O Conceito de energia potencial

Filadelfo Cardoso Santos

10 de março de 2015

A definição usual de energia potencial

- Força conservativa: $$\oint_{\gamma} F(r).dr = 0$$

- Energia potencial: $$\Delta U = U(2) - U(1) = -\int_{1}^{2} \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r}$$

O teorema da conservação da energia

- Energia total é a soma das energias cinética e potencial.

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + U(x_1, \ldots, x_N)$$

- Na mecânica newtoniana

$$U(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{pares\{i,j\}} U(x_i, x_j)$$

A conservação de energia não é válida!

Queda livre:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

Sistema massa-mola:

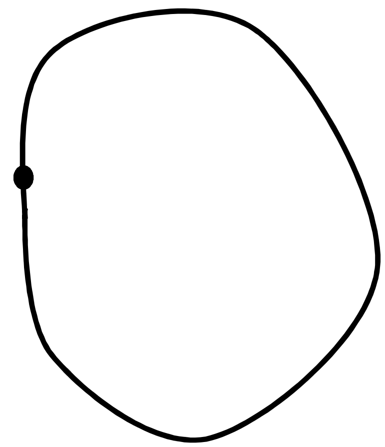
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Referência 1

A variação de energia potencial não é invariante!

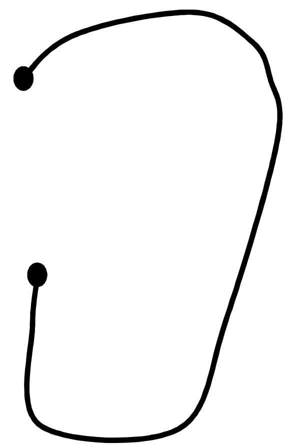
- A variação de potencial é nula.

Primeiro referencial.



- A variação de potencial não é nula.

Segundo referencial.



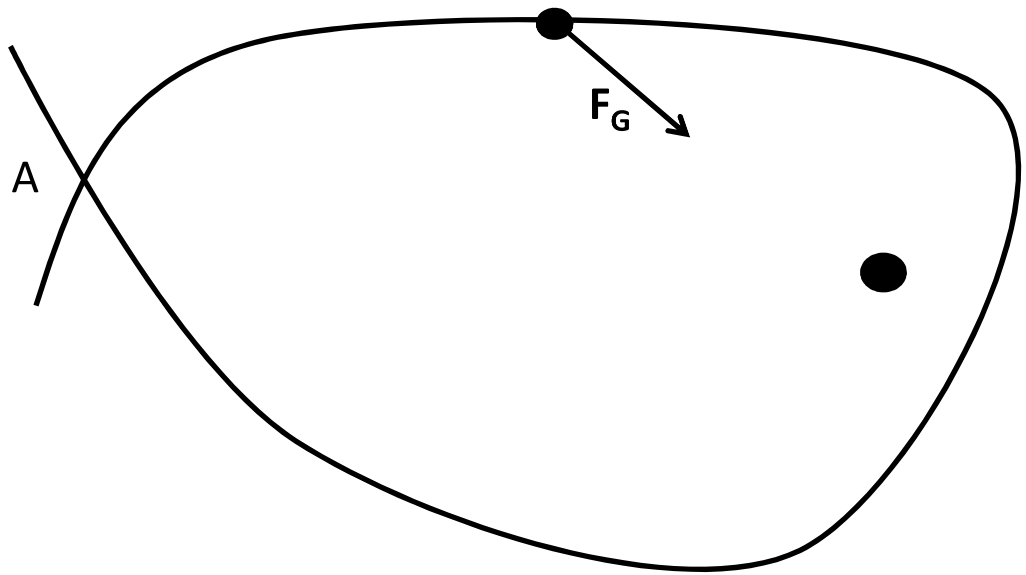
Onde está a energia potencial?

- A energia potencial gravitacional da **massa** m é mgy.

- A energia potencial elástica da mola é $\frac{1}{2}kx^2$.

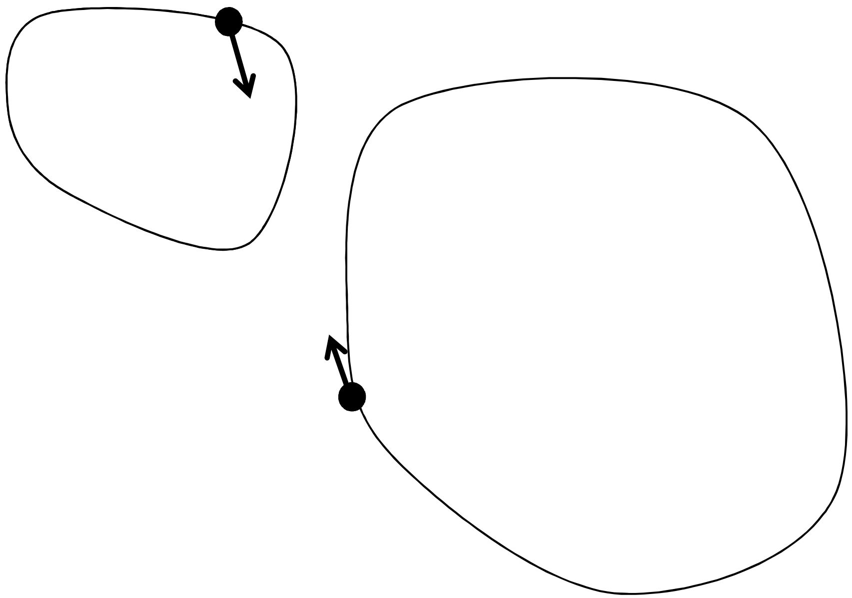
A força gravitacional é conservativa?

- O movimento de uma partícula pode ser controlada pela força gravitacional exercida por outra de tal forma que seja fechada.



Interação conservativa

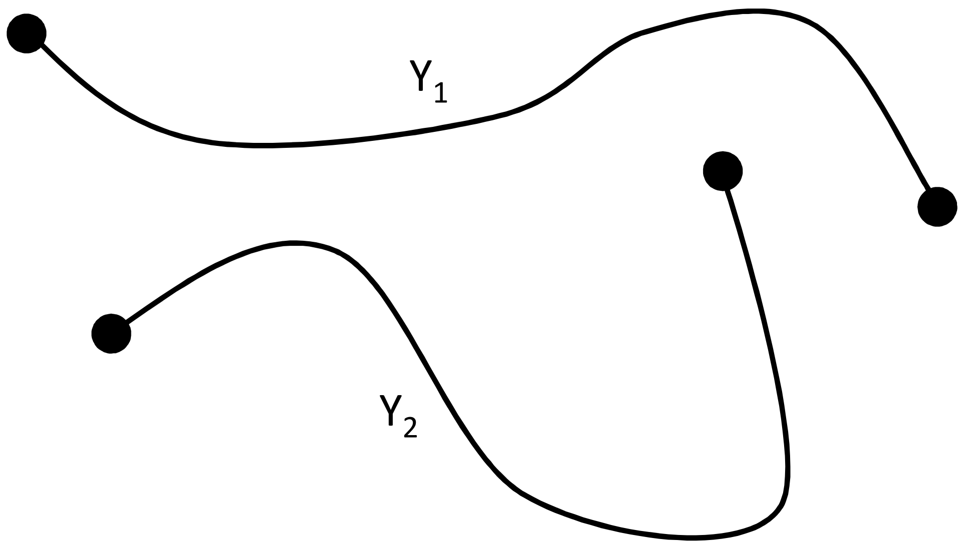
- A interação entre duas partículas é conservativa se $\oint_{\gamma_1} F_1 \cdot dr_1 + \oint_{\gamma_2} F_2 \cdot dr_2 = 0$



A energia potencial

A diferença de potencial entre duas configurações é

$$\Delta U = -\left(\int_{\gamma_1} F_1 \cdot dr_1 + \int_{\gamma_2} F_2 \cdot dr_2 \right)$$



Observações sobre o teorema da conservação da energia

- A energia potencial de um sistema de partículas só pode ser calculada se todos os pares que interagem estiverem no sistema.
- Portanto, a aplicação do teorema da conservação da energia é válida somente se pares de partícula que interagem estiverem no sistema.

A energia potencial como uma grandeza relativa

- Interações relacionais têm a forma:

$$F(r_1, r_2) = F(r_1 - r_2)$$

- A energia potencial nesse caso pode ser escrita na forma

$$\Delta U = -\int_{\gamma} F(r) \cdot dr, \quad r = r_1 - r_2$$

A energia potencial da mola ideal

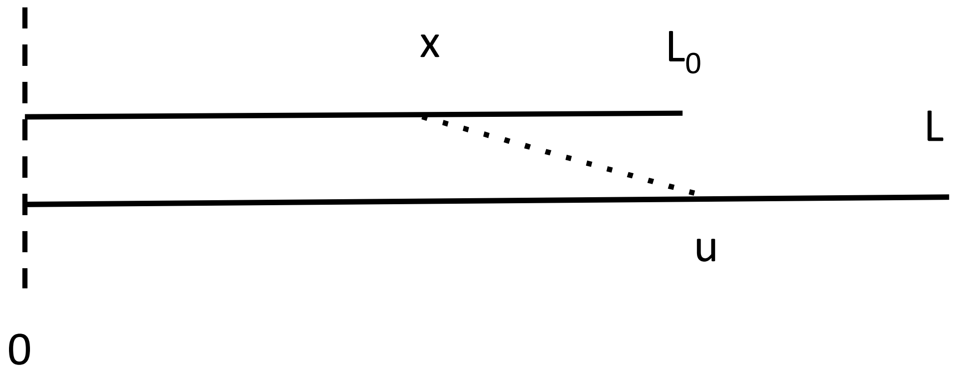
- A energia potencial da mola ideal calculada a partir da força que a mola exerce sobre um bloco é:

$$U = -\int_0^u kx\,dx = \frac{1}{2}ku^2$$

- Mas esse cálculo não é válido porque é necessário calcular o trabalho que as forças internas, entre as partículas da mola, realizam.

Cálculo da energia potencial da mola

- Configuração inicial: mola relaxada.
- Configuração final: mola deformada.



$$u = \frac{L}{L_0} x \qquad u = \left(1 + \frac{\eta}{L_0}\right) x \qquad \eta = L - L_0$$

Cálculo da energia potencial da mola

- Trabalho infinitesimal realizado pelas forças internas:

$$d^2W = T(x)\left(\frac{x}{L_0}d\eta dx - \frac{x+dx}{L_0}d\eta dx\right)$$

$$d^2W = -\frac{k\eta}{L_0}d\eta dx$$

- Integrando $W = -\int_0^{\eta}\int_0^{L_0}\frac{k}{L_0}\eta\, d\eta dx = -\frac{1}{2}k\eta^2$

Energia potencial da mola

$$U = \frac{1}{2} k \eta^2$$

Onde η é a deformação total da mola.

$$\eta = L - L_0$$

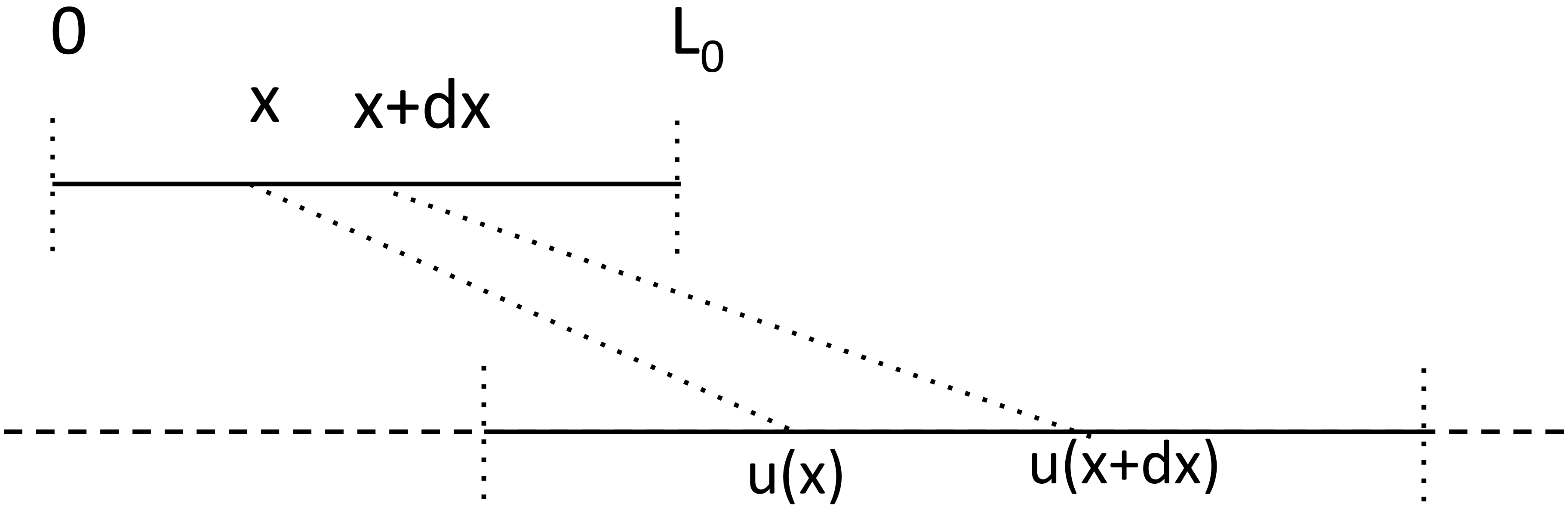
Observações

1- Essa energia potencial pode ser usada para qualquer mola massiva ou não-massiva, desde que o estado final seja descrito por uma deformação linear.

2-Para tratar os problemas dinâmicos, entretanto, não podemos supor que molas massivas em qualquer estado final sejam sempre descritas por deformações lineares.

Mola com deformação arbitrária

Configurações de referência e arbitrária:



$$T(x) = k(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1\right)$$

Função distorção

- É a função definida por:

$$\xi(x) = u(x) - x$$

- A tensão na mola pode ser escrita na forma:

$$T(x) = k(x)\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

A passagem do estado inicial ao estado final

- Estado inicial: $u_0(x)$
- Estado final: $u(x)$

- Transição : $u(x,\tau)$

satisfazendo $\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ u(x,1) = u(x) \end{cases}$

A passagem do estado inicial ao estado final

- Estado inicial: $\xi_0(x) = u_0(x) - x$
- Estado final: $\xi(x) = u(x) - x$

- Transição : $\xi(x, \tau)$

satisfazendo $\begin{cases} \xi(x,0) = u_0(x) - x \\ u(x,1) = u(x) - x \end{cases}$

Trabalho realizado

$$d^2W = k(x)\frac{\partial \xi}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)\Bigg|_{x} - \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)\Bigg|_{x+dx}\right]d\tau$$

$$d^2W = -k(x)\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial x}dxd\tau$$

$$d^2W = -k(x)\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial x}dxd\tau$$

Cálculo do trabalho

- Integrando

$$W = -\int_0^{L_0}\int_0^1 k(x)\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau \partial x}\,dx\,d\tau$$

- ou

$$W = -\frac{1}{2}\int_0^{L_0} k(x)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 dx$$

Forma geral da energia potencial elástica da mola

- Finalmente obtemos a energia potencial da mola:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{L_0} k(x)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 dx$$

Mola massiva

- A energia potencial da mola não pode ser calculada a partir das forças que as extremidades da mola realizam sobre outros corpos.
- Para uma mola massiva e livre as forças nas extremidades são nulas e a mola possui energia potencial.
- Referência 2.

Conclusões

- A energia potencial deve ser compreendida como uma grandeza sistêmica.
- A energia potencial deve ser calculada pelo trabalho que o par ação-reação realiza.
- A energia potencial deve ser invariante.
- A conservação da energia não é válida se existir alguma partícula fora do sistema que interaja com alguma partícula do sistema.

Referências

- [1] F C Santos, A Tort A C and Soares V 2010 A note on the conservation of mechanical energy and the Gallilean principle of relativity Eur. J. Phys. 31 827-834
- [2] F C Santos, Y A Coutinho, L Ribeiro-Pinto and A C Tort 2006 The motion of two masses coupled to a finite mass spring Eur. J. Phys. 27 1037

FIM