,0 \times 10^{20} \text{ N} .$$

Para obter a força exercida pelo Sol sobre a Lua vamos proceder de maneira semelhante. A distância Terra-Lua é muito menor que a distância Terra-Sol; é menor até que a diferença entre o afélio e periélio terrestres. Portanto, com um erro inferior a 2%, podemos aproximar a distância Sol-Lua pela distância média Sol-Terra. A força Sol-Lua é, então,

$$F_{SL} \approx G \frac{M_S M_L}{R^2} = 4,4 \times 10^{20} \text{ N} .$$

A comparação dos valores obtidos acima leva a uma conclusão surpreendente: a força que o Sol faz sobre a Lua é maior que a força que a Terra faz sobre a Lua. (Note que a diferença é tão grande, $F_{SL} \sim 2F_{TL}$, que as aproximações feitas no cálculo das forças não comprometem a comparação). Em particular, isso significa que a força resultante aponta na direção do Sol quando a Lua está entre a Terra e o Sol (veja a figura 2.1).

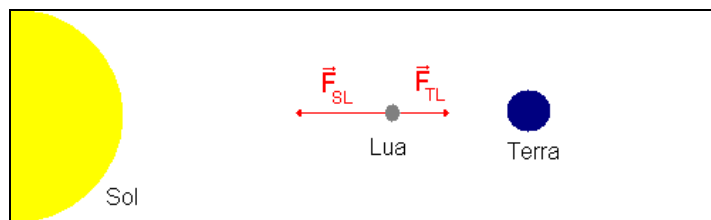


Figura 2.1. Forças sobre a Lua quando ela está entre a Terra e o Sol.

Se a força resultante aponta para o Sol, segue-se um resultado importante: quando a Lua está entre a Terra e o Sol, a concavidade da sua trajetória deve ficar voltada para o Sol, como mostra a figura 2.2.

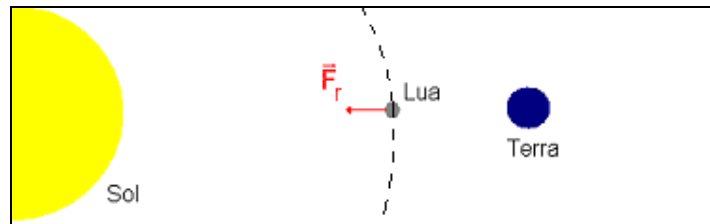


Figura 22. Curvatura da trajetória da Lua quando ela está entre a Terra e o Sol.

Este resultado sobre a curvatura é contrário à intuição de muitas pessoas. Como veremos nas próximas seções, a maioria parece acreditar que a trajetória da Lua tem formas incompatíveis com a figura 2.2. Um motivo para isso é que, em geral, tendemos a acreditar que a força Terra-Lua é muito maior que a força Sol-Lua, algo que já vimos ser falso. Outra razão é que é difícil entender como a Lua pode girar em torno da Terra mantendo a curvatura de sua trajetória sempre voltada para o Sol. Este último aspecto nos leva à questão que trataremos mais à frente: como é a órbita da Lua vista do Sol?

3. CONCEPÇÕES ERRÔNEAS SOBRE A ÓRBITA DA LUA VISTA DO SOL

A forma da órbita da Lua vista de um referencial fixo no Sol, não é um assunto geralmente abordado por livros. Mas, quando isso ocorre, freqüentemente encontramos trajetórias representadas incorretamente. Um exemplo está no livro de Alonso & Finn [Alo72], bem conhecido por alunos e professores de Física. No capítulo sobre cinemática, ao falar sobre referenciais ele exhibe a trajetória mostrada na figura 3.1.

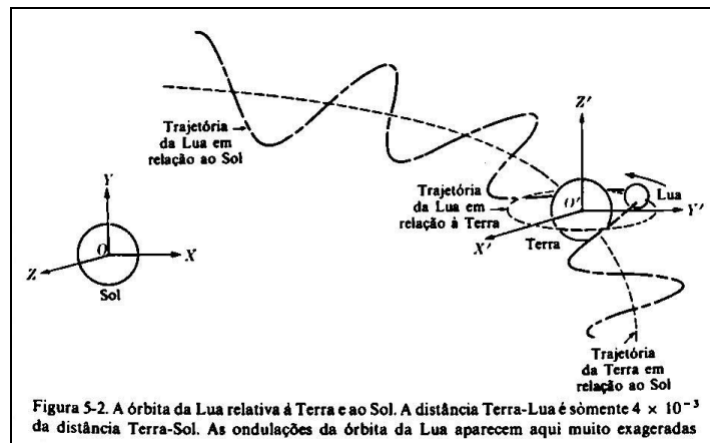


Figura 3.1. Órbita da Lua segundo Alonso e Finn [Alo72].

A trajetória mostrada na figura 3.1 não está de acordo com o que vimos na seção anterior: nos pontos em que a Lua passa entre a Terra e o Sol, a curvatura está erroneamente voltada para a Terra.

Problemas semelhantes podem ser encontrados até em publicações dedicadas à astronomia. A figura 3.2 mostra a representação da órbita da Lua que está no *Larousse Astronomy* [Cot87]. Novamente vemos que a curvatura está erroneamente representada.

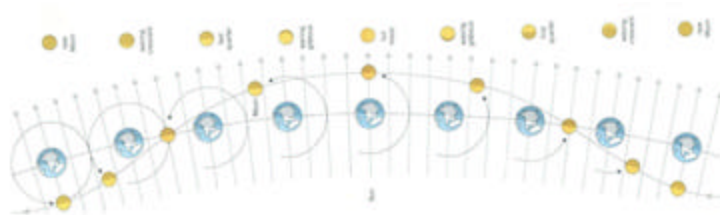


Figura 3.2. A órbita da Lua segundo o *Larousse Astronomy* [Cot87].

A internet, como não podia deixar de ser, também tem casos de órbitas mal desenhadas, inclusive em *sites* respeitáveis. Um exemplo é o do *National Maritime Museum* (UK), em <http://www.nmm.ac.uk>, de onde tiramos a figura 3.3 (no site, procurar em Learning / E-learning / GCSE Astronomy / The Sun & Moon / The Moon's movement). Podemos observar o mesmo defeito dos casos anteriores.

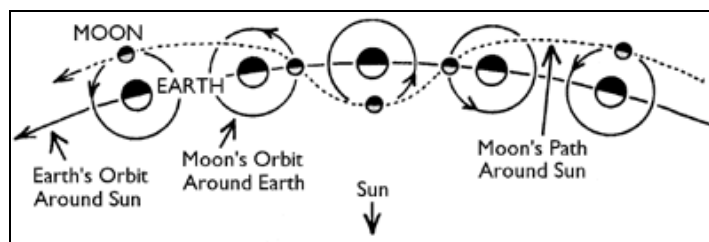


Figura 3.3. A órbita da Lua segundo o *National Maritime Museum* (<http://www.nmm.ac.uk>).

Mais exemplos de publicações que tratam da órbita da Lua de maneira equivocada podem ser encontrados em [Tei80].

4. PESQUISA DE OPINIÃO: COMO É A ÓRBITA DA LUA?

Idéias errôneas sobre a órbita da Lua não são encontradas apenas em livros ou *sites* da internet. Como veremos a seguir, mesmo em ambientes acadêmicos a maioria das pessoas tem dificuldade para imaginar como seria a órbita da Lua vista do Sol. Nós verificamos isso fazendo uma pequena pesquisa envolvendo alunos e professores do Instituto de Física da UFRJ. Também foram consultados professores de Física, Matemática, Química e Biologia do ensino médio do estado do Rio de Janeiro. O número total de participantes foi 180. A questão apresentada a eles foi a seguinte:

Qual das trajetórias abaixo melhor representa a trajetória da Lua, vista de um referencial fixo no Sol?			
a)	b)	c)	d)

Como já discutimos na seção anterior, as opções *B*, *C* e *D* são incorretas, pois em nenhuma delas a curvatura da órbita está sempre voltada para o Sol. A resposta certa é a opção *A*. A figura 4.1 mostra a distribuição das respostas. Vemos que menos de 15% estavam corretas.

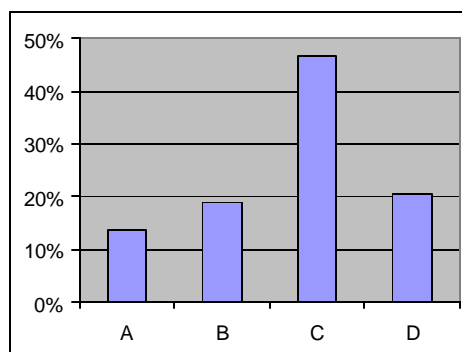


Figura 4.1. Distribuição das respostas à questão sobre a órbita da Lua

A mesma questão foi apresentada a 129 professores de Português, Geografia e História, todos do ensino médio no estado do Rio de Janeiro. Curiosamente, a taxa de acerto foi maior nesse caso: 22% deles marcaram a resposta A.

5. MODELO CINEMÁTICO DA ÓRBITA DA LUA

Como vimos nas seções anteriores, a maioria das pessoas parece ter idéias errôneas sobre como a Lua se move em torno do Sol. Um dos motivos para isso é a dificuldade em imaginar como a Lua pode girar em torno da Terra e ao mesmo tempo, ter uma trajetória que sempre se curva na direção do Sol. Para verificar que tipo de movimento a Lua descreve em torno do Sol, vamos discutir nesta seção um modelo aproximado da trajetória que permite obter resultados analíticos simples. Na próxima seção implementaremos o modelo em uma simulação computacional.

No modelo, fazemos a aproximação de que as órbitas da Terra em torno do Sol e da Lua em torno da Terra são circulares, já que elas possuem excentricidades muito pequenas (0,017 para a Terra e 0,055 para a Lua). Também supomos que todos os movimentos estão em um mesmo plano, pois a órbita da Lua em torno da Terra está inclinada de apenas uns 6° em relação à órbita da Terra em torno do Sol.

Os parâmetros do modelo são o raio e a frequência angular das órbitas da Terra (R e Ω) e da Lua (r e ω). O movimento da Lua visto do Sol é, então, a composição de dois movimentos circulares uniformes:

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\Omega t) + r \cos(\omega t) \\ y &= R \sin(\Omega t) + r \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (1)$$

Os parâmetros R , Ω , r , ω não são independentes – eles estão relacionados pela lei da gravitação. Para o sistema Terra-Sol temos que

$$GM_s = \Omega^2 R^3,$$

e para o sistema Terra-Lua,

$$GM_T = \omega^2 r^3.$$

Eliminando a constante gravitacional G nas equações acima chegamos à relação

$$\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{M_T}{M_S} \quad (2)$$

Deve ser enfatizado que a relação (2) é apenas uma aproximação, em que o sistema de três corpos Sol-Terra-Lua é tratado como dois sistemas independentes de dois corpos: Sol-Terra e Terra-Lua. O nosso modelo “cinemático” está todo baseado nessa aproximação, que tem a vantagem de simplificar enormemente a análise do problema.

Vamos usar o modelo acima para estudar em que condições a órbita da Lua terá a curvatura voltada para o Sol. Para que isso aconteça, o vetor aceleração da Lua (no referencial do Sol), $\ddot{\mathcal{F}}(t)$, deve ser tal que:

$$\ddot{\mathcal{F}}(t) \cdot \mathcal{F}(t) < 0$$

onde $\mathcal{F}(t)$ é a posição da Lua em relação ao Sol. Diferenciando as equações de movimento (1), obtemos que a aceleração é dada por

$$\begin{aligned} a_x &= -\Omega^2 R \cos(\Omega t) - \omega^2 r \cos(\omega t) \\ a_y &= -\Omega^2 R \sin(\Omega t) - \omega^2 r \sin(\omega t) \end{aligned}$$

de modo que a condição $\ddot{\mathcal{F}}(t) \cdot \mathcal{F}(t) < 0$ pode ser escrita como

$$\Omega^2 R^2 + \omega^2 r^2 + (\Omega^2 + \omega^2) R r \cos(\Omega t - \omega t) > 0.$$

Esta condição só será válida para todo instante t se

$$\Omega^2 R^2 + \omega^2 r^2 - (\Omega^2 + \omega^2) R r > 0$$

que é equivalente a

$$\Omega^2 R(R - r) > \omega^2 r(R - r).$$

Como $R > r$, obtemos finalmente que

$$\Omega^2 R > \omega^2 r. \quad (3)$$

Esta condição diz, essencialmente, que a aceleração centrípeta da Terra em torno do Sol deve ser maior que a da Lua em torno da Terra – um resultado tão simples que poderíamos tê-lo usado como ponto de partida. Combinando as equações (2) e (3) encontramos que a curvatura da órbita lunar estará sempre voltada para o Sol se

$$r > R \sqrt{\frac{M_T}{M_S}}. \quad (4)$$

É útil definir o *raio limite* que separa as trajetórias “côncavas” e “convexas”,

$$R_0 = R \sqrt{\frac{M_T}{M_S}},$$

de modo que a condição (4) pode ser escrita como $r > R_0$.

Para a Terra, o raio limite é $R_0 = 2,6 \times 10^8$ m. Como o raio (médio) da órbita lunar é $r = 3,8 \times 10^8$ m, vemos que $r > R_0$, ou seja, a curvatura da órbita da Lua deve estar sempre voltada para o Sol.

É interessante estudar o que acontece com os satélites dos outros planetas. A tabela 5.1 mostra os valores de R_0 para os 8 planetas do sistema solar (note que já rebaixamos Plutão). O número de satélites de cada planeta, e quantos têm órbitas com $r > R_0$ (na verdade, semi-eixo maior $> R_0$), também estão mostrados na tabela.

Planeta	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno
R_0 (m)	$2,3 \times 10^7$	$1,7 \times 10^8$	$2,6 \times 10^8$	$1,3 \times 10^8$	$2,4 \times 10^{10}$	$2,4 \times 10^{10}$	$1,9 \times 10^{10}$	$3,2 \times 10^{10}$
Número de satélites	0	0	1	2	63	56	27	13
Satélites com $r > R_0$	-	-	1	0	5	1	1	2

Tabela 5.1. O raio limite R_0 e a fração de satélites com $r > R_0$, para os planetas do sistema solar.

Podemos ver da tabela 5.1 que, dos 162 satélites planetários existentes no sistema solar, apenas 10 têm órbitas com $r > R_0$. Órbitas como a da Lua são muito raras no sistema solar.

É instrutivo comparar as distâncias dos satélites aos planetas, usando o raio limite R_0 (de cada planeta) como padrão. O histograma da figura 5.1 mostra como os valores de r/R_0 estão distribuídos entre os 162 satélites do sistema solar. Dois aspectos dessa distribuição chamam a atenção: 1) a grande concentração de satélites com $0,7 \times R_0 < r < R_0$ (76 dos 162 satélites estão nessa faixa) e 2) a queda abrupta observada em $r > R_0$. Não temos a menor idéia sobre a origem desses aspectos curiosos (se é que existe algum motivo para eles). É digno de nota, também, que Lua é o satélite com o segundo maior valor de r/R_0 ($=1,48$). Ela só perde para um satélite de Netuno, *S/2002N4*, que tem $r/R_0 = 1,50$.

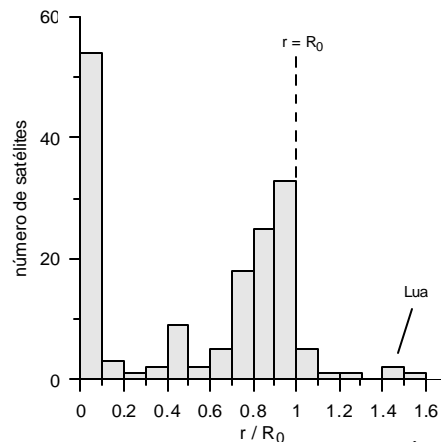


Figura 5.1. Distribuição de r/R_0 entre os satélites do sistema solar. Órbitas “côncavas” correspondem a $r/R_0 > 1$.

6. A FORMA GEOMÉTRICA DA ÓRBITA DA LUA

Nesta seção nós vamos estudar a forma geométrica da trajetória da Lua em torno do Sol. Para isso desenvolvemos uma simulação computacional baseada no modelo cinemático da seção anterior. A simulação foi construída com o *Modellus*, um programa de modelagem matemática para uso no ensino médio, desenvolvido por Vitor Teodoro [Teo03] e disponível em <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/>. O modelo usado está mostrado na figura 6.1, e vemos que ele consiste basicamente das equações para a posição $\vec{r}(t)$ e aceleração $\vec{a}(t)$ discutidas na seção 5.

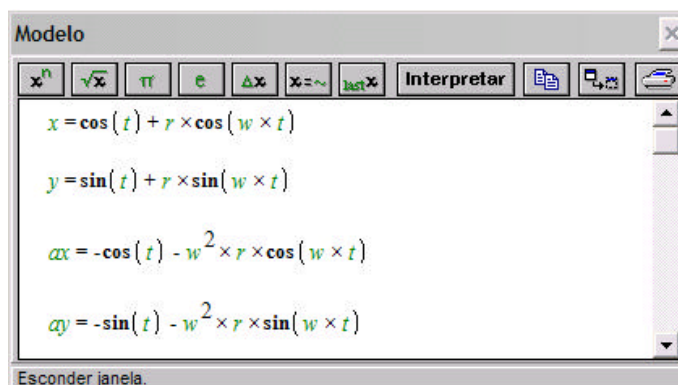


Figura 6.1. Modelo da órbita lunar no *Modellus*.

As unidades que usamos no modelo computacional são tais que $R = 1$ e $\Omega = 1$. Nessas unidades, a frequência angular da Lua vale $\omega = 13,4$ e o raio da órbita lunar é $r = 0,00256$. Em outras palavras: em um ano a Lua dá aproximadamente 13 voltas em torno da Terra, e a distância Terra-Lua é cerca de 400 vezes menor que a distância Terra-Sol. Este último resultado mostra que, se desenharmos o sistema Terra-Lua-Sol em uma mesma escala, as variações de posição da Lua em relação à Terra não se torna m visíveis, e a órbita da Lua vista do Sol se confunde com a da Terra. A simulação no *Modellus* mostra isso: na figura 6.2 está a órbita da Lua em torno do Sol, e ela parece indistinguível de um círculo (a órbita da Terra).

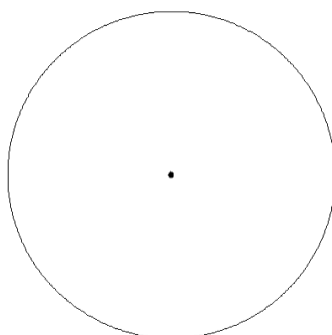


Figura 6.2. Órbita da Lua em torno do Sol, desenhada com o *Modellus*.

Mas nós sabemos, pela própria construção do modelo, que a órbita da Lua não é circular. Isso fica evidente quando estudamos o comportamento do vetor aceleração. Usando os recursos gráficos do *Modellus*, podemos mostrar a aceleração $\vec{a}(t)$ em diversos pontos da trajetória. O resultado está na figura 6.3. Vemos que o movimento da Lua tem pontos de alta aceleração intercalados com pontos de baixa aceleração. Nos primeiros, a Terra está entre a Lua e o Sol; nos últimos, a Lua está entre a Terra e o Sol. Isso significa que a trajetória da Lua tem, alternadamente, pontos de alta e baixa curvatura – nesse sentido ela se assemelha a um polígono com vértices e lados arredondados.

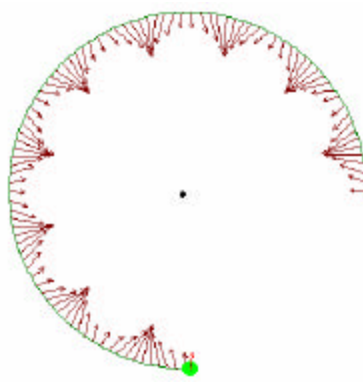


Figura 6.3. O vetor aceleração ao longo da órbita da Lua, no referencial do Sol.

O aspecto “poligonal” da órbita lunar ficaria acentuado se a sua distância à Terra fosse igual ao raio limite R_0 que discutimos na seção 5. Nesse caso a aceleração seria nula quando a Lua estivesse entre a Terra e o Sol e, portanto, na vizinhança desse ponto a trajetória seria aproximadamente uma reta. A figura 6.4 mostra essa trajetória, que é obtida tomando $r = 1/\omega^2$ na simulação do *Modellus* (lembre que o raio limite é $r = R\Omega^2/\omega^2$, e que as unidades do programa são $R = \Omega = 1$). Para que a órbita ficasse fechada nós tomamos $\omega = 13$ em vez de 13,4.

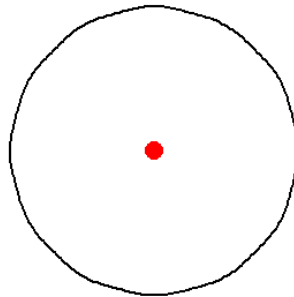


Figura 6.4. Órbita limite para $\omega = 13$, desenhada com o *Modellus*.

O aspecto “poligonal” da órbita mostrada na figura 6.4 é um pouco mais perceptível que o da verdadeira órbita lunar, mas não muito. Essa característica fica mais visível se considerarmos órbitas limite com menores frequências ω , ou seja, maiores valores de r . A figura 6.5 mostra a órbita limite para $\omega = 9$; podemos agora notar claramente o aspecto “poligonal” a que nos referimos: a órbita se assemelha a um octógono (número de lados = $\omega - 1 = 8$). Para $\omega = 7$ temos o “hexágono” mostrado na figura 6.6. Exemplos de órbitas “pentagonais” ($\omega = 6$), “quadradas” ($\omega = 5$) e “triangulares” ($\omega = 4$) também estão na figura 6.6.

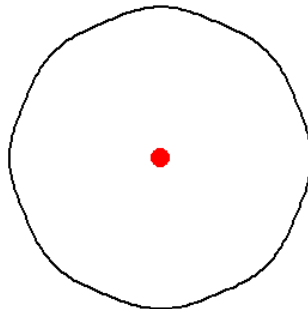


Figura 6.5. Órbita limite para $\omega = 9$.

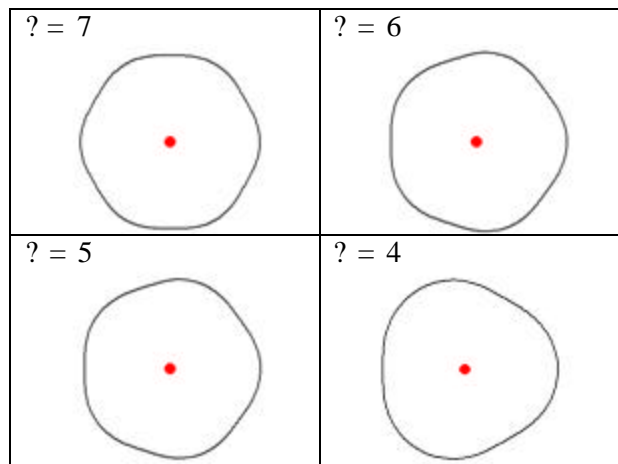


Figura 6.6. Órbitas limite “poligonais” para diferentes valores de γ .

7. COMENTÁRIOS FINAIS

O objetivo deste trabalho foi explorar uma questão que nos é muito próxima, mas que ainda tem aspectos surpreendentes para muitas pessoas: a órbita da Lua. Vimos com uma pequena “pesquisa de opinião” que a maioria das pessoas tem idéias errôneas sobre como é a órbita da Lua vista do Sol. Provavelmente, existem vários motivos para isso: (1) a tendência a achar que a principal força que age sobre a Lua é a atração gravitacional da Terra; (2) os erros sobre o assunto contidos em livros-texto e outras publicações; e (3) a dificuldade em imaginar como é possível que a Lua gire em torno da Terra e, ao mesmo tempo, tenha uma trajetória que se curve sempre para o Sol. Nós tentamos abordar esta última dificuldade usando um modelo simples (e aproximado) para a trajetória da Lua em torno do Sol. Com esse modelo, nós investigamos em que condições a órbita de um satélite tem a forma pouco intuitiva apresentada pela Lua. Vimos que a imensa maioria dos satélites planetários do sistema solar tem órbitas do tipo que as pessoas consideram “normais”. Apenas 10 satélites (em 162), entre eles a Lua, têm órbitas com a concavidade voltada sempre para o Sol. Também observamos algumas características muito interessantes na distribuição estatística das órbitas dos satélites do sistema solar, para as quais não temos nenhuma explicação. Finalmente, nós desenvolvemos uma simulação computacional (com o *Modellus*) com a qual podemos desenhar a órbita de um satélite vista do Sol. Com isso, vimos que a órbita da Lua pode ser caracterizada aproximadamente como um “polígono” de doze lados (um dodecágono), com os lados e vértices arredondados.

REFERÊNCIAS

- [Alo72] M. Alonso e E. Finn, *Física: Um Curso Universitário*, vol. 1, Blucher, 1972
- [Cot87] Ph. de la Cotardière (ed.), *Larousse Astronomy*, Hamlin, 1987.
- [Gol02] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison–Wesley, 2002, 3a ed.
- [Nau05] M. Nauenberg, *Curvature in orbital dynamics*, Am. J. Phys. 73 (2005) 340
- [Poo05] C.P. Poole Jr. et al., *Orbits of central force law potentials*, Am. J. Phys. 73 (2005) 40
- [Ra04] S. Ray, J. Shamanna, *Orbits in a central force field: Bounded orbits*, physics/0410
- [Tei80] Antonio S. Teixeira Jr., *Órbita da Lua*, Rev. Bras. Ens. Fís. 2 (1980) 15.
- [Teo03] Vitor D. Teodoro, *Modellus: Learning Physics with Mathematical Modelling*, Tese de Doutorado, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.
- [Tie03] M. Tiersten, *Errors in Goldstein’s Classical Mechanics*, Am. J. Phys. 71 (2003) 103.