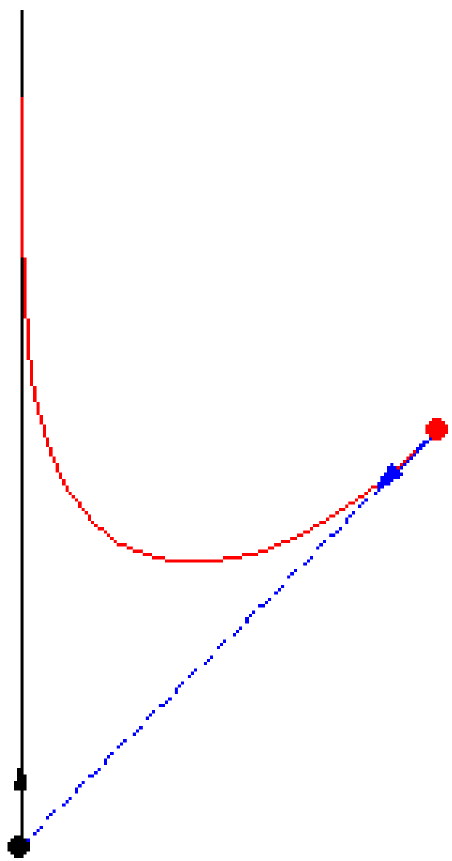
Curvas de perseguição
e o conceito de tempo retardado

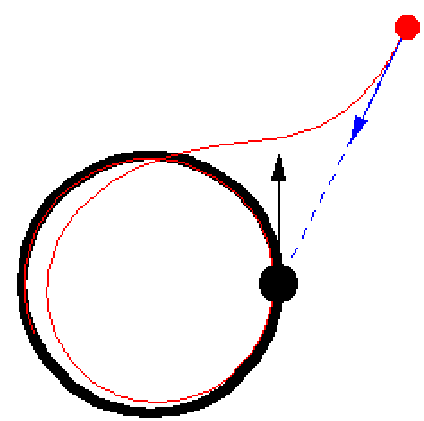
Thales Azevedo
IF - UFRJ

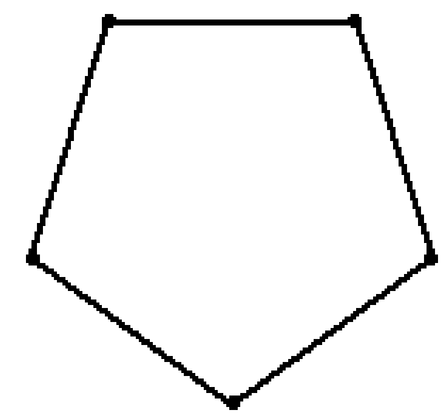
Seminário para o PEF (05/07/2022)

(Parcialmente baseado no artigo **2206.14859**, em colaboração com **Anderson Pelluso**.)

Perseguição “pura”, perseguição cíclica, ...

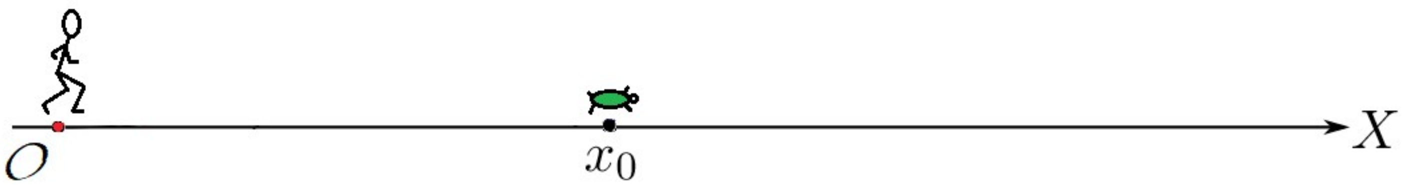




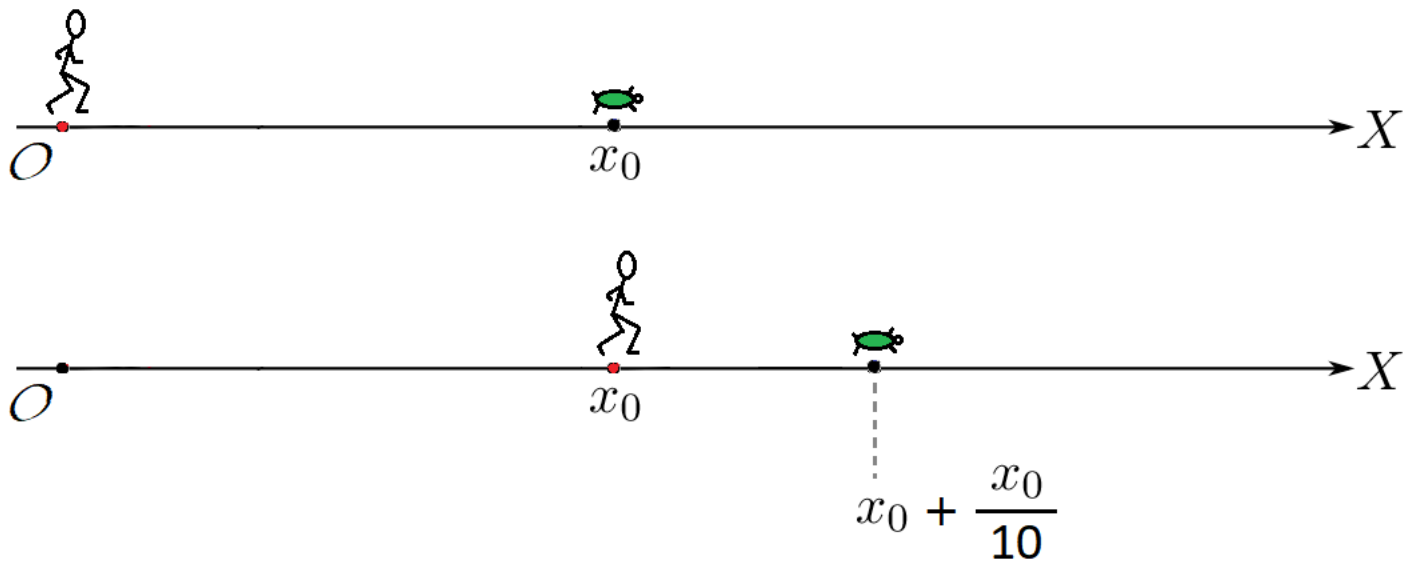


Fonte: MathWorld.Wolfram.com

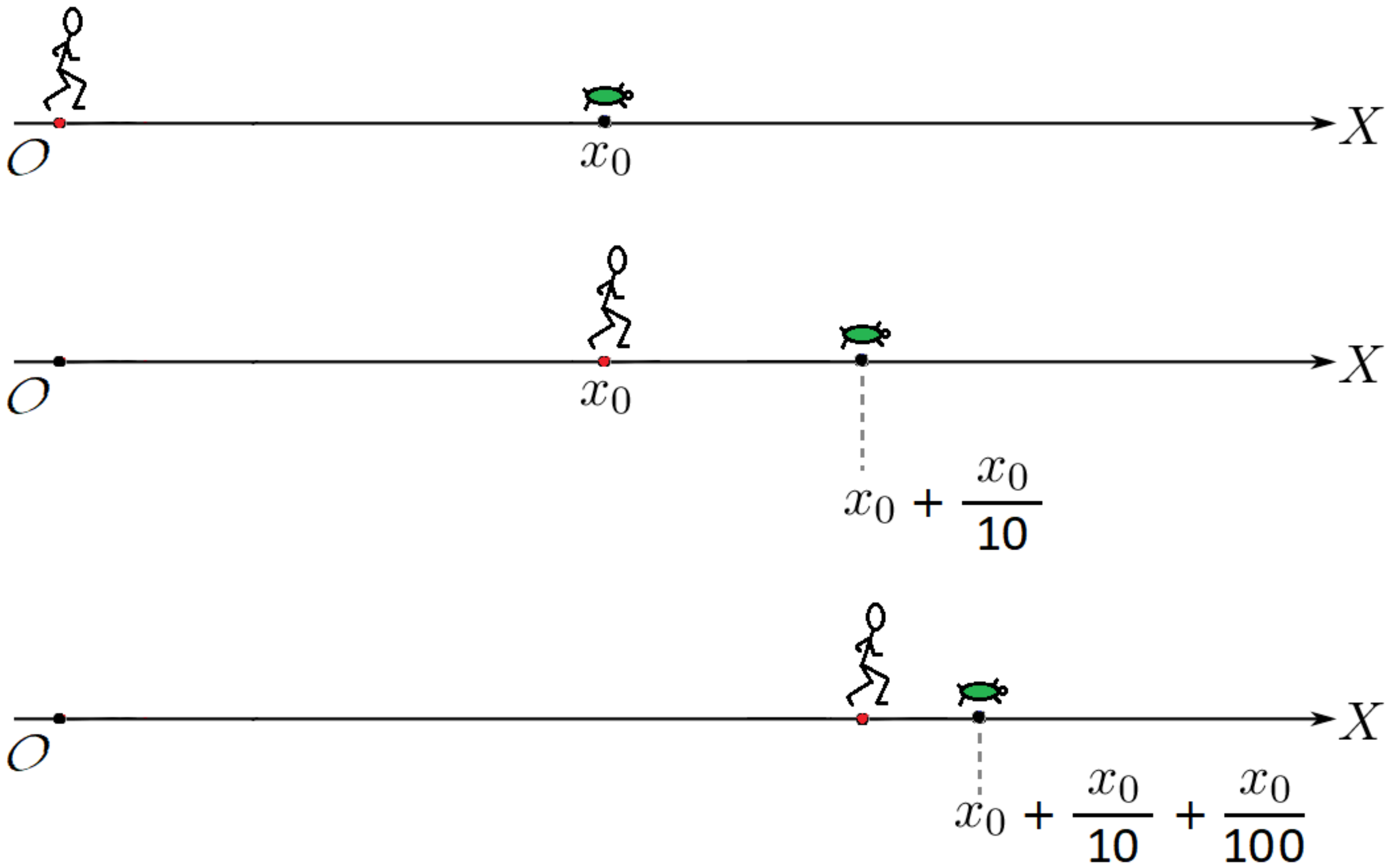
Zenão de Eleia (Ζήνων ὁ Ἐλεᾱ́της), ~ 450 a.c.



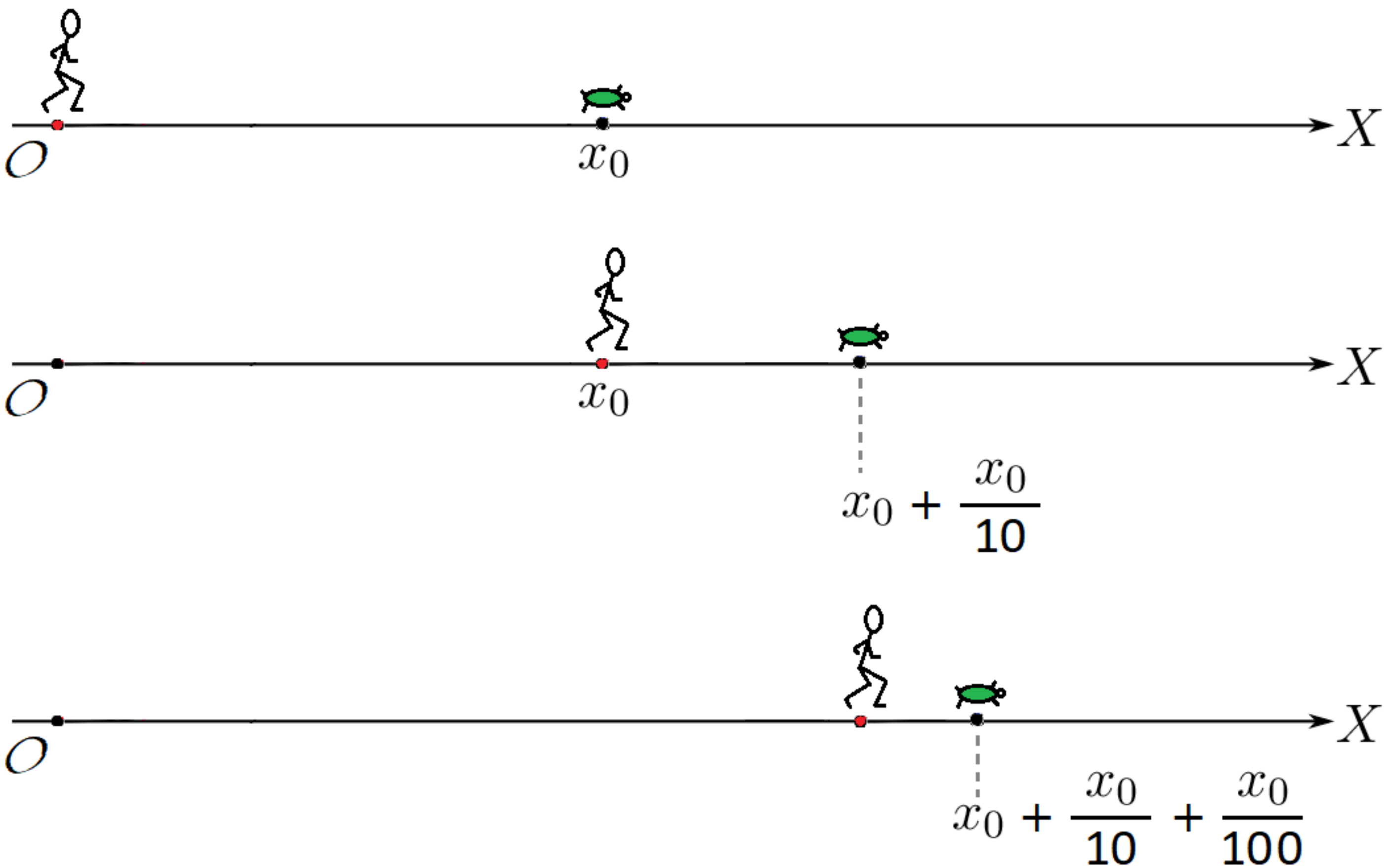
Zenão de Eleia (Ζήνων ὁ Ἐλεᾱ́της), ~ 450 a.c.



Zenão de Eleia (Ζήνων ὁ Ἐλεᾱ́της), ~ 450 a.c.

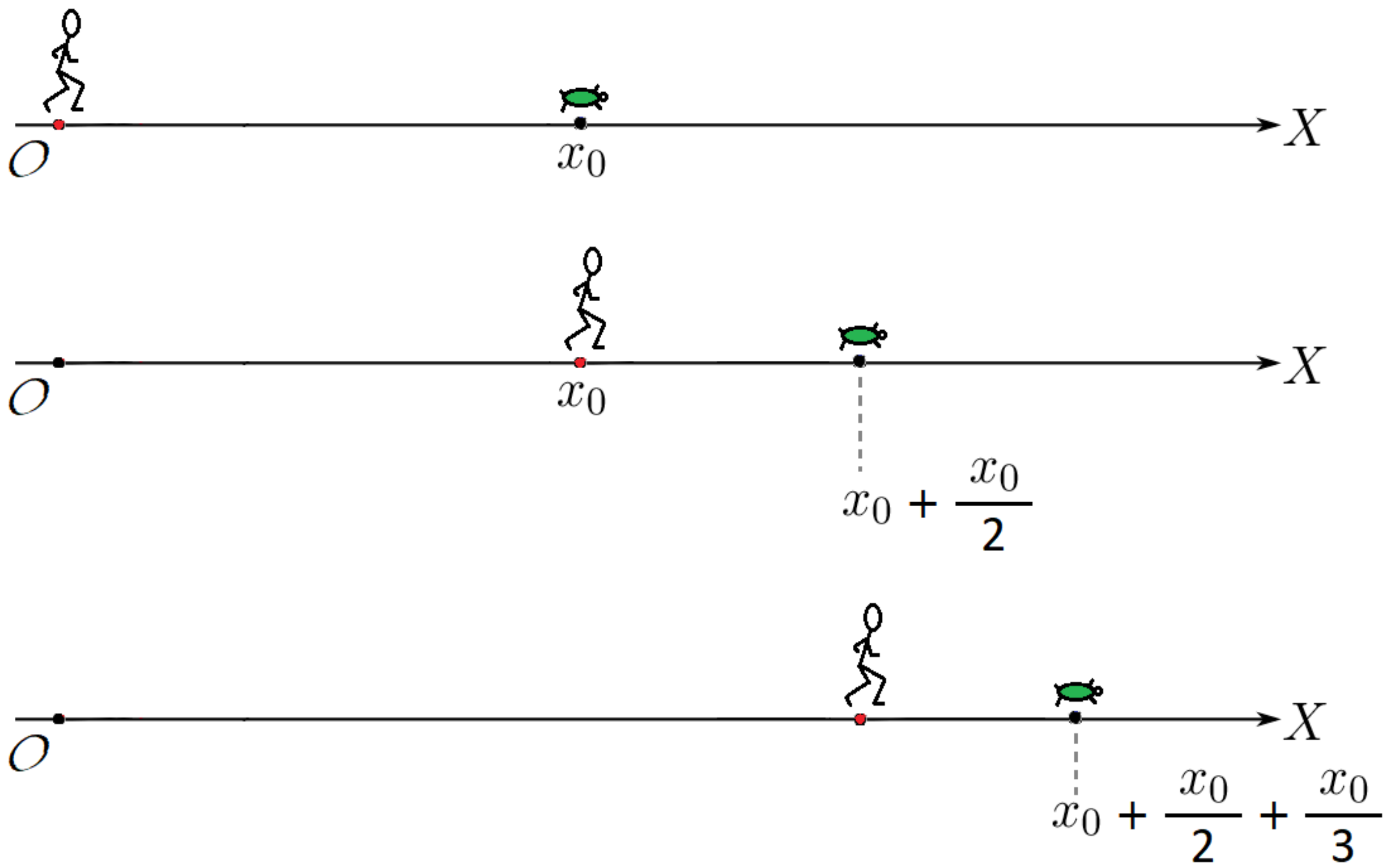


Zenão de Eleia (Ζήνων ὁ Ἐλεᾱ́της), ~ 450 a.c.

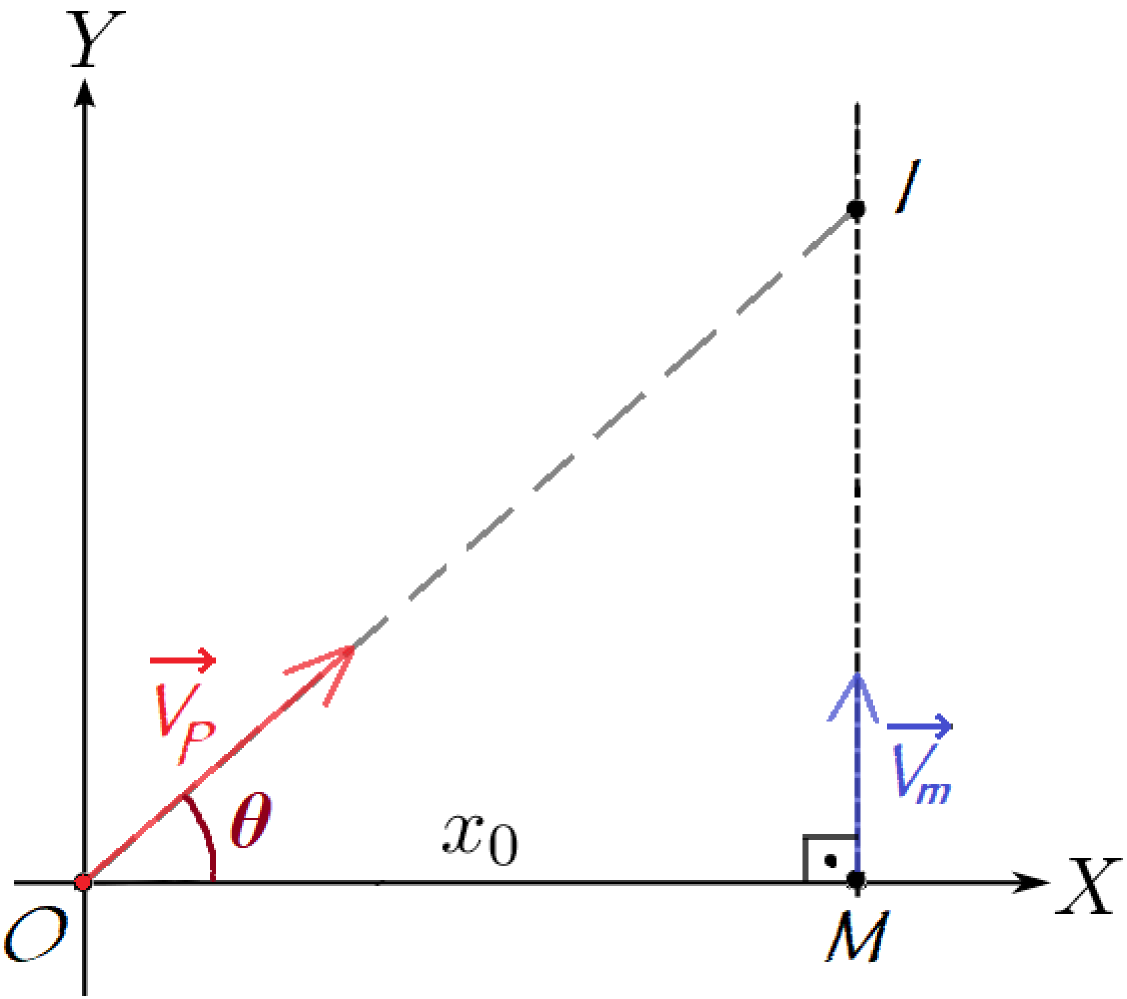


Matematicamente, $\Delta s = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x_0 \left(\frac{1}{10}\right)^n .$

Provocação: Aquiles cansado...



Perseguição de Apolônio

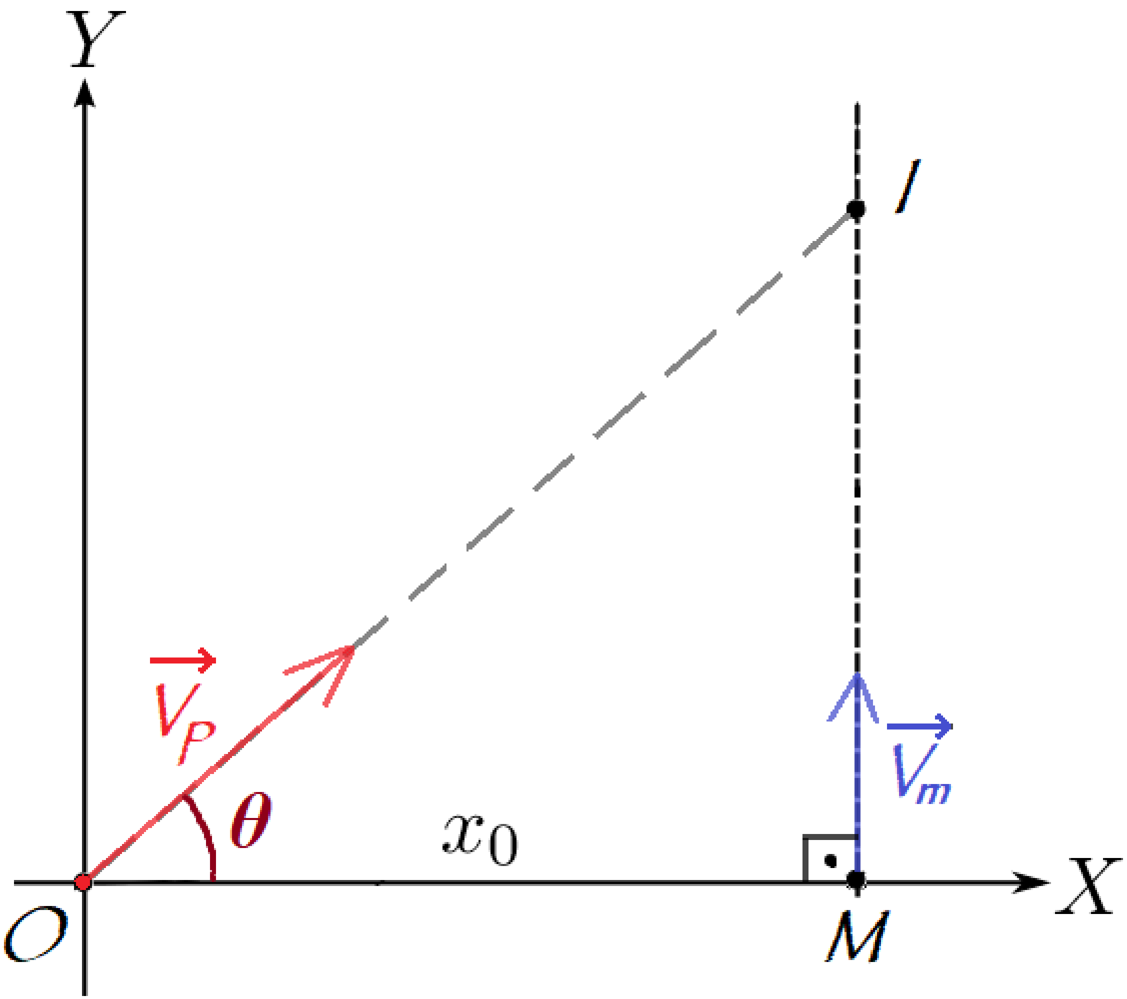


V_p e **V_m** constantes.

Em que direção os piratas devem seguir para interceptar o navio mercante?

Em outras palavras, qual deve ser o valor de θ?

Perseguição de Apolônio



Como ambos devem chegar ao ponto *I* simultaneamente, temos

$$\frac{\overline{OI}}{V_p} = \frac{\overline{MI}}{V_m}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{\overline{MI}}{\overline{OI}} = \frac{V_m}{V_p}$$

Perseguição de Apolônio

Em geral (**V**$_m$ não necessariamente perpendicular a $\overline{OM}$), temos

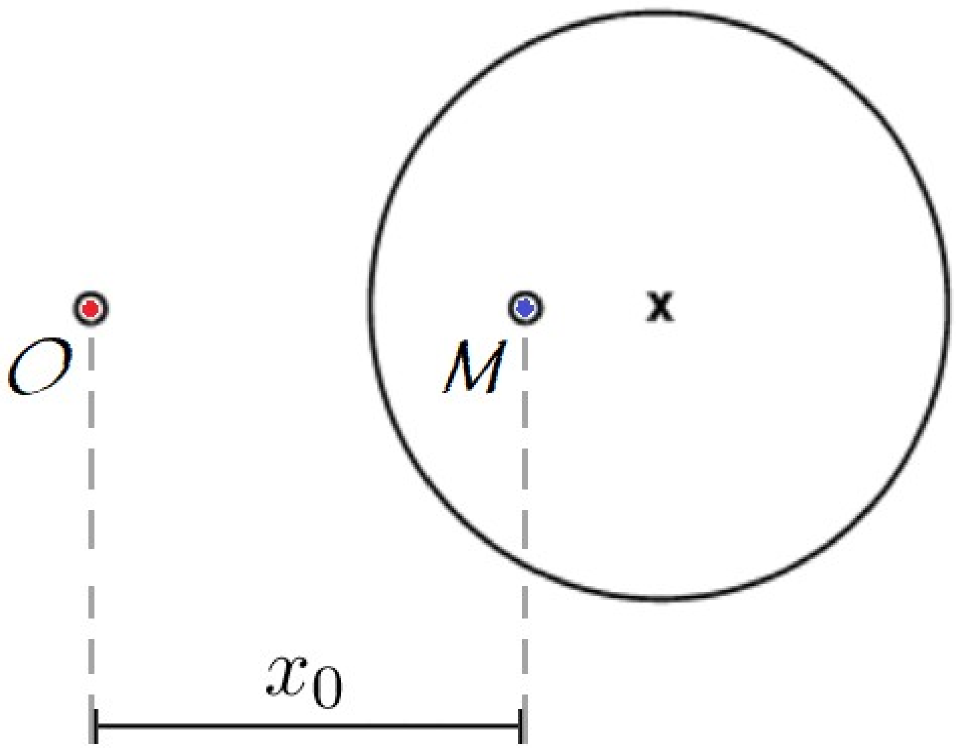
$$\frac{\overline{OI}}{V_p} = \frac{\overline{MI}}{V_m}$$

$$\iff \quad \left(x - \frac{x_0}{1-\alpha^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\alpha\, x_0}{1-\alpha^2}\right)^2 ,$$

onde (x,y) são as coordenadas do ponto em que ocorre a intercepção e

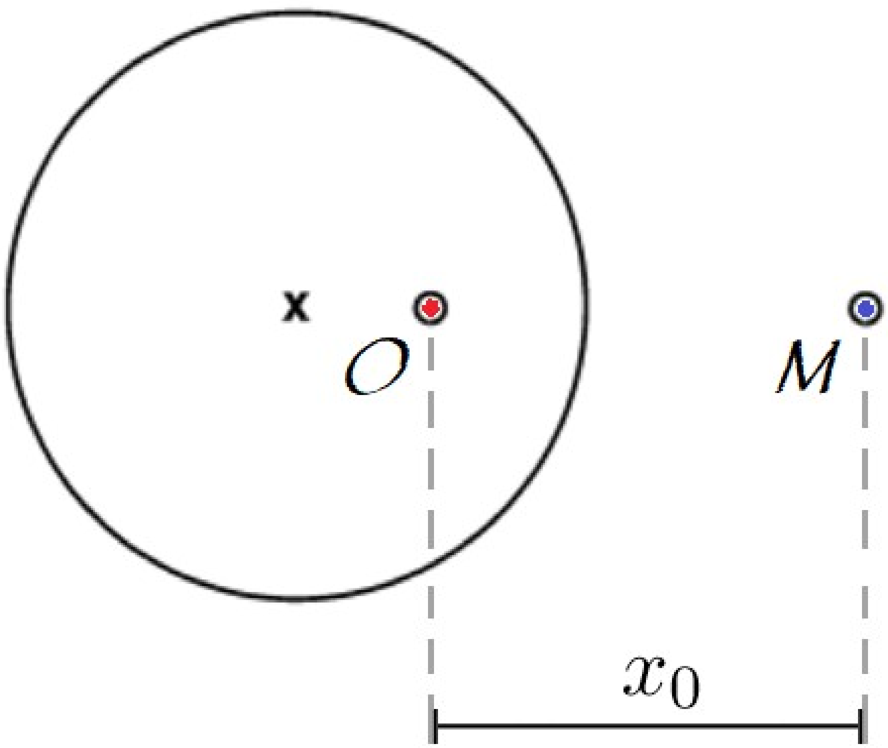
$$\alpha := V_m / V_p \, .$$

Perseguição de Apolônio



Círculo de Apolônio de *O* e *M* para $\alpha = 0{,}5$

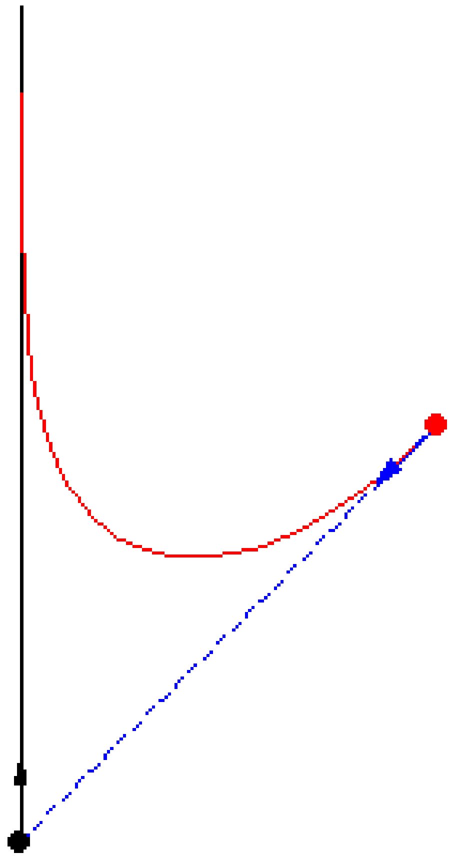
Perseguição de Apolônio



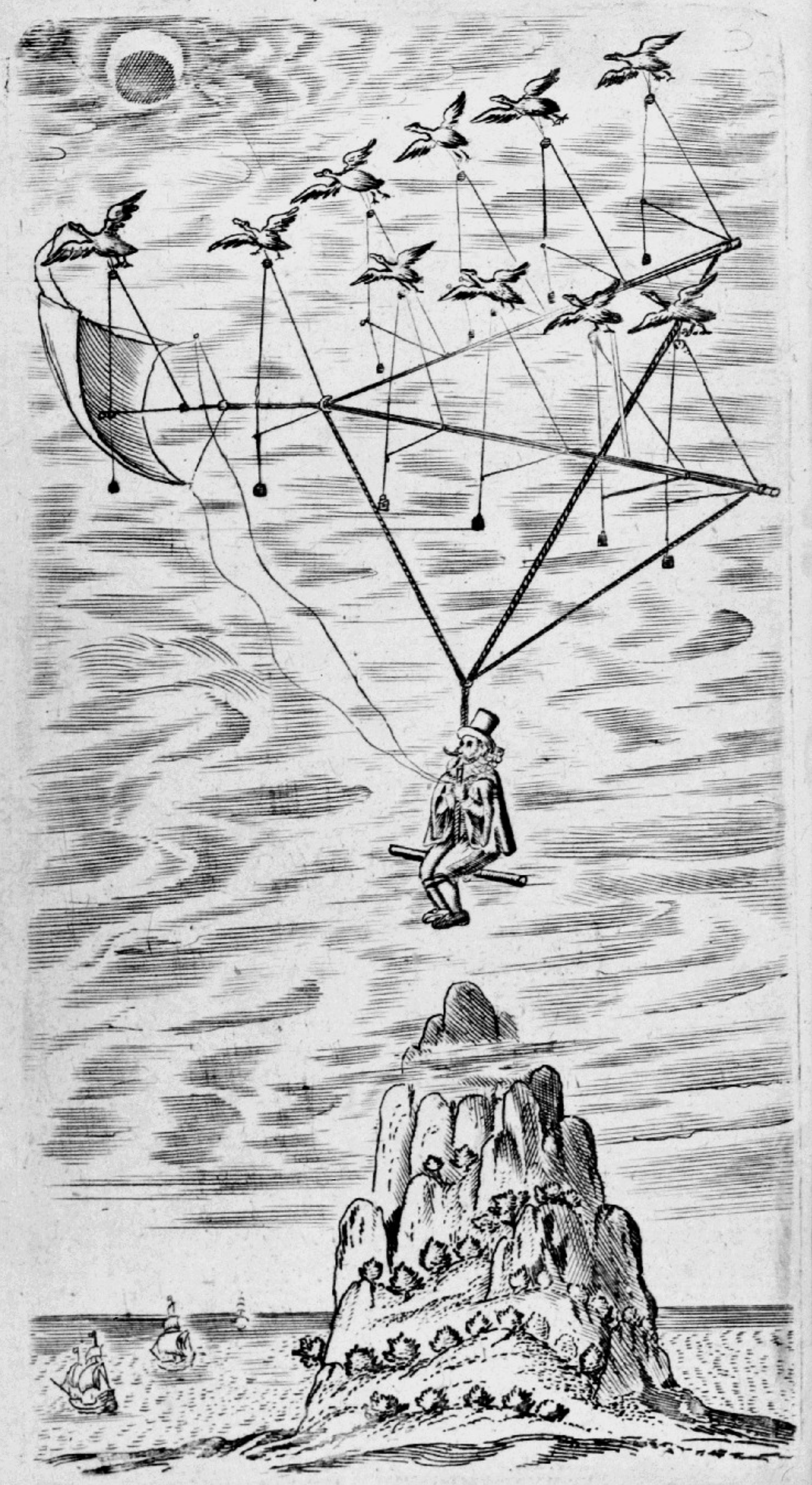
Círculo de Apolônio de *O* e *M* para $\alpha = 2$

Dependendo da direção do movimento da embarcação mercante, os piratas podem ou não alcançá-la.

Perseguição “pura”



Fonte: MathWorld.Wolfram.com



THE MAN IN THE MOONE:

OR,

A DISCOURSE

Of a Voyage thither:

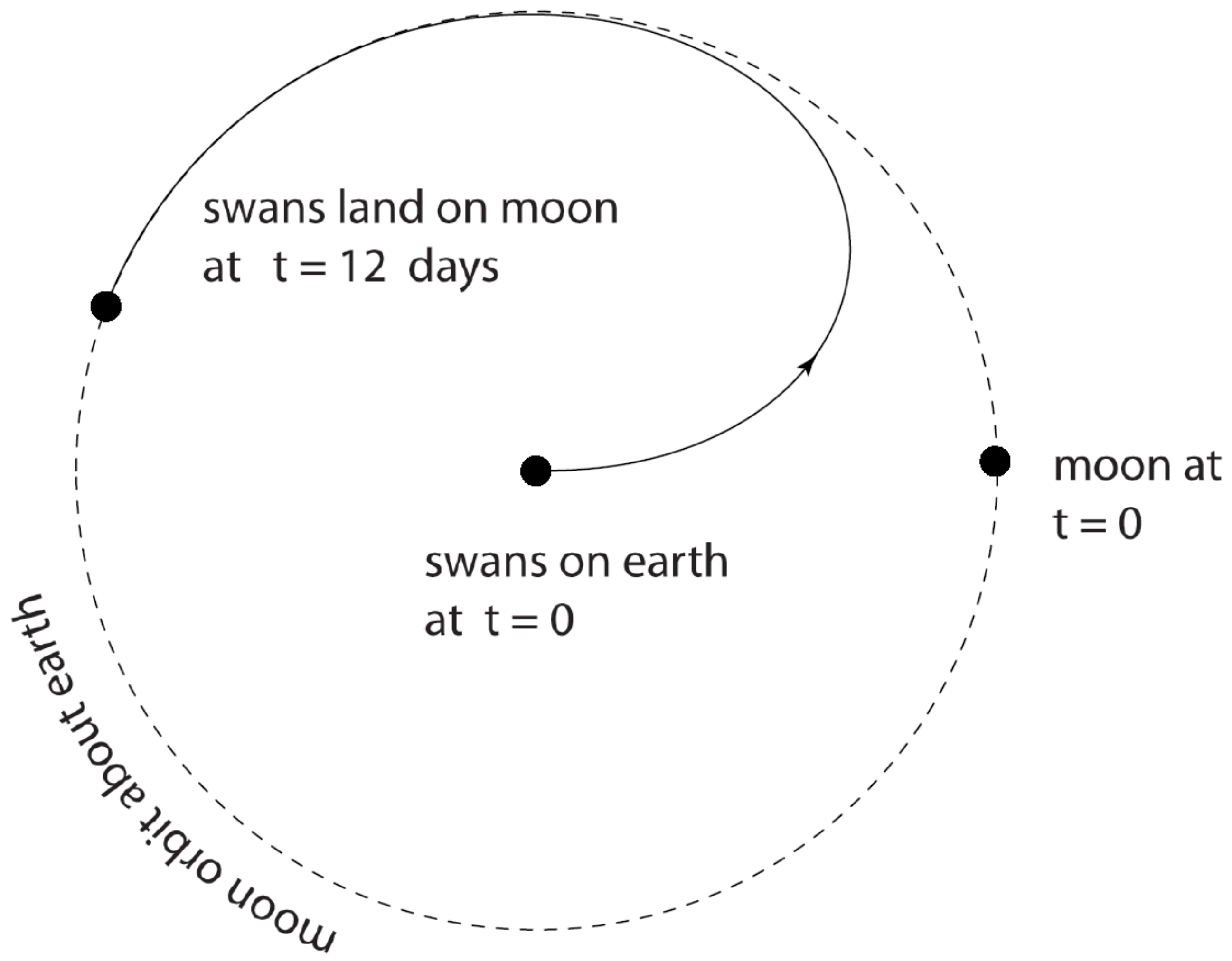
By F.G. B.of H.

To which is added *Nuncius Inanimatus*, written in Latin by the same Author, and now Englished by a Person of Worth.

The Second Edition.

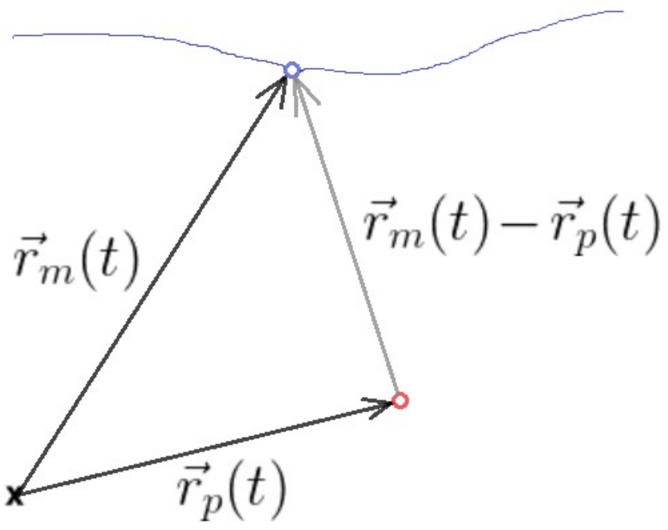
LONDON,
Printed for *Joshua Kirton*, at the Signe of the Kings Arms in St. *Pauls* Church-yard, 1657

Perseguição "pura"



*Fonte: A. J. Simoson, "Pursuit Curves for the Man in the Moone," The College Mathematics Journal, **38:5**, 330-338 (2007)*

Perseguição "pura"



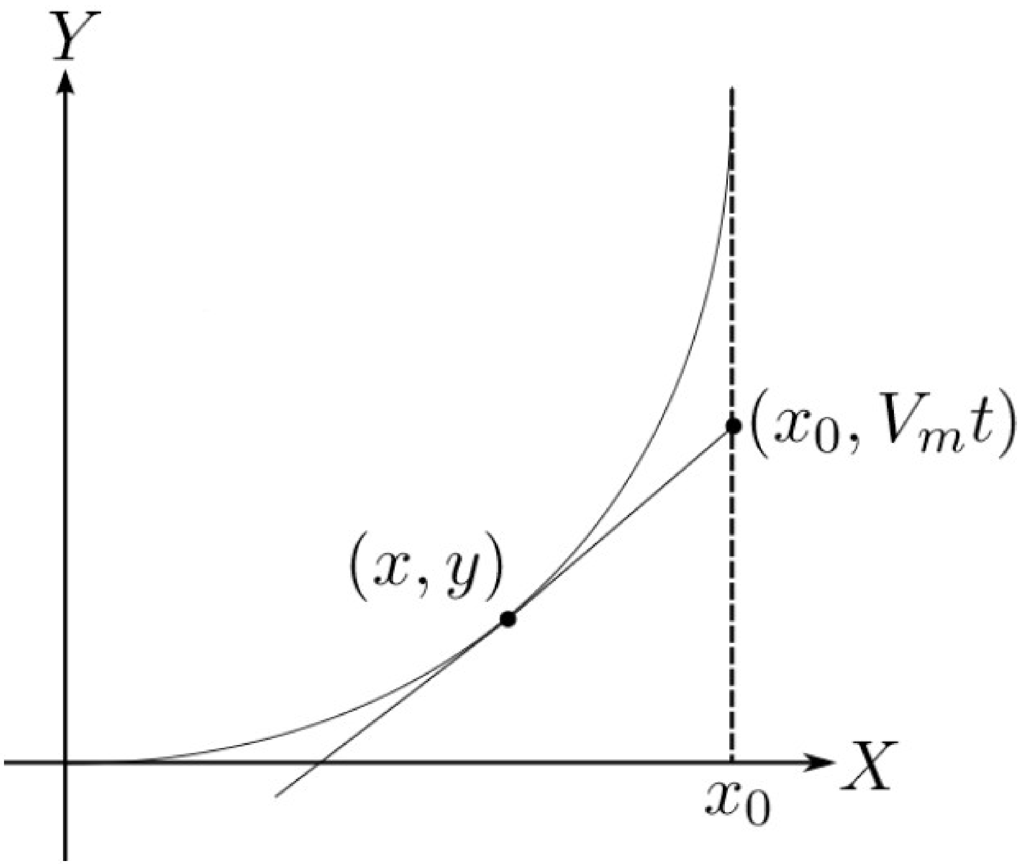
$$\dot{\vec{r}}_p(t) \parallel \vec{r}_m(t) - \vec{r}_p(t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\dot{\vec{r}}_p(t)}{|\dot{\vec{r}}_p(t)|} \cdot \frac{\vec{r}_m(t) - \vec{r}_p(t)}{|\vec{r}_m(t) - \vec{r}_p(t)|} = 1\,,$$

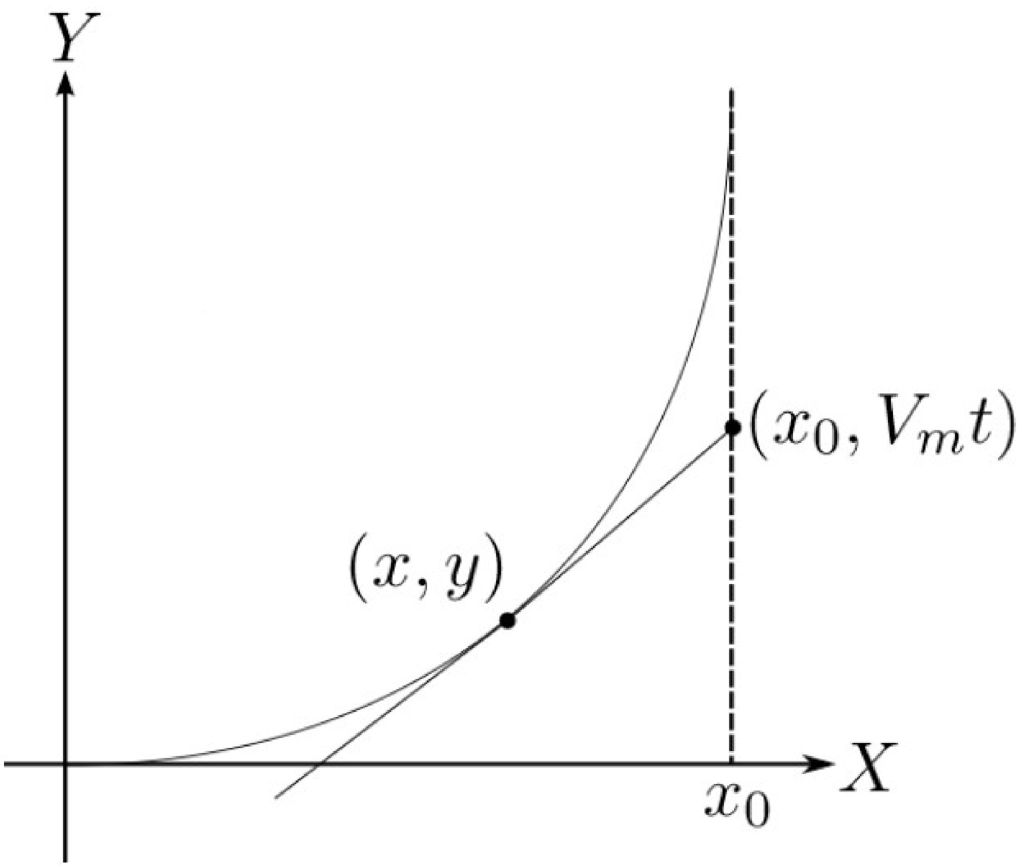
$$|\dot{\vec{r}}_p(t)| = V_p \quad \text{e} \quad |\dot{\vec{r}}_m(t)| = V_m\,.$$

Pierre Bouguer, 1732

Em 1732, o matemático francês Pierre Bouguer propõe e resolve um problema onde um barco pirata persegue um navio mercante.



Pierre Bouguer, 1732



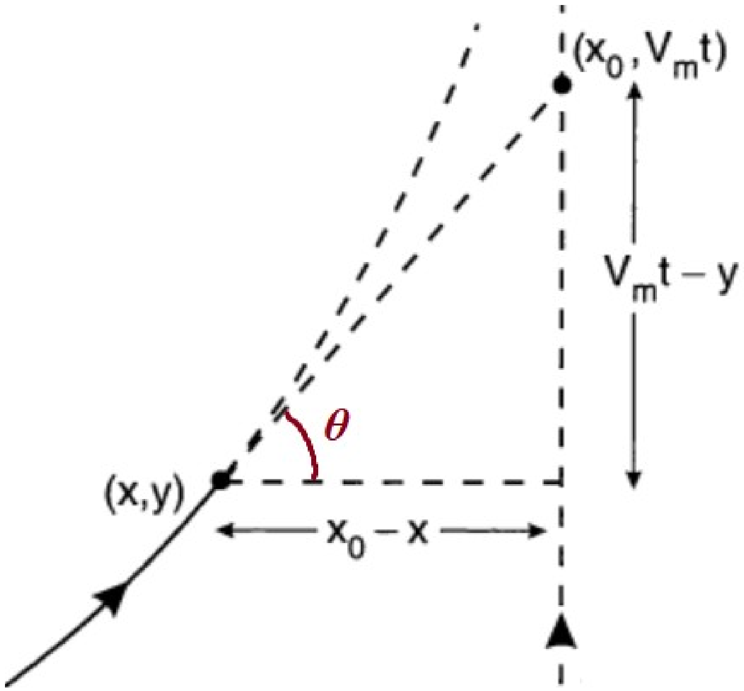
Em $t = 0$, os piratas estão na posição (0,0) e o navio mercante está na posição (x_0,0).

A figura ao lado ilustra a situação em um instante t posterior.

O problema consistia em determinar a curva y = f(x), denominada curva de perseguição.

Pierre Bouguer, 1732

O problema pode ser resolvido da seguinte maneira. Primeiro, como a reta tangente à curva procurada no ponto (x,y) passa pelo ponto (x_0,$V_m\,t$), temos



$$\tan\theta = \frac{V_m t - y}{x_0 - x} \stackrel{!}{=} \frac{dy}{dx}\,.$$

Pierre Bouguer, 1732

Segundo, como V_p é constante, temos $V_p t = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi$.

Pierre Bouguer, 1732

Segundo, como V_p é constante, temos $V_p t = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi$.

Combinando as duas últimas equações, obtemos

$$\frac{1}{V_p} \int_0^x \sqrt{1 + (p(\xi))^2} d\xi = \frac{y}{V_m} - \left(\frac{x - x_0}{V_m}\right) p(x) \, ,$$

onde definimos $p(x) := dy/dx$.

Pierre Bouguer, 1732

Derivando a última equação em relação a *x*, chegamos a

$$\frac{1}{V_p}\sqrt{1+p(x)^2} = -\left(\frac{x-x_0}{V_m}\right)\frac{dp}{dx}\,.$$

Pierre Bouguer, 1732

Derivando a última equação em relação a *x*, chegamos a

$$\frac{1}{V_p}\sqrt{1+p(x)^2} = -\left(\frac{x-x_0}{V_m}\right)\frac{dp}{dx}\,.$$

Portanto,

$$p(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^{-\alpha} - \left(1-\frac{x}{x_0}\right)^{\alpha}\right]$$

Pierre Bouguer, 1732

Derivando a última equação em relação a *x*, chegamos a

$$\frac{1}{V_p}\sqrt{1+p(x)^2} = -\left(\frac{x-x_0}{V_m}\right)\frac{dp}{dx}\,.$$

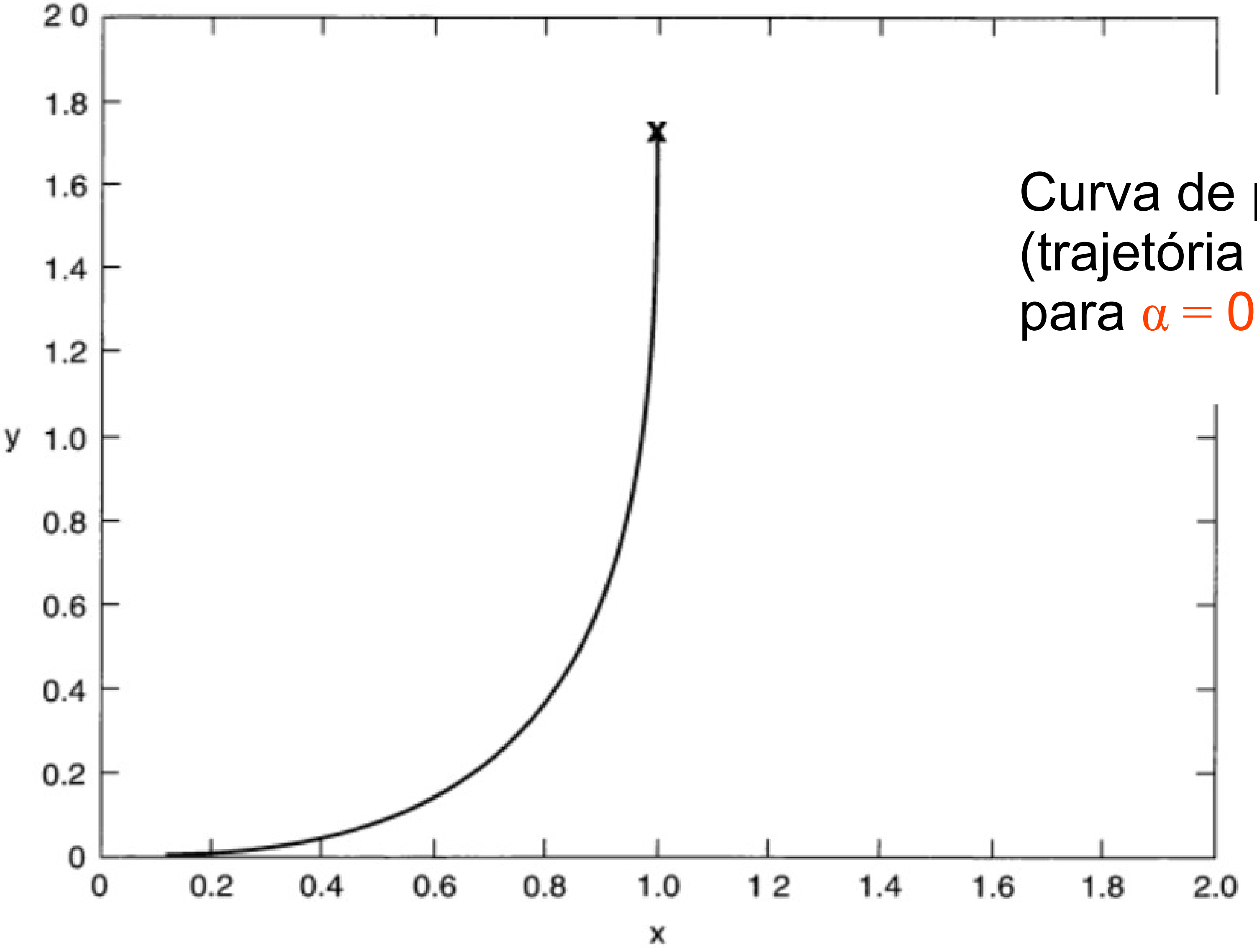
Portanto,

$$p(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^{-\alpha} - \left(1-\frac{x}{x_0}\right)^{\alpha}\right]$$

e, finalmente,

$$\boxed{y = \frac{\alpha\, x_0}{1-\alpha^2} + \frac{x_0}{2}\left[\frac{(1-\frac{x}{x_0})^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \frac{(1-\frac{x}{x_0})^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]}$$

Pierre Bouguer, 1732



Curva de perseguição (trajetória do barco pirata) para $\alpha = 0{,}75$

Pierre Bouguer, 1732

Quanto tempo leva para os piratas alcançarem o navio mercante?

Pierre Bouguer, 1732

Quanto tempo leva para os piratas alcançarem o navio mercante?

A partir da solução do problema, concluímos que o encontro se dá no ponto (x_0,y_0), com

$$y_0 = \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\, x_0 \, .$$

Logo, do instante inicial até o encontro das embarcações, o navio mercante percorre uma distância y_0 com velocidade V_m, ou seja,

$$\Delta t = \frac{y_0}{V_m} = \frac{V_p}{V_p^2 - V_m^2}\, x_0 \, .$$

Pierre Bouguer, 1732

Na verdade, esse intervalo de tempo pode ser calculado de uma maneira muito mais simples e elegante.

De fato, considere a quantidade definida abaixo.

$$C_0 := \frac{d}{dt}\Big[\big(\vec{r}_m(t) - \vec{r}_p(t)\big) \cdot \big(\vec{v}_m(t) + \vec{v}_p(t)\big)\Big]$$

Pierre Bouguer, 1732

Na verdade, esse intervalo de tempo pode ser calculado de uma maneira muito mais simples e elegante.

De fato, considere a quantidade definida abaixo.

$$C_0 := \frac{d}{dt}\left[\big(\vec{r}_m(t) - \vec{r}_p(t)\big) \cdot \big(\vec{v}_m(t) + \vec{v}_p(t)\big)\right]$$

Vamos mostrar que C_0 é uma quantidade conservada!

$$C_0 := \frac{d}{dt}\Big[\big(\vec{r}_m(t) - \vec{r}_p(t)\big) \cdot \big(\vec{v}_m(t) + \vec{v}_p(t)\big)\Big]$$

$$= (\vec{v}_m - \vec{v}_p) \cdot (\vec{v}_m + \vec{v}_p) \; + \; (\vec{r}_m - \vec{r}_p) \cdot \dot{\vec{v}}_p$$

$$= V_m^2 - V_p^2$$

$$C_0 := \frac{d}{dt}\left[\left(\vec{r}_m(t) - \vec{r}_p(t)\right) \cdot \left(\vec{v}_m(t) + \vec{v}_p(t)\right)\right]$$

$$= (\vec{v}_m - \vec{v}_p) \cdot (\vec{v}_m + \vec{v}_p) + (\vec{r}_m - \vec{r}_p) \cdot \dot{\vec{v}}_p$$

$$= V_m^2 - V_p^2$$

$$\Longrightarrow \int_0^{t_f} C_0 \, dt = \left[(\vec{r}_m - \vec{r}_p) \cdot (\vec{v}_m + \vec{v}_p)\right]_{t=0}^{t=t_f}$$

$$= -x_0 V_p$$

$$\overset{!}{=} \left(V_m^2 - V_p^2\right) t_f$$

$$C_0 := \frac{d}{dt}\Big[\big(\vec{r}_m(t) - \vec{r}_p(t)\big) \cdot \big(\vec{v}_m(t) + \vec{v}_p(t)\big)\Big]$$

$$= (\vec{v}_m - \vec{v}_p) \cdot (\vec{v}_m + \vec{v}_p) \; + \; (\vec{r}_m - \vec{r}_p) \cdot \dot{\vec{v}}_p$$

$$= V_m^2 - V_p^2$$

$$\Longrightarrow \int_0^{t_f} C_0 \, dt = \left[(\vec{r}_m - \vec{r}_p) \cdot (\vec{v}_m + \vec{v}_p)\right]_{t=0}^{t=t_f}$$

$$= -x_0 V_p$$

$$\stackrel{!}{=} \left(V_m^2 - V_p^2\right) t_f$$

$$\therefore \quad t_f = \frac{V_p}{V_p^2 - V_m^2} \, x_0 \, .$$

De lá pra cá...

→ Análise a partir do referencial do barco perseguido;

→ Uso de coordenadas polares locais;

→ Generalização para outros movimentos prescritos;

→ Versão tridimensional;

→ (...)

Um novo olhar sobre um problema antigo

O problema da perseguição ‘‘pura’’ formulado por Bouguer, assim como suas variantes, possui em sua essência uma clara inconsistência física.

Um novo olhar sobre um problema antigo

O problema da perseguição “pura” formulado por Bouguer, assim como suas variantes, possui em sua essência uma clara inconsistência física.

De fato, a formulação do problema pressupõe implicitamente que a informação se propaga com velocidade infinita!

Um novo olhar sobre um problema antigo

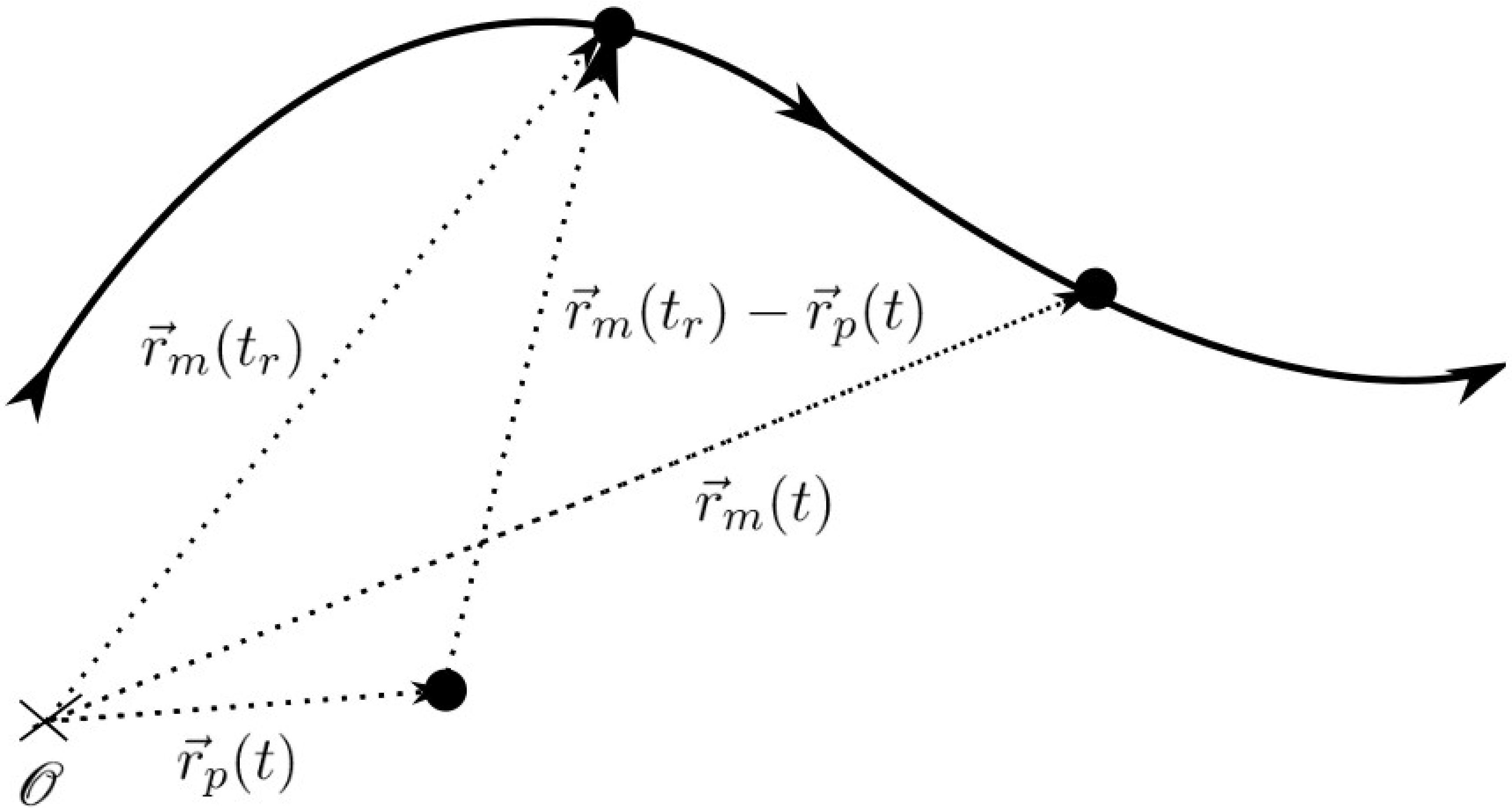
O problema da perseguição “pura” formulado por Bouguer, assim como suas variantes, possui em sua essência uma clara inconsistência física.

De fato, a formulação do problema pressupõe implicitamente que a informação se propaga com velocidade infinita!

Mas é um resultado bem conhecido e importante da Relatividade de Einstein que nenhuma informação pode ser transmitida com velocidade superior à velocidade da luz no vácuo.

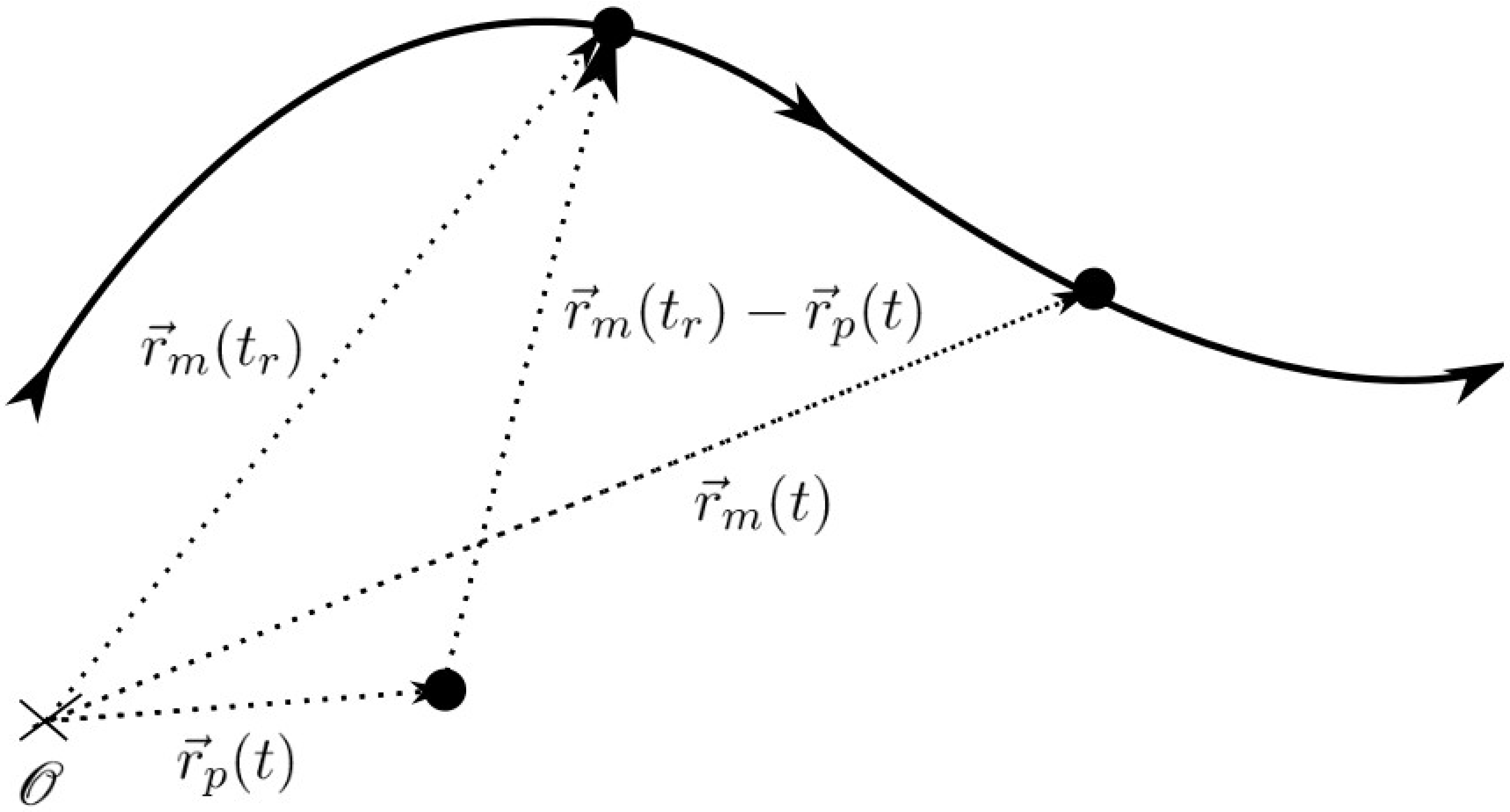
Um novo olhar sobre um problema antigo

→ Leva ao conceito de tempo retardado:



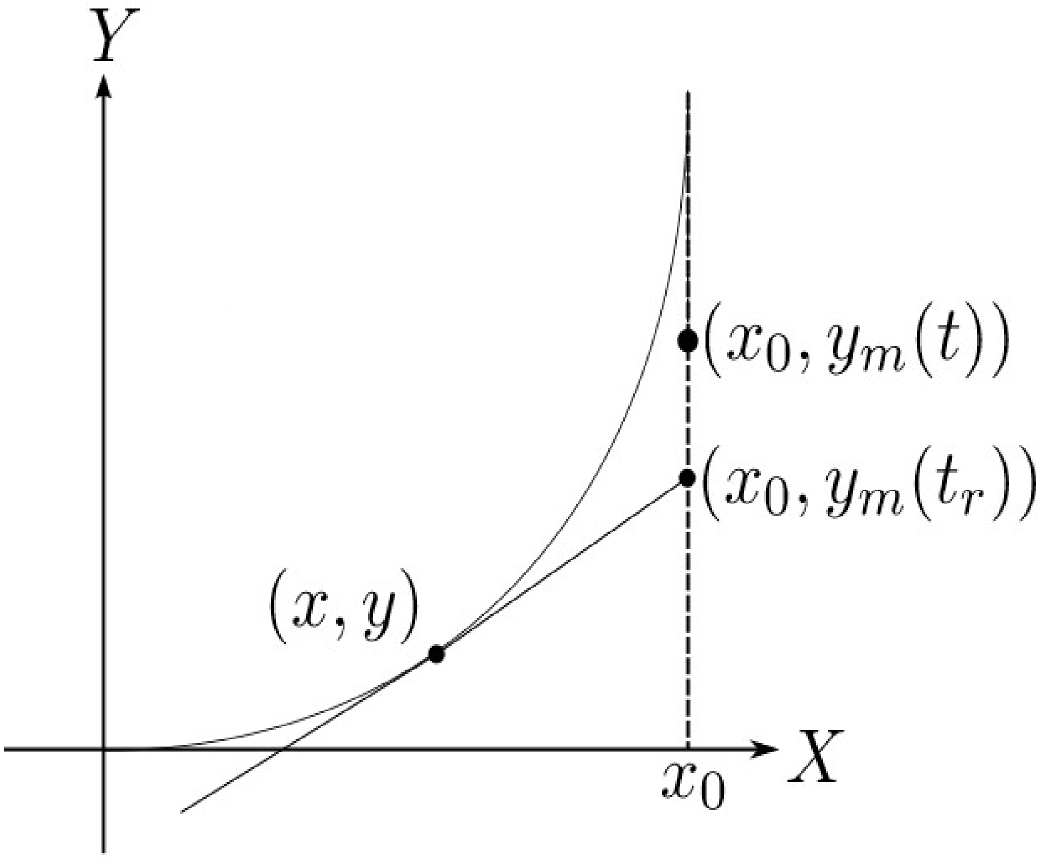
Um novo olhar sobre um problema antigo

→ Leva ao conceito de tempo retardado: $c(t - t_r) = |\vec{r}_m(t_r) - \vec{r}_p(t)|\,.$



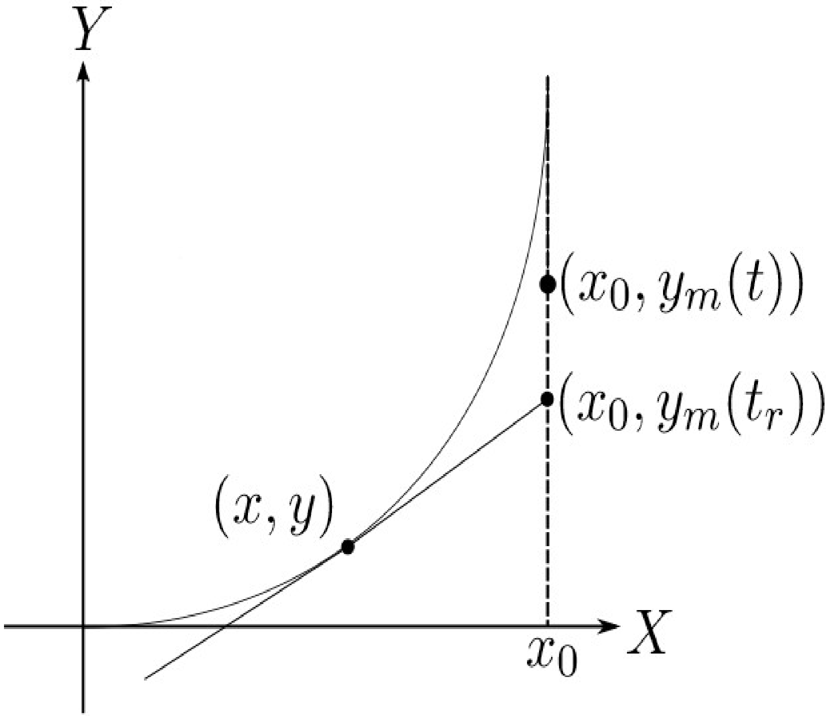
Um novo olhar sobre um problema antigo

Sendo assim, podemos pensar em uma correção “relativística” ao problema formulado por Bouguer:



Um novo olhar sobre um problema antigo

$$y_m(t) = V_m x_0/c + V_m t\ ,$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_m(t_r) - y}{x_0 - x} = \frac{V_m x_0/c + V_m t_r - y}{x_0 - x}\ ,$$

$$V_p t = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}\, d\xi\ ,$$

$$c(t - t_r) = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_m(t_r) - y)^2}\ .$$

Um novo olhar sobre um problema antigo

Manipulando essas equações, chegamos a

$$\alpha\beta(x_0 - x)p(x)\frac{dp}{dx} = \alpha(1+\beta)(1+p(x)^2) - (x_0 - x)\sqrt{1+p(x)^2}\,\frac{dp}{dx}\,,$$

onde $\beta := V_p/c$.

Um novo olhar sobre um problema antigo

Manipulando essas equações, chegamos a

$$\alpha\beta(x_0 - x)p(x)\frac{dp}{dx} = \alpha(1+\beta)(1+p(x)^2) - (x_0 - x)\sqrt{1+p(x)^2}\,\frac{dp}{dx}\,,$$

onde $\beta := V_p/c$.

Podemos integrar a equação acima para obter

$$(1+p(x)^2)^{\alpha\beta/2}\left(p(x) + \sqrt{1+p(x)^2}\right) = \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{-\alpha(1+\beta)}$$

que dá *x* como função de *p*.

Um novo olhar sobre um problema antigo

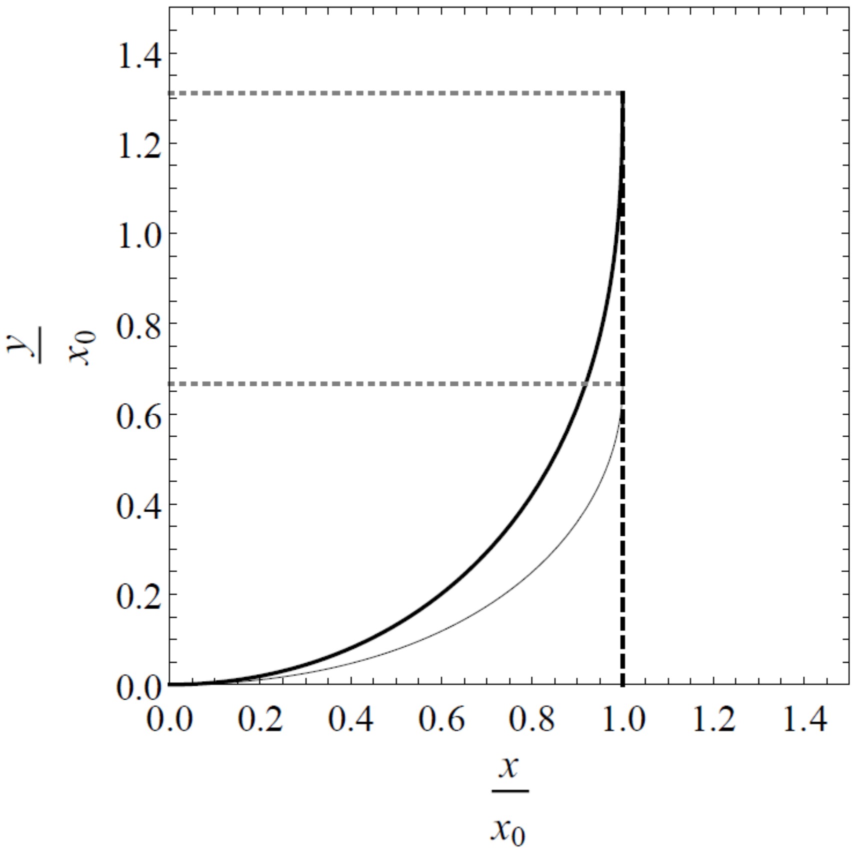


FIG. 4. Pursuit curve for $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.8$.

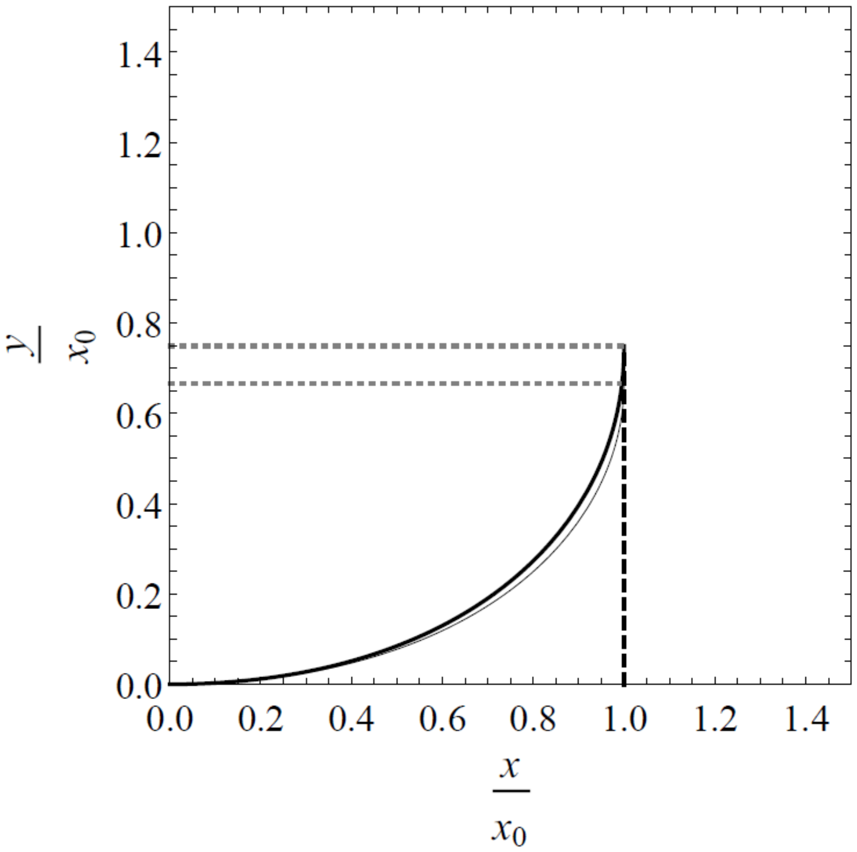


FIG. 5. Pursuit curve for $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$.

Um novo olhar sobre um problema antigo

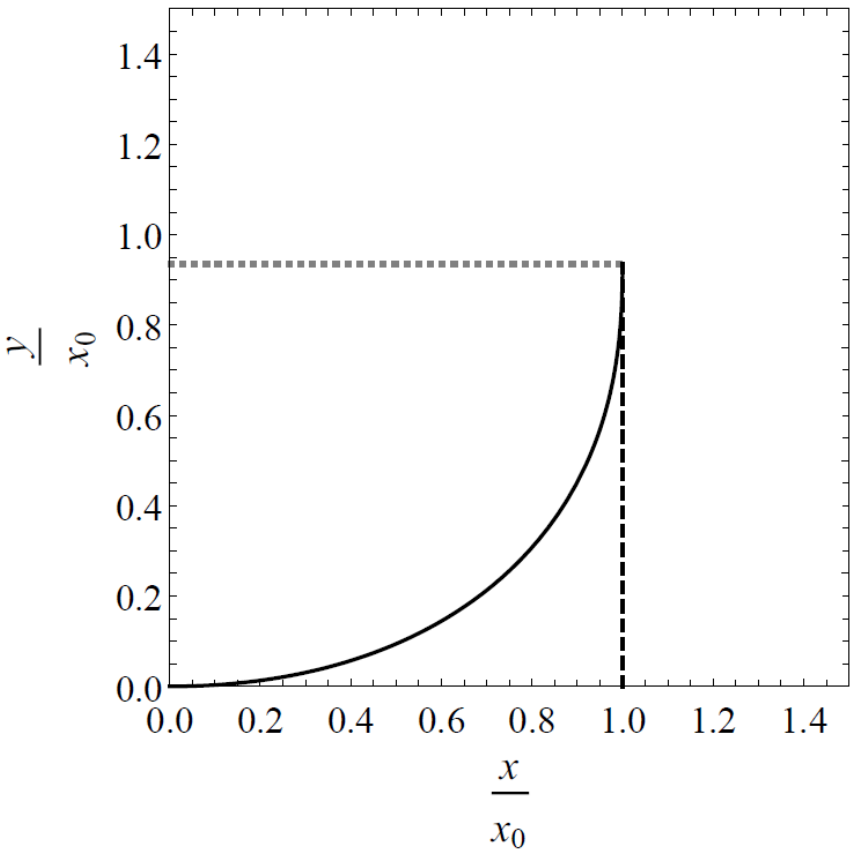


FIG. 6. Pursuit curve for $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.01$. Note the two curves are indistinguishable at this scale.

Um novo olhar sobre um problema antigo

Será que os piratas realmente alcançam a nave mercante?

Um novo olhar sobre um problema antigo

Será que os piratas realmente alcançam a nave mercante?

Quando $x \to x_0$, $p(x) >> 1$. Mais precisamente,

$$p(x) = \frac{dy}{dx} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1+\alpha\beta}} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{\alpha(1+\beta)}{1+\alpha\beta}} .$$

Um novo olhar sobre um problema antigo

Será que os piratas realmente alcançam a nave mercante?

Quando $x \to x_0$, $p(x) >> 1$. Mais precisamente,

$$p(x) = \frac{dy}{dx} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1+\alpha\beta}} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{\alpha(1+\beta)}{1+\alpha\beta}} .$$

Portanto, integrando a equação acima de um certo ponto $x_\star$ até x_0, temos que a variação correspondente da coordenada y (Δy) é proporcional à integral

$$\int_{x_\star}^{x_0} \left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{\alpha(1+\beta)}{1+\alpha\beta}} dx \, ,$$

que converge se e somente se $\alpha < 1$.

Comentários finais

- O estudo das chamadas curvas de perseguição é interessante tanto do ponto de vista matemático como do físico, e é possível fazê-lo em diferentes níveis de complexidade

- Em particular, vimos que, levando em conta a velocidade (finita) de propagação da informação, este problema constitui uma ótima oportunidade para introduzir o conceito de tempo retardado em um contexto essencialmente cinemático, longe das complicações inerentes ao estudo da radiação eletromagnética, quando normalmente estudantes o encontram pela primeira vez

Comentários finais

- Há diversas perguntas interessantes em aberto sobre o problema "relativístico" que analisamos, por exemplo:

  → como ficaria a situação vista do referencial na nave mercante?

  → será que existe uma quantidade conservada análoga a C_0 neste problema?

$$C_0 := \frac{d}{dt}\left[\left(\vec{r}_m(t) - \vec{r}_p(t)\right) \cdot \left(\vec{v}_m(t) + \vec{v}_p(t)\right)\right]$$

  → o que a Teoria da Relatividade Geral tem a dizer sobre esse problema?

Referências

[1] Pierre Bouguer, "Sur de nouvelles courbes auxquelles on peut donner le nom de lignes de poursuite," Mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de l'Académie royale des sciences, 1732, p. 1-15.

[7] C. E. Mungan, "A classic chase problem solved from a physics perspective," Eur. J. Phys. **26** (2005) 985-990.

[10] Paul J. Nahin, "Chases and Escapes : The Mathematics of Pursuits and Evasion," Princeton, Princeton University Press, 2012.

[12] Hoenselaers, C., "Chasing Relativistic Rabbits," General Relativity and Gravitation (no. **4**) 1995, pp. 351-360.

[15] Z. K. Silagadze and G. I. Tarantsev, "Comment on 'Note on the dog-and-rabbit chase problem in introductory kinematics'," Eur. J. Phys. **31** (2010) L37–L38.

Obrigado!