

Trabalho mecânico, energia gravitacional e a Grande Pirâmide de Gizé.

(MPEF/MNPEF IF – UFRJ/2015)

A C Tort ¹

¹Mestrado Profissional em Ensino de Física e Mestrado Profissional Nacional em Ensino de Física
Instituto de Física – Universidade Federal do Rio de Janeiro

3 de Junho de 2015

A Grande Pirâmide de Giza ou Khufu (Quéops)



Figura: A Grande Pirâmide construída na Quarta Dinastia por Khufu.

O platô de Gizé

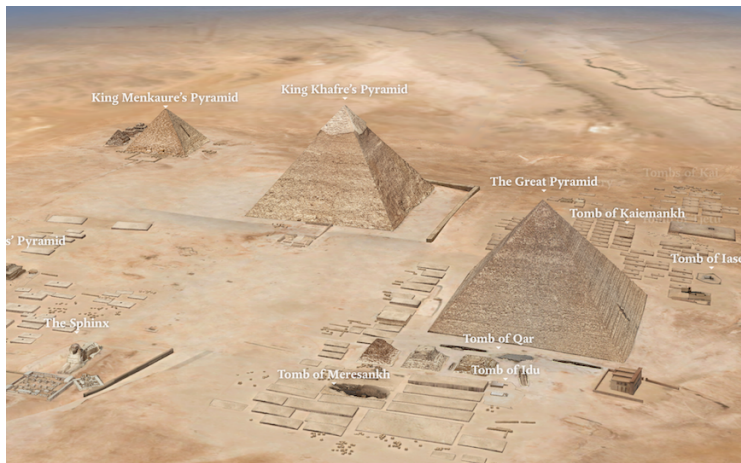
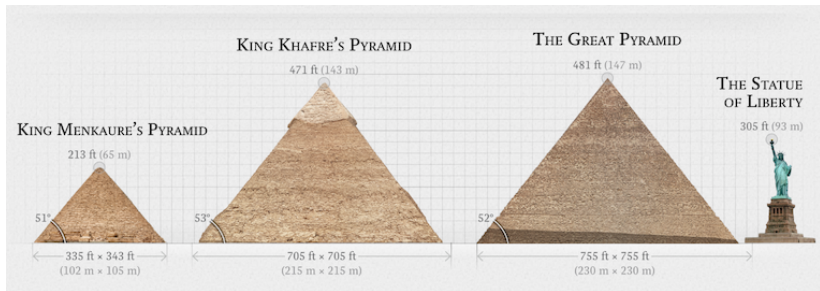
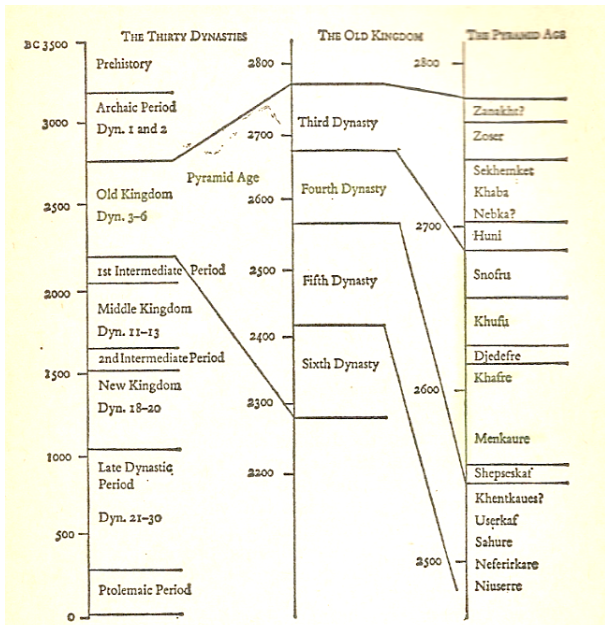


Figura: As pirâmides de Quéops (Khufu), Quéfrem (Khafre) e Miquerinos (Menkaure).

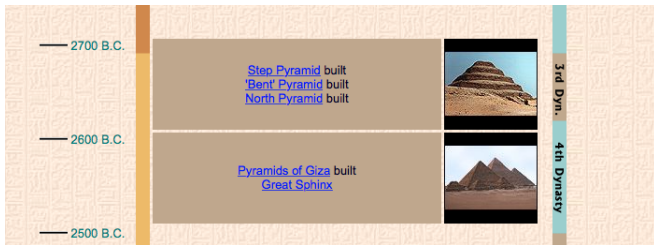
As três grandes pirâmides



Linha de tempo



A era das pirâmides



A Grande Pirâmide: dados

Altura original: 146,5 metros

Altura atual: 138,8 metros

Área da base: $(230,4 \text{ m})^2$

de blocos: 2 300 000 + 200 000 (revestimento) = 2 500 000

Peso médio de cada bloco: 2,5 toneladas-força

Peso total da G.P. = 6 400 000 toneladas-força

Heródoto

“A mais odiosa das desgraças humanas é o sábio não exercer nenhuma influência.”

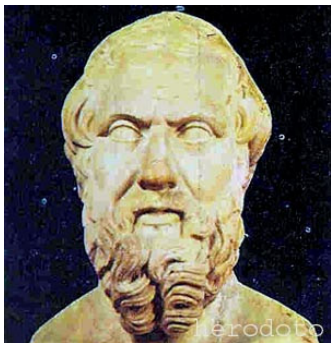


Figura: Heródoto c 484 a.E.C. – c 425 a.E.C..

Heródoto e a Grande Pirâmide

De acordo com Heródoto, foram necessários 10 anos para preparar o terreno e as câmaras subterrâneas e outros 20 anos e 100 000 homens para construir a Grande Pirâmide!

(Heródoto recolheu esses dados em uma viagem ao Egito, por volta de 450 a.E.C.. Suas impressões a respeito de Khufu e da organização social e política do Antigo Egito são muito negativas).

Que faremos?

- (a) Calcularemos **analiticamente** o trabalho contra a força gravitacional empregado para erigir a Grande Pirâmide;
- (b) compararemos o resultado obtido com a afirmação de Heródoto e outros resultados;
- (c) construiremos um modelo simples para a distribuição das tensões internas da pirâmide (**a pirâmide perfeita!**).

Trabalho e energia potencial

Tomando como referência o nível do solo:

$$W_{\text{agentes externos}} = \Delta U_{\text{pirâmide}} = M g z_{\text{c. de m.}}$$

$z_{\text{c. de m.}}$ = altura do centro de massa,

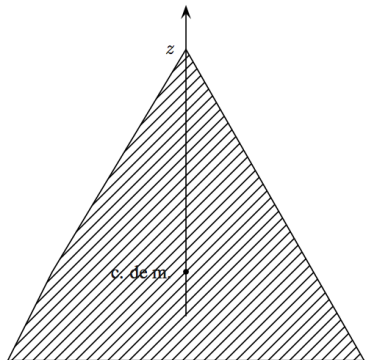
M = massa da pirâmide,

$g = 9,8 \text{ m/s}^2$, aceleração gravitacional próximo à superfície da Terra.

O centro de massa

Por **simetria**, devemos calcular apenas

$$z_{\text{c. de m.}} := \frac{1}{M} \int z \, dm.$$



Se $A(z)$ é a seção reta da pirâmide na altura z

$$dm = \rho A(z) dz,$$

ρ = densidade (uniforme).

$$M = \rho V, \text{ massa total.}$$

$$V = (1/3)A_0H, \text{ volume.}$$

A_0 = área da base e H = altura da pirâmide.

Portanto

$$z_{\text{c. de m.}} = \frac{3}{A_0H} \int_0^H z A(z) dz.$$

Da teoria da medida do volume de cones e pirâmides:

$$\frac{A(z)}{A_0} = \left(\frac{H-z}{H} \right)^2.$$

Segue que

$$z_{\text{c. de m.}} = \frac{3}{H} \int_0^H z \left(\frac{H-z}{H} \right)^2 dz.$$

Efetuada a integral obtemos

$$z_{\text{c. de m.}} = \frac{1}{4} H.$$

Portanto, o centro de massa da pirâmide está localizado no ponto

$$z_{\text{c. de . m}}(0, 0, H/4)$$

O trabalho do agente externo se escreve

$$W_{\text{agente externo}} = \frac{1}{4} Mg H = \frac{1}{12} \rho g A_0^2 H^2.$$

Finalmente...

Substituindo os dados numéricos

$$\begin{aligned}W_{\text{agentes externos}} &= \frac{1}{12} \times 2\,600 \times 9,8 \times (230,4)^2 \times (146,7)^2 \\ &\approx 2,5 \times 10^{12} \text{ J.}\end{aligned}$$

Em kcal ($1 \text{ J} \approx 0,24 \text{ cal}$):

$$W_{\text{agentes externos}} \approx 6,0 \times 10^8 \text{ kcal.}$$

Comparação com Heródoto

Supor que cada trabalhador consuma 1 500 kcal/dia e 10 % do total sejam utilizados como trabalho útil. (Dieta/eficiência podem ser alteradas.)

Um homem-ano = 360×150 kcal ou 5.4×10^4 kcal/ano de trabalho útil, logo: o trabalho realizado por N homens em n anos

$$W_{Nn} = Nn \text{ homens-ano} \times 5.4 \times 10^4 \text{ kcal} .$$

$$Nn = \frac{6.0 \times 10^8}{5.4 \times 10^4} \approx 1.1 \times 10^4 \text{ homens-ano},$$

i.e.: **1 100 homens trabalhando durante 10 anos.**

\approx 100 vezes menor do que a estimativa de Heródoto!

Comparação com Illig e Löhner

6 700 trabalhadores durante um período de 10 anos:

1. 1170 trabalhadores nas pedreiras;
2. 1290 transportando blocos de rochas ao longo do Rio Nilo;
3. 1020 trabalhadores no transporte por terra;
4. 1320 trabalhadores *in situ* e ao pé da pirâmide;
5. 880 trabalhadores nos flancos da pirâmide;
6. * 200 trabalhadores transportando (na pirâmide) os blocos de pedra (rocha calcária e granito) ;
7. * 820 trabalhadores posicionando os blocos no platô da pirâmide.

Outras estimativas

1. Mark Lehner (egiptólogo): $\approx 20\,000$ homens em 20 anos.
2. Kurt Mendelssohn (físico e egiptólogo amador): $\approx 70\,000$ homens em 20 anos.
3. S. K. Weir (egiptólogo): $\approx 10\,000$ homens em 23 anos (Duração do domínio de Khufu!).

Nosso resultado não leva em conta vários aspectos, e.g.: o trabalho para cortar e transportar os blocos das pedreiras até o lugar da construção, posicioná-los, etc.

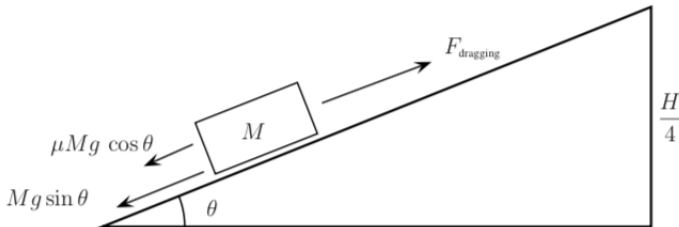
Recebemos peças prontas e montamos um Lego gigantesco sem contar o trabalho de moldar e transportar da fábrica até nós essas peças! Calculamos o trabalho contra a gravidade!



Melhorando a estimativa

Supor que os trabalhadores arrastaram um bloco de massa M (=massa da pirâmide) ao longo de um plano inclinado até uma altura $H/4$:

$$W_{\text{arrastar}} = \frac{1}{4} MgH\mu \cot \theta = \mu \cot \theta W_{\text{elevantar}}.$$



O trabalho total será

$$W_{\text{total}} = W_{\text{elevantar}} + W_{\text{arrastar}} = W_{\text{elevantar}} (1 + \mu \cot \theta),$$

Para $\mu = 0.75$ (calcário deslizando sobre calcário) e $\theta = 10^0$:

$$W_{\text{arrastar}} = 4.3 W_{\text{elevantar}},$$

ou

$$W_{\text{total}} = 5.3 W_{\text{elevantar}} = 1.3 \times 10^{13} \text{ J} = 3.1 \times 10^9 \text{ kcal.}$$

Agora,

$$Nn = \frac{3.1 \times 10^9}{5.4 \times 10^4} = 5.7 \times 10^4 \text{ homens-ano,}$$

i.e.: 5 700 homens trabalhando durante 10 anos, longe da estimativa de Heródoto, mas mais próximo de Illig e Löhner

Para $\theta = 5^\circ$,

$$W_{\text{arrastar}} = 8.57 W_{\text{elevantar}},$$

$$W_{\text{total}} = 9.6 W_{\text{elevantar}} = 5.7 \times 10^9 \text{ kcal,}$$

logo

$$Nn = \frac{5.7 \times 10^9}{5.4 \times 10^4} = 1.1 \times 10^5 \text{ homens-ano,}$$

i.e.: 11 000 homens em 10 anos.

Conclusões

Se Herdoto estivesse correto, dada a ineficiência, trabalhar na construção de uma pirâmide talvez não fosse tão ruim assim.

A imagem que temos de escravos forçados a construir pirâmides é incorreta. (D. B. Redford, PSU).

No Antigo Egito, quem trabalhava nas pirâmides tinha direito a isenções de taxas, vivia em vilas próximas ao sítio da construção e tinha direito à moradia, alimentação e vestuário.

Muitos desses trabalhadores eram artesãos e artistas altamente qualificados.

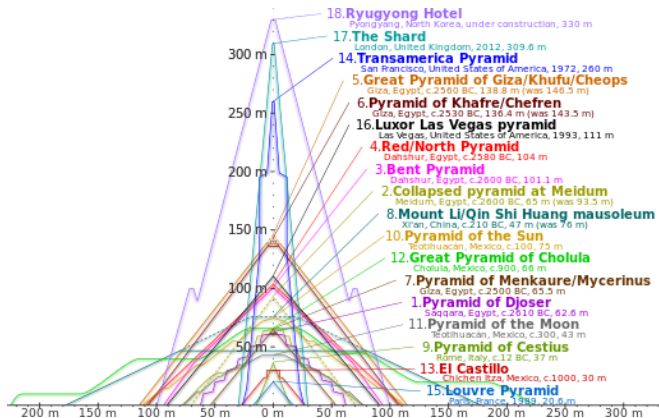
Pirâmides ao redor do mundo

Estruturas em forma de pirâmide ou tronco de pirâmide são encontradas em muitos lugares!



Figura: Pirâmides núbias; Pirâmide da Lua (México); Pirâmide de Cestius (Roma).

Tamanhos



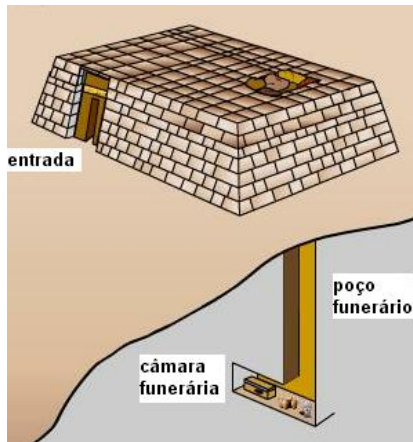
A forma piramidal: inspirada pelos raios do Sol?.



...ou pela pirâmide escalonada de Djoser? (Terceira Dinastia).



inspirada na *mastaba*...



Desastre em Meidum?



Figura: A pirâmide de Sneferu em Meidum.

O que pode ter acontecido? (Mendelssohn)

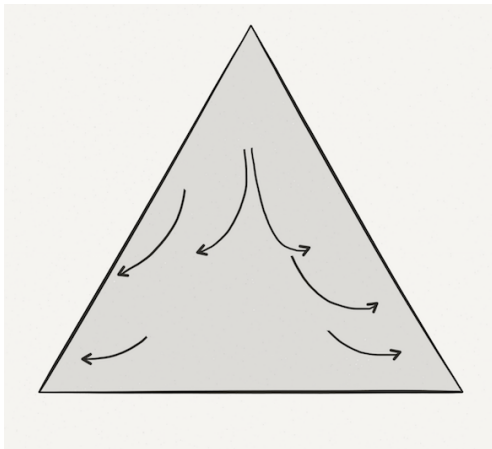


Figura: Peças mal cortadas = forças laterais.

A pirâmide 'encurvada'



Figura: A pirâmide 'encurvada' de Sneferu em Dahshur.

A Pirâmide perfeita

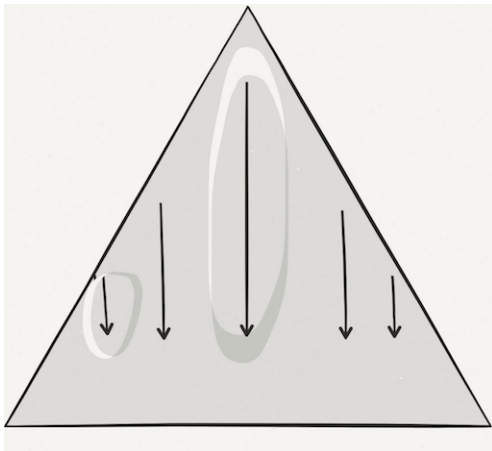
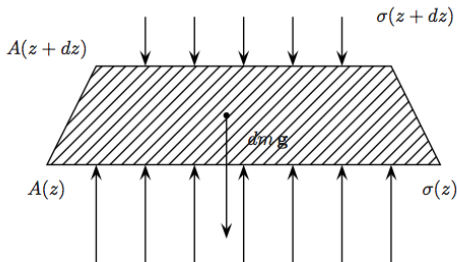


Figura: Sem forças laterais!

Um modelo para a distribuição da tensão interna

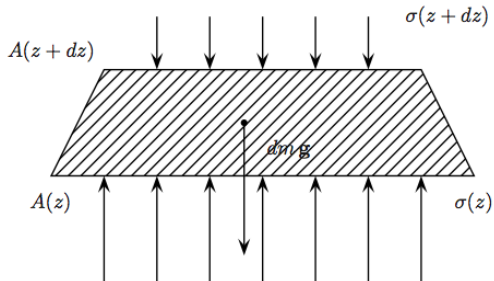
Na base, a tensão interna deve suportar o peso total da pirâmide, no vértice, a tensão deve ser nula.

E para z arbitrário?



Equilíbrio mecânico

$$-\sigma(z + dz) A(z + dz) + \sigma(z) A(z) - \rho g A(z) dz = 0.$$



Desprezando termos de segunda ordem:

$$\frac{d[\sigma(z) A(z)]}{dz} = -\rho g A(z),$$

Solução formal para ρ e g **uniformes**

$$\sigma(z) A(z) = -\rho g \int A(z) dz + C,$$

C =constante de integração.

ou

$$\sigma(z) \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 = -\rho g \int \left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 dz + C.$$

Definindo

$$\omega(z) = 1 - \frac{z}{H}, \quad \rightarrow dz = -Hd\omega,$$

Integrando

$$\sigma(z) \omega^2(z) = \rho g H \frac{\omega^3(z)}{3} + C.$$

A força vertical na base da pirâmide ($z = 0$) sustenta o peso total

$$\sigma(0) = \frac{Mg}{A_0} = \frac{1}{3} \rho gH.$$

Qdo $z = 0$, $\omega(0) = 1$, logo $C = 0$.

Campo de tensões verticais $\sigma(z)$

$$\sigma(z) = \frac{1}{3} \rho gH \left(1 - \frac{z}{H}\right), \quad 0 \leq z \leq H.$$

Tensão vertical na base

$$\sigma(0) = (1/3) \rho g H = 1,2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

Área da base

$$A_0 = (230,4)^2 \text{ m}^2$$

Força na base

$$F(0) = \sigma(0) \times A_0 = 6,4 \times 10^{10} \text{ N} \approx 6\,400\,000 \text{ toneladas-força!}$$

Esta força equilibra o peso total da Grande Pirâmide.

A pirâmide de base quadrada e estruturas similares, suportam a maior parte do peso da estrutura nas suas partes inferiores.

O peso da pirâmide em função da altura

$$P(z) = \int dm g = \rho g \int A(z) dz = \rho g A_0 \int_0^z \left(1 - \frac{z'}{H}\right)^2 dz',$$

Fazendo $\omega = 1 - z'/H$

$$P(z) = \rho g H A_0 \int_{1-\frac{z}{H}}^1 \omega^2 d\omega,$$

Efetuada a integral

$$P(z) = \frac{1}{3} \rho g H A_0 \left[1 - \left(1 - \frac{z}{H}\right)^3\right] = Mg \left[1 - \left(1 - \frac{z}{H}\right)^3\right].$$

Peso da parte superior da pirâmide

$$P^*(z) = Mg - P(z) = Mg \left(1 - \frac{z}{H}\right)^3,$$

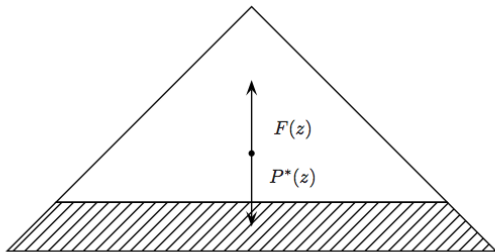
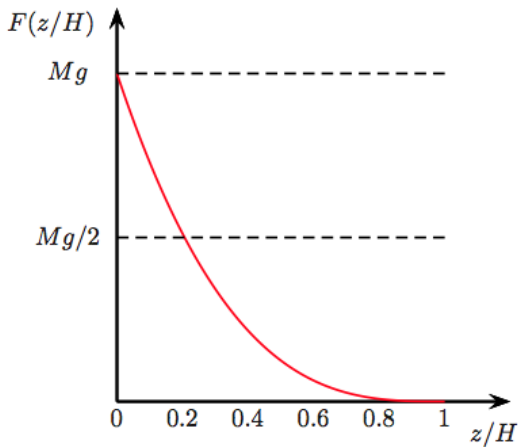


Figura: $P^*(z) = F(z) = \sigma(z) A(z)$

Supor $z = (1/4) H$:

$$F(H/4) = 0,42 Mg,$$

Quase a metade do peso total da pirâmide!



Observação final

A Grande Pirâmide de Giza pode ser um exemplo de problema interdisciplinar/contextualizado (?)

1. Biologia humana/metabolismo/dietas alimentares.
2. O corpo humano como uma máquina capaz de realizar trabalho; eficiência.
3. Recursos alimentares para suprir as necessidades de energia da força de trabalho (geografia econômica).
4. Modelos físicos para a construção, por exemplo: o uso de roldanas.
5. Curiosidades matemáticas: $22/7 \approx \pi$ origina-se na razão 1 : 4, i.e.: 1 unidade para o lado: 4 unidades para cima!

Bibliografia



Seidel M and Schulz R *Egito* Coleção Arte e Arquitetura. (Dinalivro: Lisboa) 2006. Portuguese translation of *Kunst und Architektur Ägypten* (Köneman/Tandem Verlag: Berlin) 2005.



Herodotus *The Histories* Book 2 §124. Translated by T Holland. (Viking: New York) 2014.



French A P *Newtonian Mechanics* (Norton; New York) 1965.



Johnson C *Thermal efficiency of a human being* <http://mb-soft.com/public2/humaneff.html>.



Stewart I Nature vol. 383 218 1996. This a short review of S K Wier's paper on the subject published in the *Cambridge Archeological Journal* **6** 150-163 1996.



Illig H and Löhner F *Der Bau der Cheops-Pyramide* (Mantis Verlag: Berlin) 1998.



Lehner M *The Complete Pyramids of Egypt* (Thames and Hudson; New York) 1997.



Barrow M <http://resources.woodlands-junior.kent.sch.uk/homework/egypt/farming.htm>. Last accessed in 04/15/2015.



Mendelssohn K *The Riddle of the Pyramids* (Sphere Books; London) 1977.



Moise E *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint* (Addison-Wesley; Reading) 1963.



A C Tort: *Work, gravitational energy and the Great Pyramid* (versão preliminar).



A C Tort: *A pirâmide perfeita* (Em preparação).