Programa de Pós-graduação
em Ensino de Física

Instituto de Física
UFRJ

pef@if.ufrj.br

# O pião e a corrida espacial

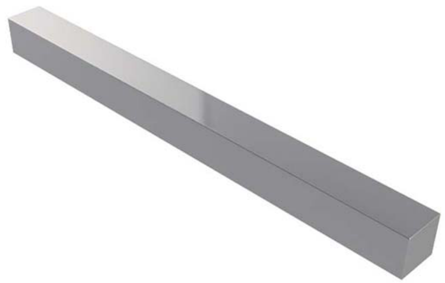
Reinaldo de Melo e Souza

IF-UFRJ

**Em colaboração com:** C. Farina, M.V. Cougo-Pinto e C.A.D. Zarro

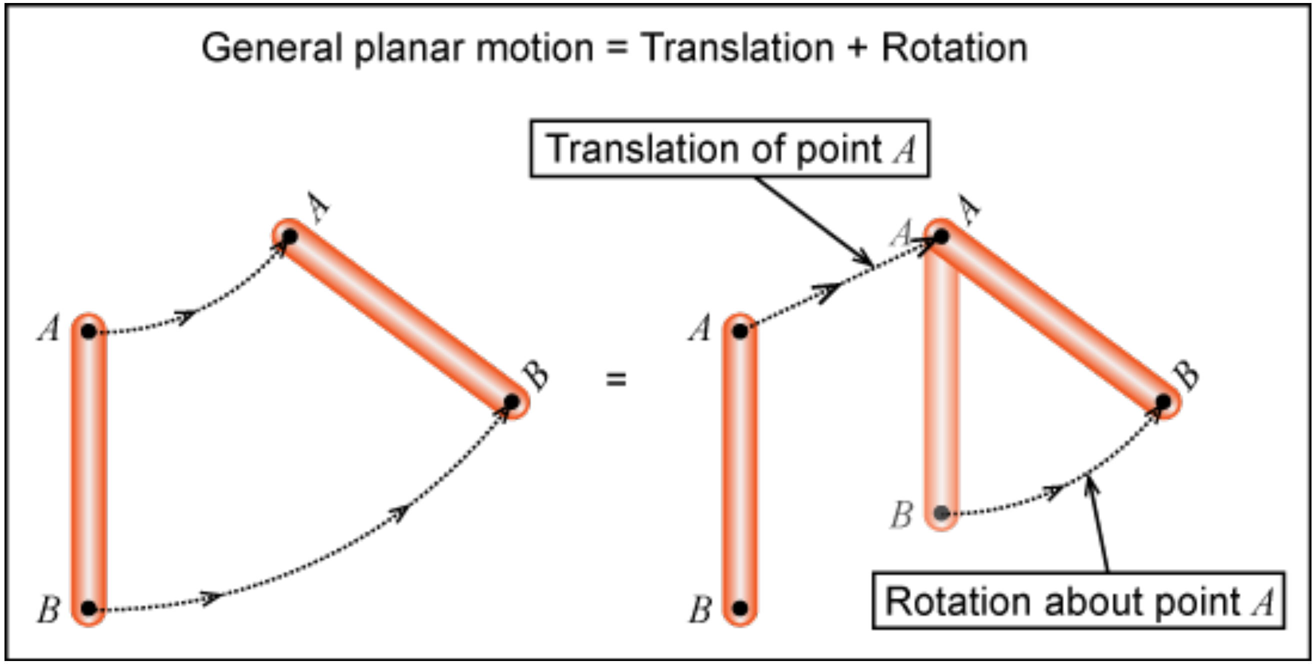
# Introdução

- Um corpo é dito **rígido** quando a distância entre quaisquer dois pontos fixos no corpo não variam no tempo.



# Introdução

- O movimento mais geral de um corpo rígido é TRANSLAÇÃO+ROTAÇÃO

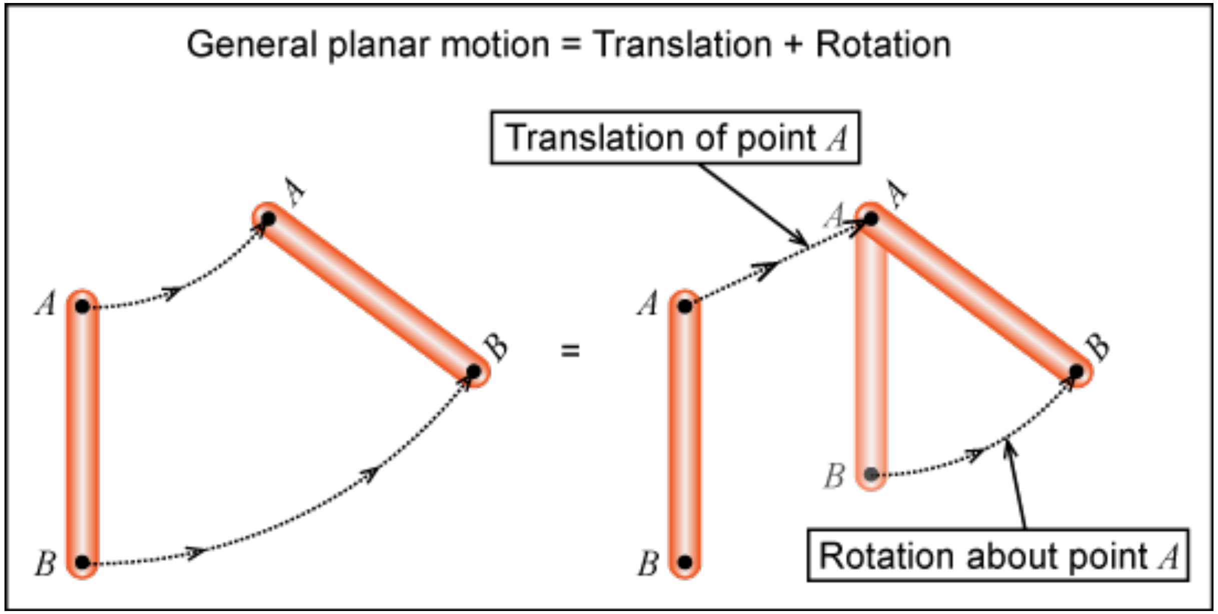



http://www.sdcpublications.com/multimedia/978-1-58503-767-4/files/krb/krb_gen_page0.htm

# Introdução

- O movimento mais geral de um corpo rígido é TRANSLAÇÃO+ROTAÇÃO

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A)}$$

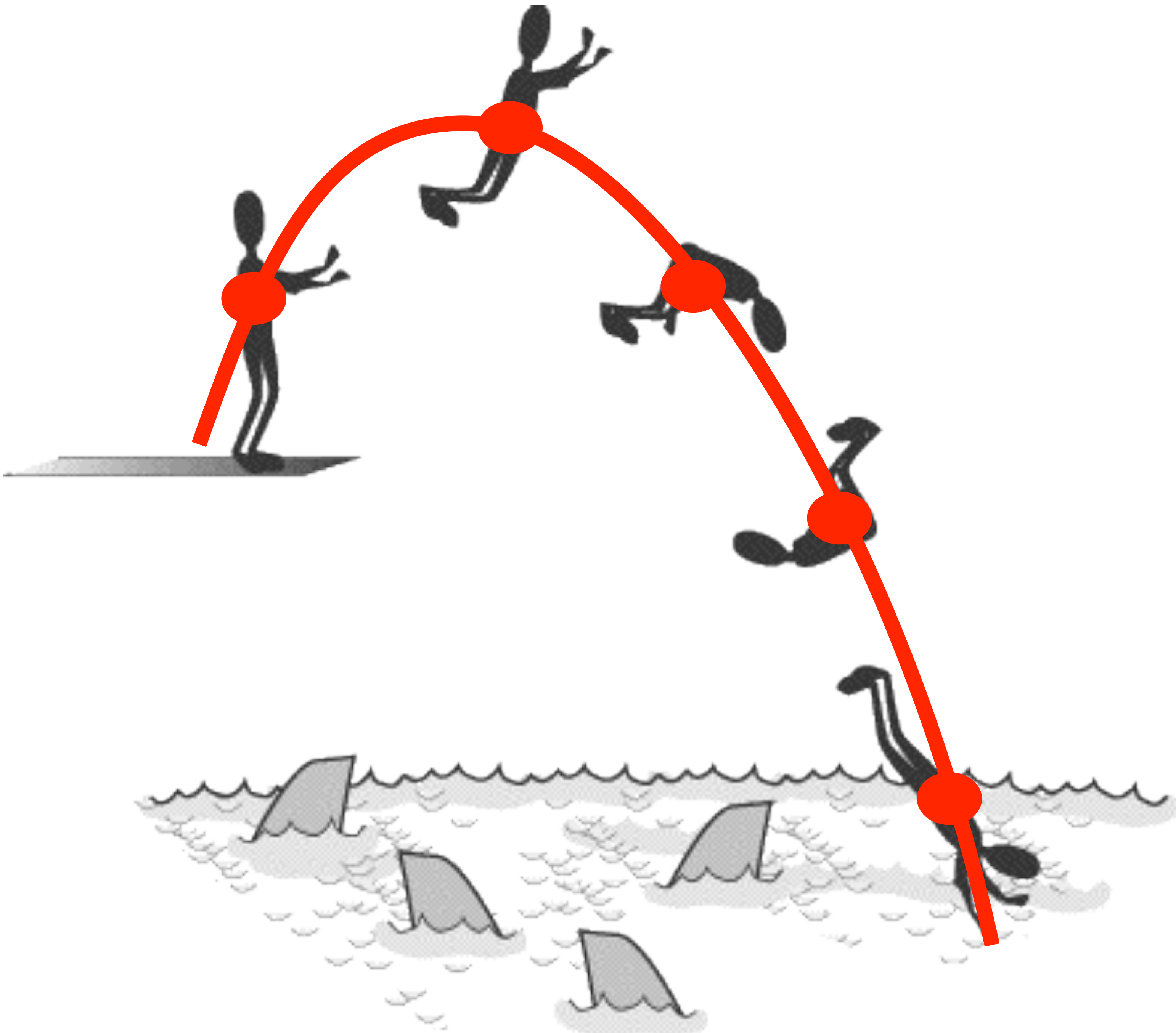



http://www.sdcpublications.com/multimedia/978-1-58503-767-4/files/krb/krb_gen_page0.htm

# Introdução

- Escolhemos o ponto de referência do corpo no centro de massa.
  - A dinâmica do corpo rígido é regida pelas equações:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{F}_{ext} \\[2ex] \dfrac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{ext} \end{cases}$$



# Introdução

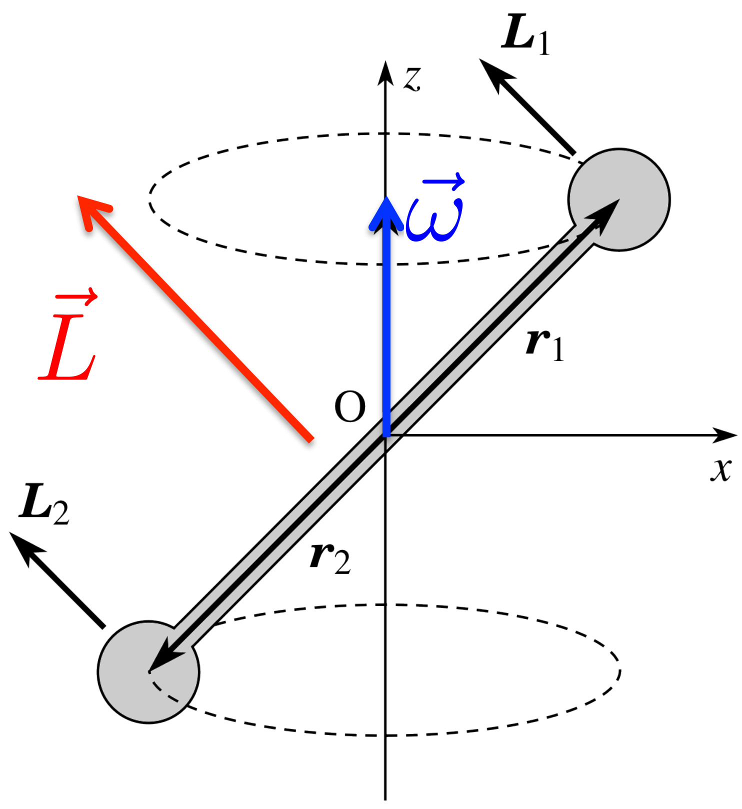
- Escolhemos o ponto de referência do corpo no centro de massa.
  - A dinâmica do corpo rígido é regida pelas equações:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \vec{F}_{ext} \\[2ex]
\dfrac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}
\end{cases}
$$

Nesta apresentação estaremos interessados na dinâmica de rotações!

# Operador de Inércia

- O momento angular em geral **não é paralelo** ao vetor velocidade angular!




http://www.physics.brocku.ca/PPLATO/h-flap/phys2_8.html

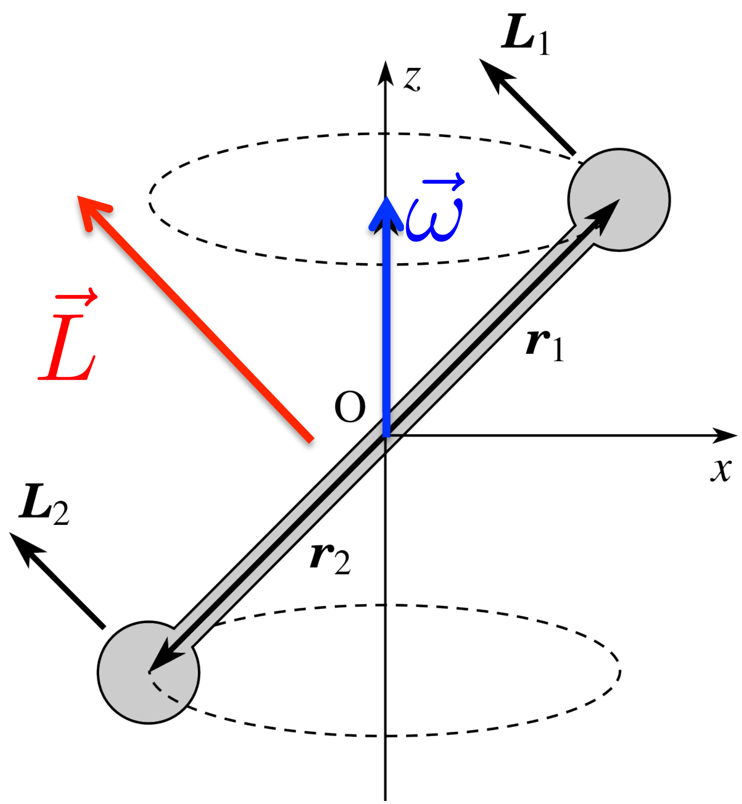
# Operador de Inércia

- O momento angular em geral **não é paralelo** ao vetor velocidade angular!

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

  – $I$ é o momento de inércia, e pode ser representado por uma matriz 3x3.

**Neste exemplo há torque externo!**

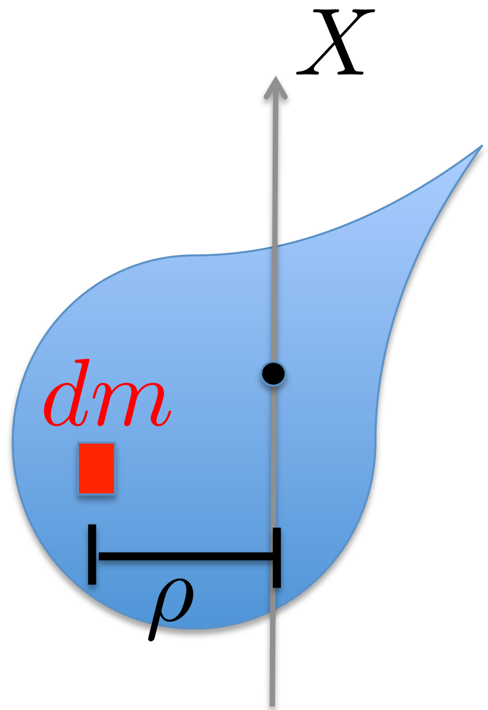



http://www.physics.brocku.ca/PPLATO/h-flap/phys2_8.html

# Operador de Inércia

- O momento angular em geral **não é paralelo** ao vetor velocidade angular!

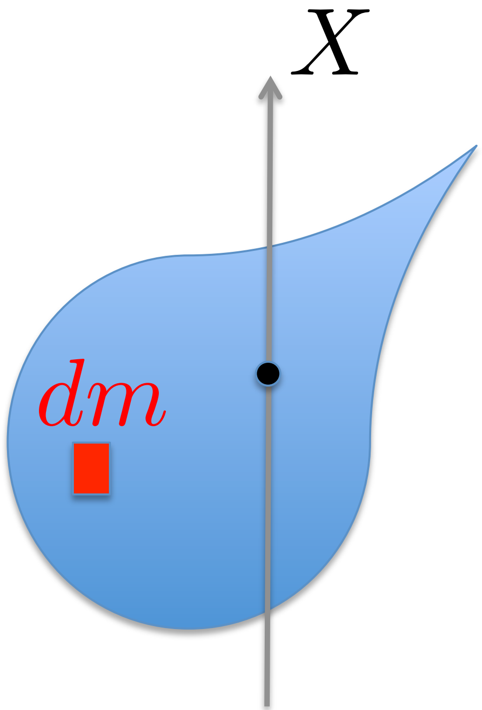
$$I_{xx} = \int \rho^2 dm$$



# Operador de Inércia

- O momento angular em geral **não é paralelo** ao vetor velocidade angular!

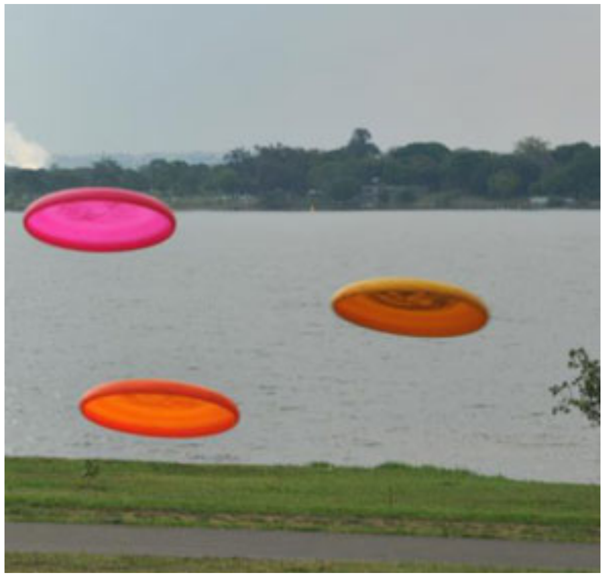
$$I_{xy} = I_{yx} = -\int xydm$$




$I$ é uma matriz simétrica!

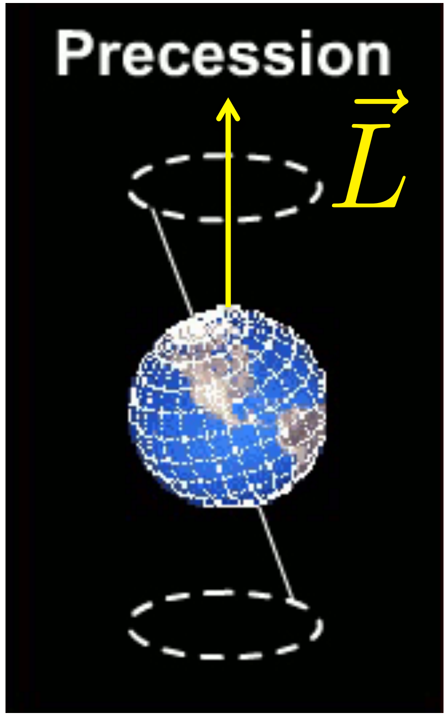
# Operador de Inércia

- Doravante, suporemos ausência de torque externo!
  - Momento angular é conservado no tempo.
    - Quando a velocidade angular **é paralela** ao momento angular ela também é conservada.



# Operador de Inércia

- Doravante, suporemos ausência de torque externo!
  - Momento angular é conservado no tempo.
    - Quando a velocidade angular **é paralela** ao momento angular ela também é conservada.
    - Quando o momento angular **não é paralelo** à velocidade angular, há precessão!




**A Terra é um elipsóide oblato!**

# Eixos principais de inércia

- As direções de $\vec{\omega}$ tais que $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ correspondem à autovetores do operador de inércia!

http://www.semeucarrofalasse.com/alinhamento-e-balanceament/

# Eixos principais de inércia

- As direções de $\vec{\omega}$ tais que $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ correspondem à autovetores do operador de inércia!

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

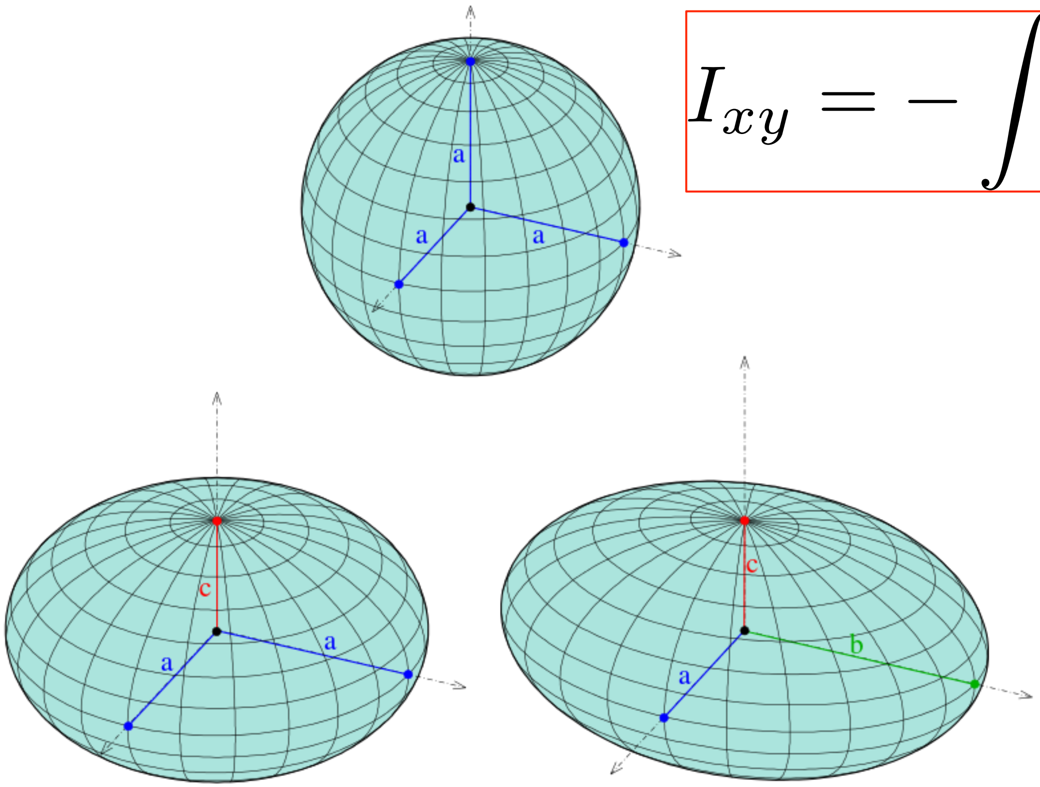
- $I$ é uma matriz simétrica, e portanto, é diagonalizável (**Teorema Espectral**)

http://www.semeucarrofalasse.com/alinhamento-e-balanceament/

# Eixos principais de inércia

- Eixos de simetria são eixos principais de inércia!

$$\boxed{I_{xy} = -\int xydm = 0}$$



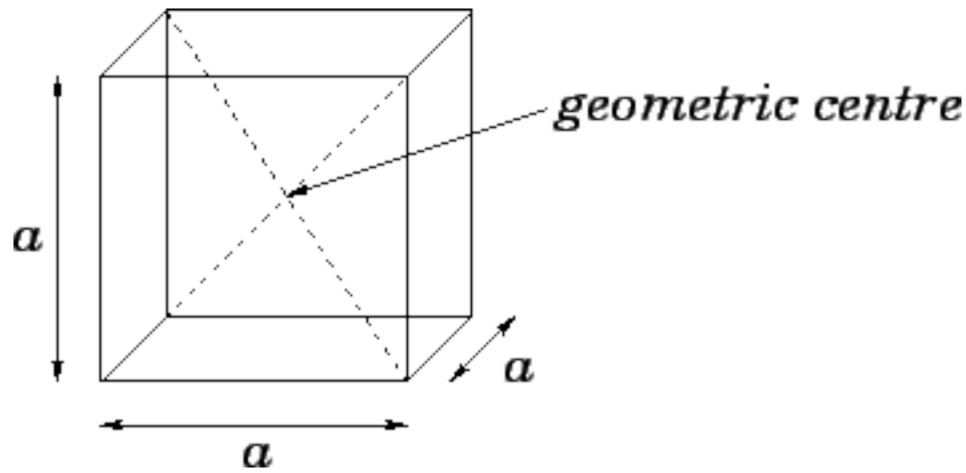

https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipsoid#/media/File:Ellipsoide.svg

# Eixos principais de inércia

- **Pião Esférico:** $I_1 = I_2 = I_3$
  - **Todo** eixo que passa pelo centro é eixo principal de inércia.

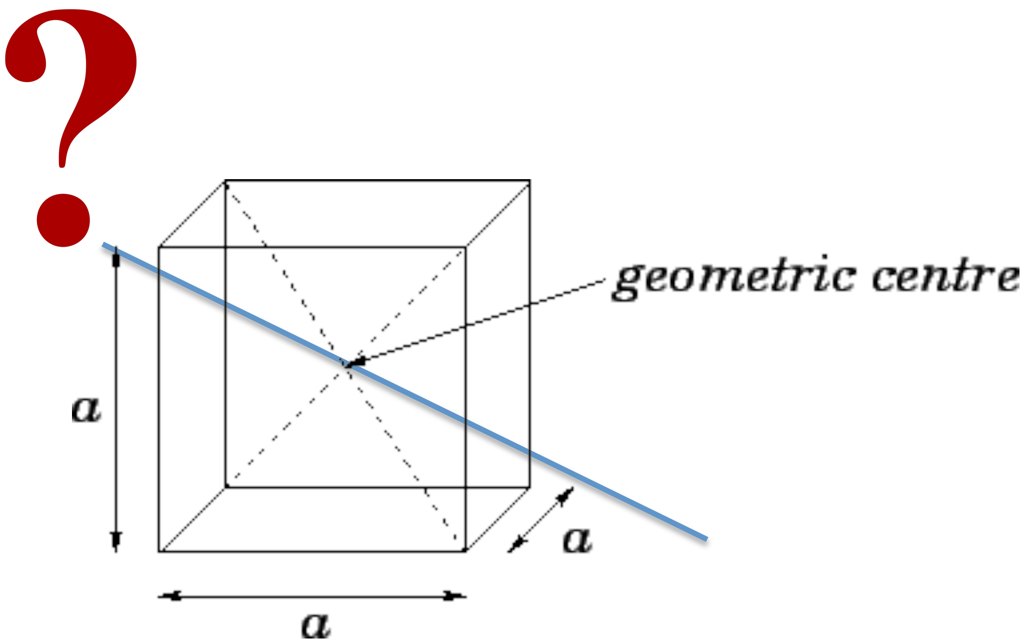
# Eixos principais de inércia

- **Pião Esférico:** $I_1 = I_2 = I_3$
  - **Todo** eixo que passa pelo centro é eixo principal de inércia.



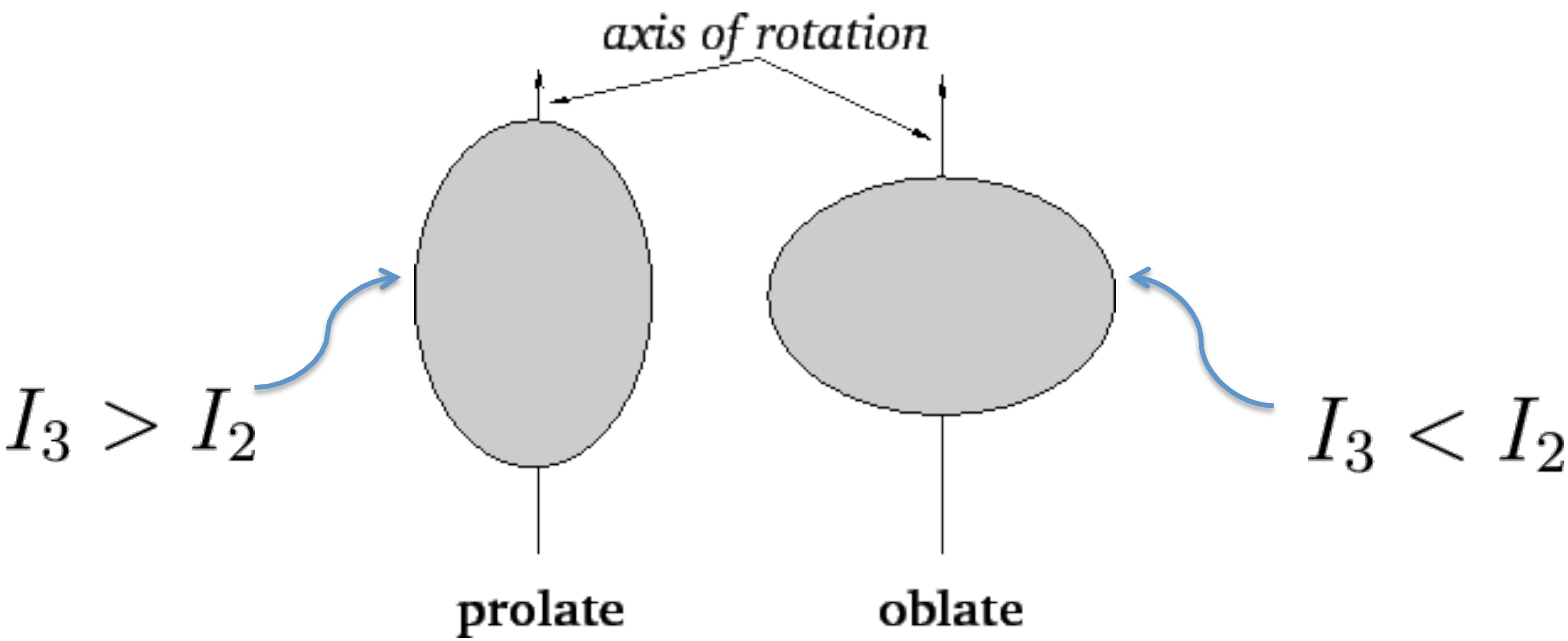

# Eixos principais de inércia

- **Pião Esférico:** $I_1 = I_2 = I_3$
  - **Todo** eixo que passa pelo centro é eixo principal de inércia.



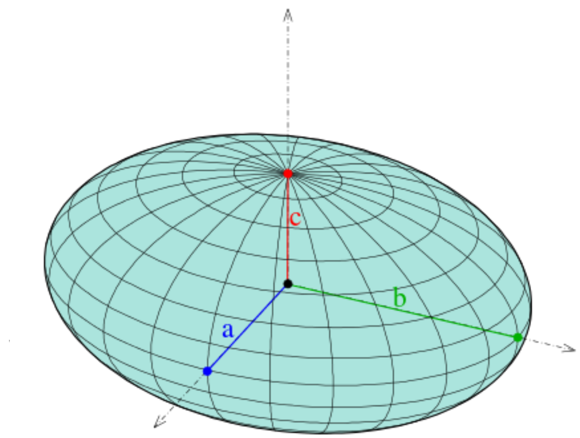

# Eixos principais de inércia

- **Pião Simétrico:** $I_1 = I_2 \neq I_3$
  - **Quaquer** eixo no plano de simetria é um eixo principal de inércia.



# Eixos principais de inércia

- **Pião Escaleno:** $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$
  - Caso mais geral. Um exemplo é um elipsóide que não é de revolução.




https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipsoid#/media/File:Ellipsoide.svg

# Evolução dinâmica

- Podemos calcular o movimento de um pião a partir das equações de Euler.

**Equações não lineares!**

$$\begin{cases} I_1 \dfrac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = \tau_1 \\ I_2 \dfrac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = \tau_2 \\ I_3 \dfrac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = \tau_3 \end{cases}$$

# Evolução dinâmica

- Para rotações livres (ausência de torque externo) podemos usar um método geométrico devido à Poinsot.

$$\begin{cases} L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L^2 & \text{Conservação de momento angular} \\ \dfrac{L_x^2}{2I_x} + \dfrac{L_y^2}{2I_y} + \dfrac{L_z^2}{2I_z} = E & \text{Conservação de energia} \end{cases}$$

# Evolução dinâmica

- Para rotações livres (ausência de torque externo) podemos usar um método geométrico devido à Poinsot.

$$\begin{cases} L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L^2 & \textbf{Conservação de momento angular} \\ \dfrac{L_x^2}{2I_x} + \dfrac{L_y^2}{2I_y} + \dfrac{L_z^2}{2I_z} = E & \textbf{Conservação de energia} \end{cases}$$

**Movimento se dá na intersecção**
**da esfera com o elipsóide.**

# Evolução dinâmica

- Suporemos $I_x < I_y < I_z$

$$\begin{cases} L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L^2 \\ \dfrac{L_x^2}{2I_x} + \dfrac{L_y^2}{2I_y} + \dfrac{L_z^2}{2I_z} = E \end{cases}$$

- Considere que inicialmente $\vec{L} \parallel \hat{x}$
  - Assim: $L_y = L_z = 0$ , $L_x = L$ & $2I_xE = L^2$

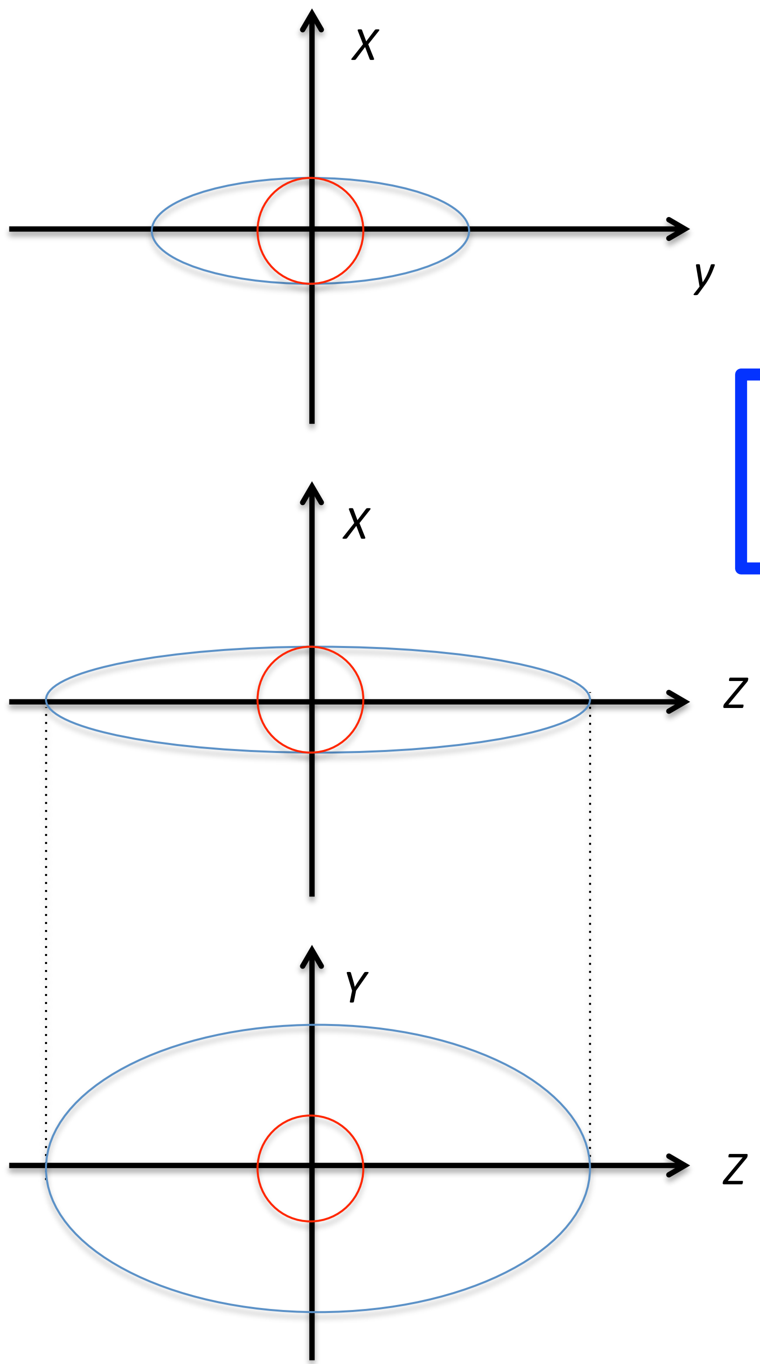
# Evolução dinâmica

- Suporemos $I_x < I_y < I_z$

$$\begin{cases} L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L^2 \\ \dfrac{L_x^2}{2I_x} + \dfrac{L_y^2}{2I_y} + \dfrac{L_z^2}{2I_z} = E \end{cases}$$

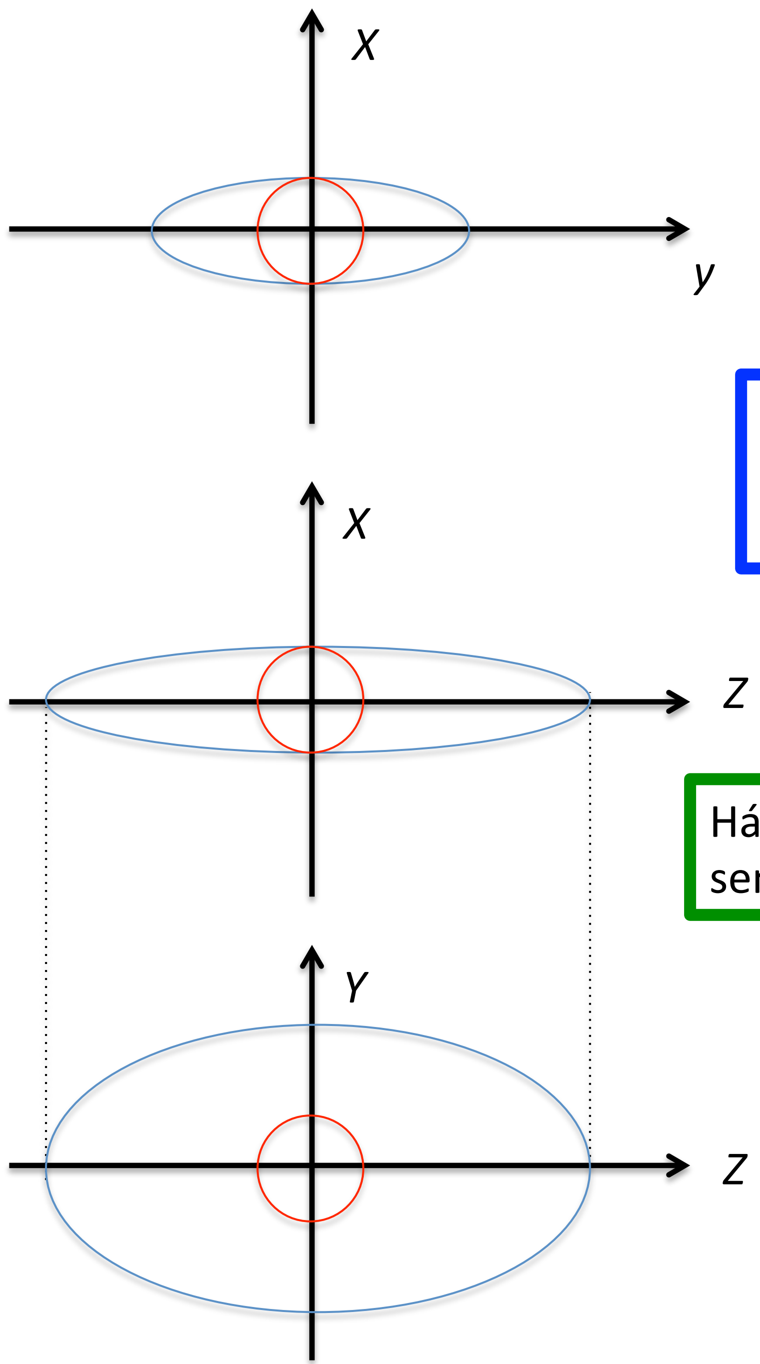
- Considere que inicialmente $\vec{L} \parallel \hat{x}$
  - Assim: $L_y = L_z = 0$, $L_x = L$ & $2I_xE = L^2$
    - A esfera tangencia internamente o elipsóide!

$\vec{L}$ alinhado com o eixo x




Esfera tangencia internamente o elipsóide!

$\vec{L}$ alinhado com o eixo x




Esfera tangencia internamente o elipsóide!

Há uma única solução: $\vec{L}$ fica sempre alinhado com o eixo x.

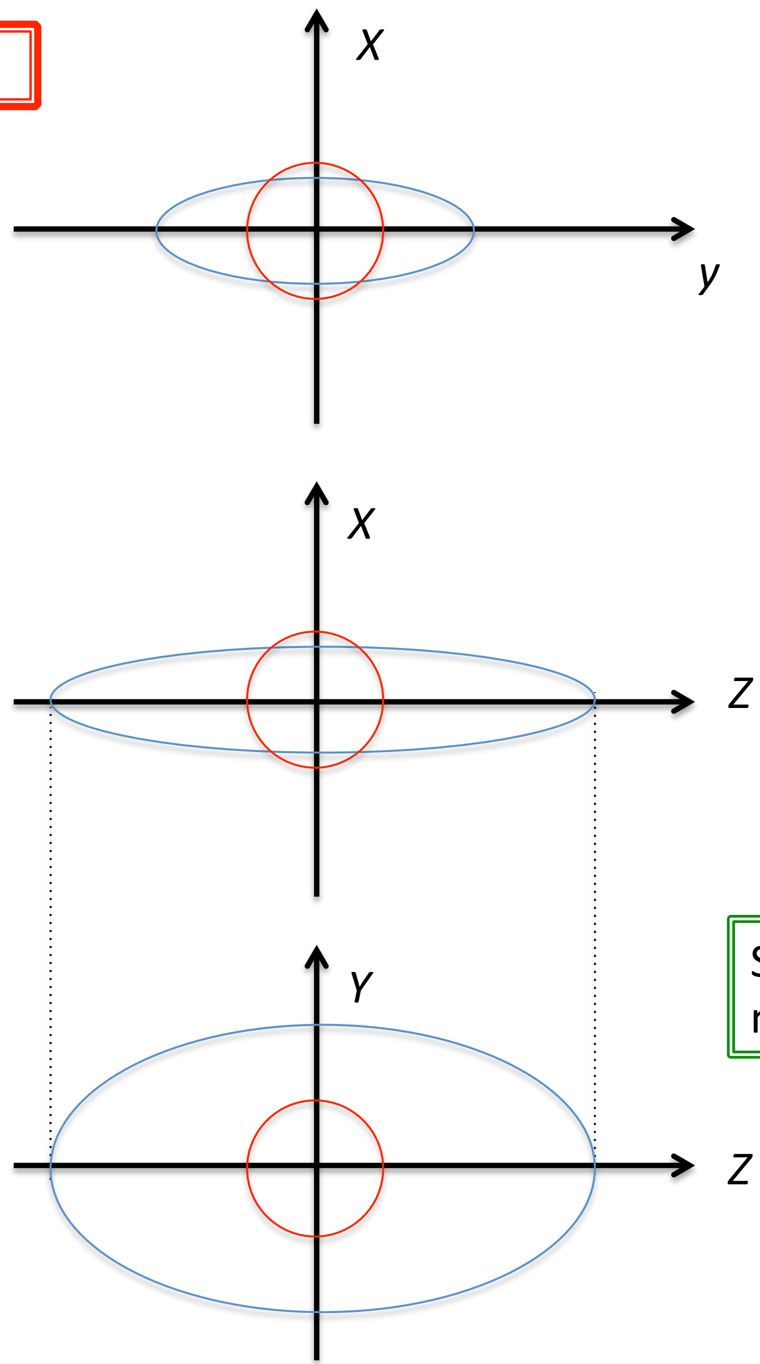
# Estabilidade do equilíbrio

- O que acontece se não conseguimos colocar o corpo para rodar exatamente em torno do eixo de menor inércia, mas apenas próximo a ele?
  - Em termos de nossa solução geométrica, podemos pensar que nossa condição inicial corresponde a um momento angular um pouco maior em módulo do que tínhamos antes!

$$2I_xE + \delta = L^2$$

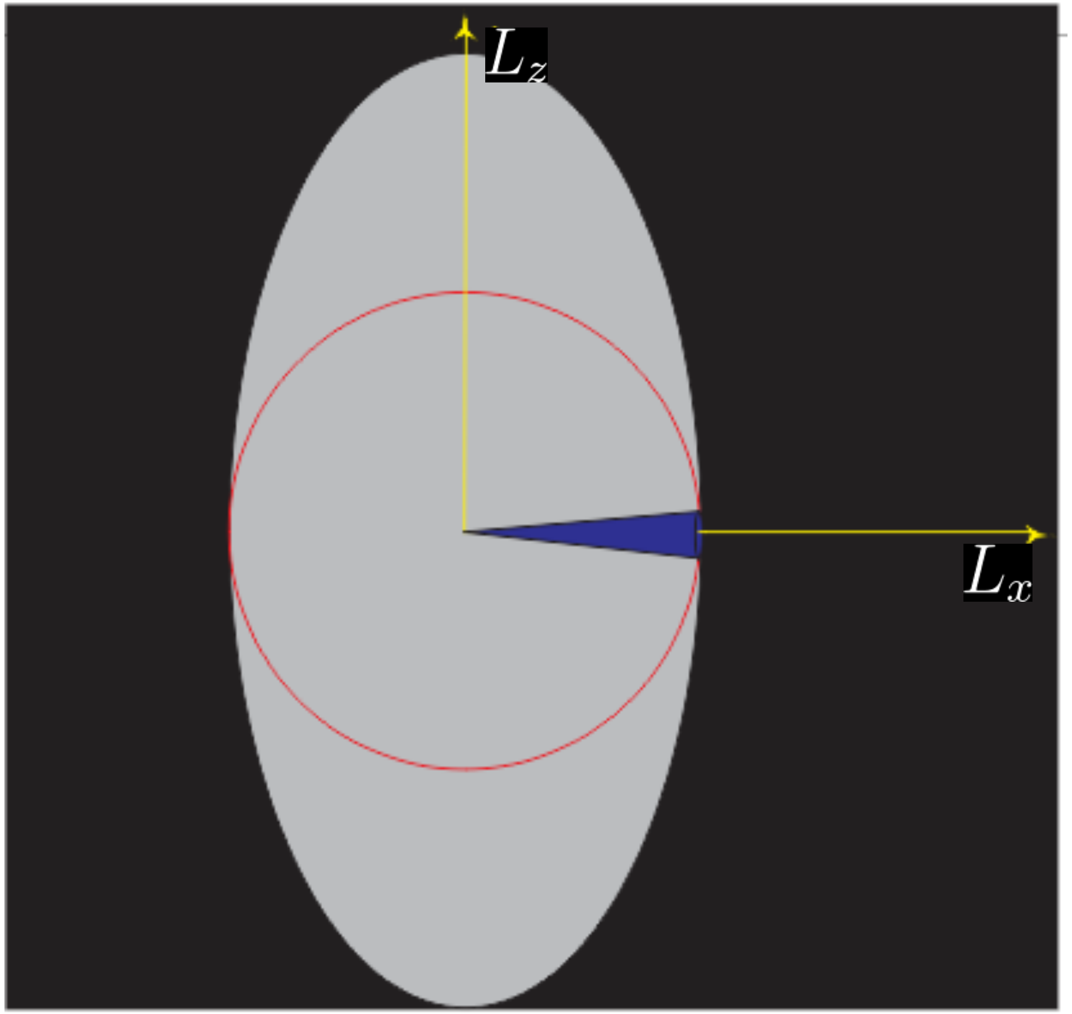
Próximo ao eixo x:

Estável

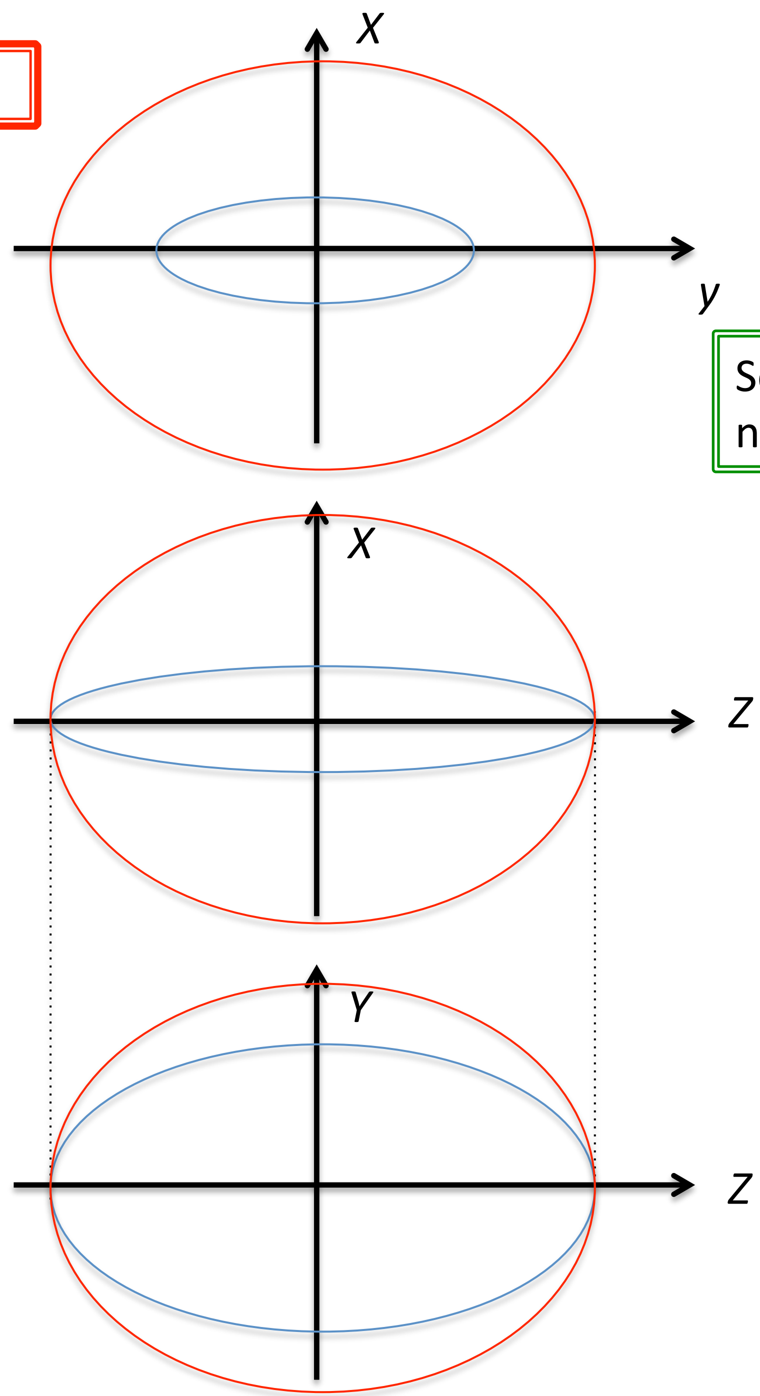



Sem solução
no plano YZ!!

# Projeção “xz”



Em z é análogo!

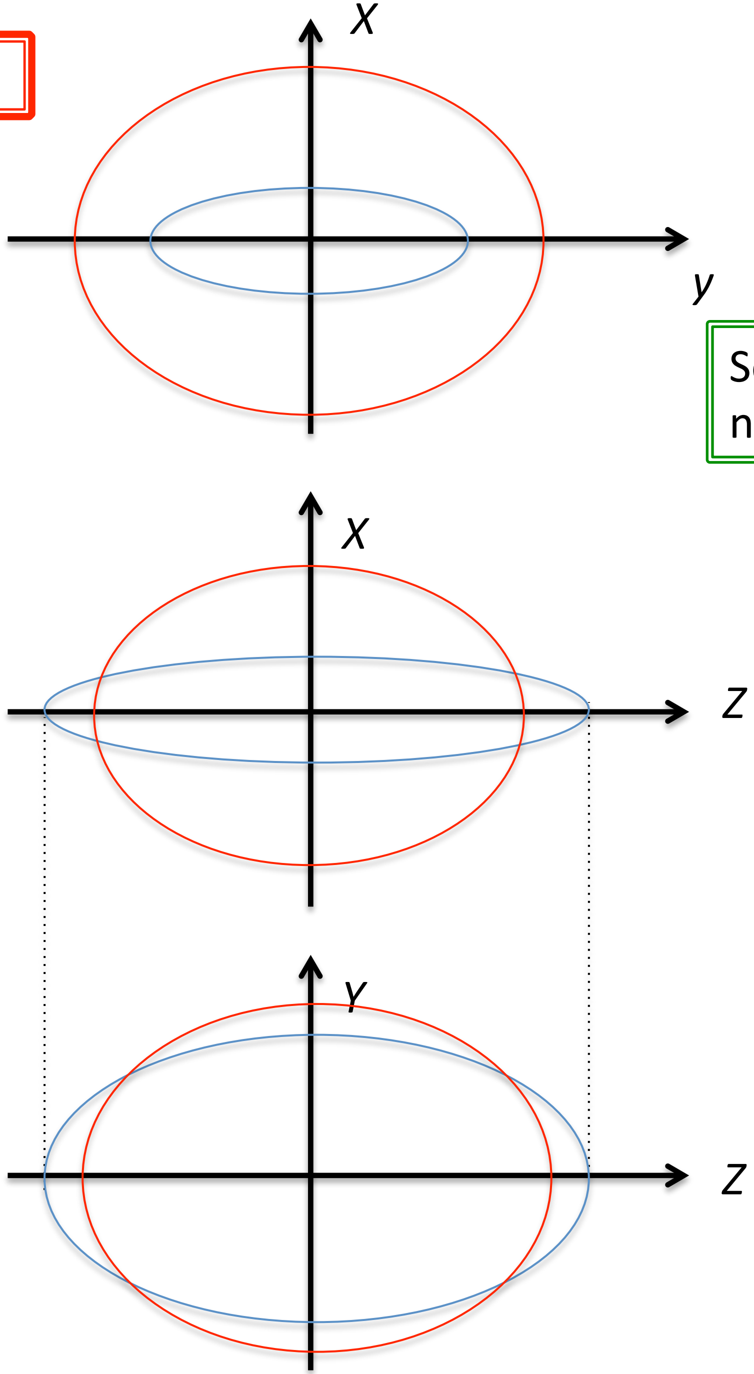



Sem solução
no plano XY!!

Esfera tangencia
externamente o
elipsóide!

Em z é análogo!

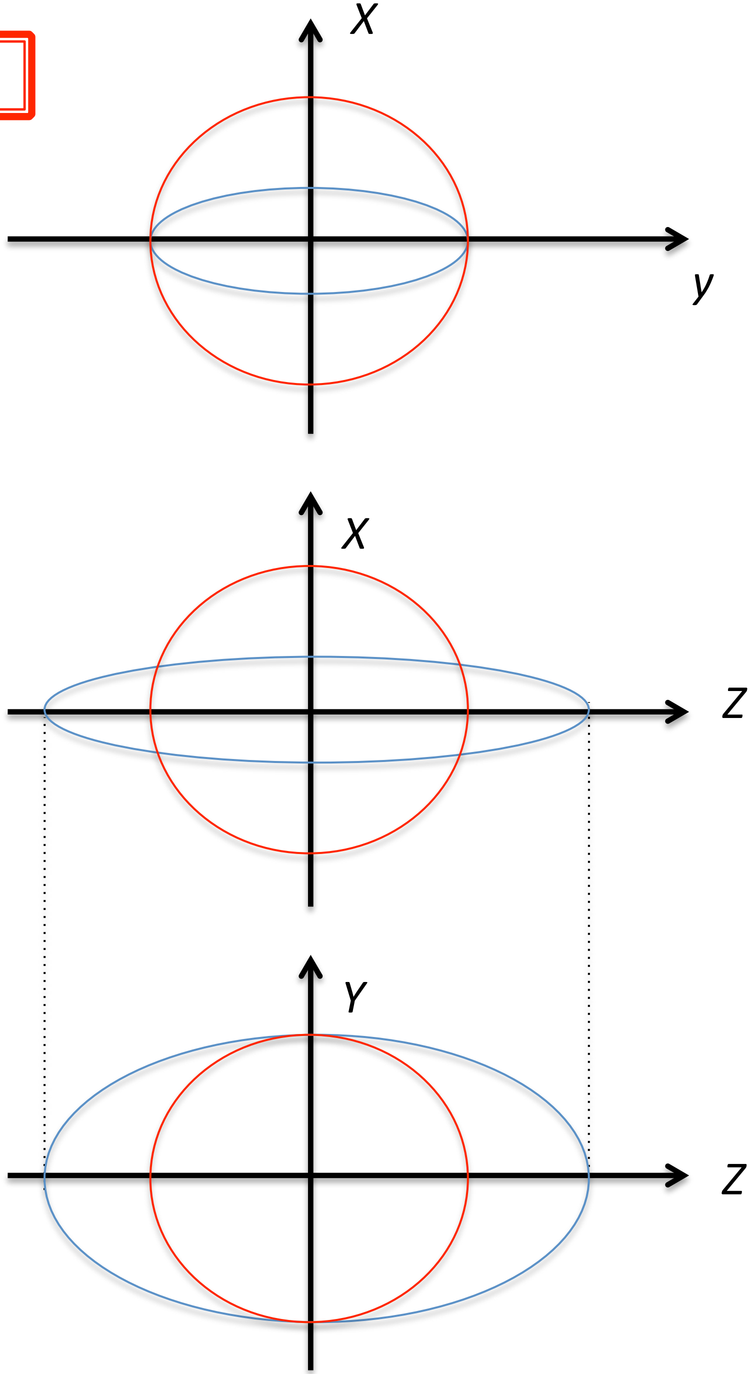
**Estável**




Sem solução no plano XY!!

Portanto, o maior e o menor eixo de inércia são sempre estáveis!

Em y é diferente

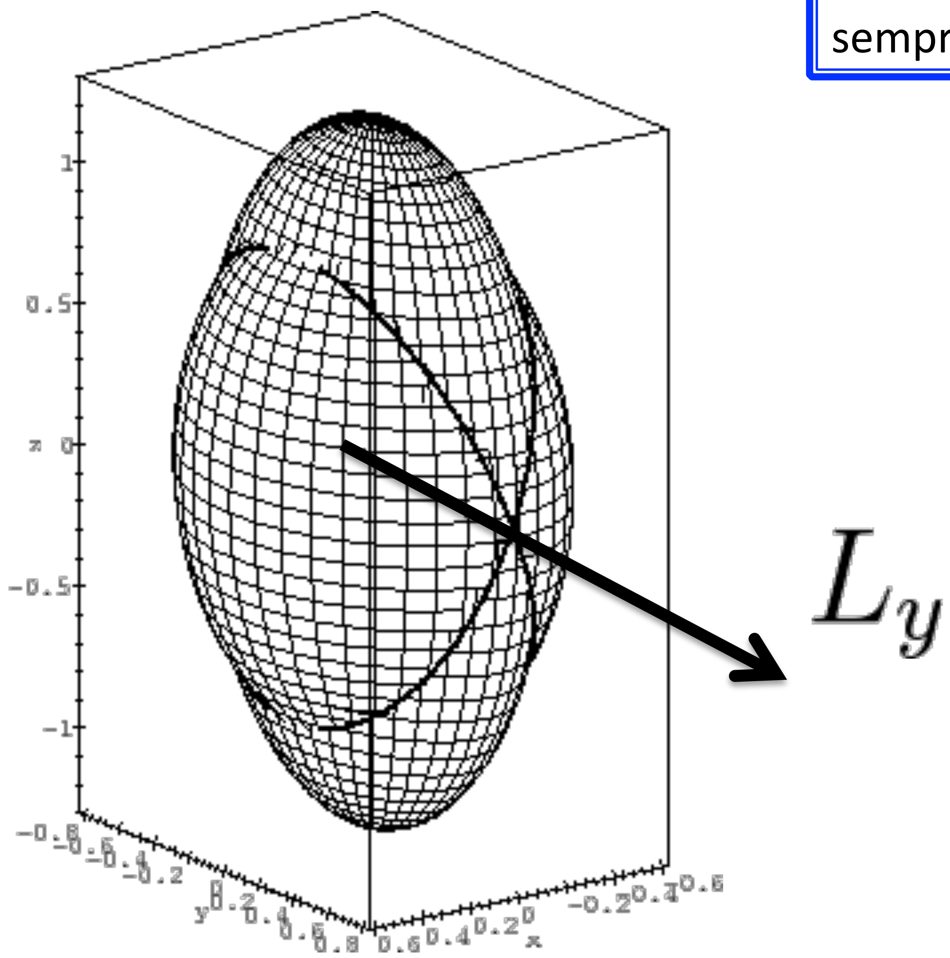


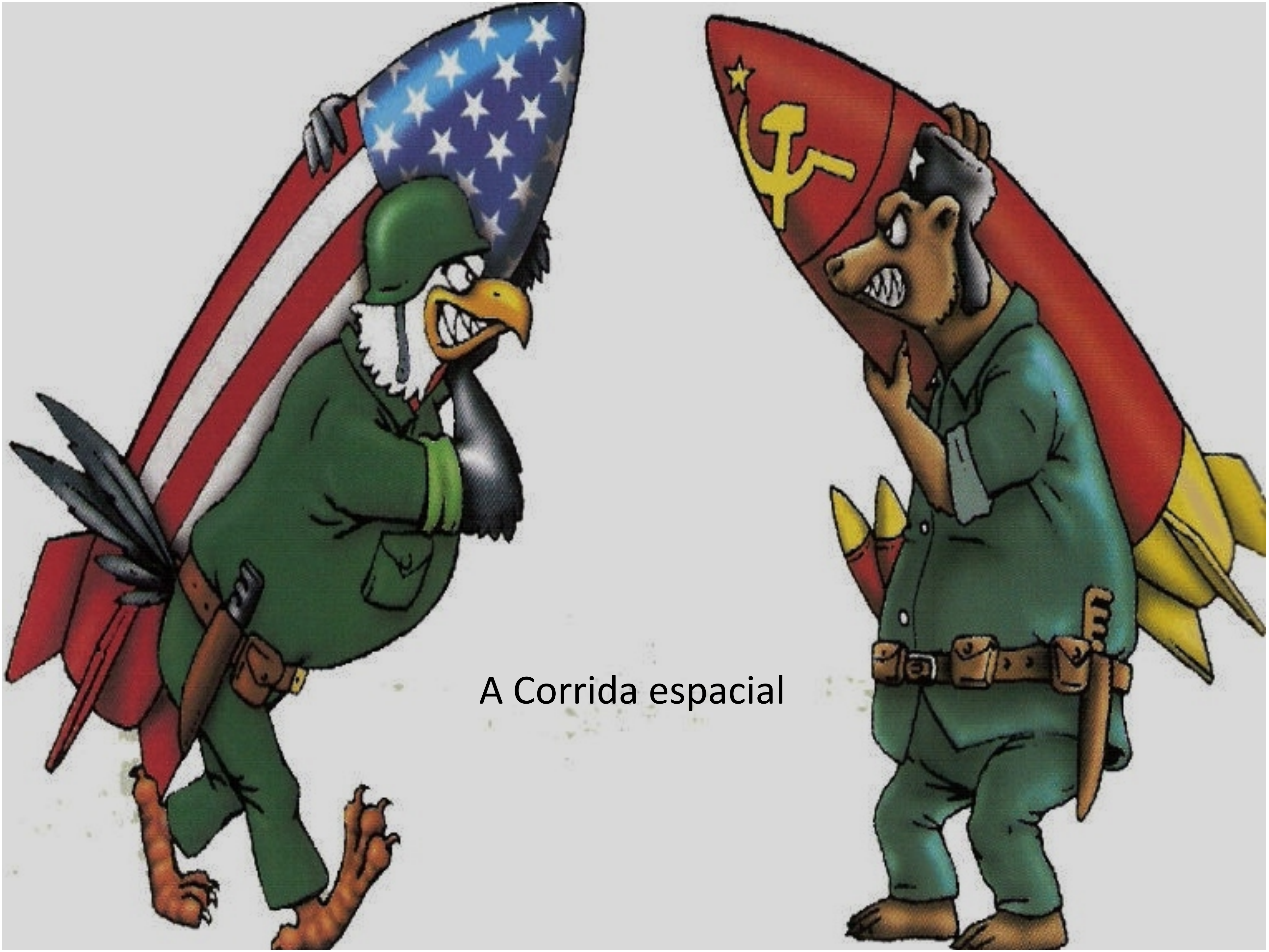

A intersecção do elipsóide com a esfera é uma curva!

Esfera **não** tangencia o elipsóide!

Em y é diferente

O eixo intermediário é sempre instável!

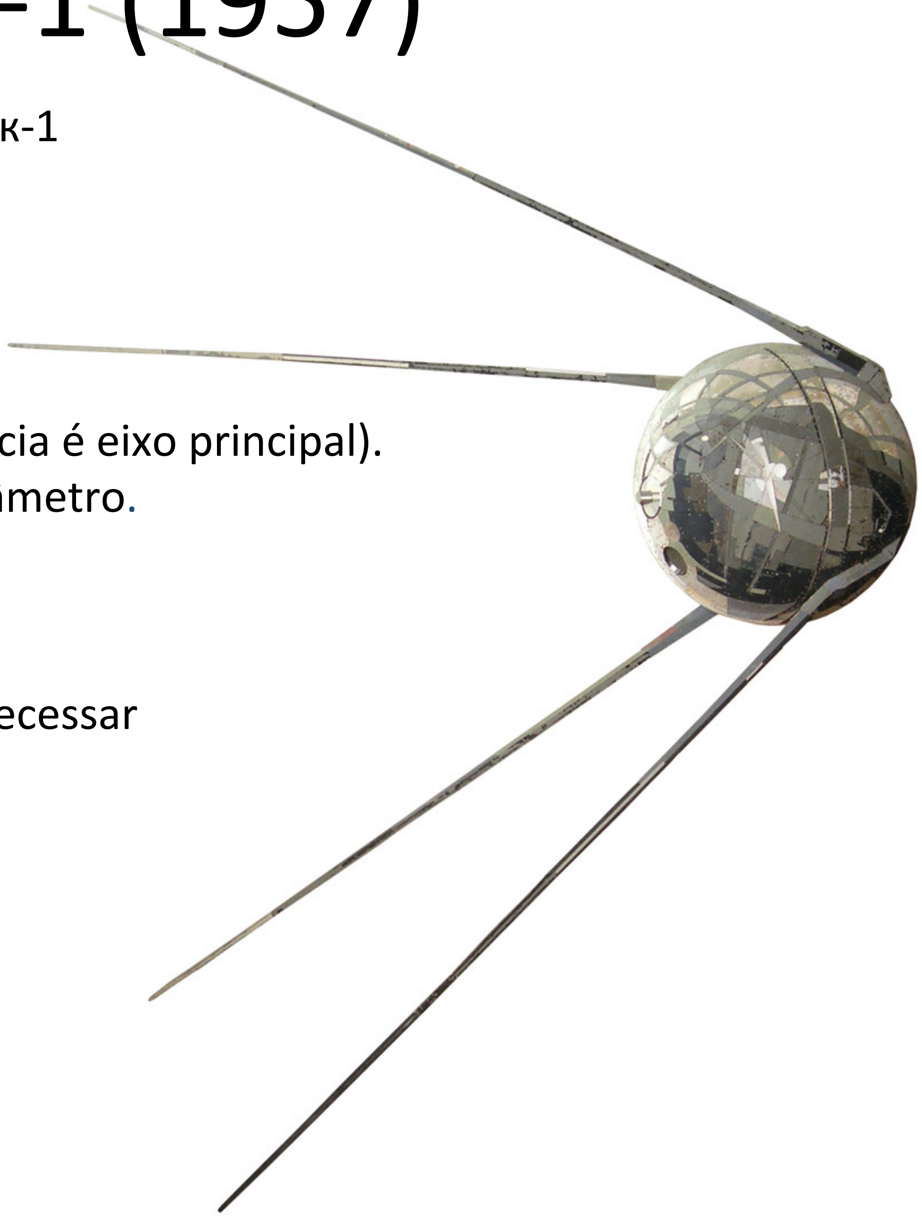




A Corrida espacial

# Sputnik-1 (1957)

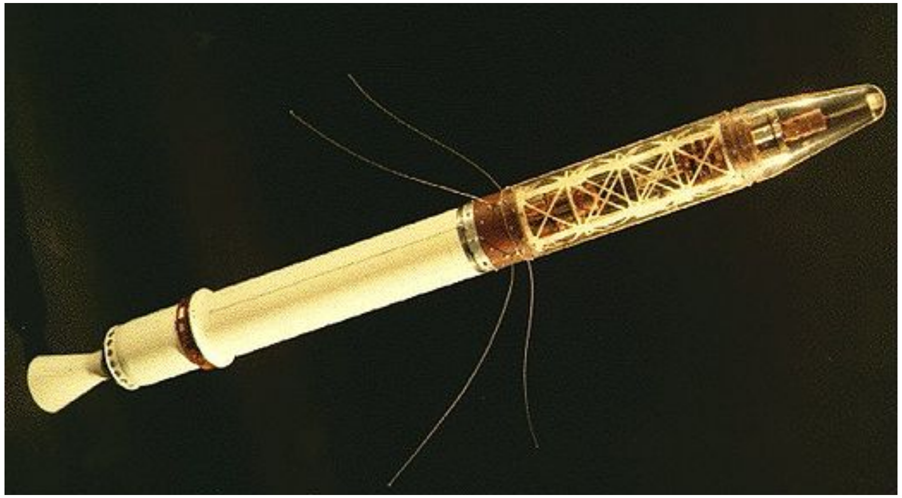
Спутник-1



Formato de esfera ( qualquer eixo de inércia é eixo principal).
Pesava cerca de 84kg e tinha 58 cm de diâmetro.

Ficou rotacionando sem precessar
ao longo da órbita!

# Explorer-1 (1957)

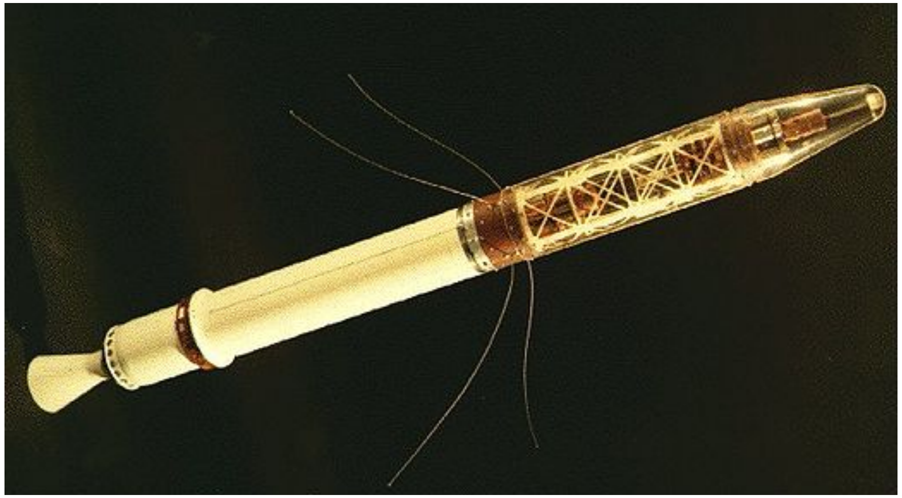


Formato cilíndrico, de massa ~14 kg.
2 m de comprimento e 15 cm de diâmetro.

Posta para rotacionar em torno do eixo de menor inércia (estável)

# Explorer-1 (1957)

Formato cilíndrico, de massa ~14 kg.
2 m de comprimento e 15 cm de diâmetro.

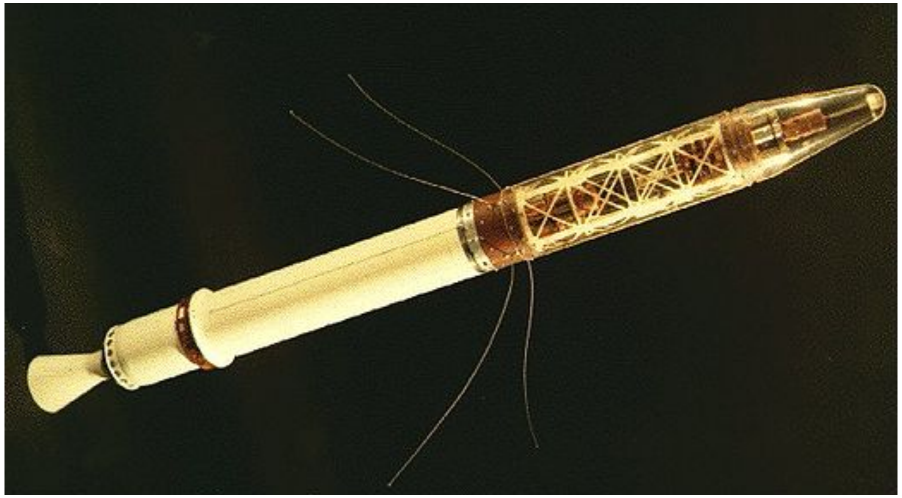


Posta para rotacionar em torno do eixo de menor inércia (estável)

Rapidamente começou a precessar!?

1ª modificação na teoria euleriana de corpos rígidos em ~200 anos!

# Explorer-1 (1957)



Formato cilíndrico, de massa ~14 kg.
2 m de comprimento e 15 cm de diâmetro.

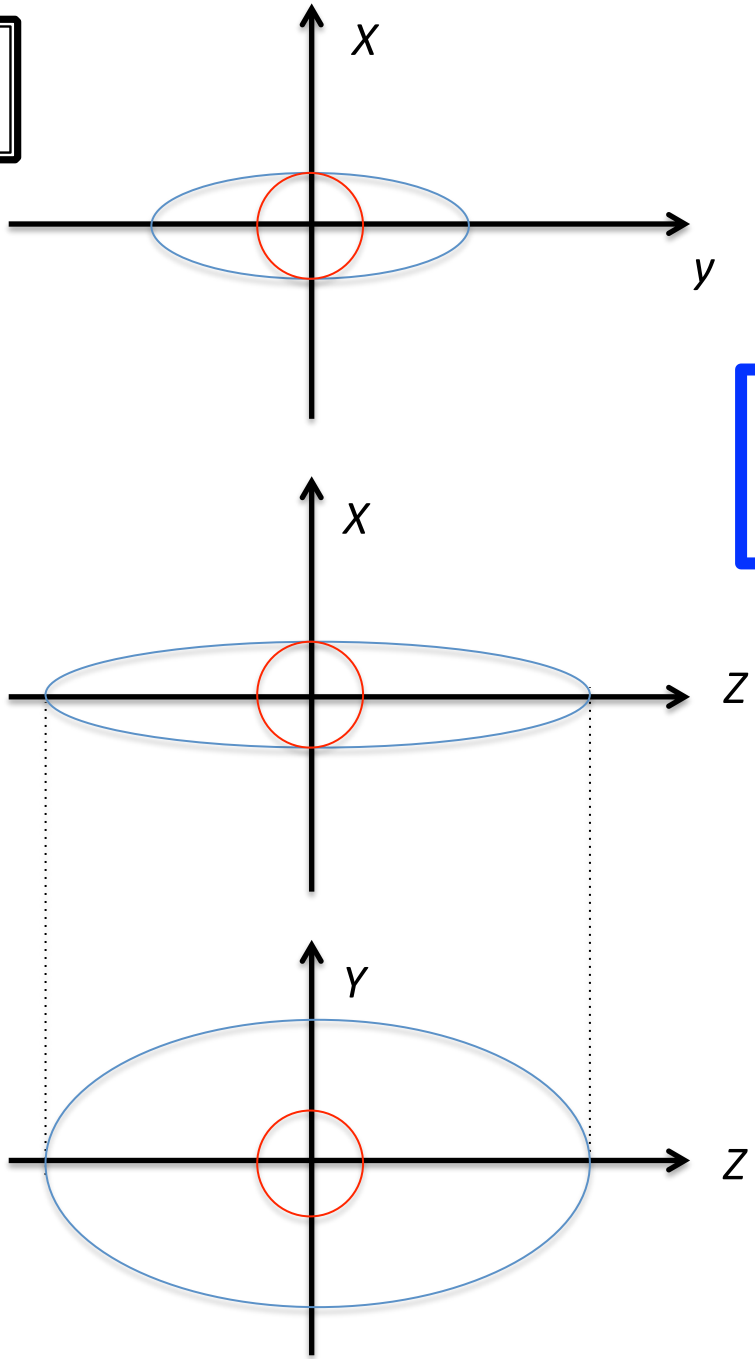
Posta para rotacionar em torno do eixo de menor inércia (estável)

Rapidamente começou a precessar!?

1ª modificação na teoria euleriana de corpos rígidos em ~200 anos!

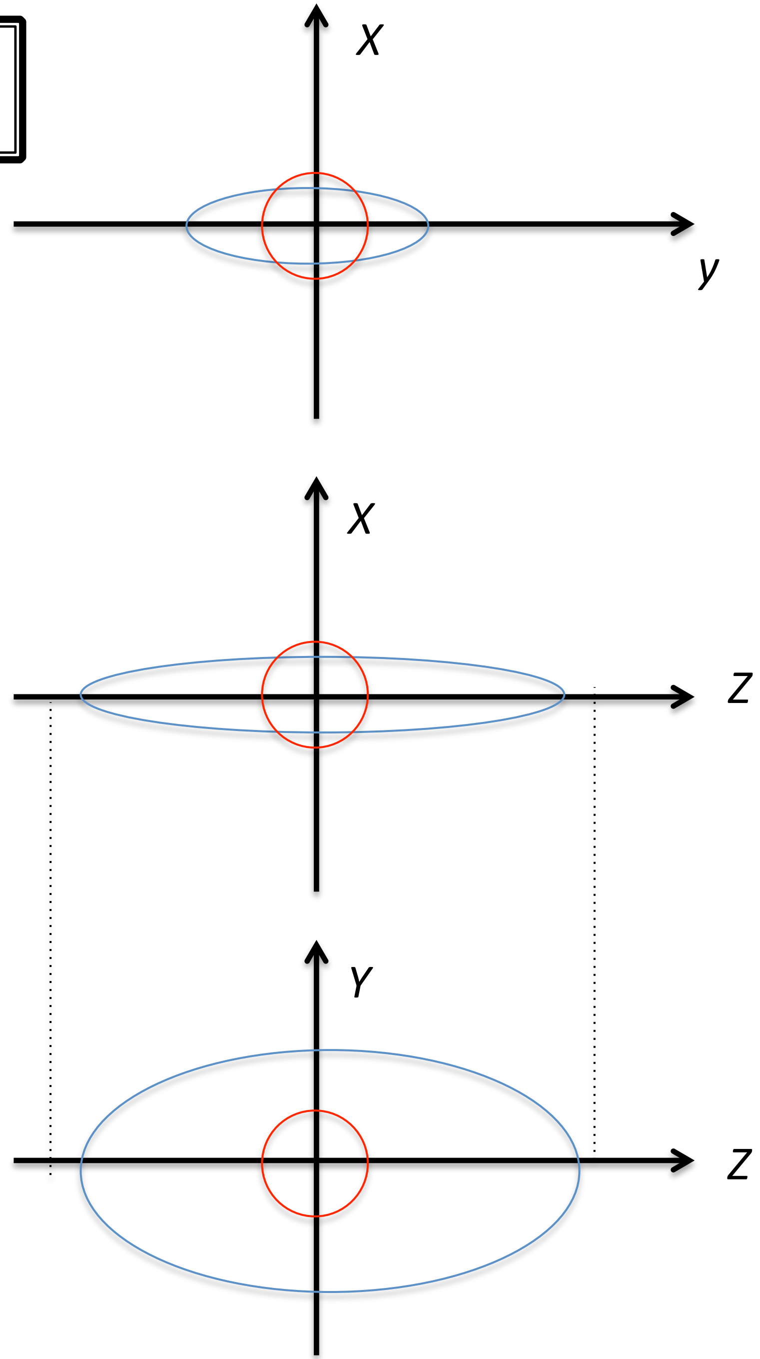
Devido ao movimento das antenas, há uma pequena dissipação de energia.
Mas o momento angular se conserva. **Vejamos o que acontece**!

Alinhado com o
eixo x inicialmente



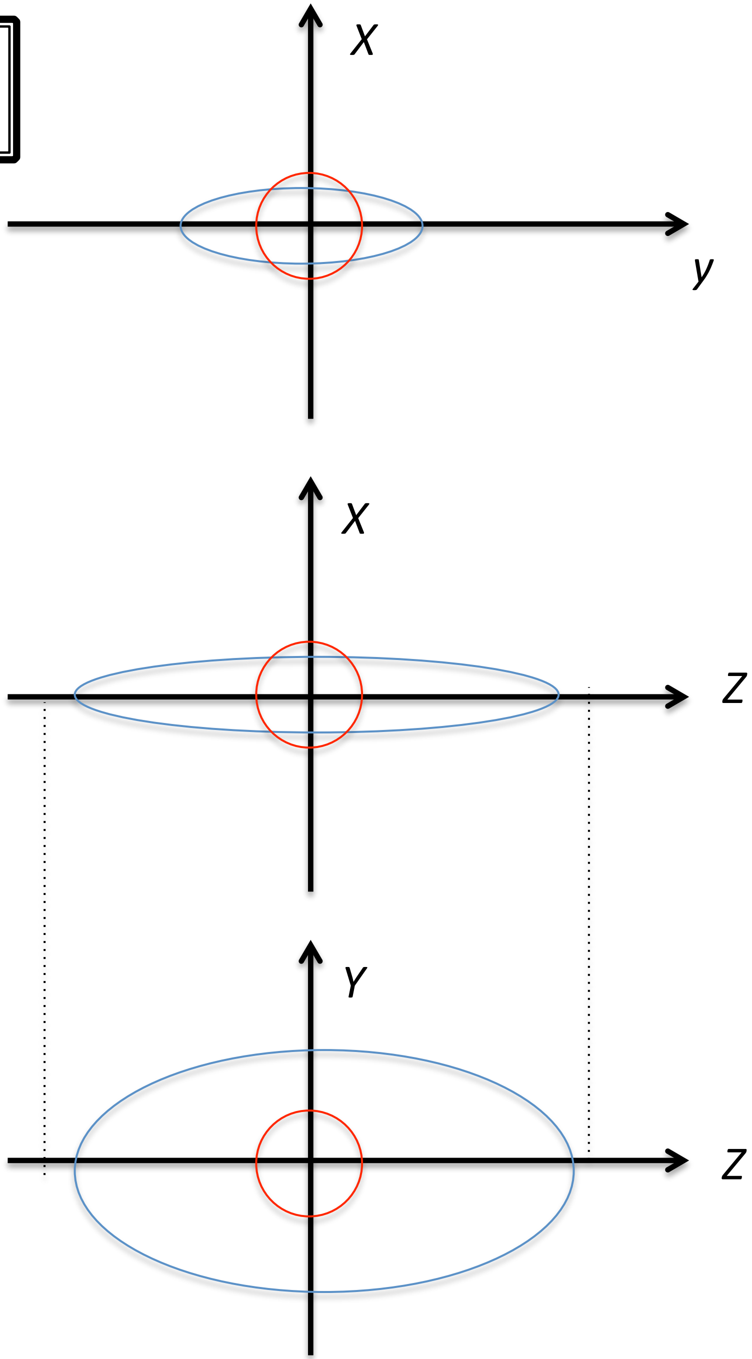

Esfera tangencia
internamente o
elipsóide!

Alinhado com o
eixo x inicialmente




Conforme a
energia diminui o
corpo pode sair
da direção inicial
de alinhamento

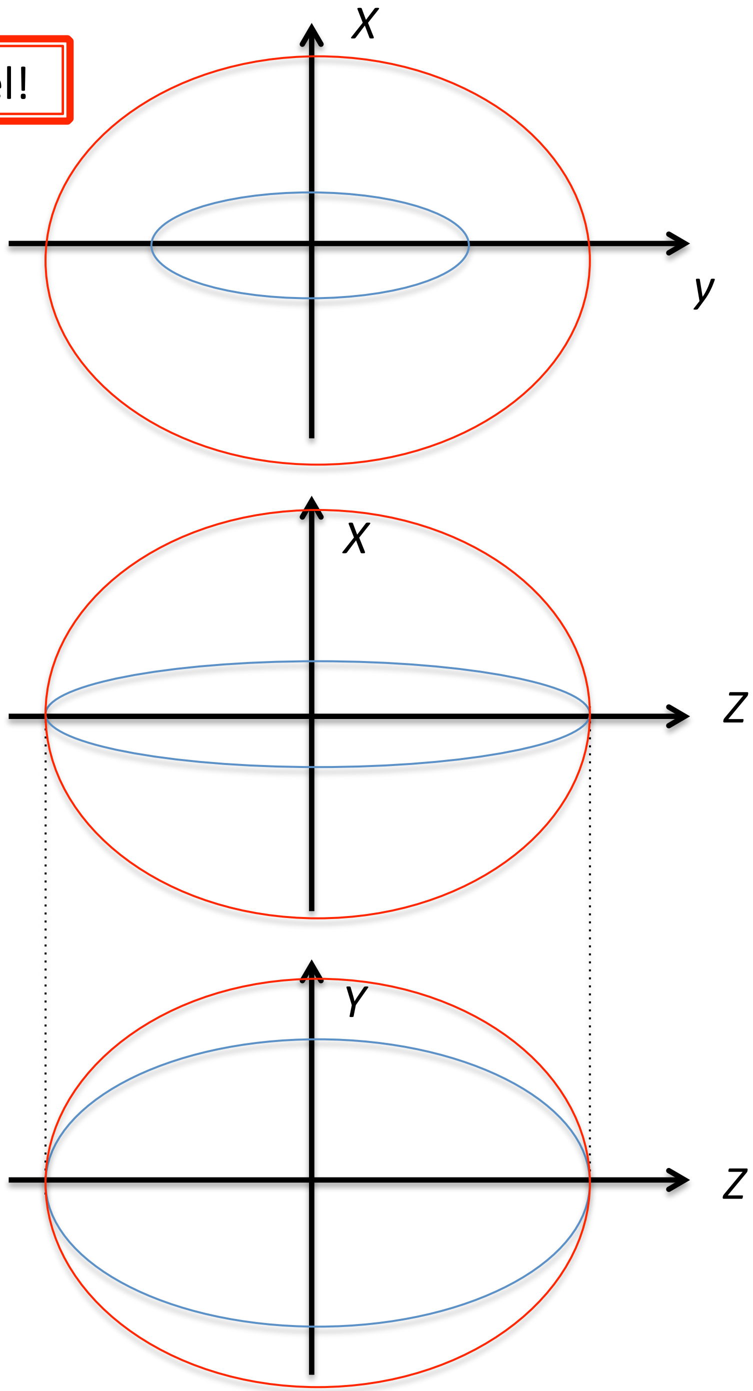
Alinhado com o
eixo x inicialmente




Conforme a
energia diminui o
corpo pode sair
da direção inicial
de alinhamento

Devido ao atrito,
o eixo de menor
inércia deixa de
ser estável!

Eixo z continua estável!




Esfera tangencia externamente o elipsóide!

# Estabilidade do equilíbrio

- E se conseguirmos injetar energia, mantendo o momento angular constante?

# Estabilidade do equilíbrio

- E se conseguirmos injetar energia, mantendo o momento angular constante?
  - O maior eixo de inércia deixará de ser estável, e devemos apenas ter o menor como estável!

# Estabilidade do equilíbrio

- E se conseguirmos injetar energia, mantendo o momento angular constante?
  - O maior eixo de inércia deixará de ser estável, e devemos apenas ter o menor como estável!
- Para tanto, devemos fazer uma força que transfira energia rotacional sem variar o momento angular.

# Estabilidade do equilíbrio

- E se conseguirmos injetar energia, mantendo o momento angular constante?
  - O maior eixo de inércia deixará de ser estável, e devemos apenas ter o menor como estável!
- Para tanto, devemos fazer uma força que transfira energia rotacional sem variar o momento angular.

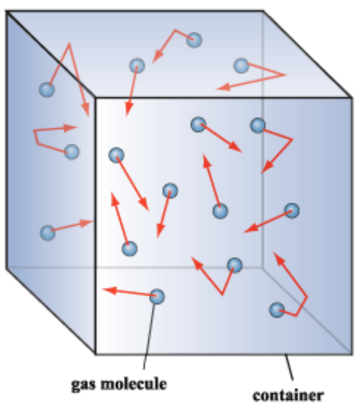
Violaria a segunda lei da termodinâmica!

# Entropia de corpos em rotação

- A temperatura pode ser formalmente definida a partir da entropia:

$$\boxed{\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}}$$

  – Em teoria cinética dos gases, por exemplo,




$$\boxed{3k_bT = m\langle\vec{v}^2\rangle}$$

# Entropia de corpos em rotação

- A temperatura pode ser formalmente definida a partir da entropia:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}$$

  – Temperatura deve ser invariante por mudança de referencial – S deve ser função apenas da energia interna!

# Entropia de corpos em rotação

- A temperatura pode ser formalmente definida a partir da entropia:

$$\boxed{\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}}$$

  – Devemos ter (desconsiderando translação):

$$S = f(E - E_{rot})$$

# Entropia de corpos em rotação

- A temperatura pode ser formalmente definida a partir da entropia:

$$\boxed{\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}}$$

  – Devemos ter (desconsiderando translação):

$$S = f\left(E - \frac{L_x^2}{2I_x} - \frac{L_y^2}{2I_y} - \frac{L_z^2}{2I_z}\right)$$

# Entropia de corpos em rotação

- A temperatura pode ser formalmente definida a partir da entropia:

$$\boxed{\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N}}$$

  – Devemos ter (desconsiderando translação):

$$S = f\left(E - \frac{L_x^2}{2I_x} - \frac{L_y^2}{2I_y} - \frac{L_z^2}{2I_z}\right)$$

Para maximizar S devemos ter $\vec{L} \parallel \hat{z}$

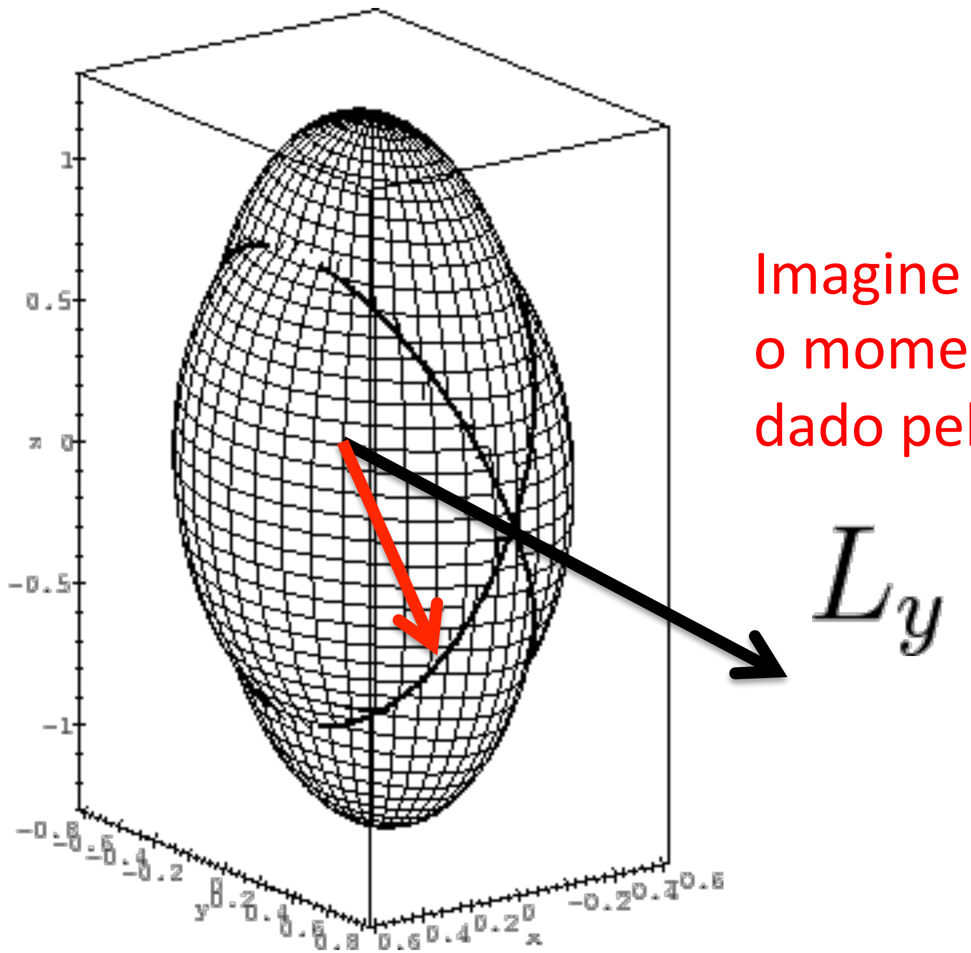
# Algumas soluções particulares

- Voltando para a situação sem atrito, temos dois eixos principais de inércia que são estáveis:
  - O maior e o menor.

# Algumas soluções particulares

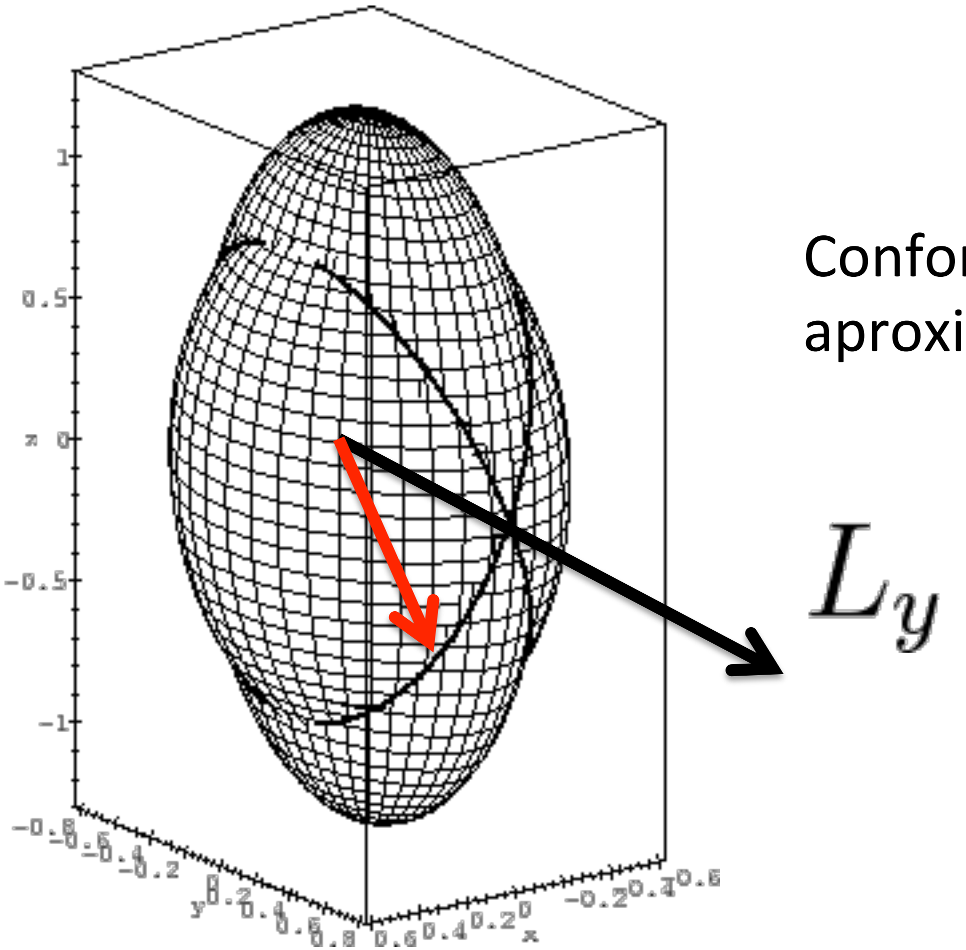
- Voltando para a situação sem atrito, temos dois eixos principais de inércia que são estáveis:
  - O maior e o menor.
- Contudo, para certas condições iniciais, o corpo pode tender a se alinhar com o eixo intermediário de inércia!

# Algumas soluções particulares



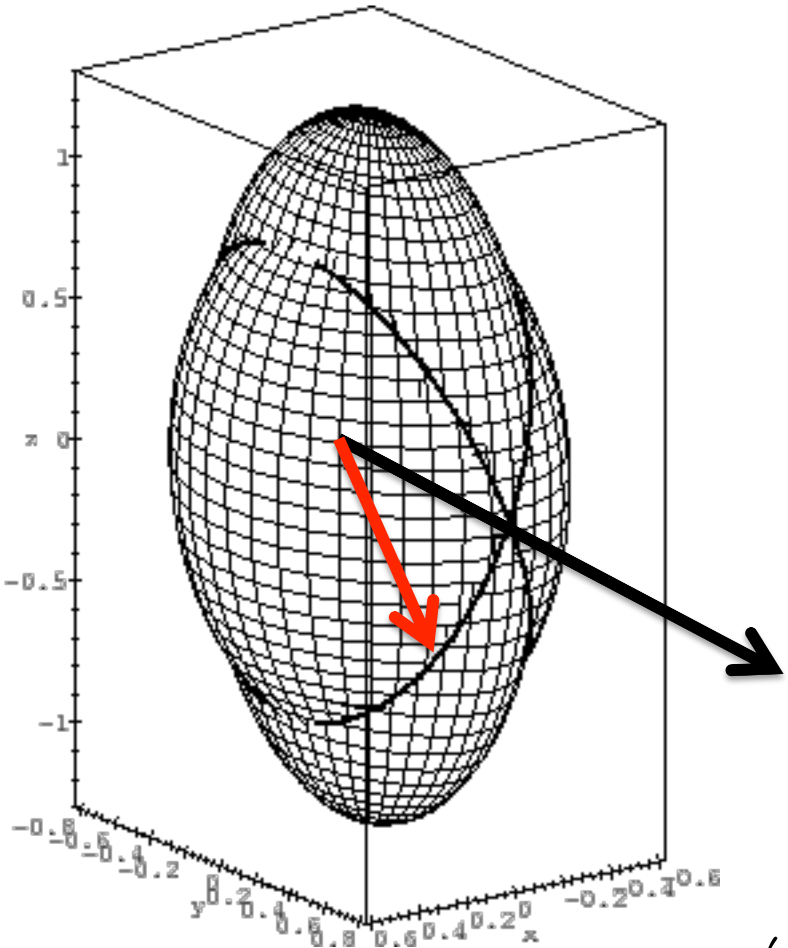

Imagine que em t=0
o momento angular é
dado pela seta vermelha.

# Algumas soluções particulares




Conforme o tempo passa, $\vec{L}$ se aproxima de $\hat{y}$ ou de $-\hat{y}$ .

# Algumas soluções particulares



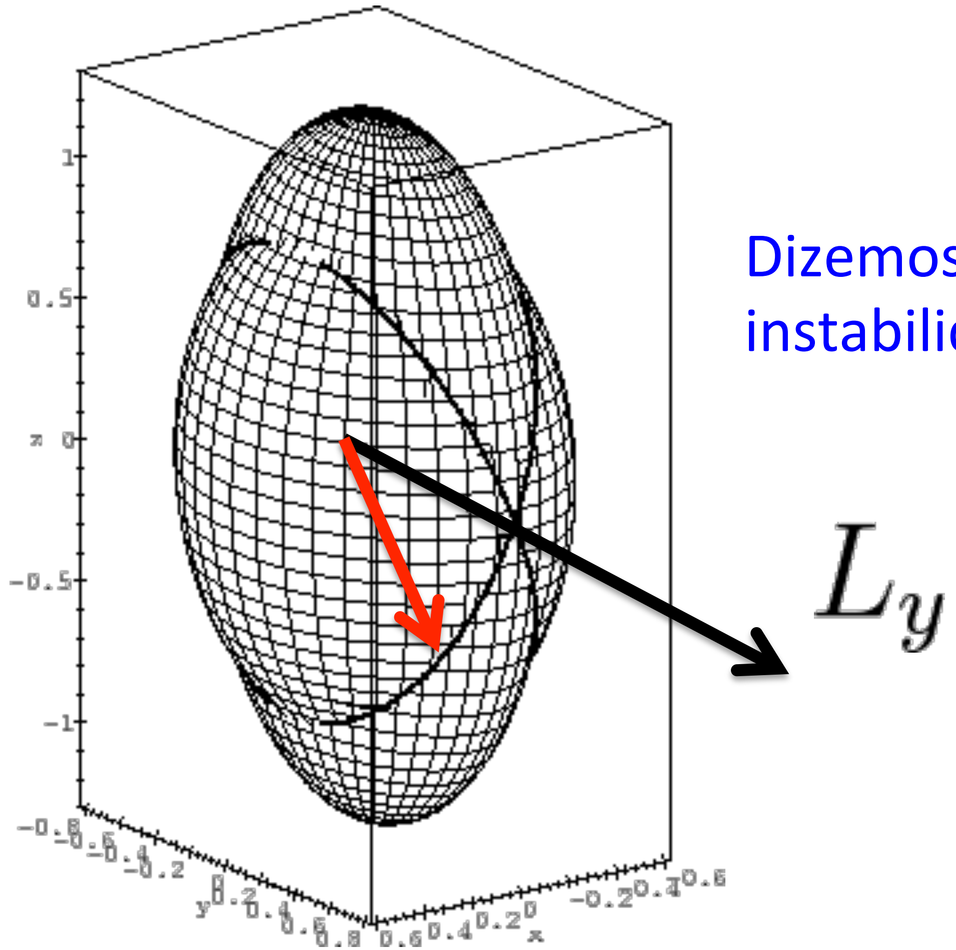

Conforme o tempo passa, $\vec{L}$ se aproxima de $\hat{y}$ ou de $-\hat{y}$ .

$$L_y$$

Para tanto, devemos ter

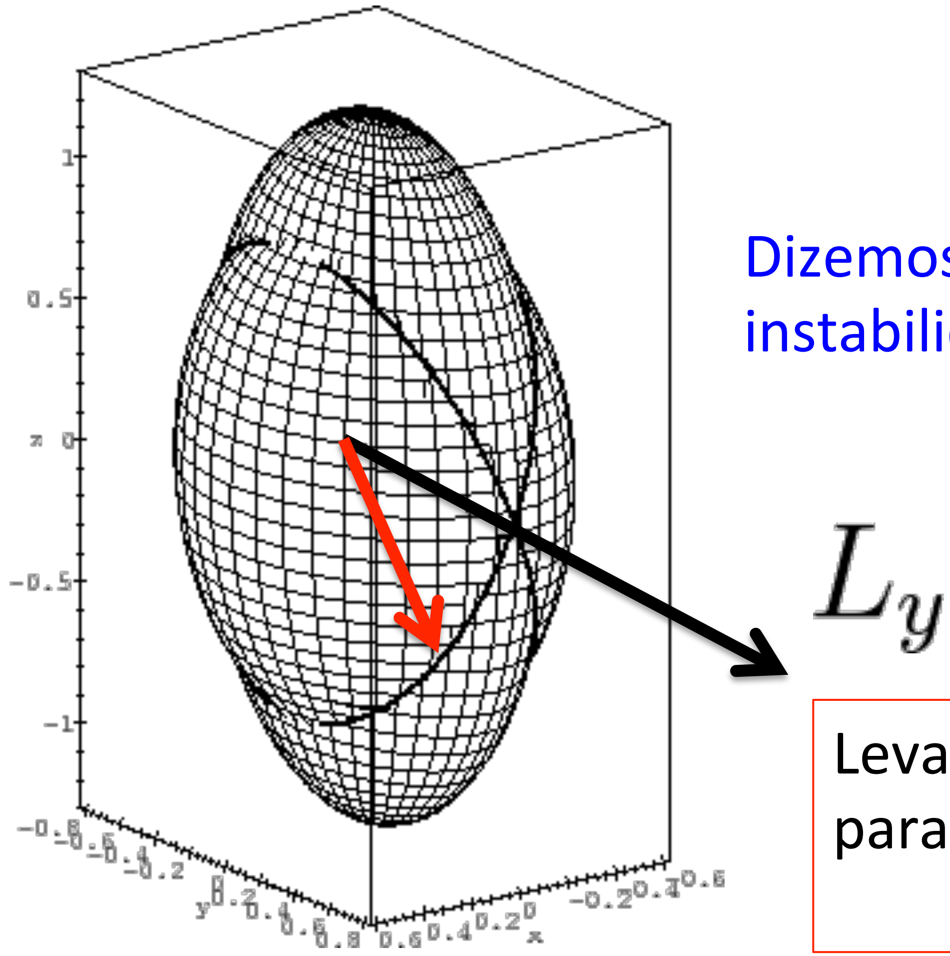
$$\omega_x = \pm\sqrt{\frac{I_1(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_2)}}\omega_z$$

# Algumas soluções particulares




Dizemos que o ponto de instabilidade é do tipo sela!

# Algumas soluções particulares

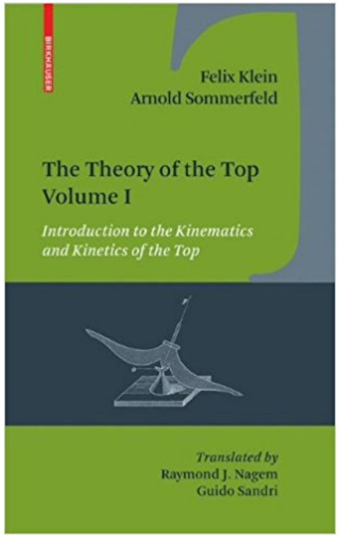


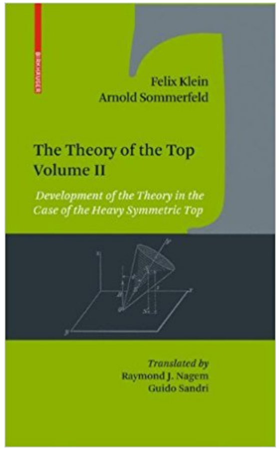

Dizemos que o ponto de instabilidade é do tipo sela!

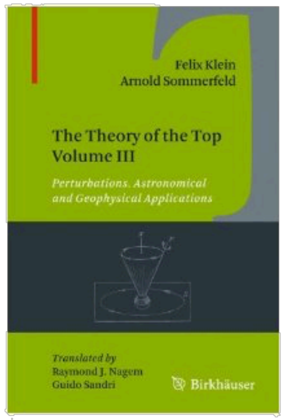
Leva, contudo, um tempo infinito para haver o alinhamento!

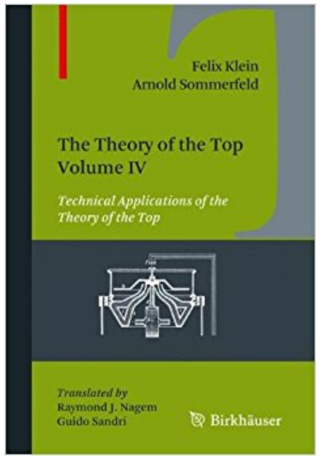
# Comentários Finais

- **Há muito** o que se estudar sobre corpos rígidos.



# Exemplos

- Giroscópio

# Exemplos

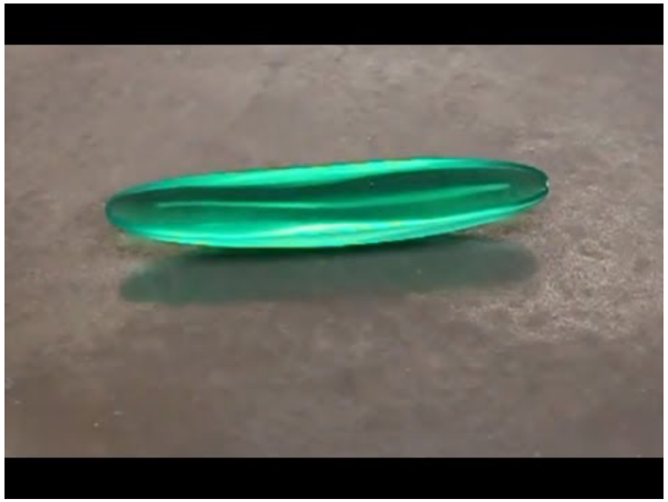
- Tippy-Top

Scanned at the American
Institute of Physics

http://imgur.com/gallery/4tA1zyF

# Exemplos

- Pedra Celta (*Rattleback* em inglês)



https://www.youtube.com/watch?v=LmEf7aIhpF8

https://www.reddit.com/r/gifs/comments/5wc973/neil_degrasse_tyson_demonstrates_a_rattleback/

# Bibliografia:

**Course of Theoretical Physics, Volume I e V Mechanics,** Butterworth-Heinemann (1976,1980)
L. D. Landau and E. M. Lifshitz.

**Mechanics. Lectures on theoretical physics Volume 1,** Academic Press (1964)
A. Sommerfeld

**Geometrical Approach to Torque Free Motion of a Rigid Body Having Internal Energy Dissipation**
Philippe L. Lamy and Joseph A. Burns.
Am.J.Phys **40**, 441 (1972)

**Notas de Aula, Mecânica Clássica I.**
Marcus Venicius Cougo Pinto e Carlos Farina de Souza