

# Uma perspectiva diferente para uma aula de Óptica

**UMA PROPOSTA PARA ENSINAR ÓPTICA  
GEOMÉTRICA**

**Vitorvani Soares**

**Filadelfo Cardoso Santos, Alexandre Tort,  
Erich Meyer**

**Rafael Pinheiro Santos, Daniele Freitas Barbosa  
Valdeci Telmo, Fábio dos Santos Freitas**

**IF-UFRJ 2010**

# Uma perspectiva diferente para uma aula de Óptica

A câmara escura no ensino médio

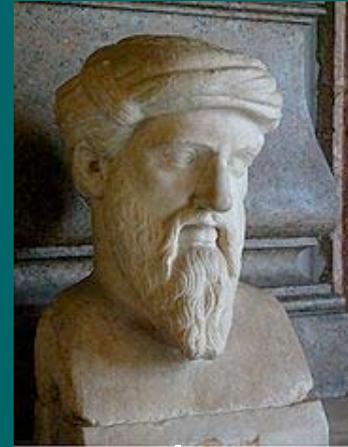
**Vitorvani Soares**

**Rafael Pinheiro Santos**

**Ricardo Hadlich**

**IF-UFRJ 2010**

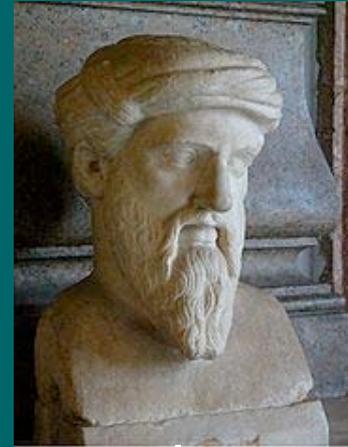
# Um breve histórico



**570 a.C.**

- Pitágoras ( c. 570 a.C. ) ...

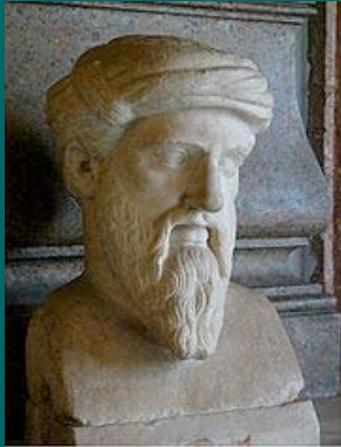
# Um breve histórico



**570 a.C.**

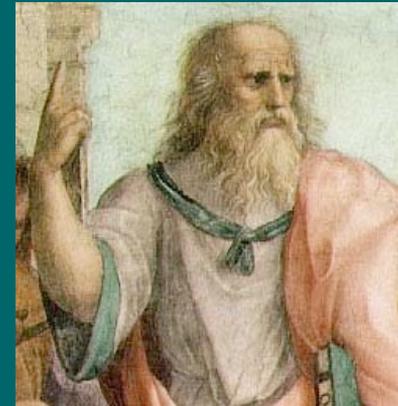
- Pitágoras ( c. 570 a.C. ) ...
  - *Defendia o processo de Extromissão.*

# Um breve histórico



**570a. C.**

- Pitágoras ( c. 570 a.C. )
- Platão (427 a.C)



**427 a.C.**

Platão, em detalhe da *Escola de Atenas*, de Rafael, Sanzio (c. 1510). *Stanza della Segnatura*. Palácio Apostólico, Vaticano..

# Um breve histórico



**427 a.C.**

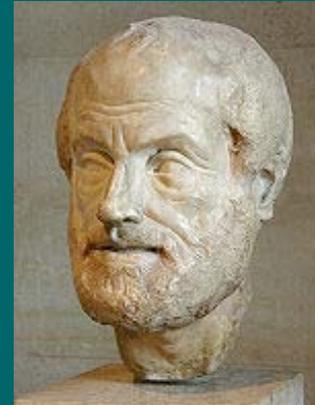
- Platão (427 a.C)
  - *A visão de um objeto era devido a três “jatos” de partículas*
  - *Utiliza a extromissão para uma teoria de percepção visual.*
  - *Teoria para a formação de imagens em espelho planos e côncavos.*

# Um breve histórico



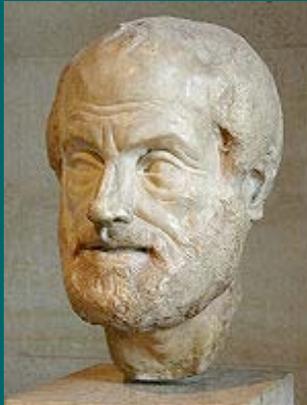
**570 a. C.**

- Platão (427 a.C)
- Aristóteles ( 384 a.C - 322 a.C)



**370 a. C.**

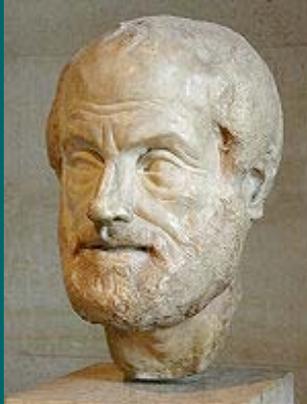
# Um breve histórico



## 370 a. C.

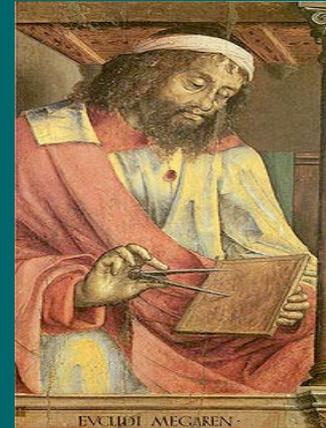
- Aristóteles ( 384 a.C - 322 a.C )
  - *Apresenta primeira teoria completa da visão, eliminando a necessidade da extromissão.*
  - *O observador é uma entidade passiva, porque o que é observado vem pelo ar em direção ao coração.*
  - *Primeiro a adotar a natureza ondulatória da luz.*

# Um breve histórico



**370 a. C.**

- Aristóteles ( 384 a.C - 322 a.C ).
- Euclides ( 300 a.C )



**300 a.C**

# Um breve histórico



300 a.C

- Euclides ( 300 a.C )
  - *Dá o primeiro tratamento matemático a ciência da visão., de forma similar a obra Os Elementos.*
  - *Apresenta sua teoria matemática em termos do processo de extromissão.*
  - *Em Catóptrica, ele também dá uma série de teoremas para descrição da reflexão dos raios visuais e a correspondente formação de imagens.*

# Um breve histórico



300 a.C

- Euclides ( 300 a.C )
- Ptolomeu ( 147 a.C – 90 a.C )



100 a.C

# Um breve histórico



## 100 a.C

- Ptolomeu ( 147 a.C – 90 a.C )
  - *Óptica organizada em cinco volumes.*
  - *Tinha as mesmas concepções de luz que Euclides.*

# Um breve histórico



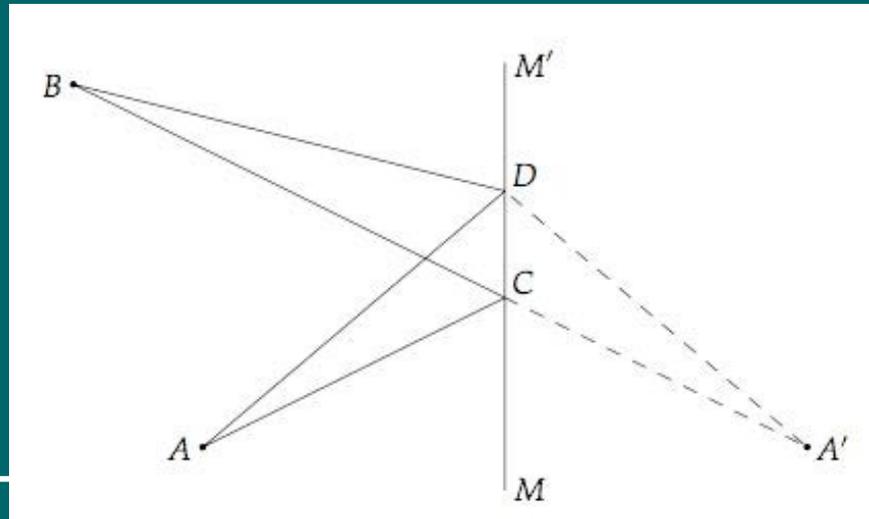
100 a.C

- Ptolomeu ( 90 a.C – 147 a.C )
- Heron de Alexandria ( c 10 d.C – 70 d.C )



40 d.C

# Um breve histórico



40 d.C

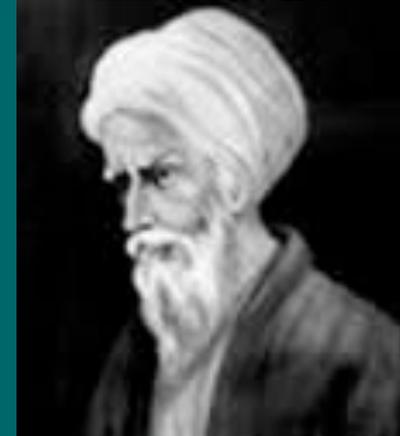
- Heron de Alexandria ( c 10 d.C – 70 d.C )
  - *Observação de que podemos obter várias imagens de um objeto entre dois espelhos planos.*
  - *Teorema sobre a propriedade da reflexão.*

# Um breve histórico



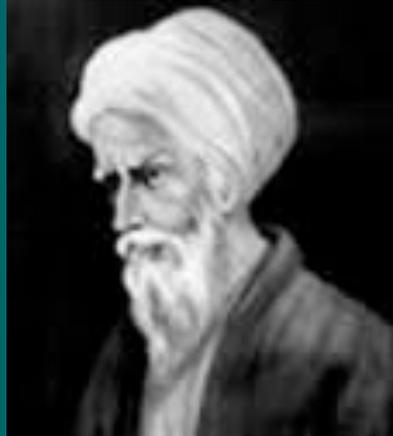
**40 d.C**

- Heron de Alexandria ( c 10 d.C – 70 d.C )
- Alhacen ( 965 – 1039 )



**1000**

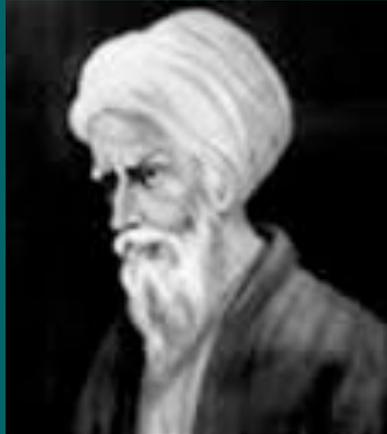
# Um breve histórico



**1000**

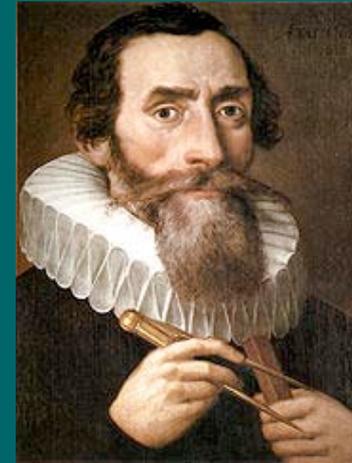
- Alhacen ( 965 – 1039 )
  - *Elo entre a óptica clássica dos antigos gregos e a nova óptica da Idade Média.*
  - *Para ele a luz era emitida por uma força autoluminosa.*
  - *Descreveu as cores como sendo independentes dos objetos, mas presentes na luz e introduziu o conceito de “raio de luz”.*
  - *Raio incidente, refletido e refratado estão no mesmo plano.*

# Um breve histórico



**1000**

- Alhacen ( 965 – 1039 )
- Kepler (1571-1630)



**1630**

# Um breve histórico



**1630**

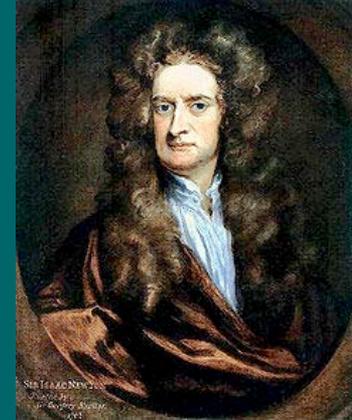
- Kepler (1571-1630)
  - *Óptica organizada em onze capítulos.*
  - *Se concentra principalmente nos fenômenos astronômicos.*
  - *Estudo da construção e o uso das câmaras escuras.*

# Um breve histórico



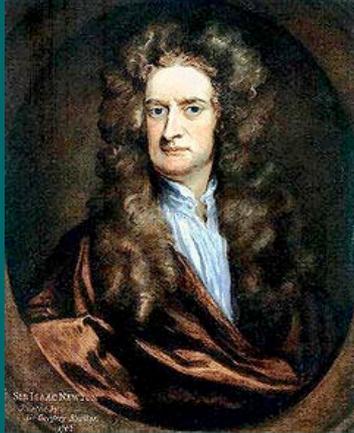
**1630**

- Kepler (1571-1630)
- Isaac Newton (1643 – 1727 )



**1727**

# Um breve histórico



**1727**

- Isaac Newton (1643 – 1727 )
  - *A Óptica de Newton.*
  - *Decomposição espectral da luz branca.*
  - *Difração.*
  - *Discurssões sobre a natureza da luz, se ela era onda ou uma partícula.*

# História da câmara escura

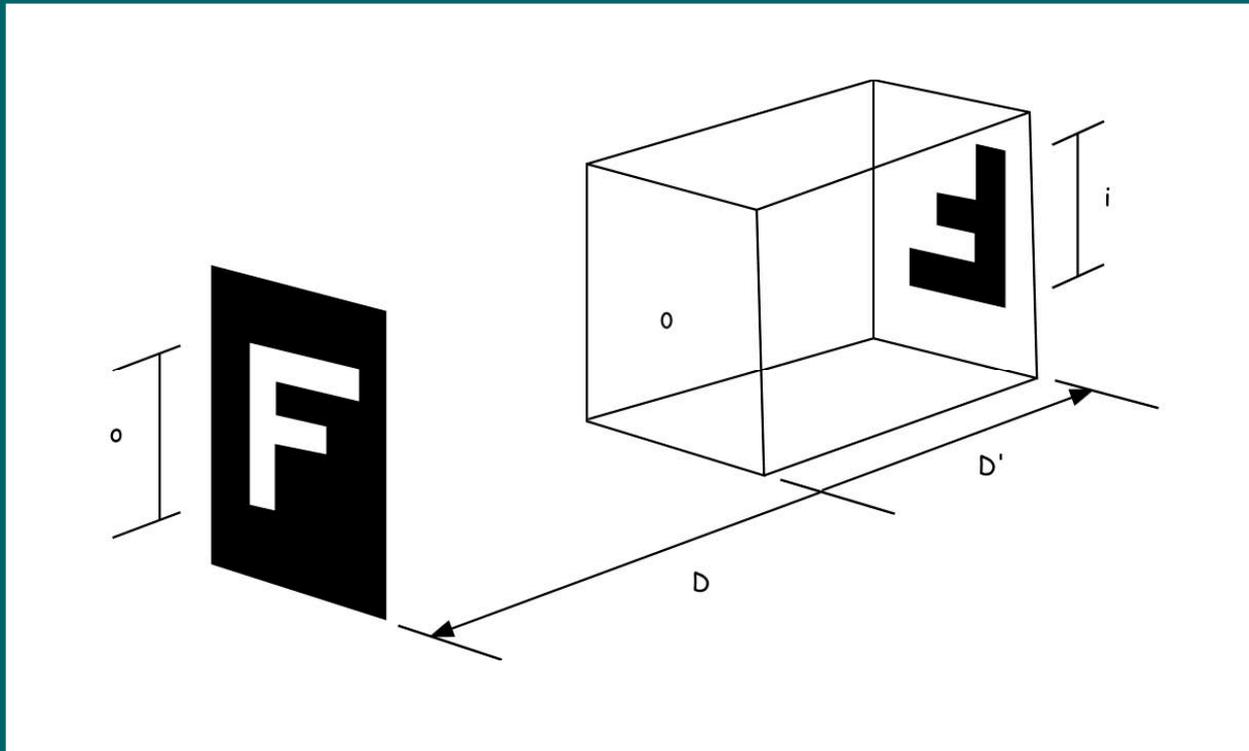
- Al Hacem
- Scheiner
- Della Porta
- Barbaro



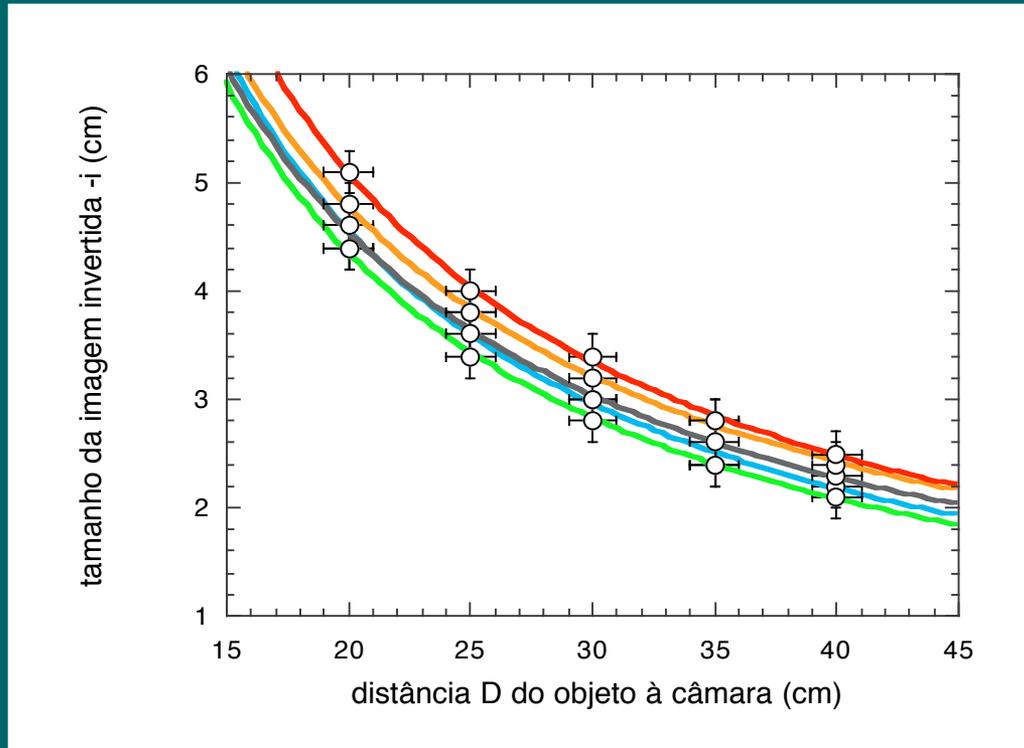
# Construção da câmara escura



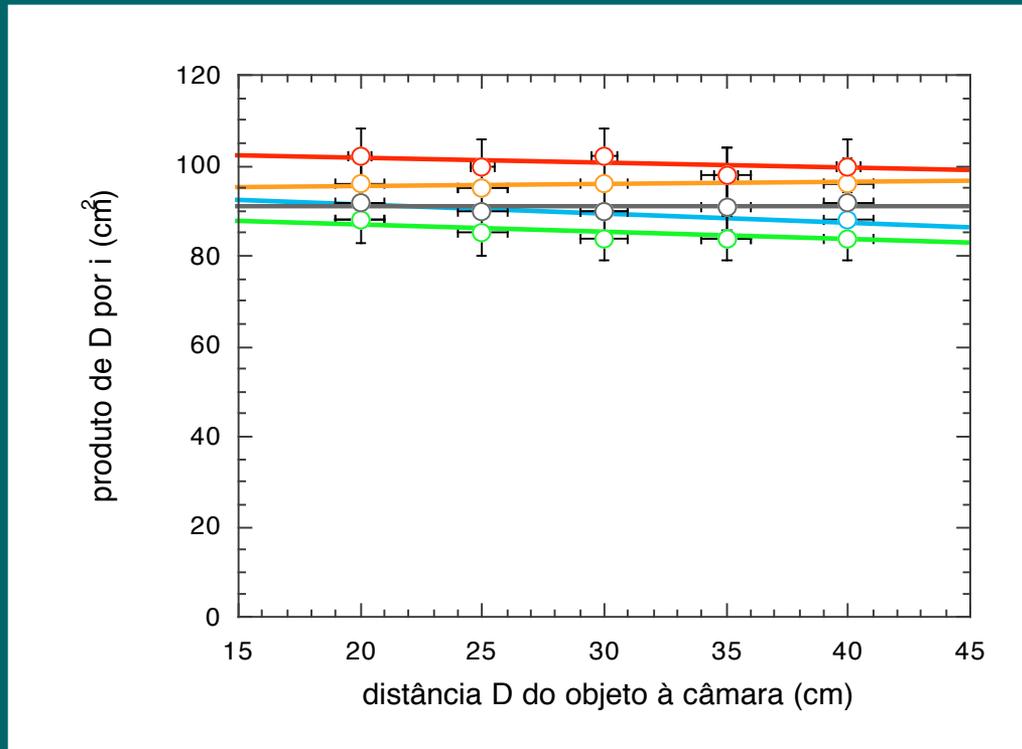
# Descrição da aula



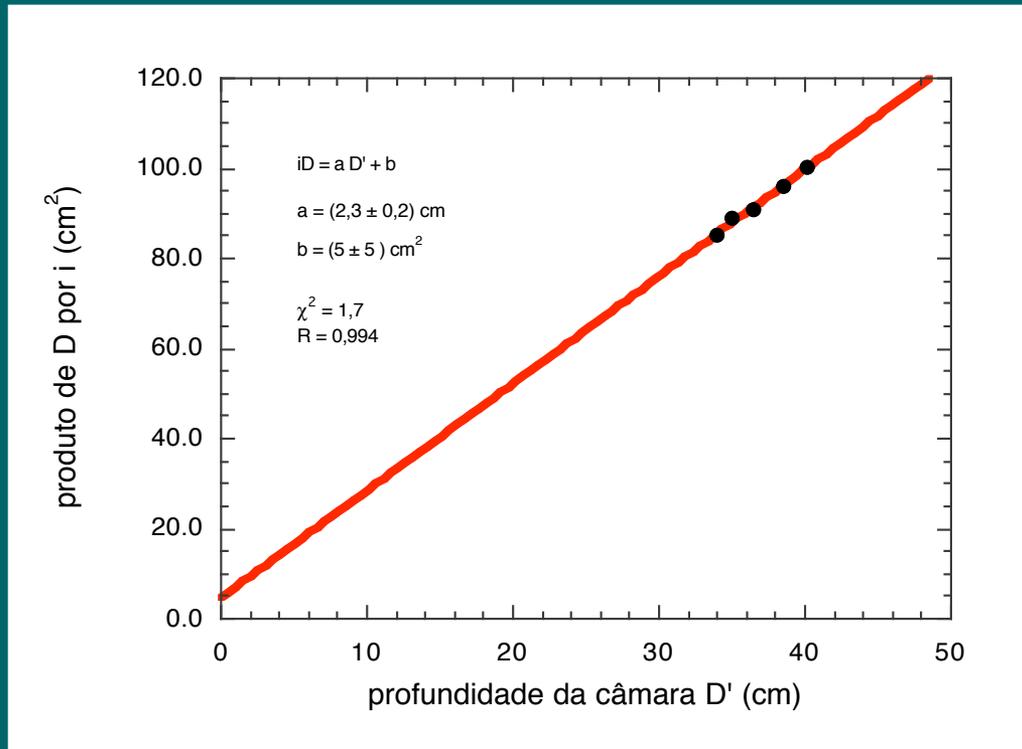
# Resultados - 1



# Resultados - 2



# Resultados - 3



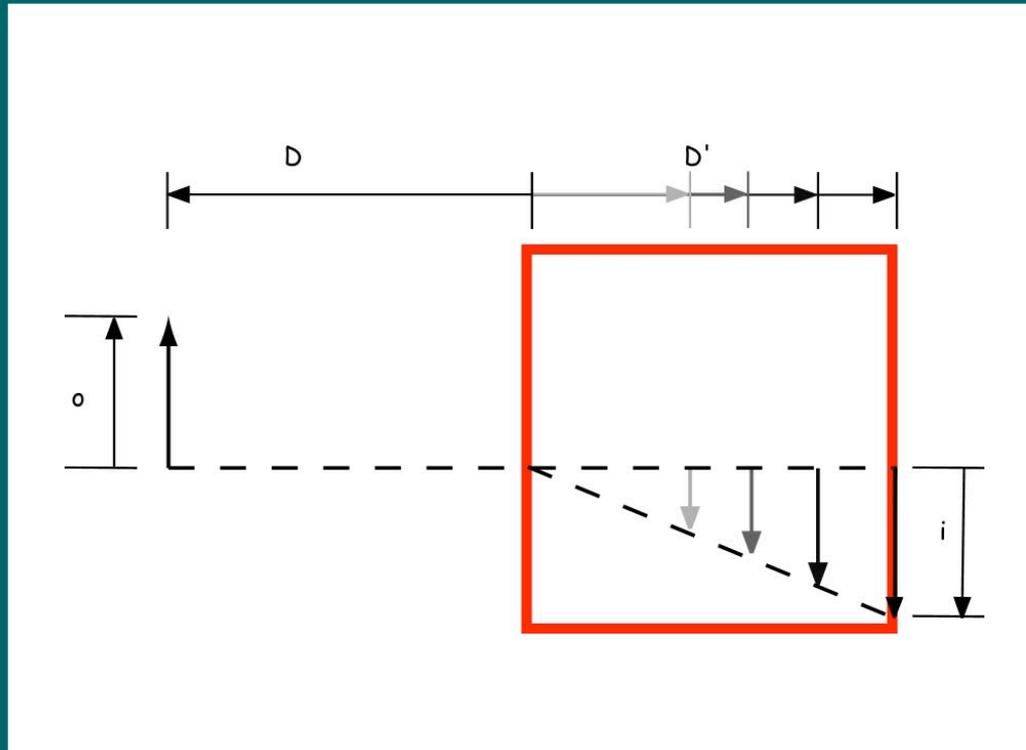
$$y = ax + b$$

$$-iD = aD' + b$$

$$b \sim 0$$

$$-iD = aD'$$

# Análise - 1

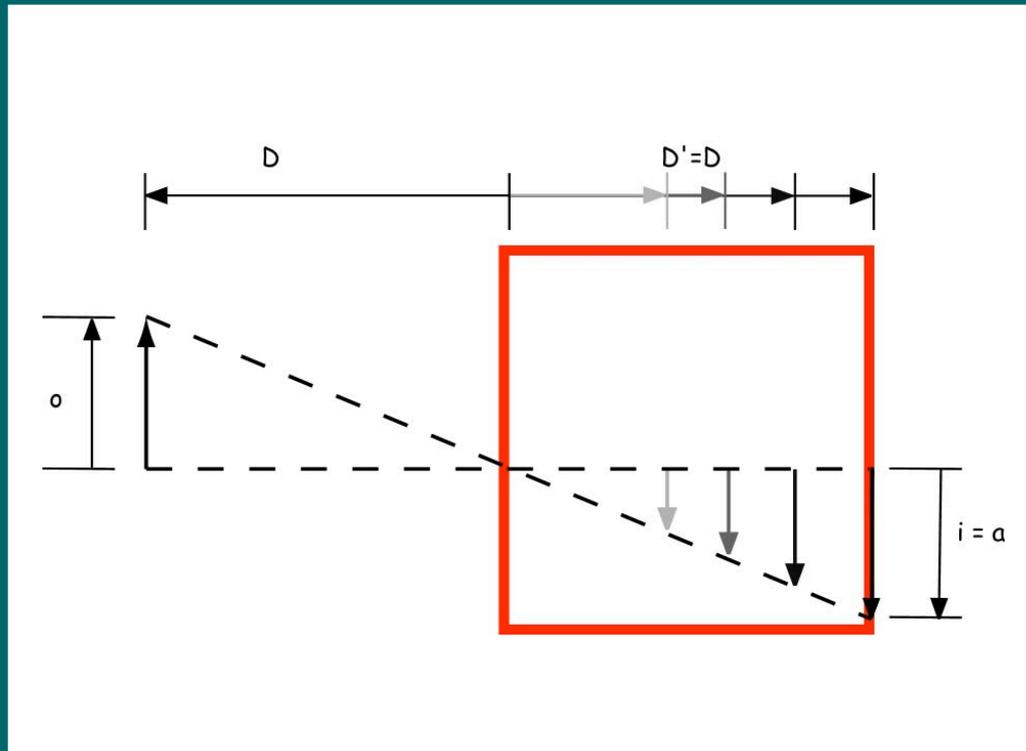


$$D = -D'$$

$$-iD = -aD$$

$$i = a$$

# Análise - 2



$$D = -D'$$

$$-iD = -aD$$

$$i = a$$

$$i = o$$

$$a = o$$

$$-iD = oD'$$

# Uma perspectiva diferente para uma aula de Óptica

Determinação da lei dos pontos conjugados a partir somente de um experimento simples em óptica

**Vitorvani Soares**

**Daniele Freitas Barbosa**  
**Valdeci Telmo**

**IF-UFRJ 2010**

# Objetivos

- **Mostrar que podemos determinar...**
  - **A equação dos pontos conjugados:**

$$D = i + o \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$$

- **O método de Bessel:**

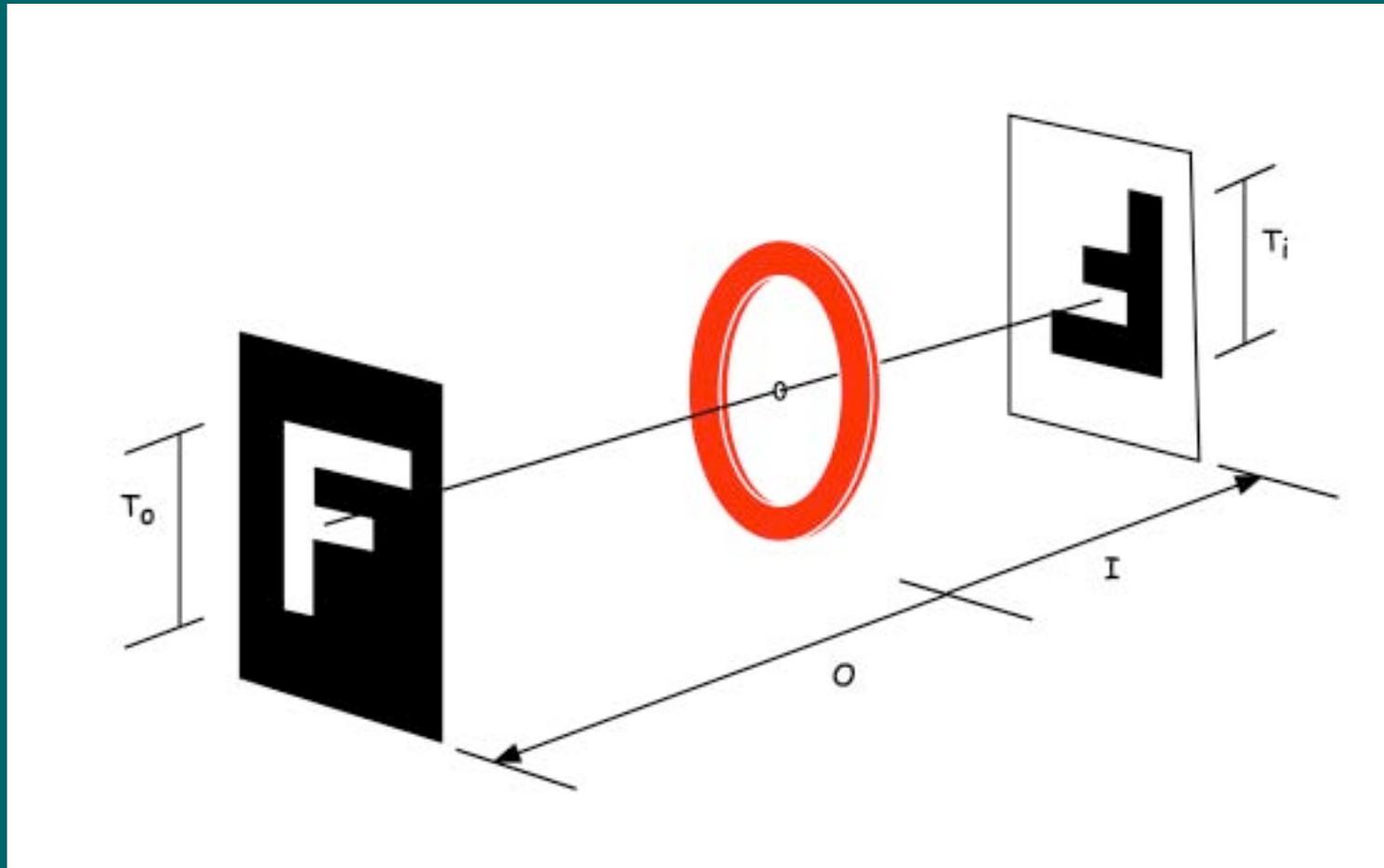
$$D = i + o = i' + o' \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{i'} + \frac{1}{o'}$$

**... a partir de um experimento simples e sem nenhum conhecimento prévio de uma teoria sobre óptica**

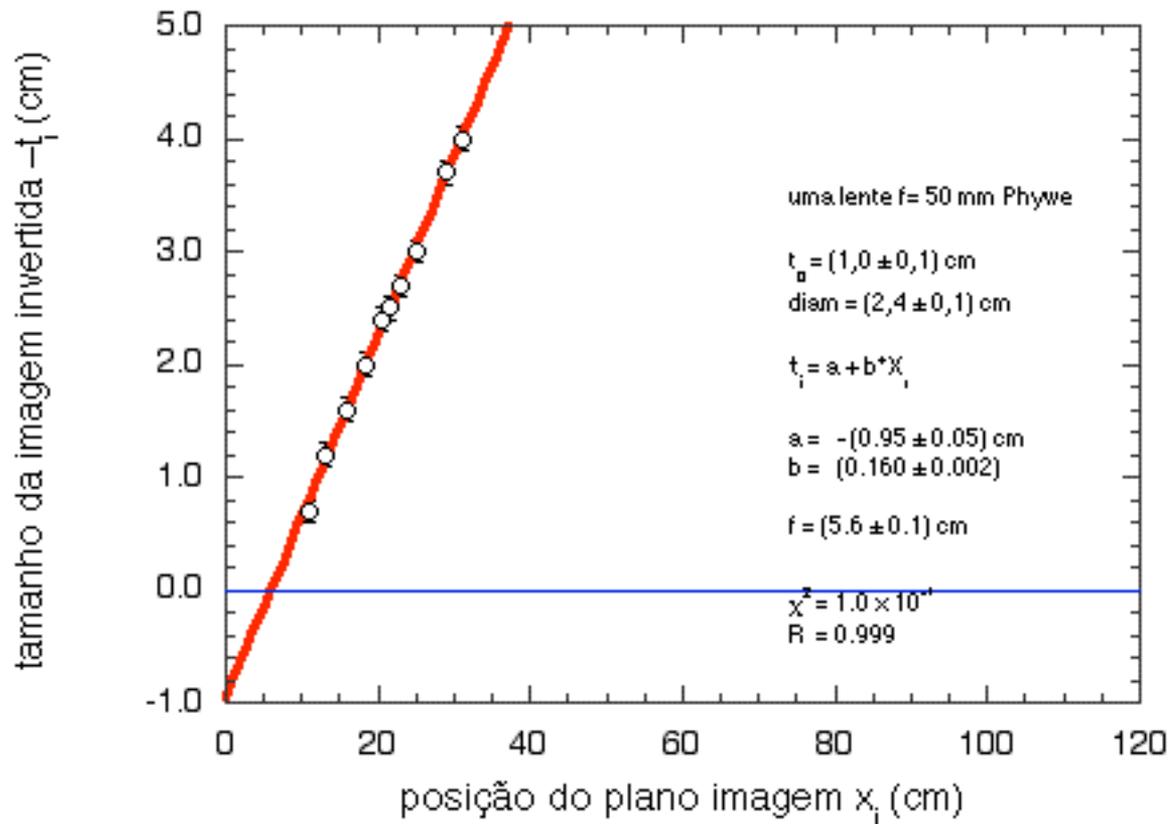
# O experimento

- O experimento consiste na projeção, em um dado anteparo, de imagens nítidas de um objeto ao variarmos a distância entre ele e a lente.
- A partir dos dados obtidos, determina-se uma relação matemática entre o tamanho da imagem invertida e a distância do objeto à lente.
- Explorando esta relação matemática, obtemos a lei de Gauss e reconstruímos o método de Bessel para formação de imagens.

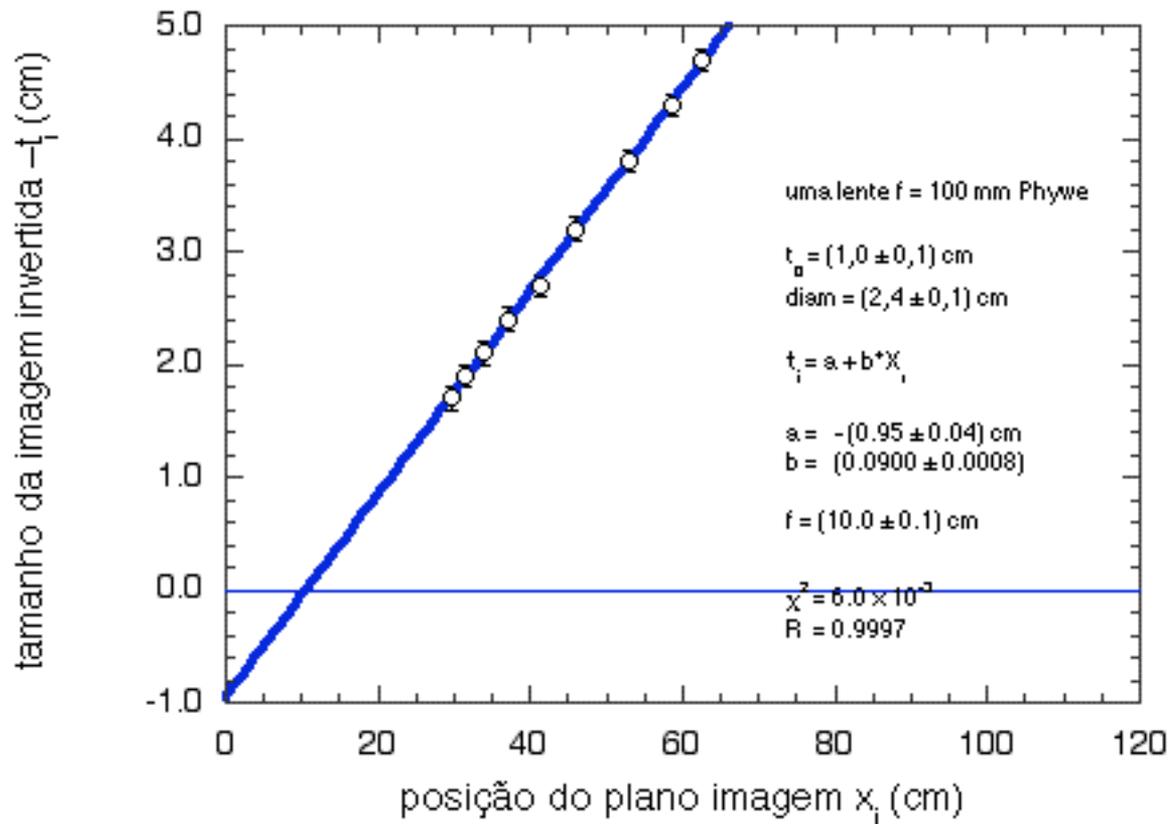
# Diagrama da experiência



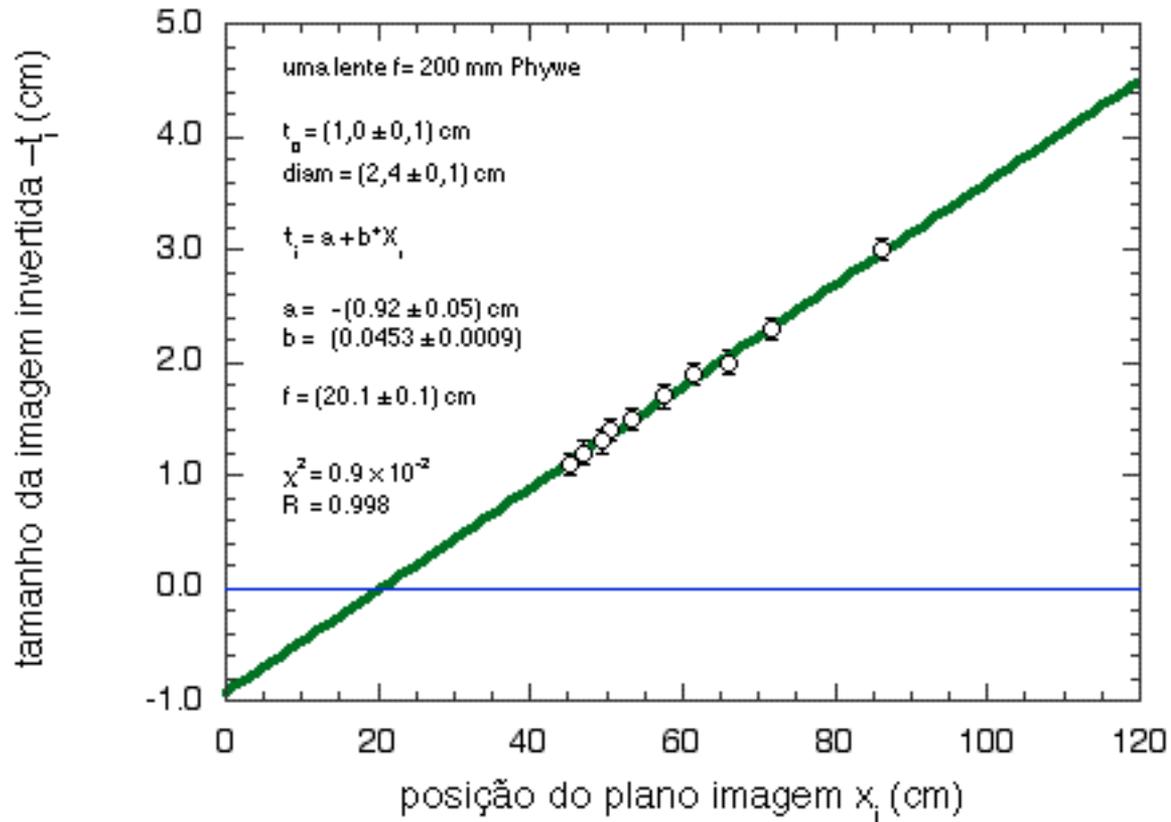
# Resultados obtidos



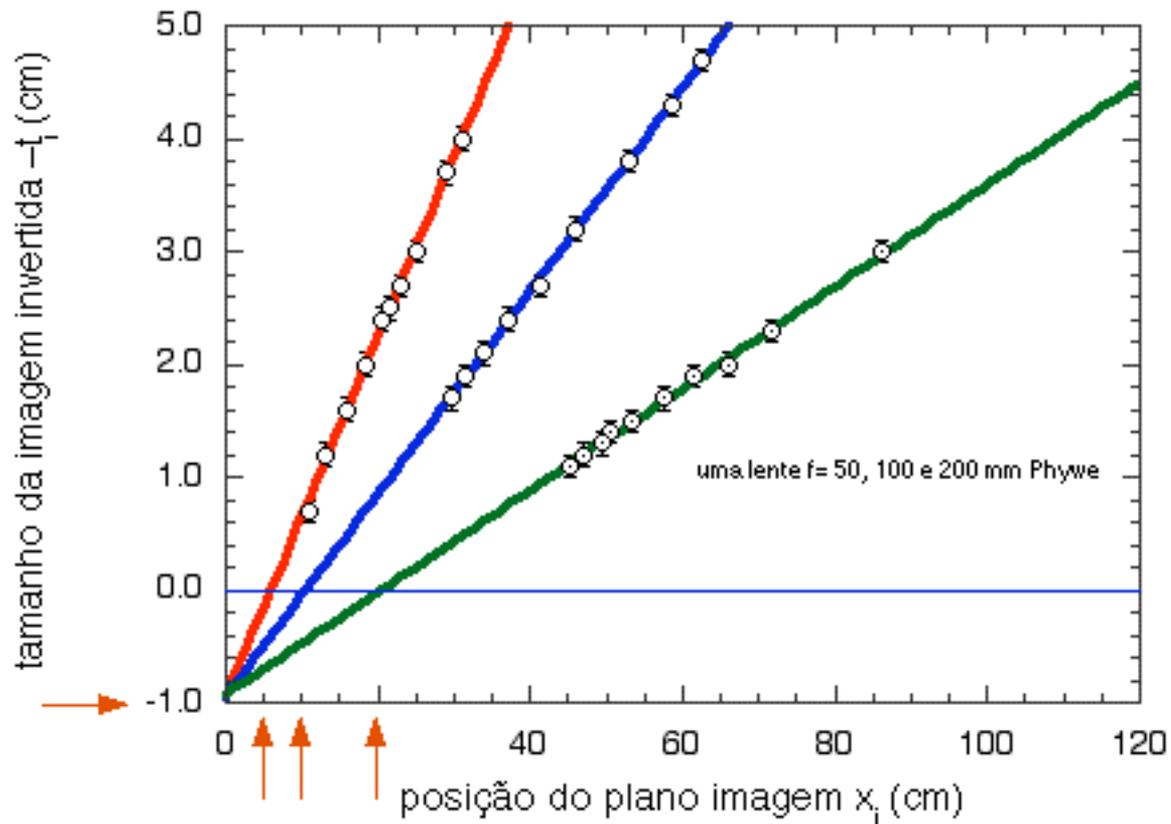
# Resultados obtidos



# Resultados obtidos



# Resultados obtidos



# Análise dos resultados

- Ajuste linear:

$$y = a + bx$$

- A partir dos dados, temos:

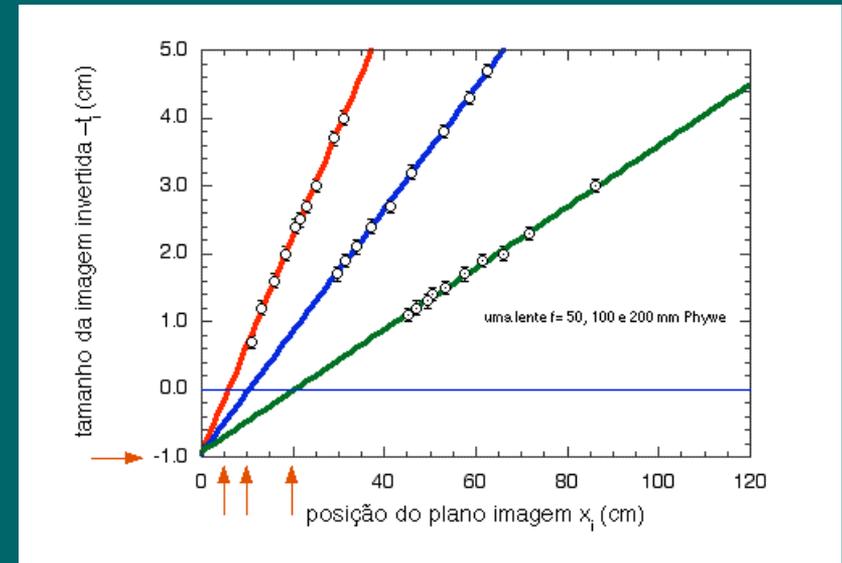
$$y = -t_i; x = i; a = -t_o$$

- Quando  $i = f$ , temos:

$$t_i = 0; b = \frac{t_o}{f}$$

- Portanto, podemos concluir que:

$$-t_i = -t_o + \frac{t_o}{f}i$$



# Determinando a lei de Gauss

- A partir do ajuste linear:

$$-t_i = -t_o + \frac{t_o}{f} i$$

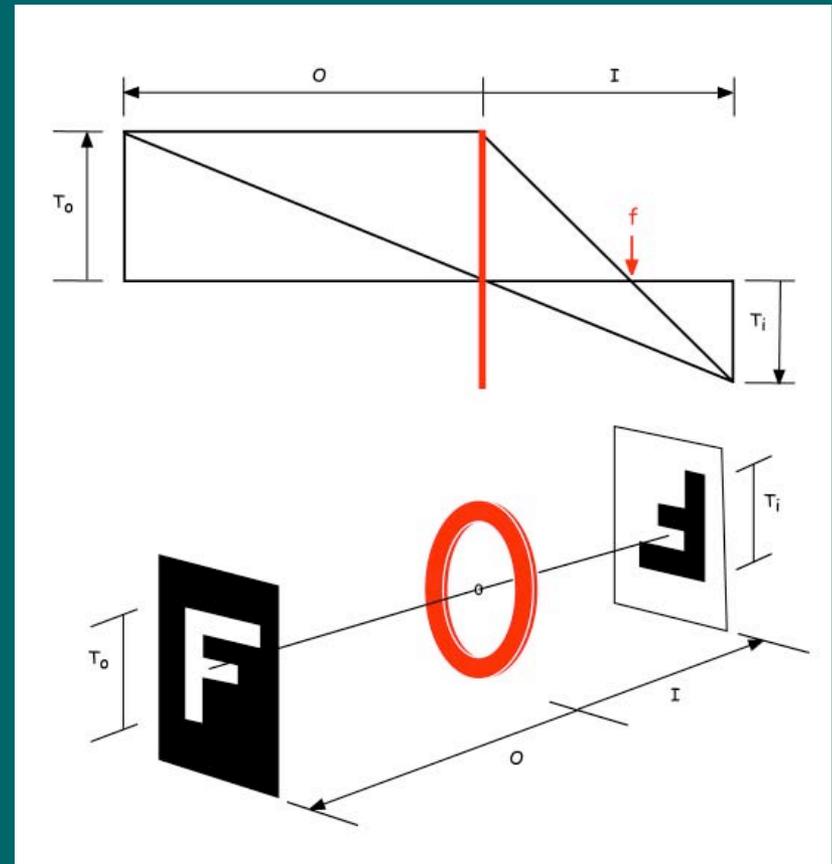
- A partir do diagrama:

$$(i > f) \quad -\frac{t_i}{t_o} = \frac{i}{o}$$

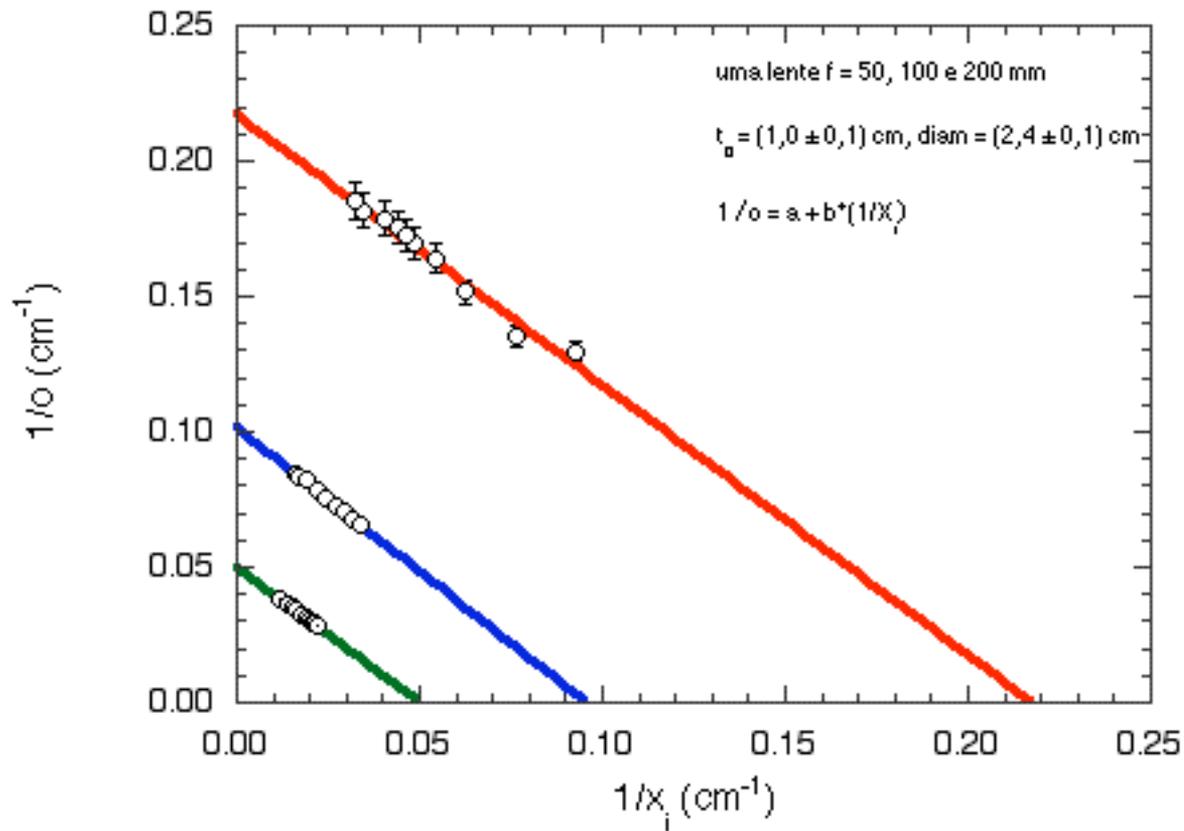
- Portanto, podemos concluir:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$$

(Equação dos pontos conjugados)



# Lei dos pontos conjugados



# Determinando a lei de Bessel

- A partir do ajuste linear:

$$-t_i = -t_o + \frac{t_o}{f}i$$

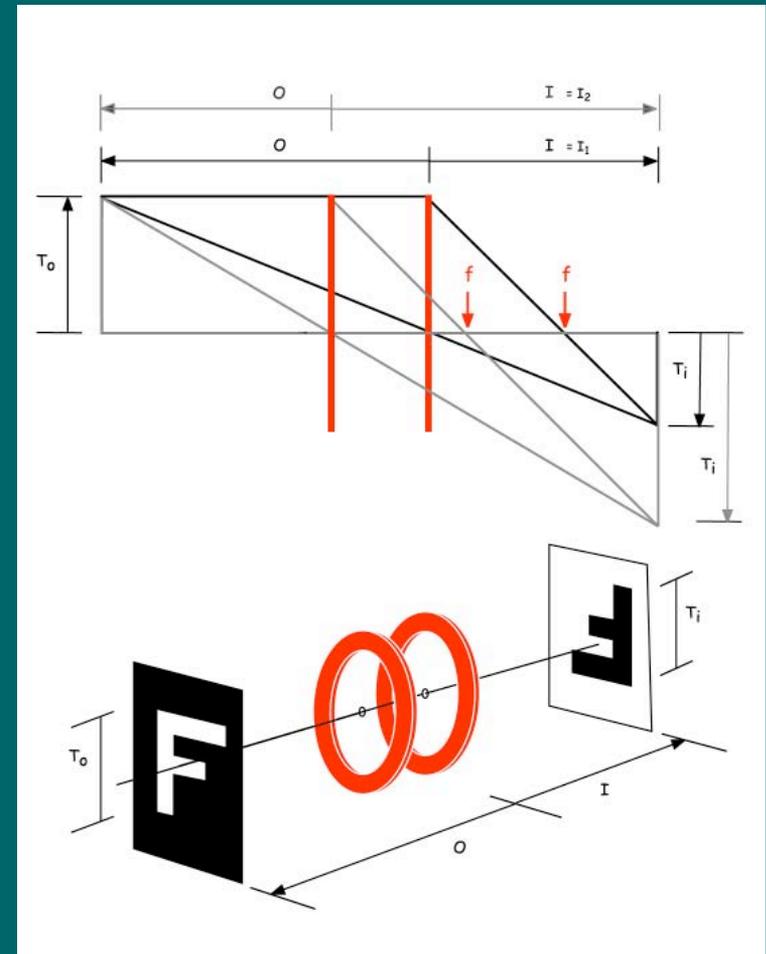
- A partir da lei de Gauss:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}; o = D - i$$

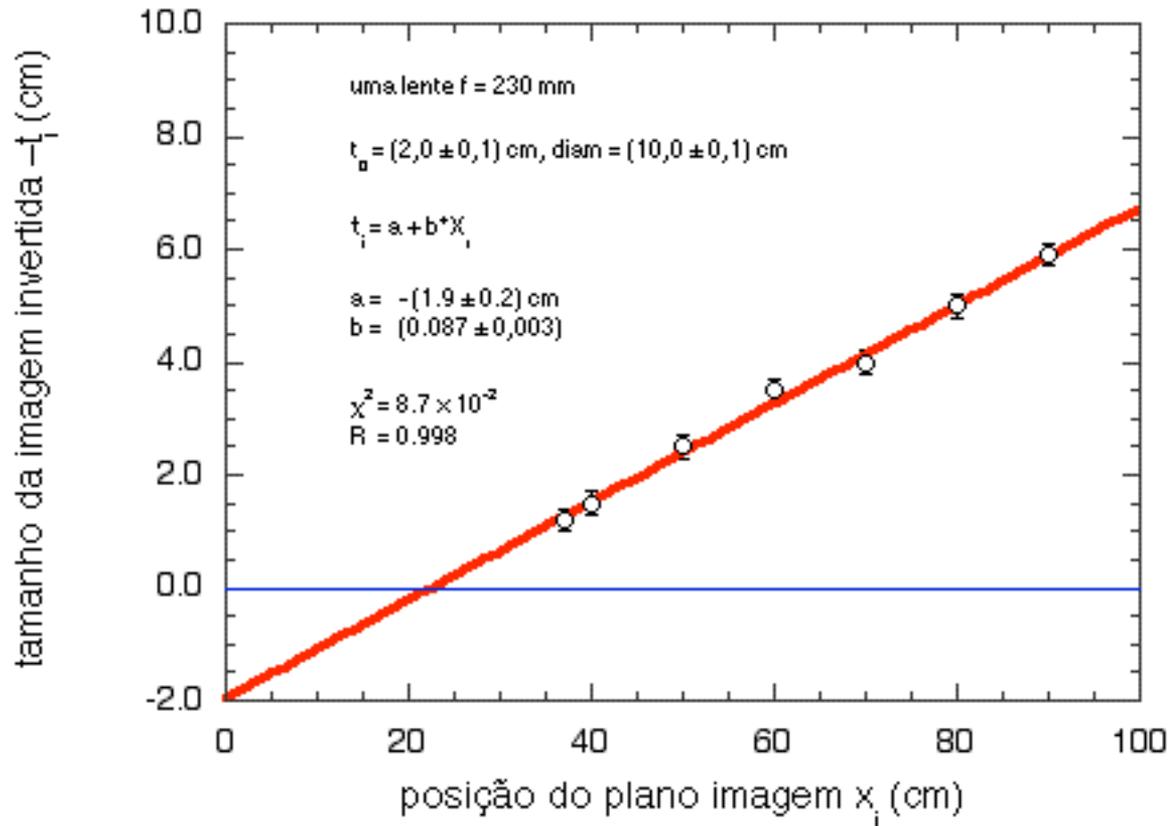
- Portanto, podemos concluir também:

$$i^2 - Di + f = 0$$

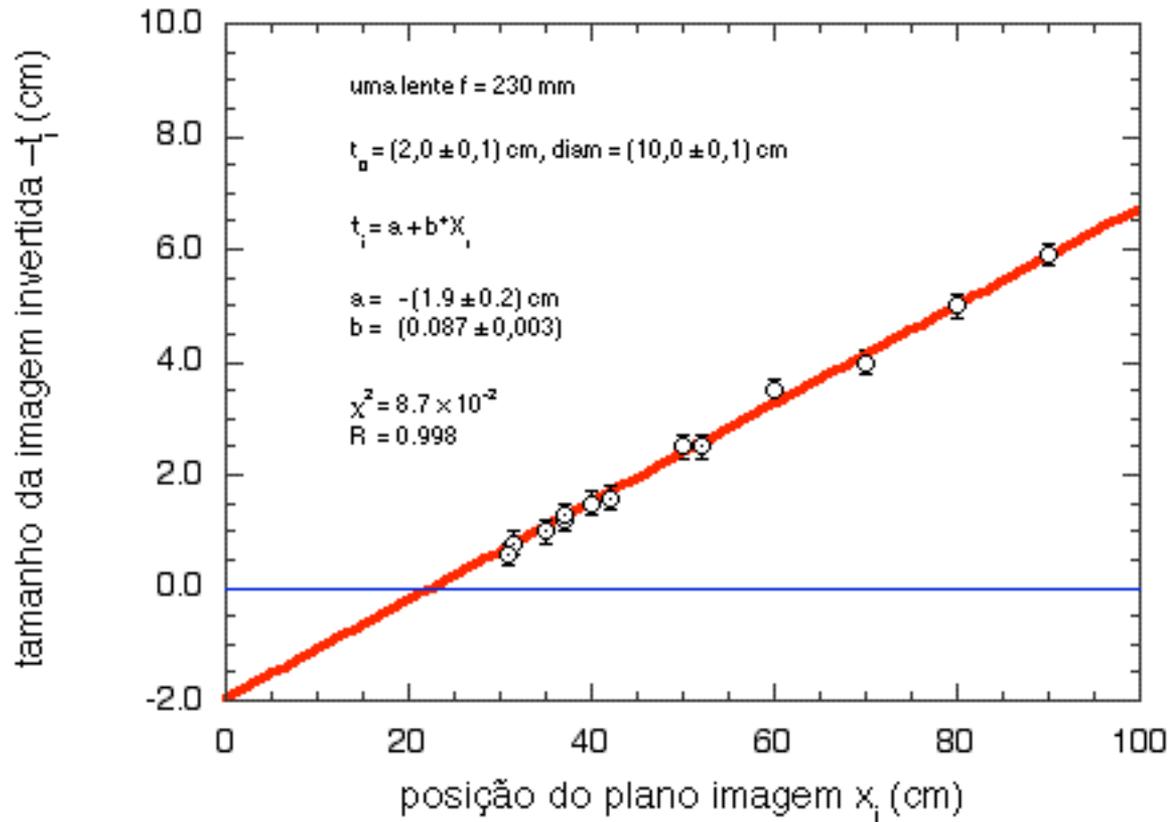
$$i = \frac{D}{2} \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{4f}{D} \right)^{1/2} \right]$$



# Resultados obtidos



# Resultados obtidos



# Conclusões

- Podemos concluir então que:  $-t_i = -t_o + \frac{t_o}{f}i$
- Lei de Gauss:  $\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$
- Equação de Bessel:  $i = \frac{D}{2} \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{4f}{D} \right)^{1/2} \right]$
- Uso de experimentos motiva os estudantes e facilita o aprendizado.

# Uma perspectiva diferente para uma aula de Óptica

O espelho plano no Ensino Médio: uma proposta para ensinar as Leis da Reflexão

**Vitorvani Soares**

**Fábio dos Santos Freitas**

IF-UFRJ 2010

# Plano da apresentação

- Introdução.

# Plano da apresentação

- Introdução.

# Plano da apresentação

- Introdução.
- A equação para associação de dois espelhos planos.

# Plano da apresentação

- Introdução.
- A equação para associação de dois espelhos planos.
- Leis da Reflexão.

# Plano da apresentação

- Introdução.
- A equação para associação de dois espelhos planos.
- Leis da Reflexão.
- Conclusões.

# Introdução

- Como o assunto é abordado no ensino médio.

# Introdução

- Como o assunto é abordado no ensino médio.
- Espelhos e sua importância.

# Introdução

- Como o assunto é abordado no ensino médio.
- Espelhos e sua importância.
- A equação para imagens conjugadas em espelhos planos.

# Introdução

- Como o assunto é abordado no ensino médio.
- Espelhos e sua importância.
- A equação para imagens conjugadas em espelhos planos.
  - $N = 360^\circ / \alpha - 1$

# A aula alternativa

- Utilizando papel milimetrado, dois espelhos planos, uma borracha, álgebra e análise gráfica, determinaremos a equação para números de imagens conjugadas por dois espelhos planos em relação a um determinado ângulo.

# Habilidades e competências a serem desenvolvidas

- Capacidade de leitura de gráficos e tabelas.

# Habilidades e competências a serem desenvolvidas

- Capacidade de leitura de gráficos e tabelas.
- Abstração com noções qualitativas e conceituais.

# Habilidades e competências a serem desenvolvidas

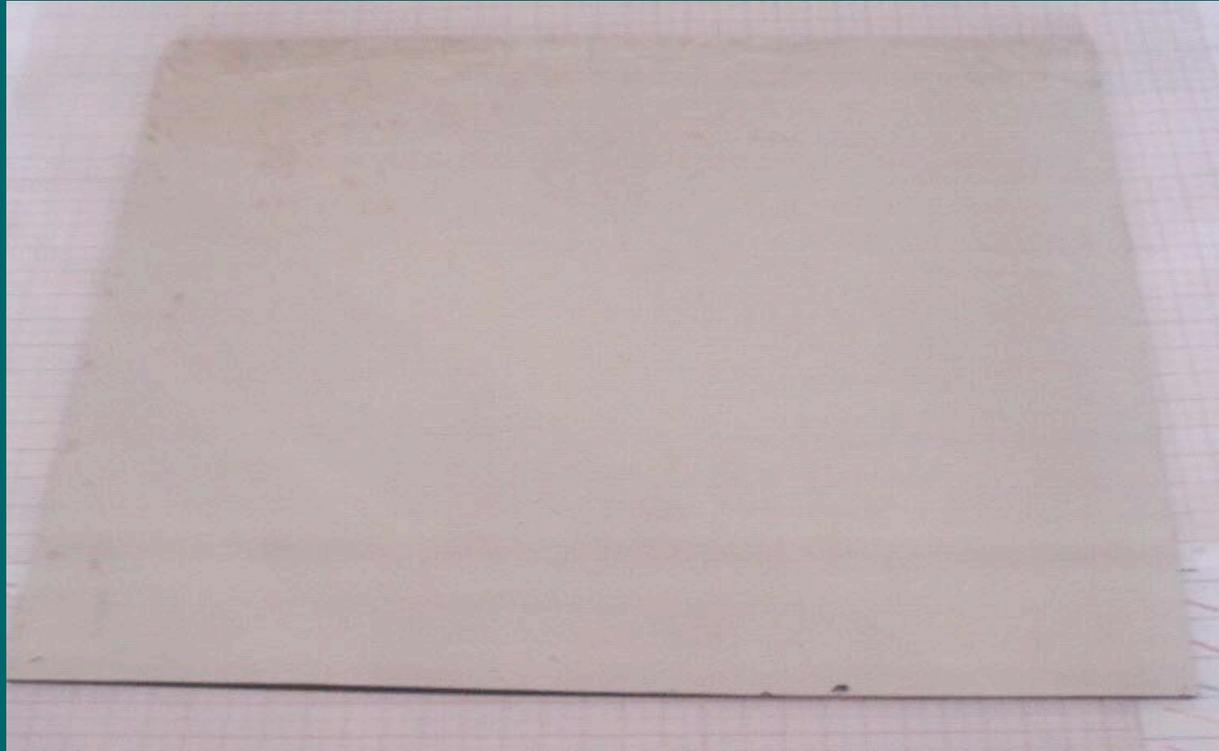
- Capacidade de leitura de gráficos e tabelas.
- Abstração com noções qualitativas e conceituais.
- Estímulo à observação, à coleta de dados, à análise e à organização de fatos e fenômenos.

# Habilidades e competências a serem desenvolvidas

- Capacidade de leitura de gráficos e tabelas.
- Abstração com noções qualitativas e conceituais.
- Estímulo à observação, à coleta de dados, à análise e à organização de fatos e fenômenos.
- Entendimento da relação causa-conseqüência.

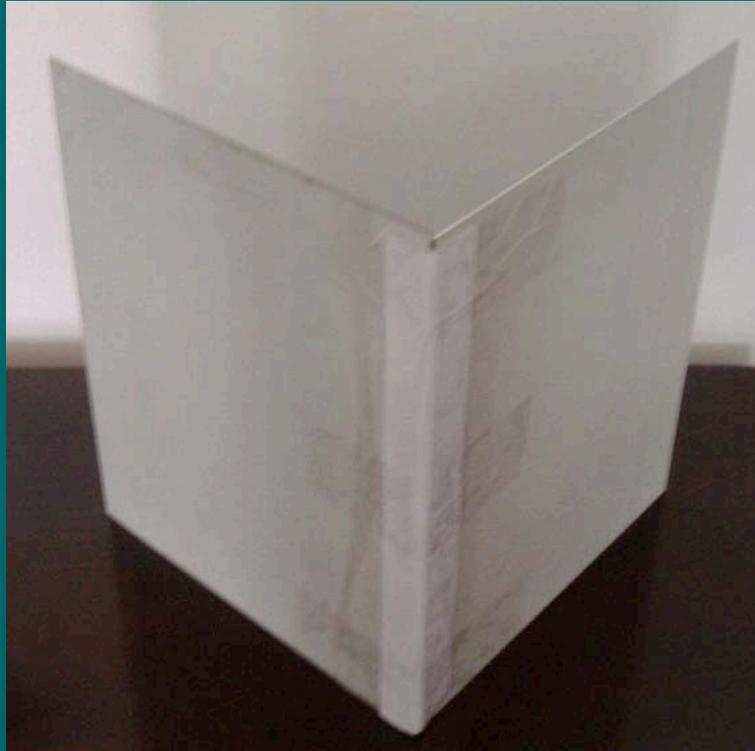
# Material Didático

- Fixação dos espelhos



# Material Didático

- Fundo do aparato experimental.



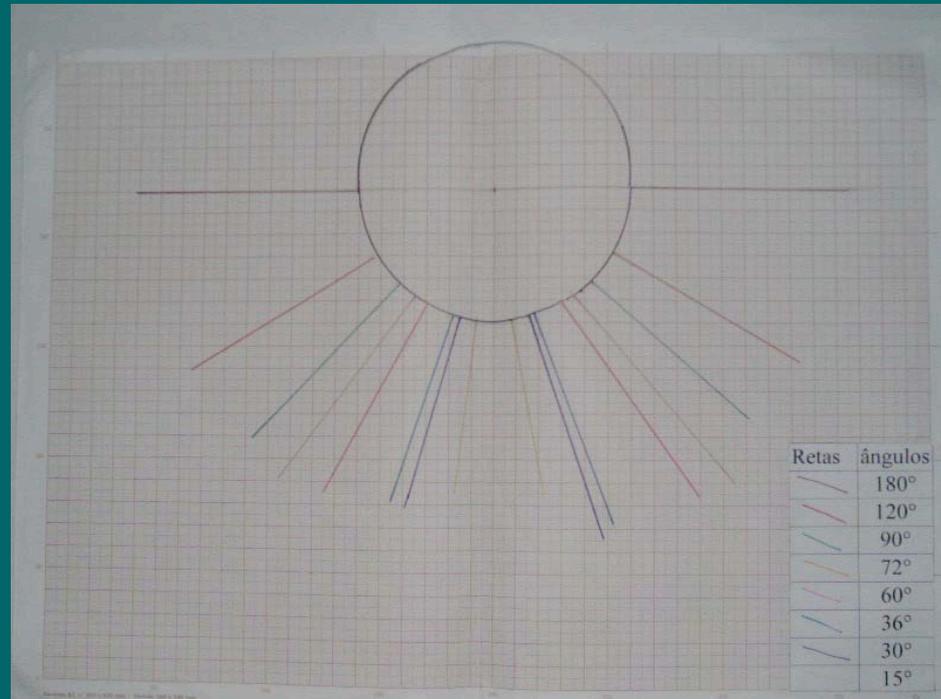
# Material Didático

- Objeto utilizado



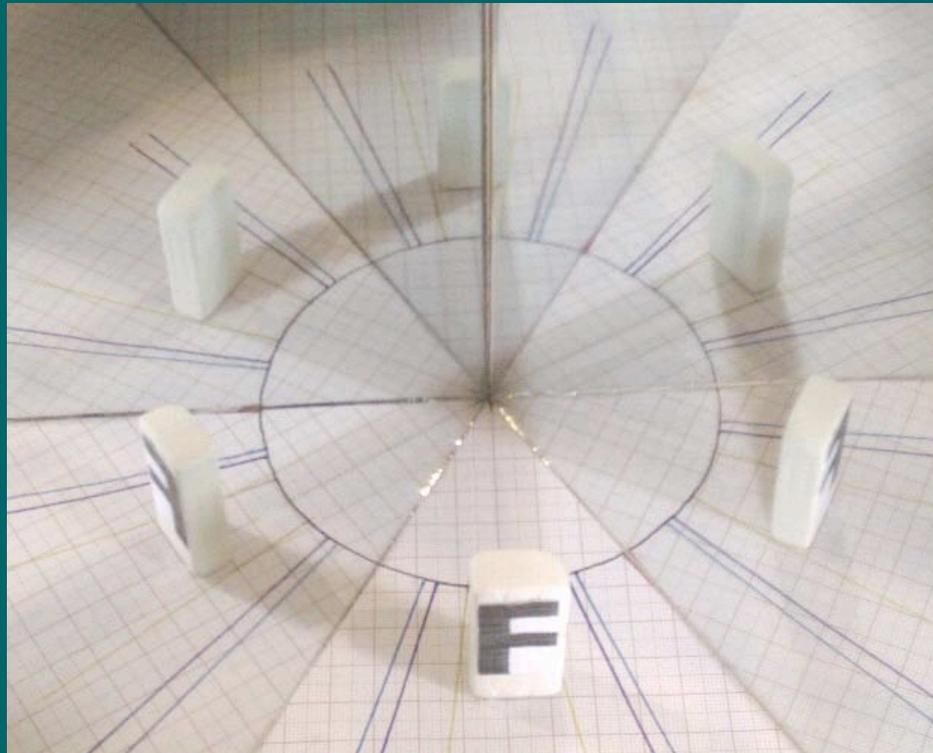
# Material Didático

- Papel Milimetrado



# Material Didático

- Aparato Experimental montado

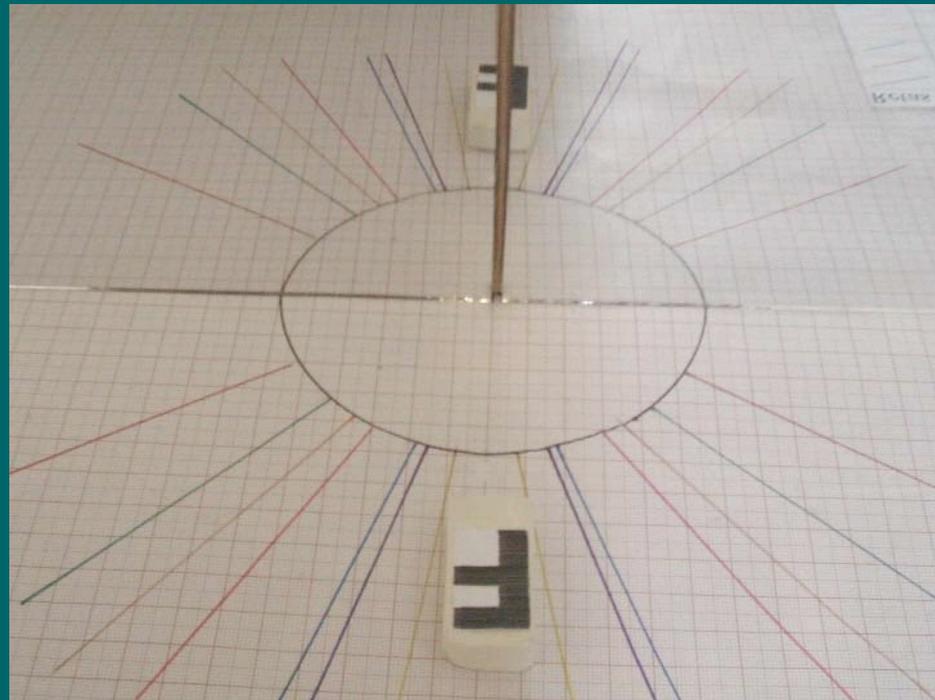


# Trabalhando com o Experimento

- Com o objeto (borracha com F impresso) no plano bissetor dos dois espelhos.
- Como a área de formação de imagens se dá através de uma circunferência (ângulo central de  $360^\circ$ ), foi escolhido alguns divisores deste número para coleta de dados do experimento.

# Trabalhando com o Experimento

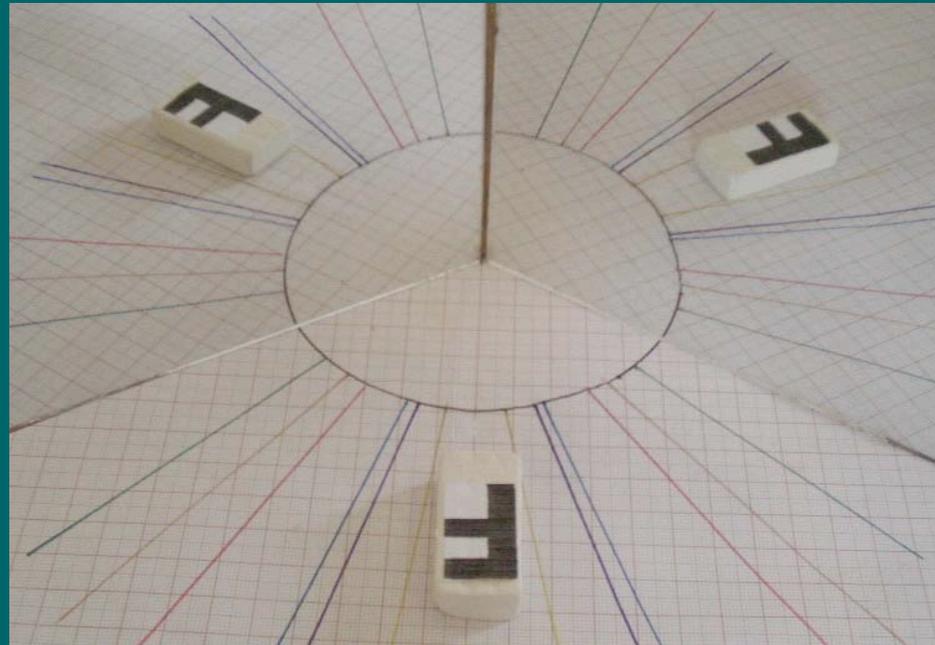
- Para um ângulo de  $180^\circ$ .



- Foi conjugada uma imagem.

# Trabalhando com o Experimento

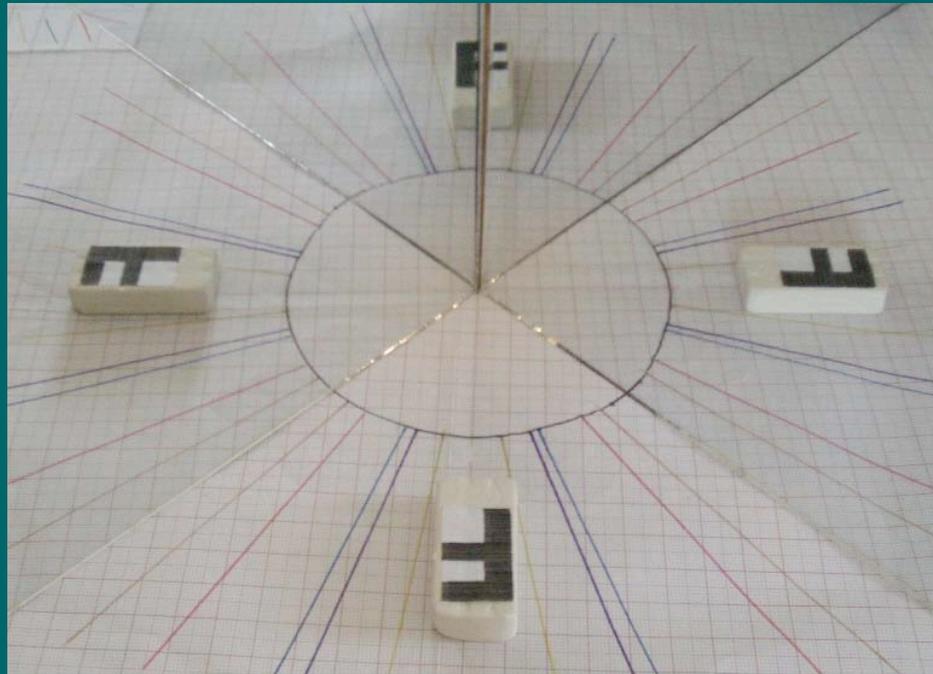
- Para um ângulo de  $120^\circ$ .



- Foram conjugadas duas imagens.

# Trabalhando com o Experimento

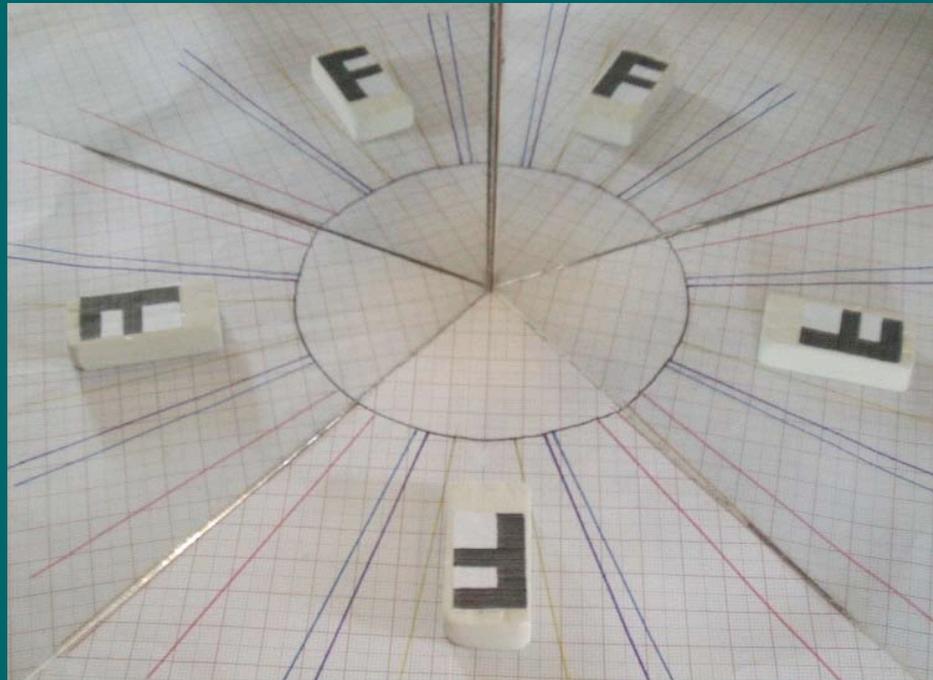
- Para um ângulo de  $90^\circ$ .



- Foram conjugadas três imagens.

# Trabalhando com o Experimento

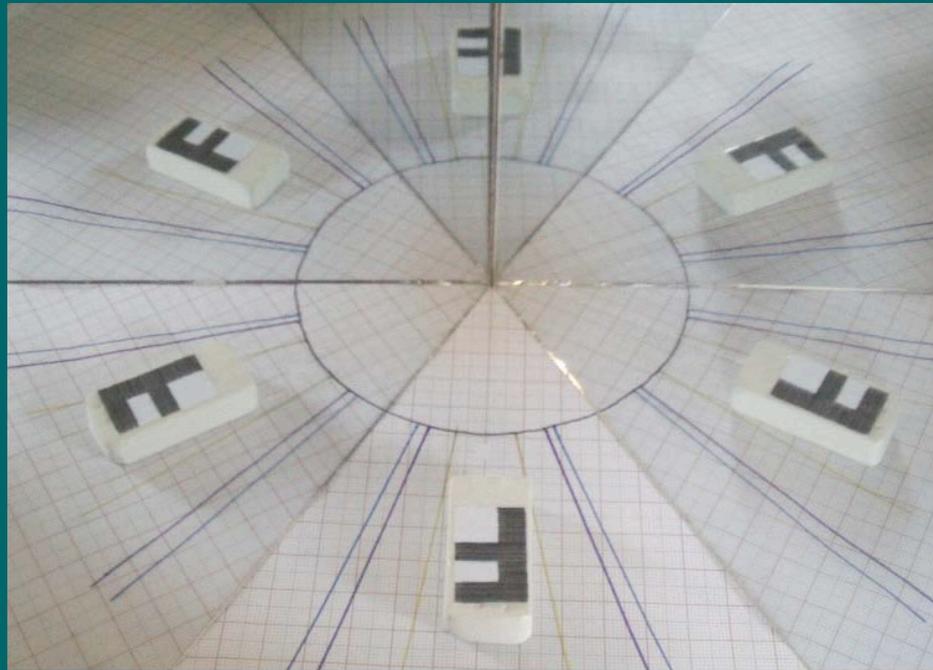
- Para um ângulo de  $72^\circ$ .



- Foram conjugadas quatro imagens.

# Trabalhando com o Experimento

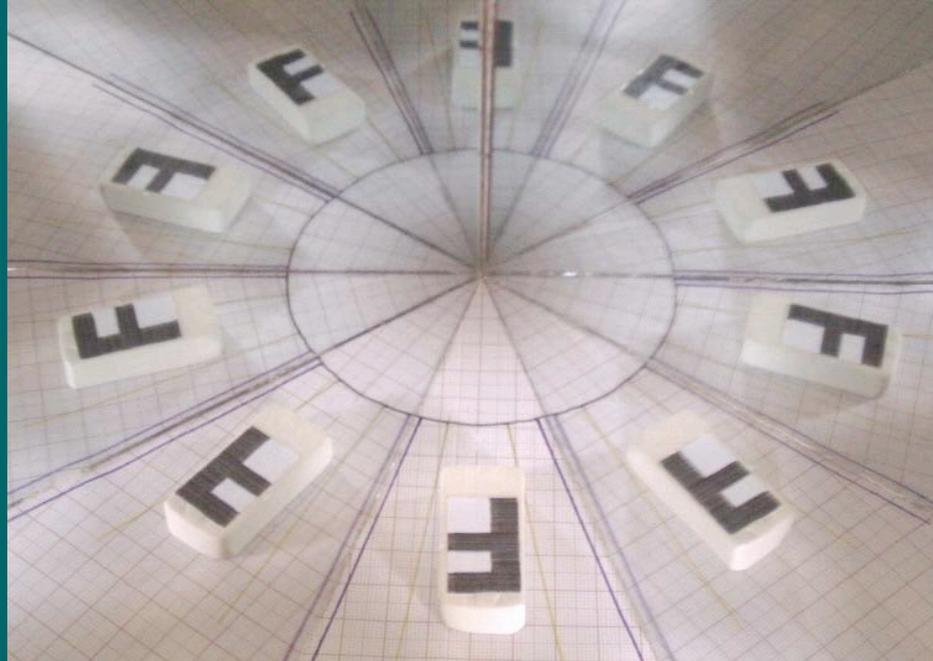
- Para um ângulo de  $60^\circ$ .



- Foram conjugadas cinco imagens.

# Trabalhando com o Experimento

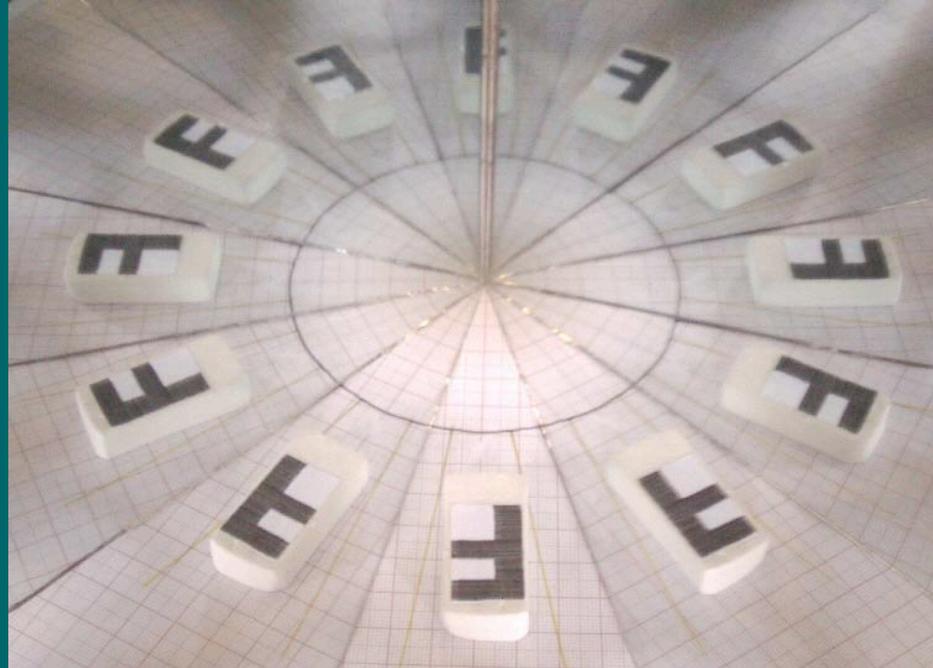
- Para um ângulo de  $36^\circ$ .



- Foram conjugadas nove imagens.

# Trabalhando com o Experimento

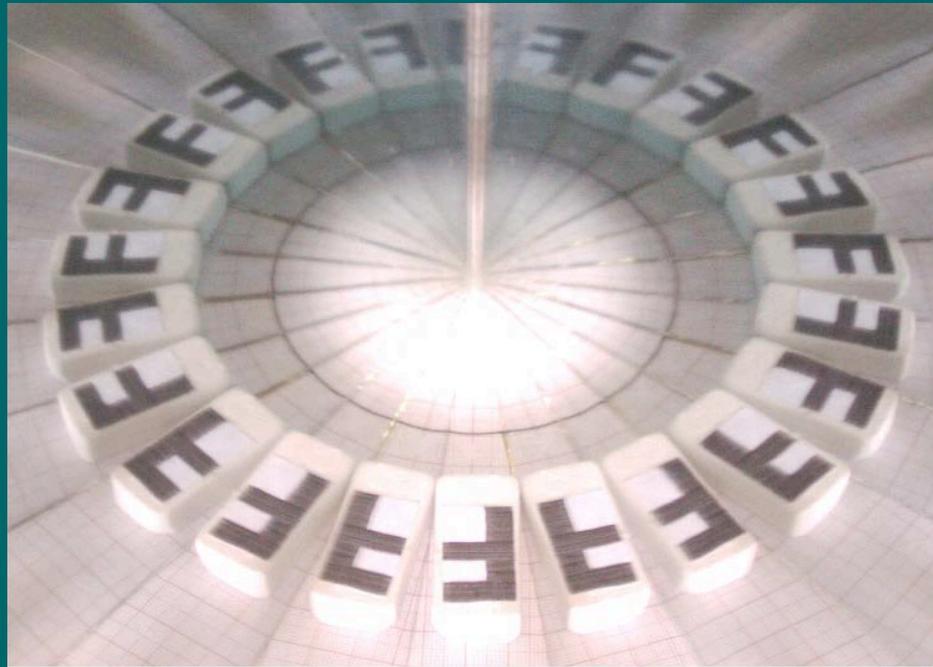
- Para um ângulo de  $30^\circ$ .



- Foram conjugadas onze imagens.

# Trabalhando com o Experimento

- Para um ângulo de  $15^\circ$ .



- Foram conjugadas vinte e três imagens.

# Número de imagens infinitas

- Um caso particular é quando dispomos os espelhos paralelamente e o objeto é colocado entre os espelhos.

# Número de imagens infinitas

- Teremos então uma imagem do objeto sendo formada em cada um dos espelhos. No entanto, estas imagens do objeto não serão as únicas formadas. Como também serão produzidas novas imagens das imagens dos espelhos originais, este fenômeno gerará um conjunto infinito de imagens do objeto.

# Número de imagens infinitas

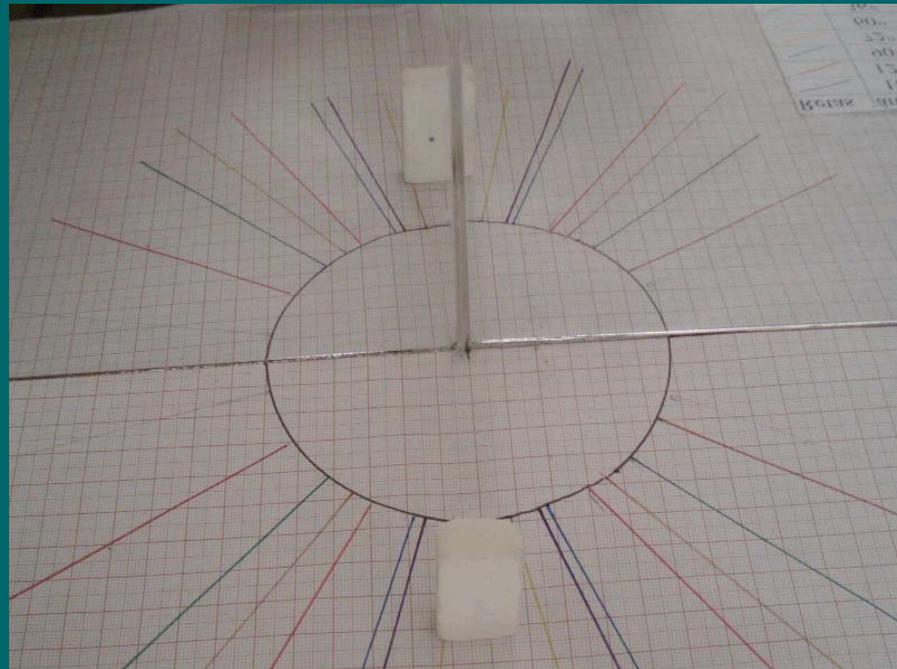


# Imagens como conjunto de pontos

- Um objeto extenso, é um conjunto de pontos (1, 2, 3, ...).
- A estes , o espelho conjuga pontos-imagens (1', 2', 3', ...).
  
- Iremos considerar nosso experimento para apenas um ponto.

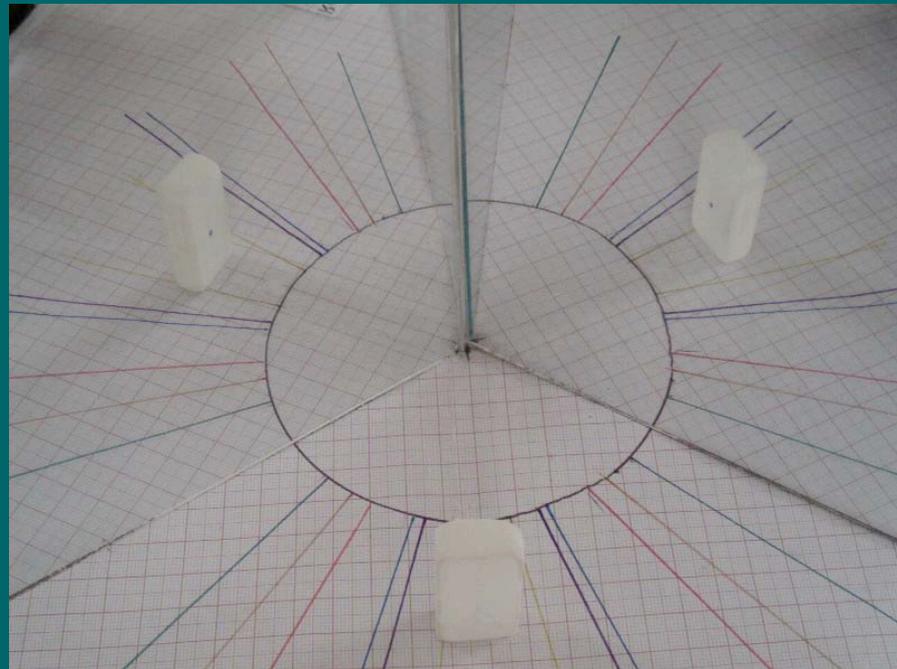
# Imagens como conjunto de pontos

- Para  $180^\circ$



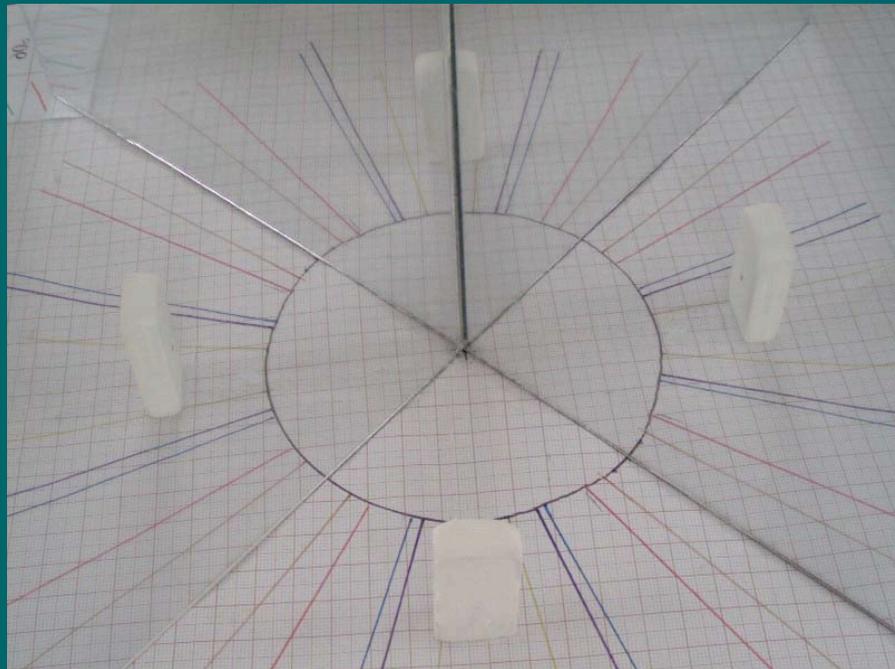
# Imagens como conjunto de pontos

- Para  $120^\circ$



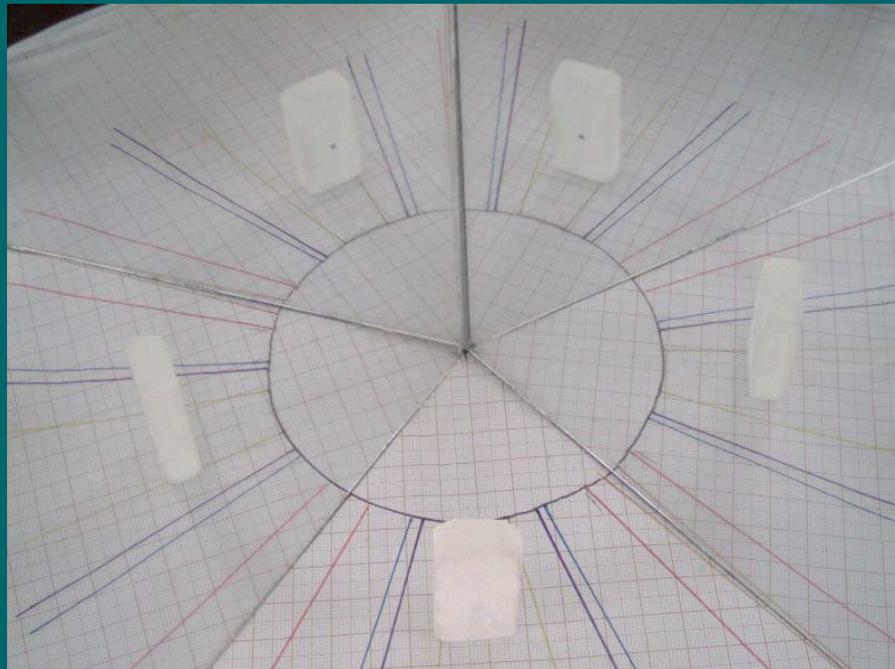
# Imagens como conjunto de pontos

- Para  $90^\circ$



# Imagens como conjunto de pontos

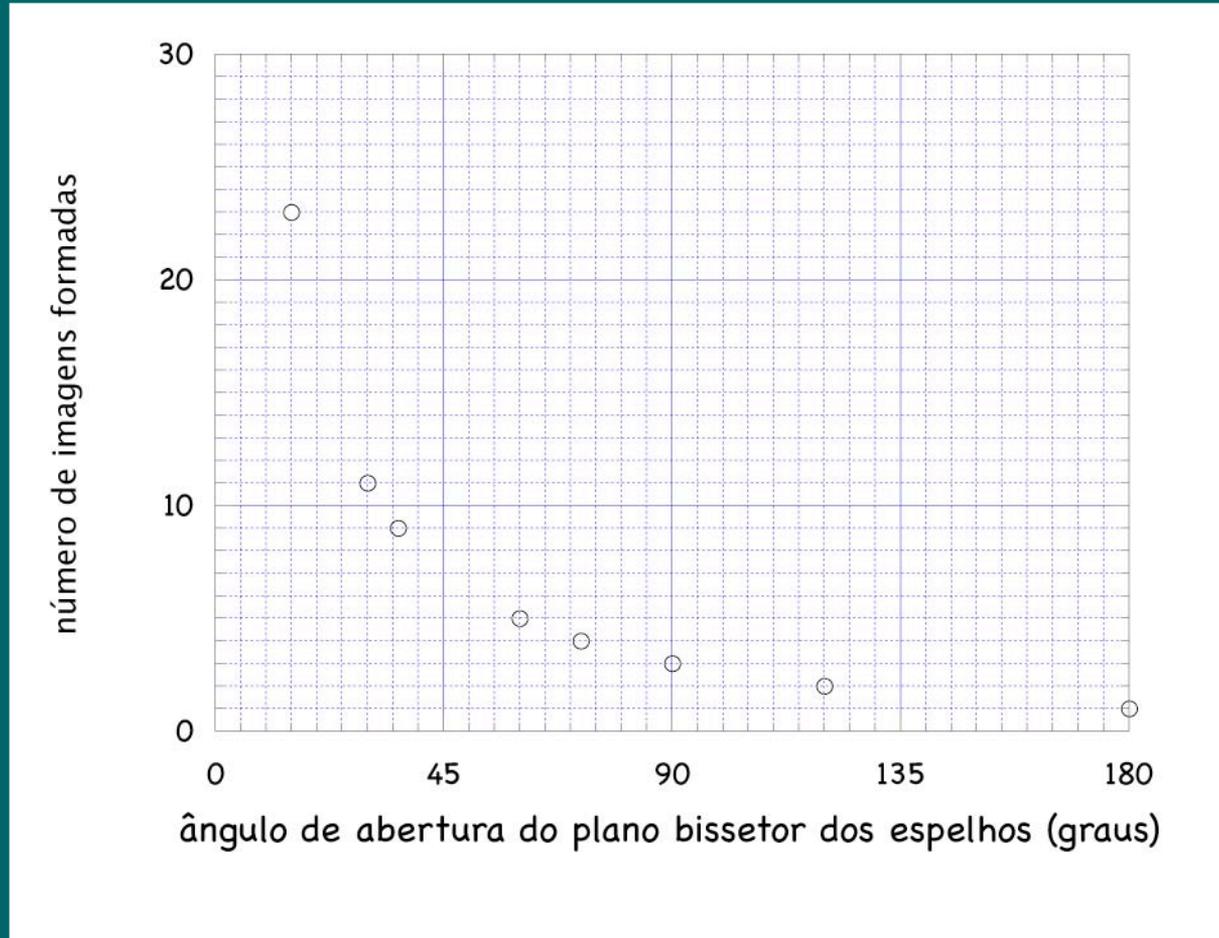
- Para  $72^\circ$



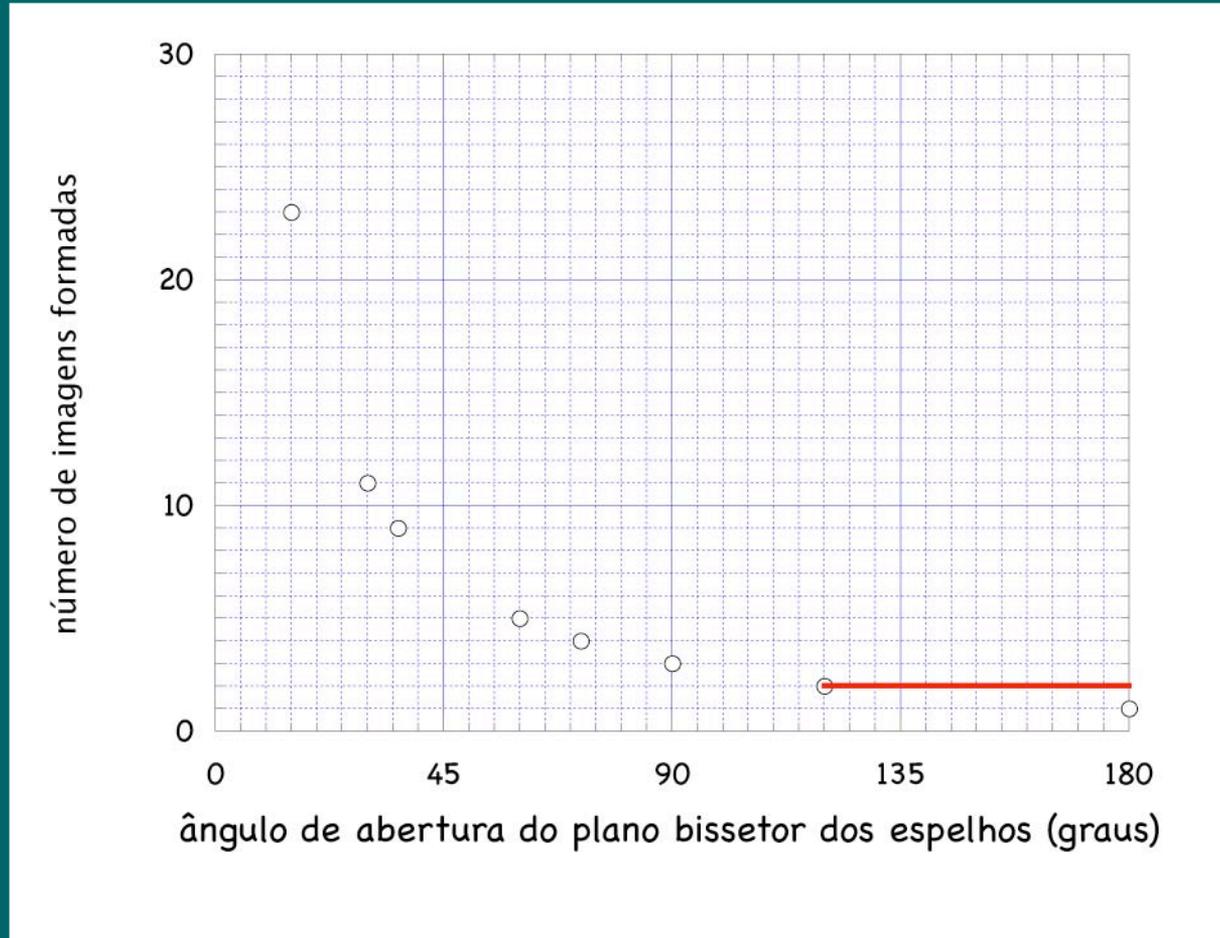
# Imagens como conjunto de pontos

- Sendo o objeto um conjunto de pontos, portanto teremos, também, um número inteiro de imagens.
- A real relação entre o número de imagens e ângulo de abertura será dada a seguir.

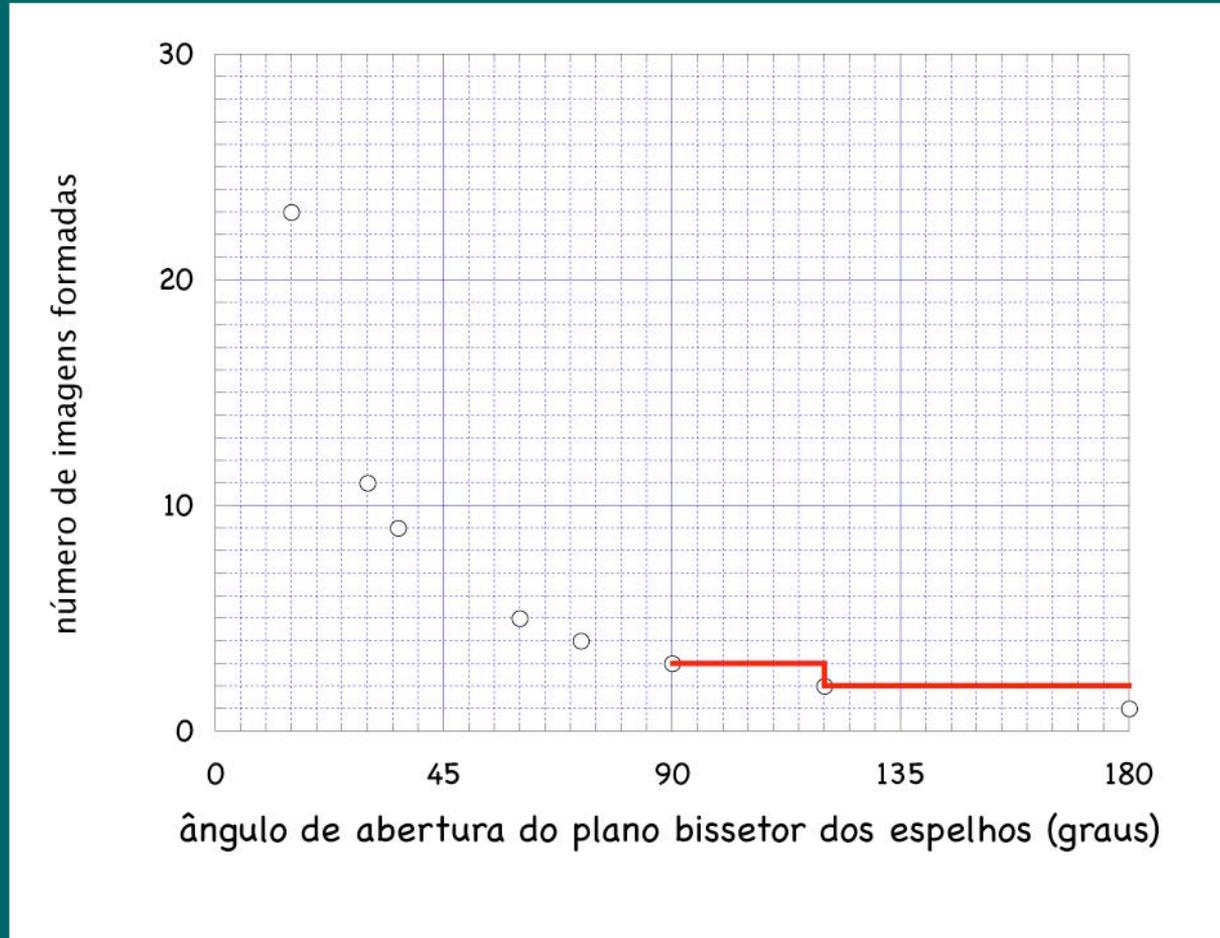
# Imagens como conjunto de pontos



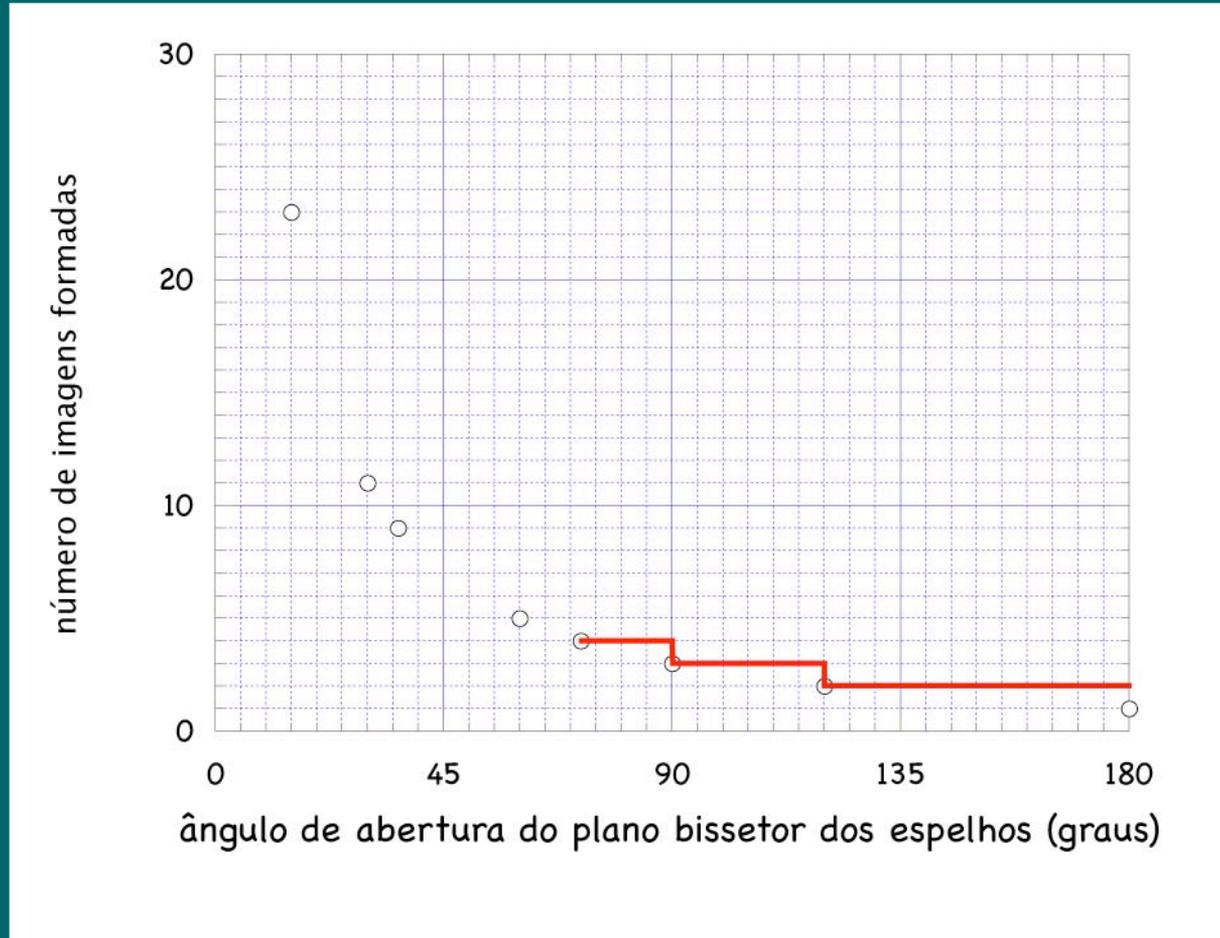
# Imagens como conjunto de pontos



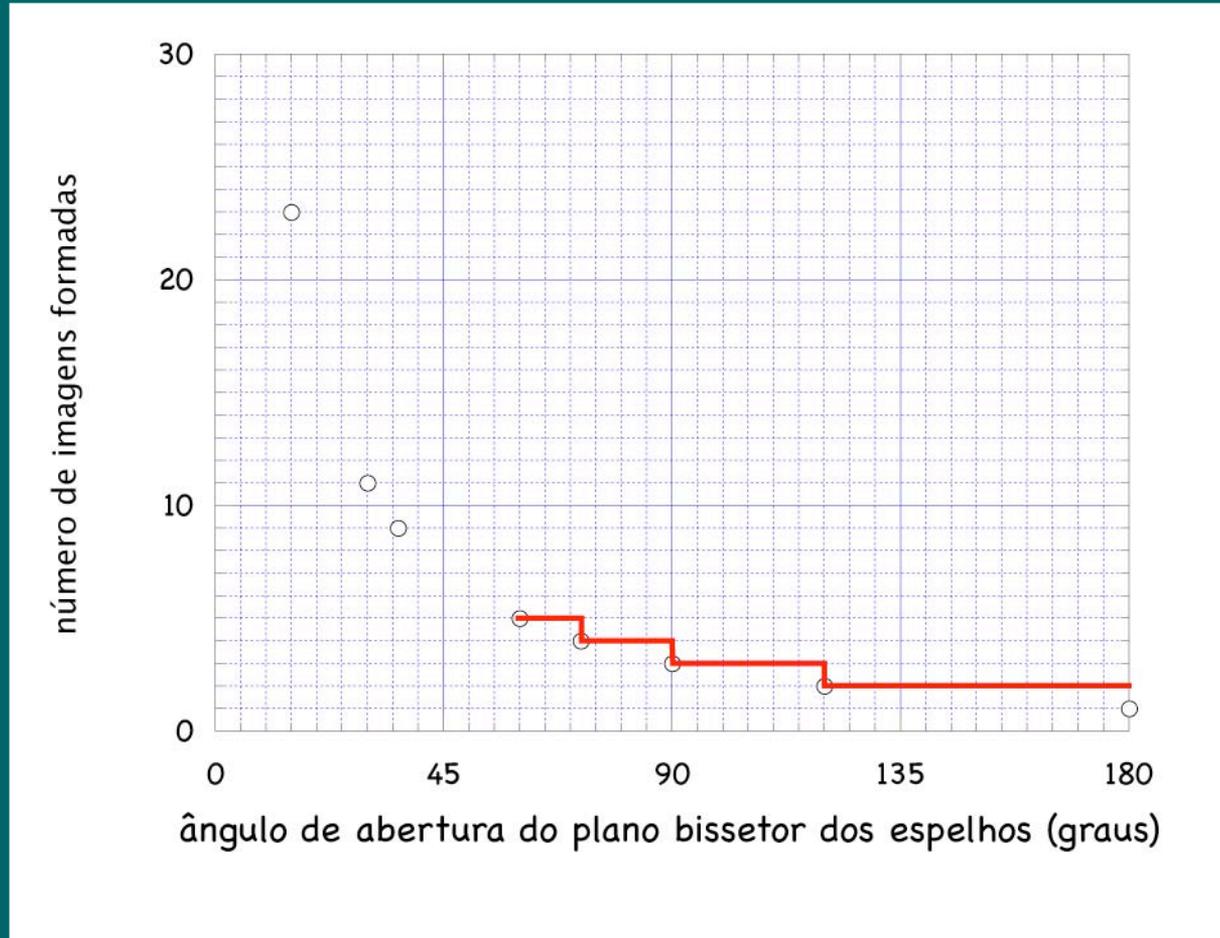
# Imagens como conjunto de pontos



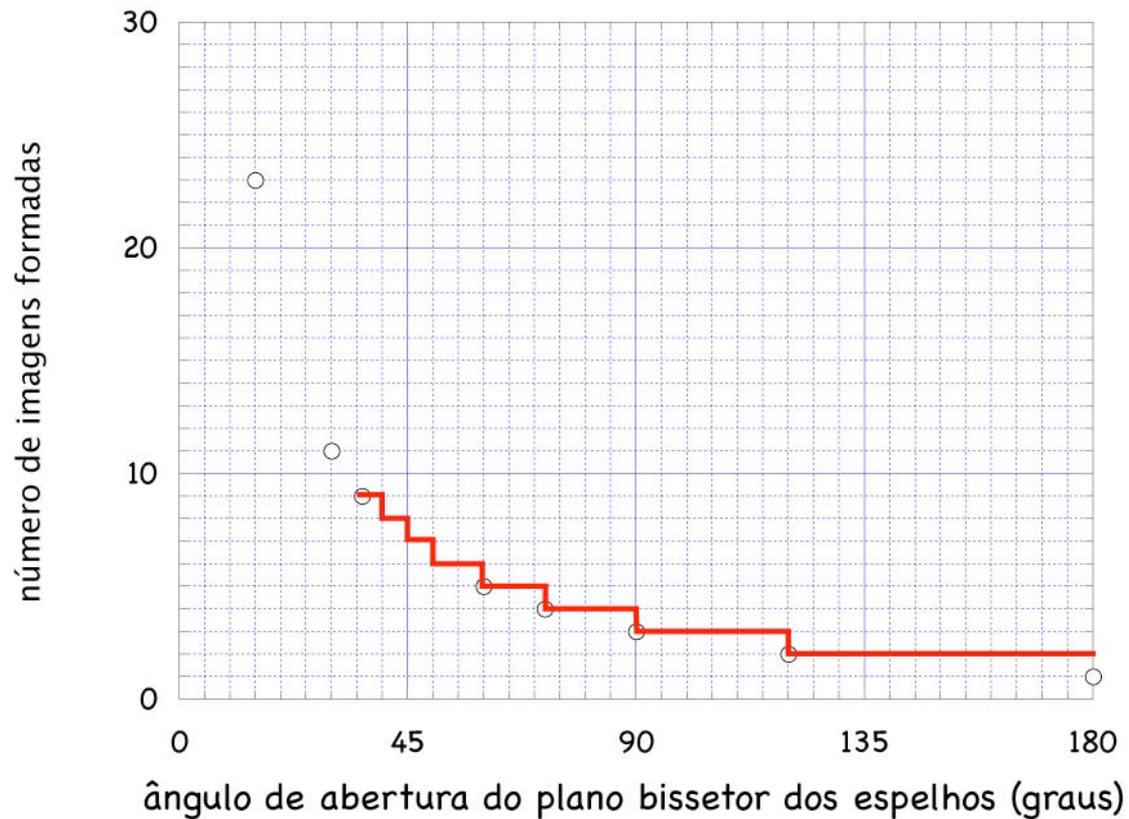
# Imagens como conjunto de pontos



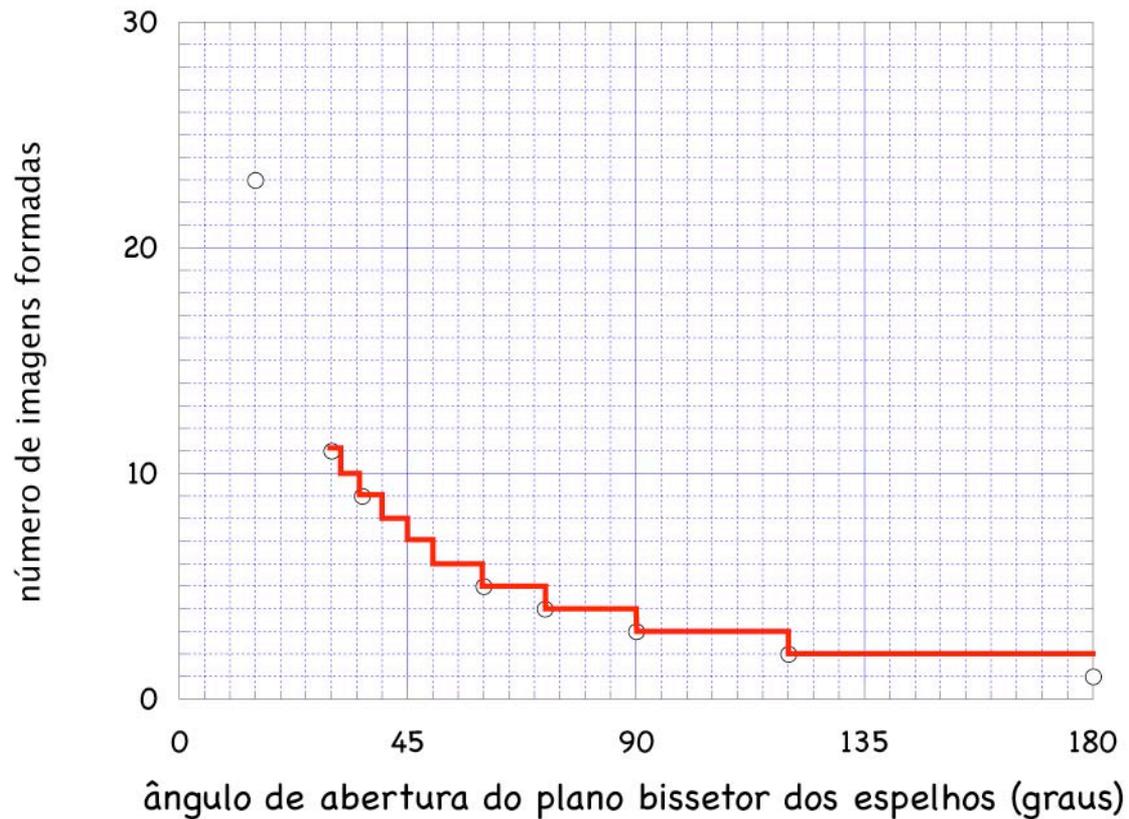
# Imagens como conjunto de pontos



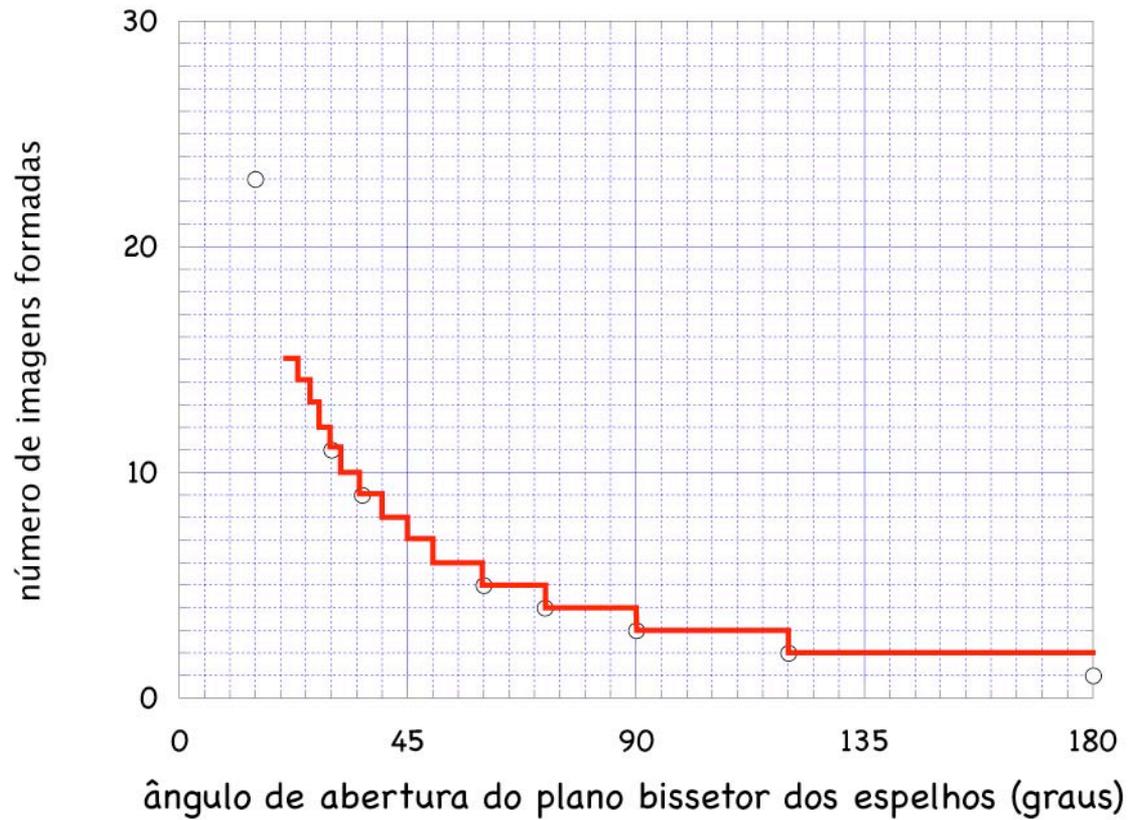
# Imagens como conjunto de pontos



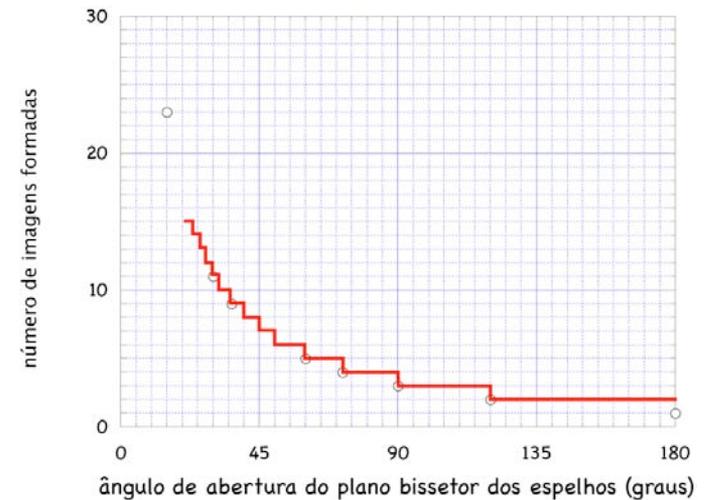
# Imagens como conjunto de pontos



# Imagens como conjunto de pontos



# Imagens como conjunto de pontos



Portanto, podemos concluir?

$$N = \frac{360}{\alpha} - 1$$

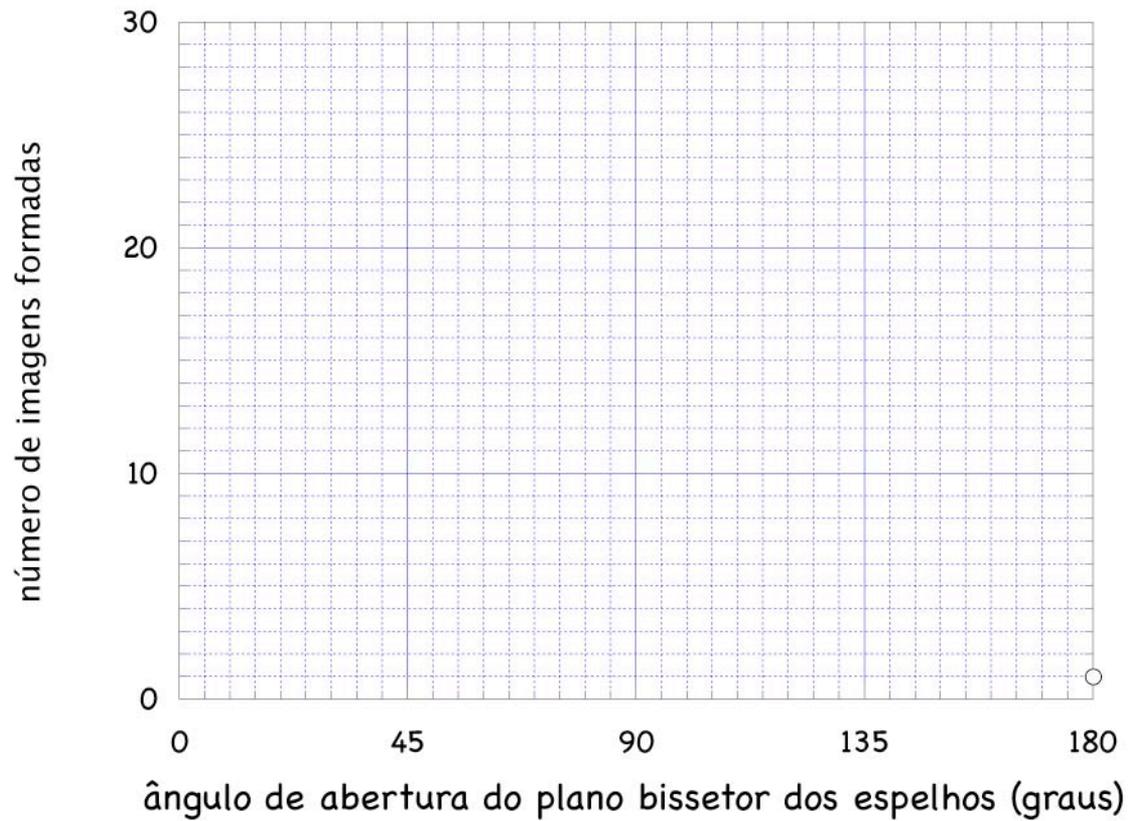
Lembramos que esta equação é válida para casos onde o objeto real é colocado no plano bissetor entre os dois espelhos e **N é um número inteiro!**

# Análise de dados

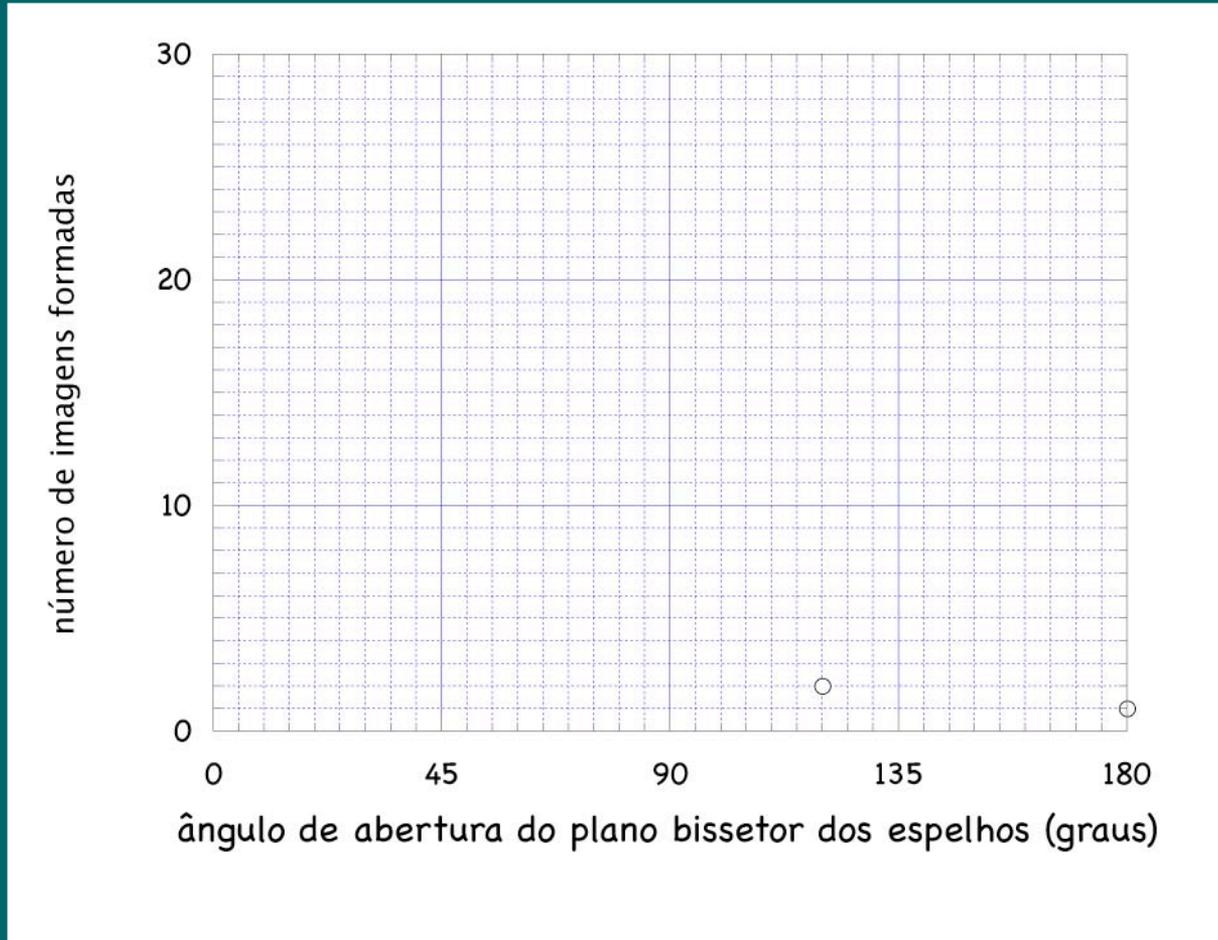
- Na Tabela 1 relacionamos o número de imagens ( $N$ ) com ângulo de abertura ( $\alpha$ ) entre os espelhos.

$\alpha$	$N$
180°	1
120°	2
90°	3
72°	4
60°	5
36°	9
30°	11
15°	23

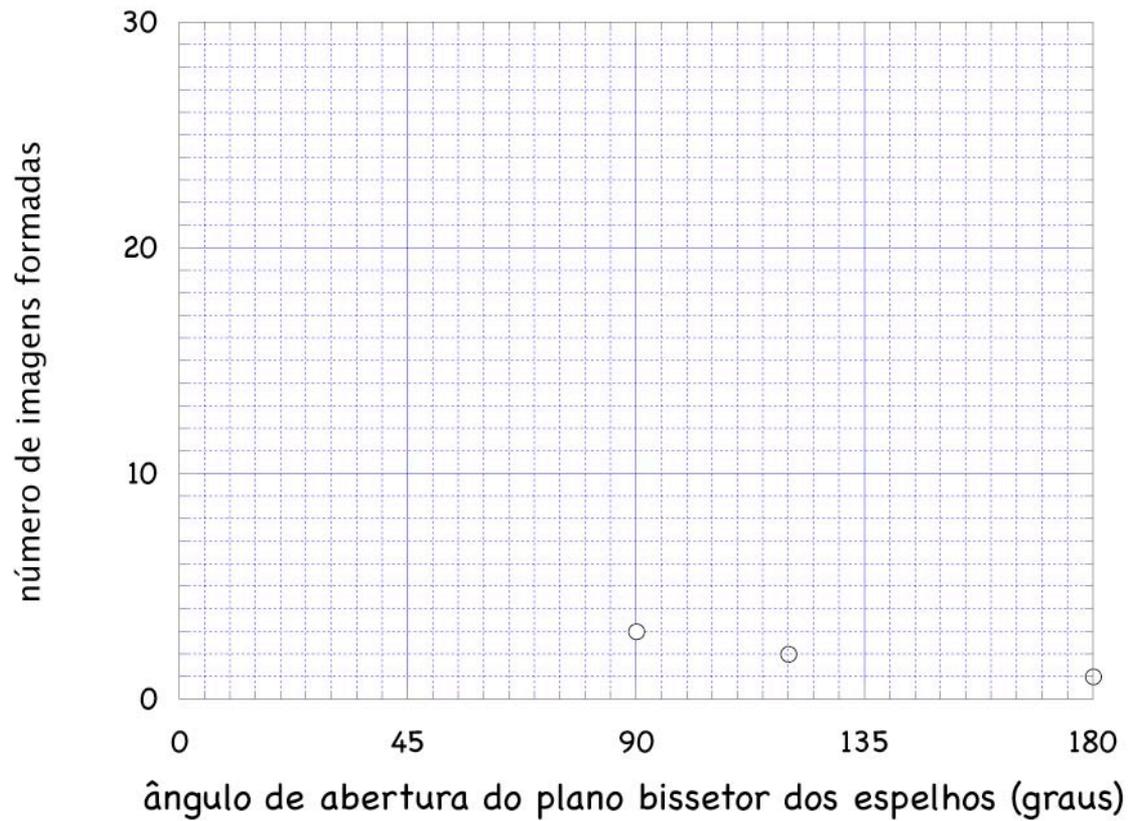
# Análise de dados



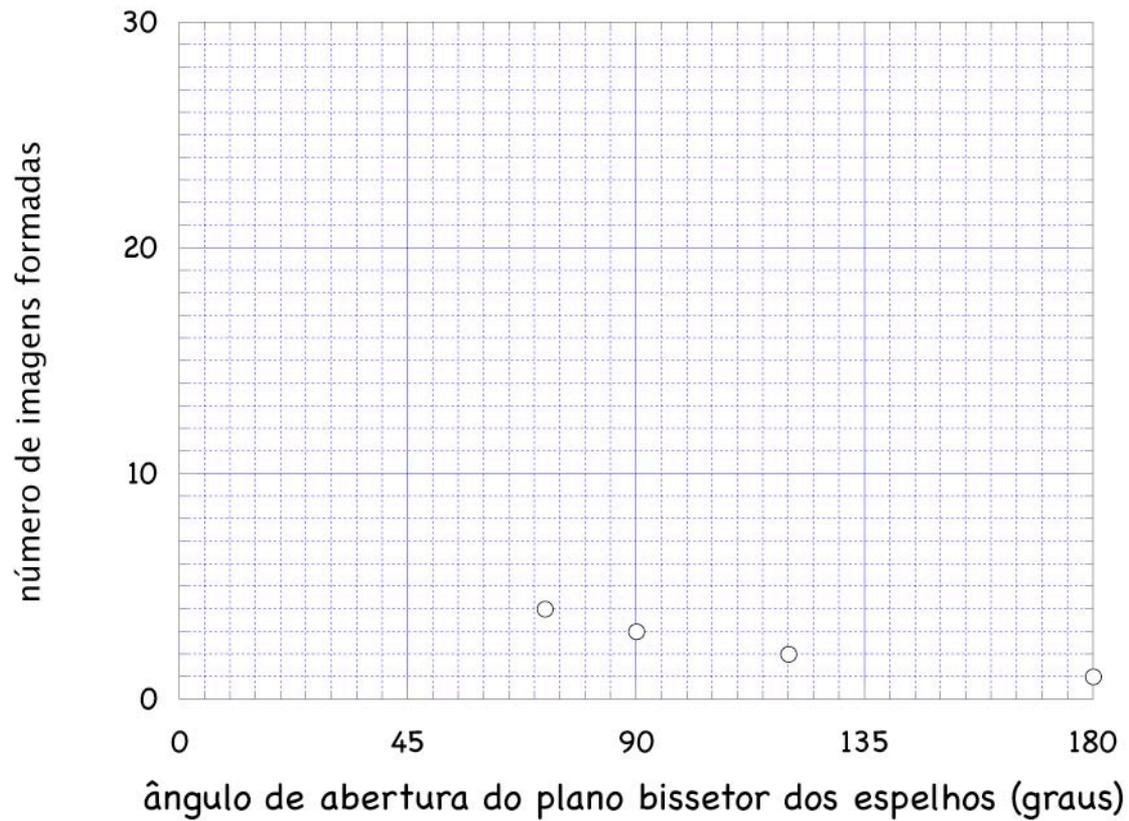
# Análise de dados



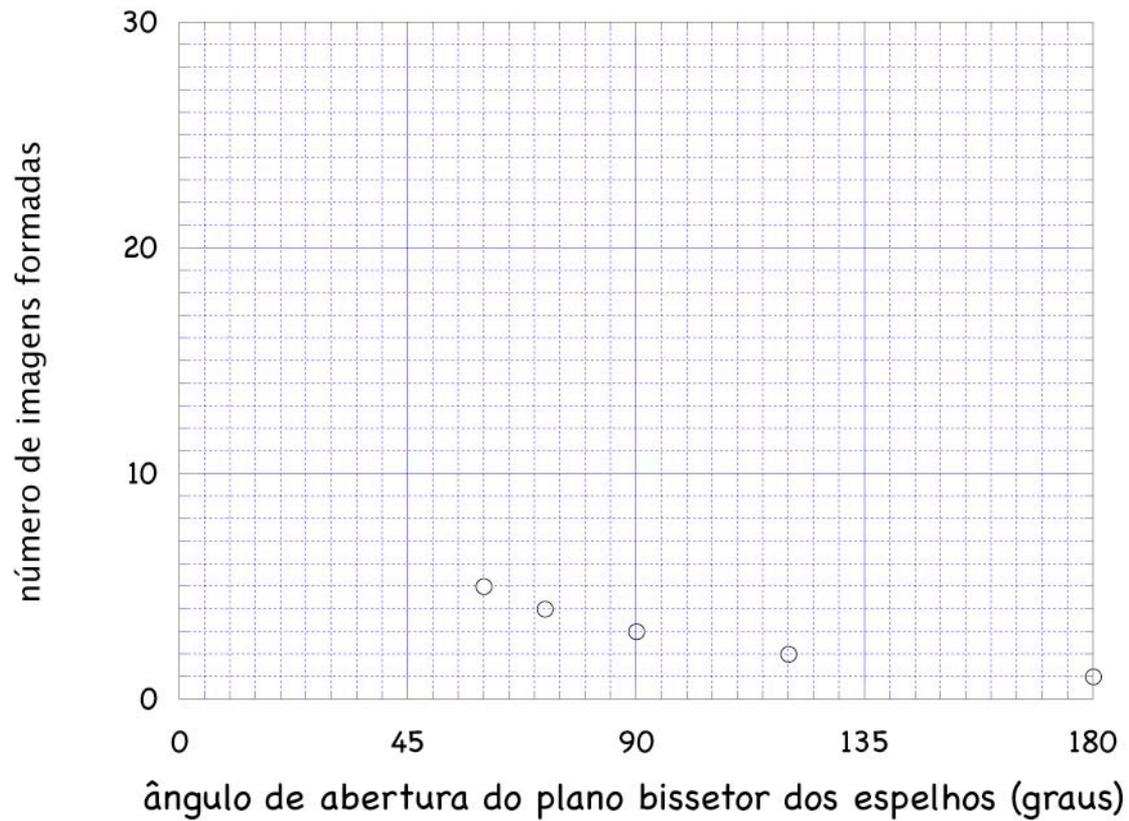
# Análise de dados



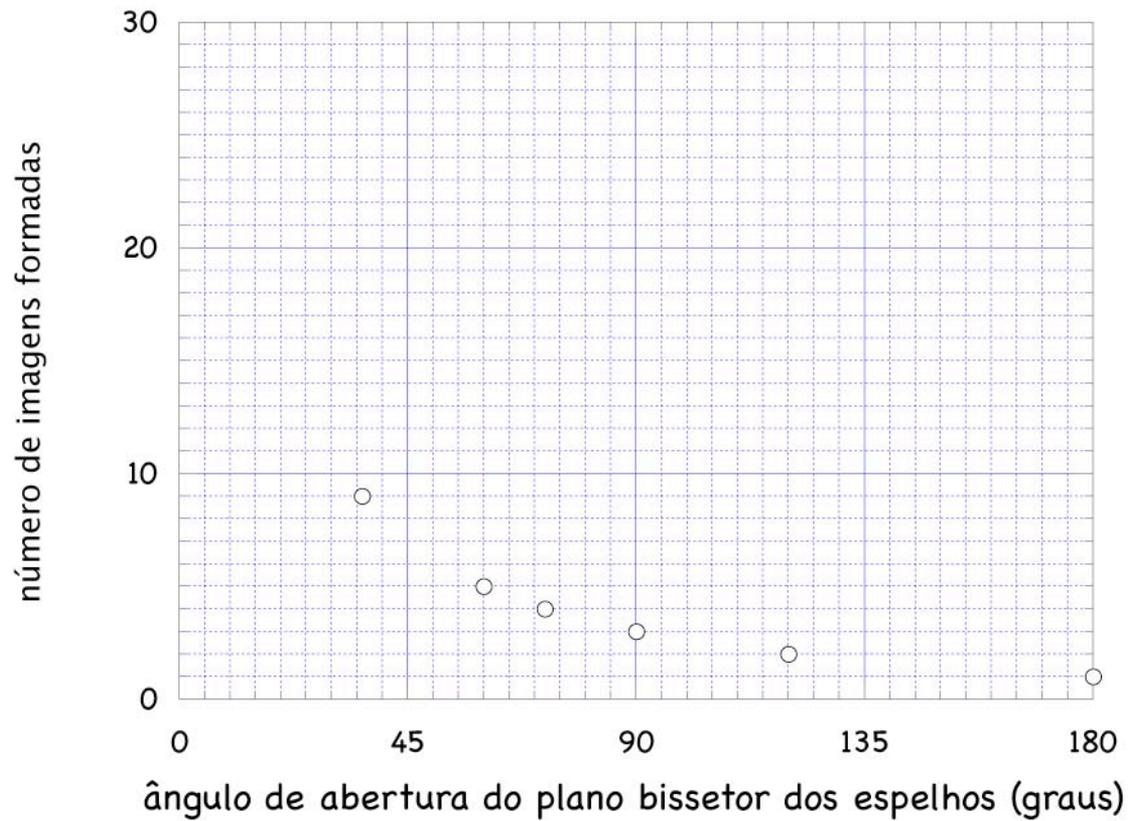
# Análise de dados



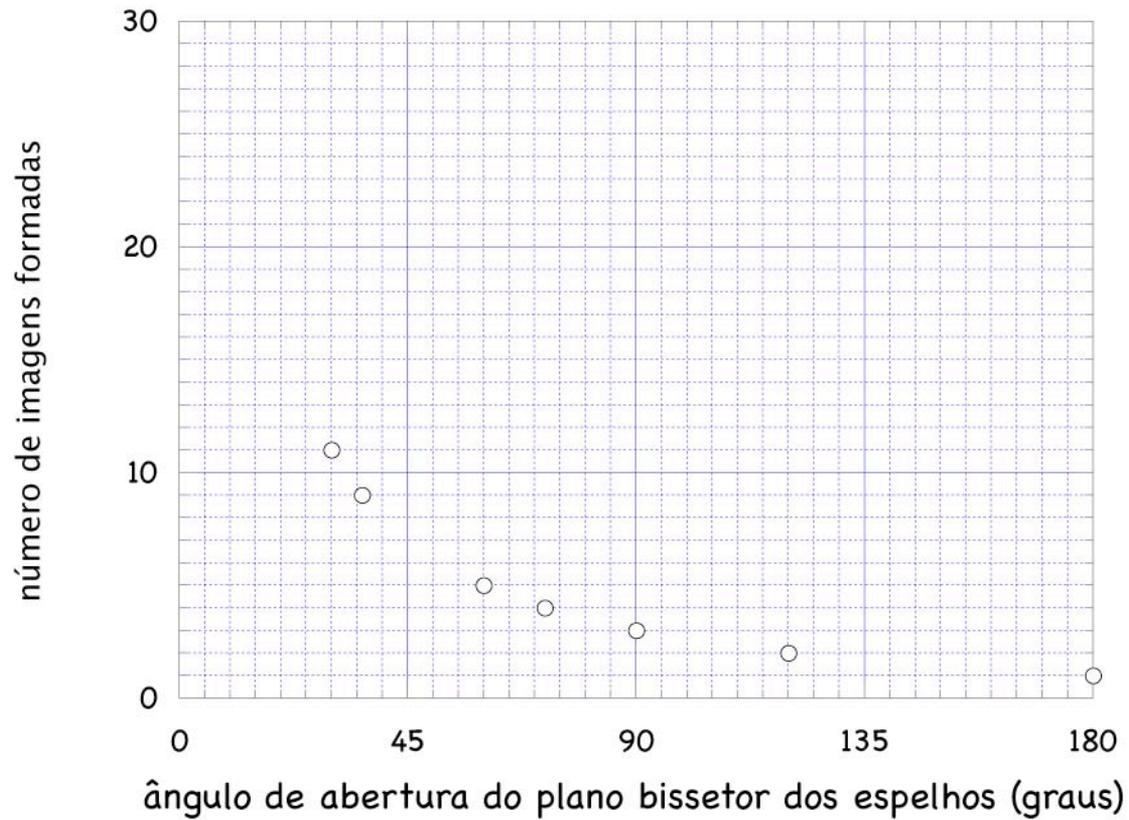
# Análise de dados



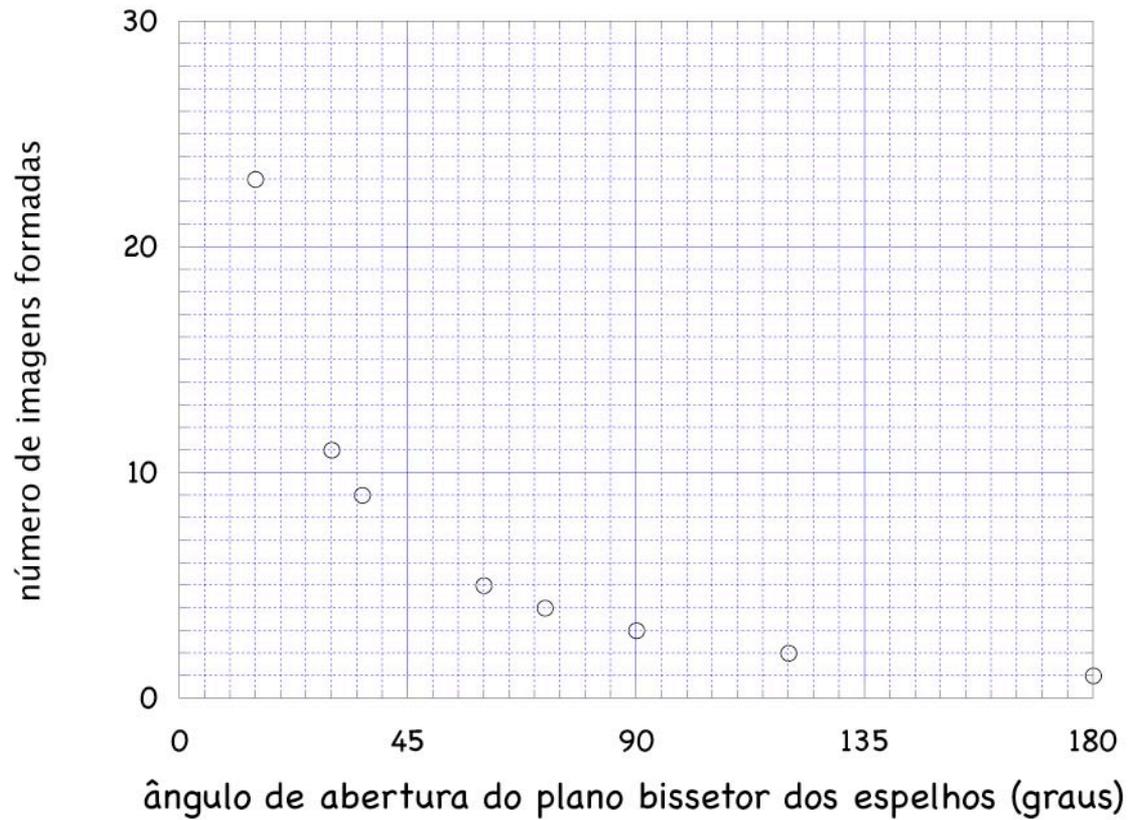
# Análise de dados



# Análise de dados



# Análise de dados

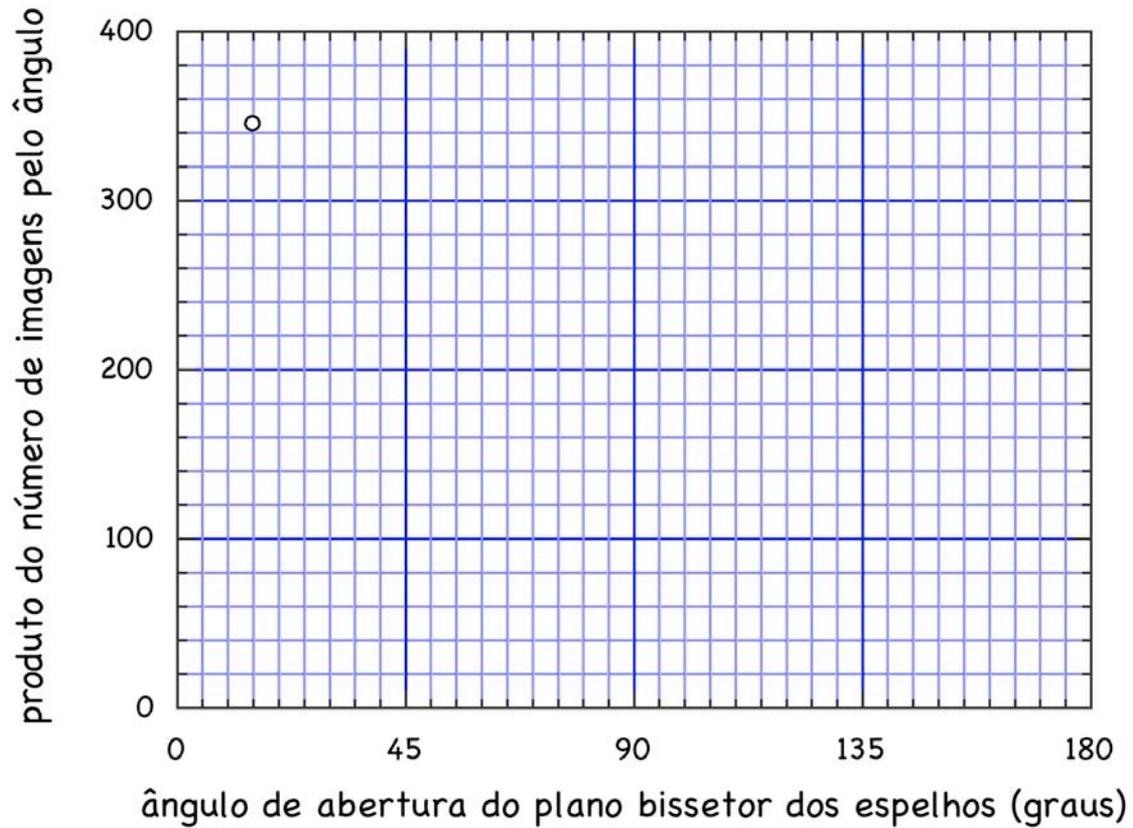


# Análise de dados

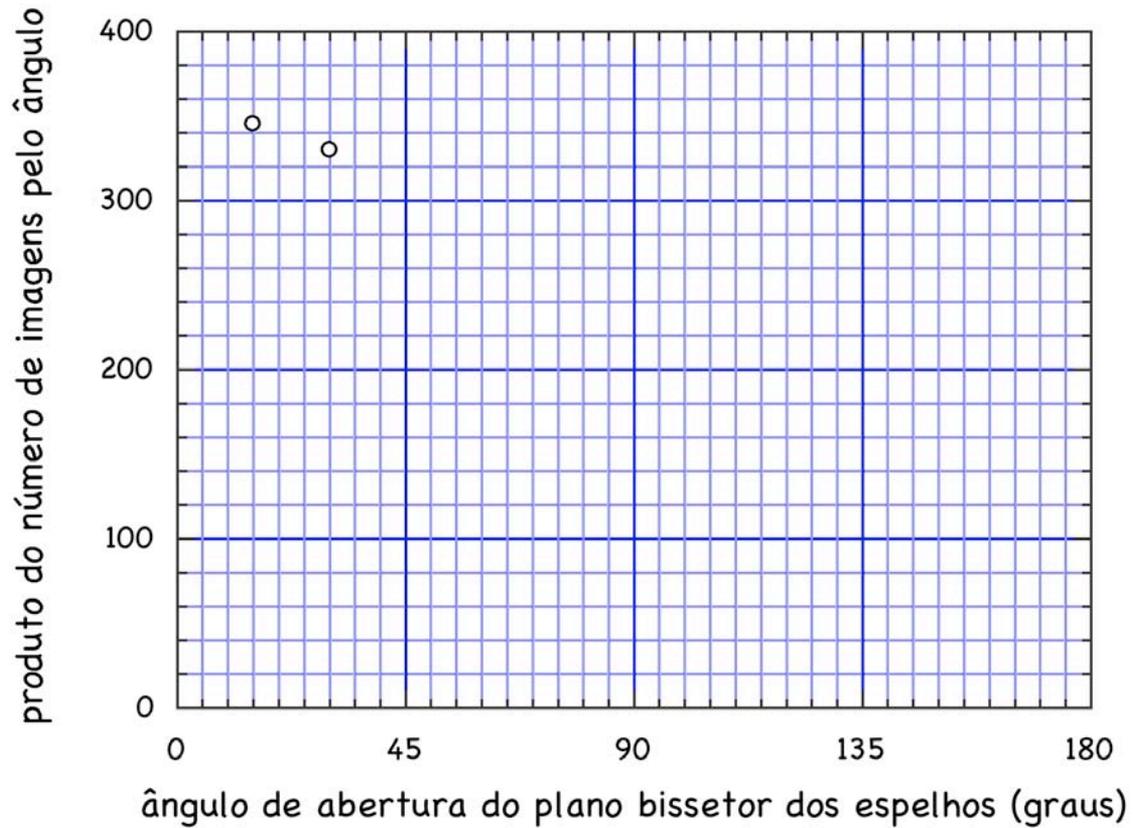
- A partir desta observação, investigamos como seria a relação entre o produto ( $N\alpha$ ) e o ângulo considerado ( $\alpha$ ).
- Para isso, construímos a Tabela 2.

$\alpha$	$N\alpha$
180°	180
120°	240
90°	270
72°	288
60°	300
36°	324
30°	330
15°	345

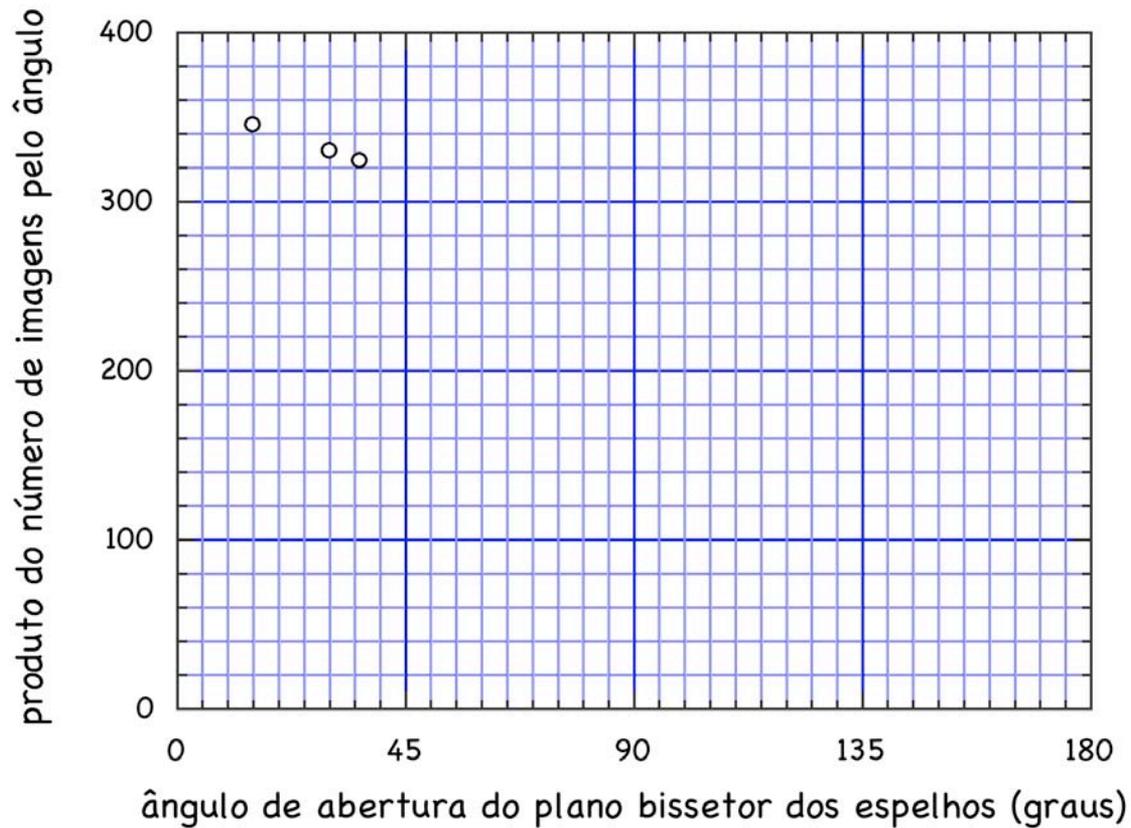
# Análise de dados



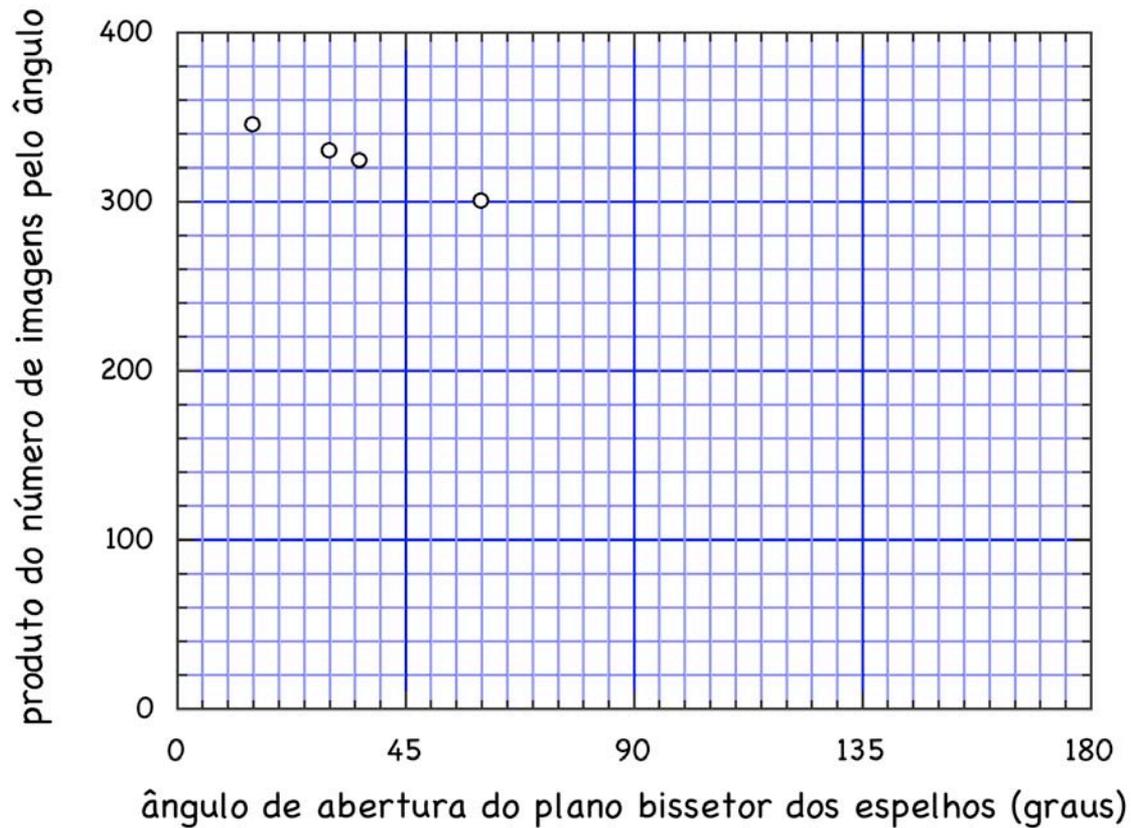
# Análise de dados



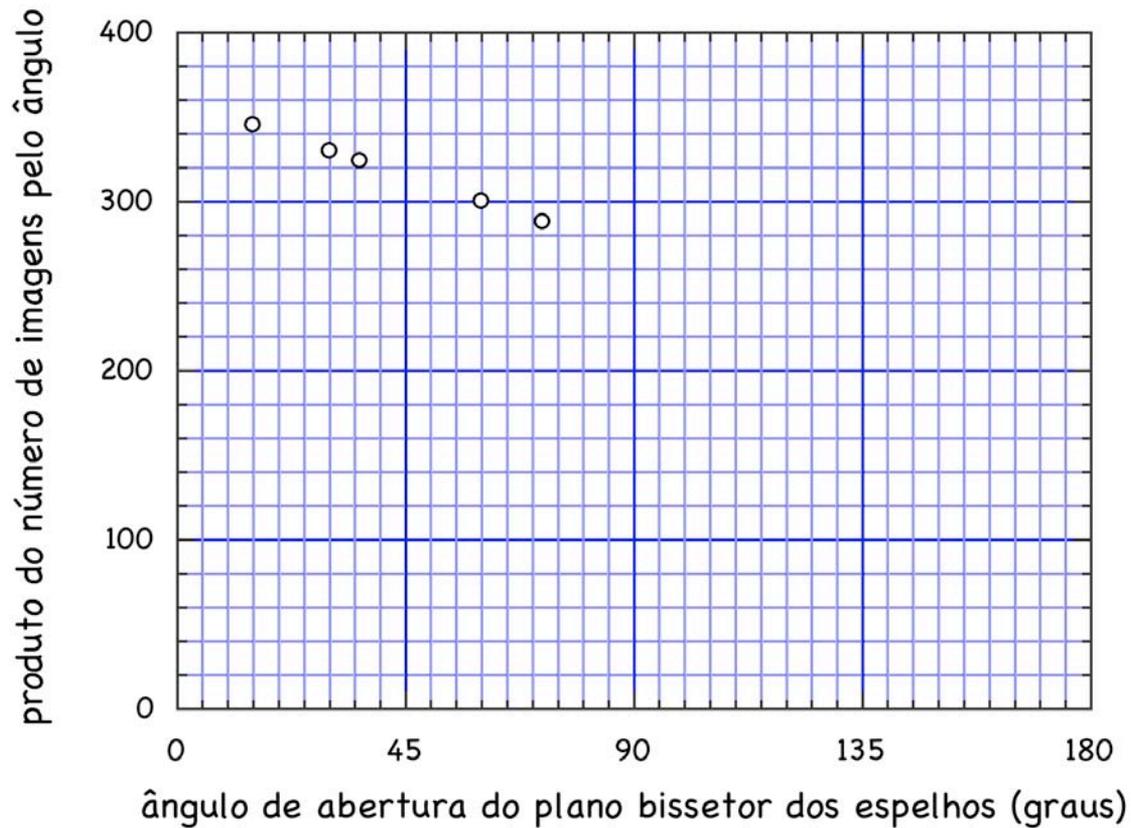
# Análise de dados



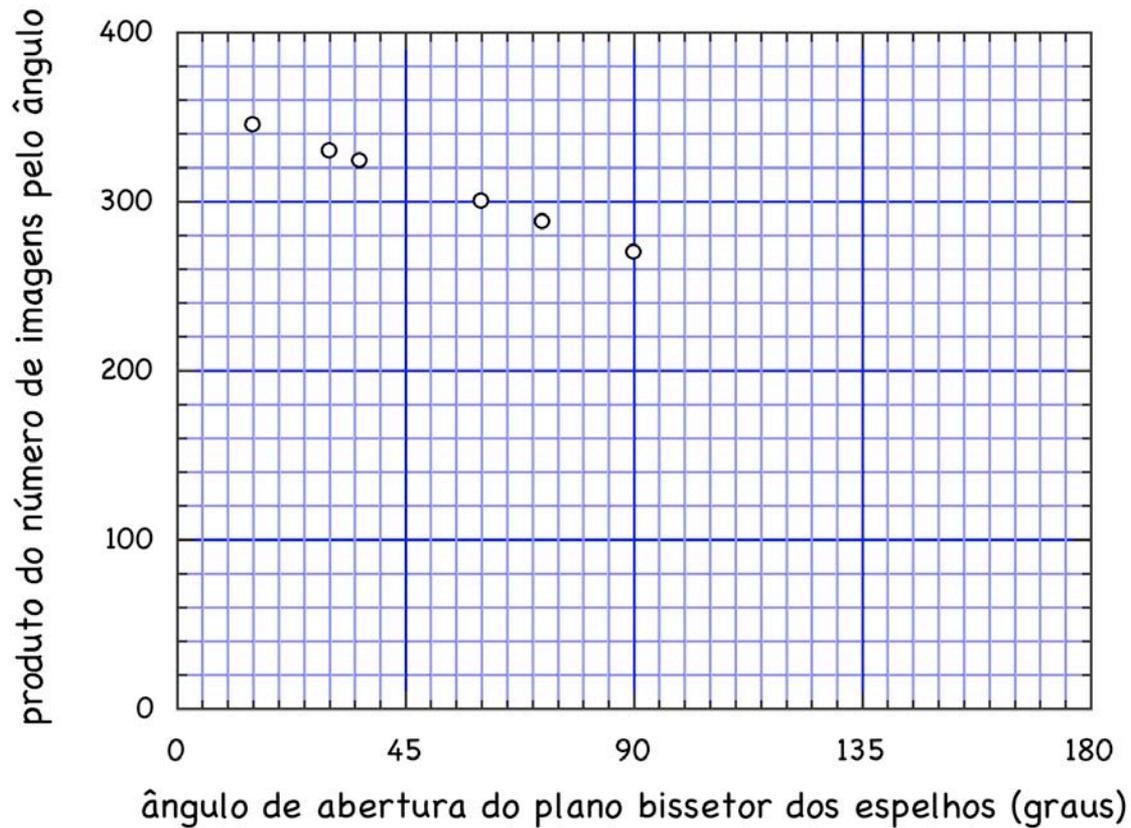
# Análise de dados



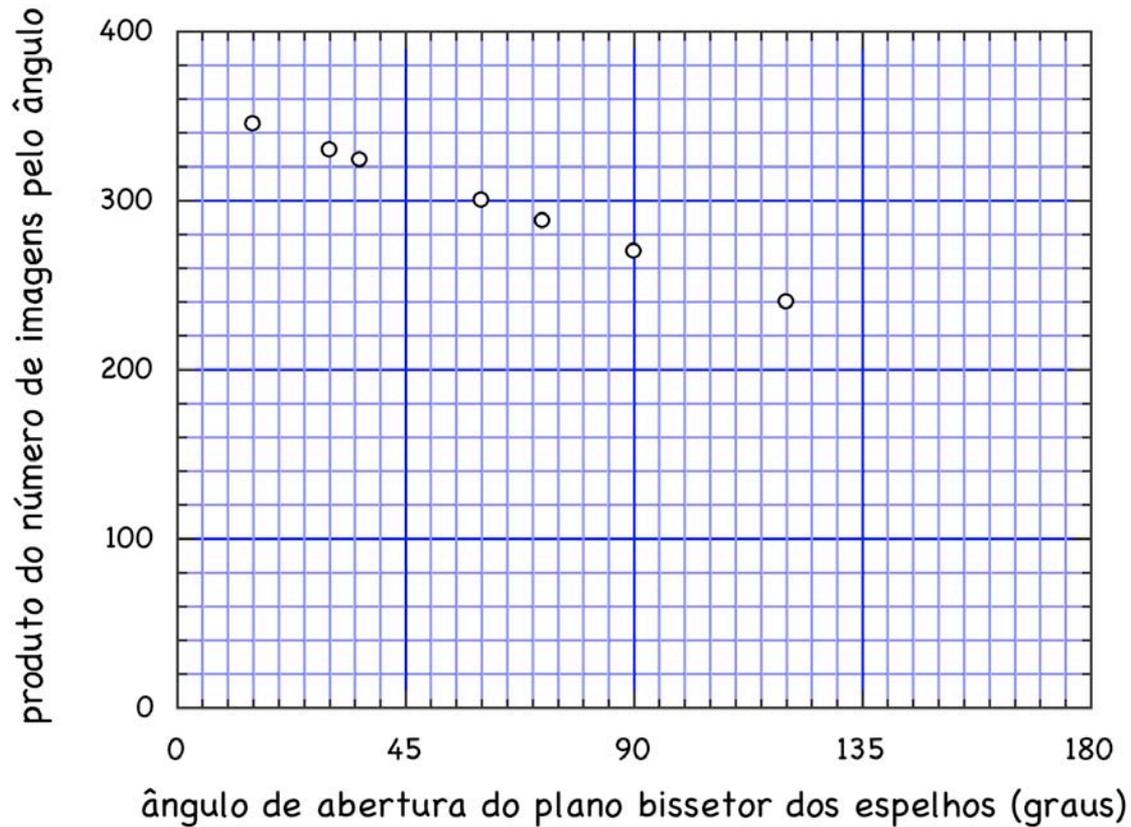
# Análise de dados



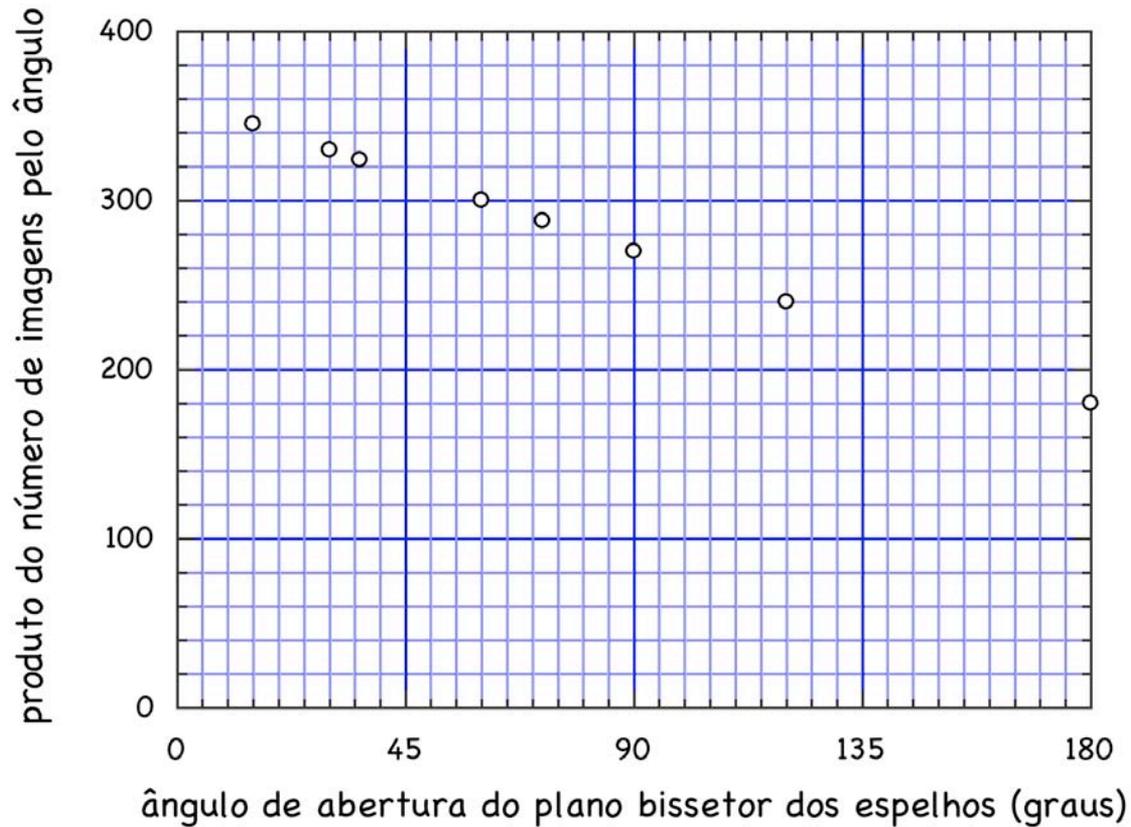
# Análise de dados



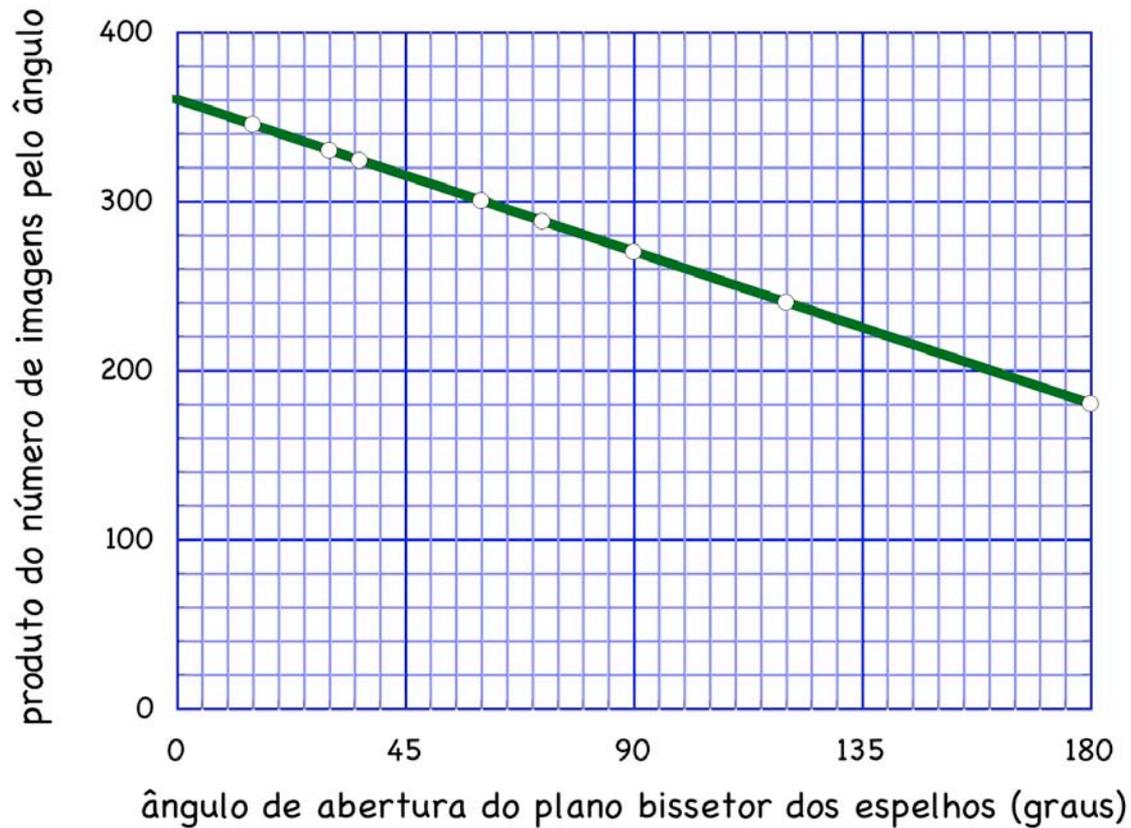
# Análise de dados



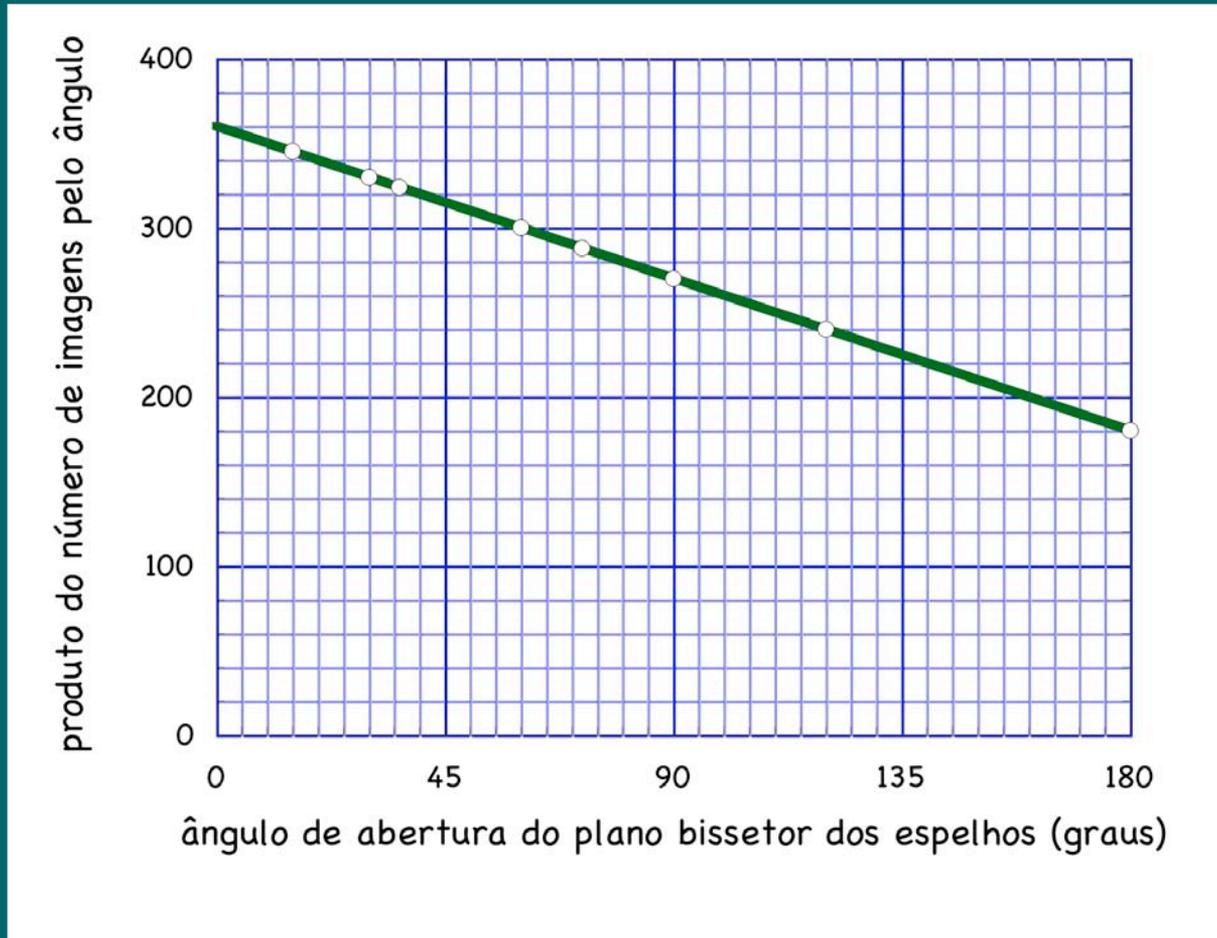
# Análise de dados



# Análise de dados



# Análise de dados



- O gráfico representa uma relação linear:  $y = ax + b$

# Análise de dados

Ajuste linear:

$$y = b + ax$$

Do gráfico, observamos que:

$$y = N\alpha \quad x = \alpha$$

$$b \approx 360$$

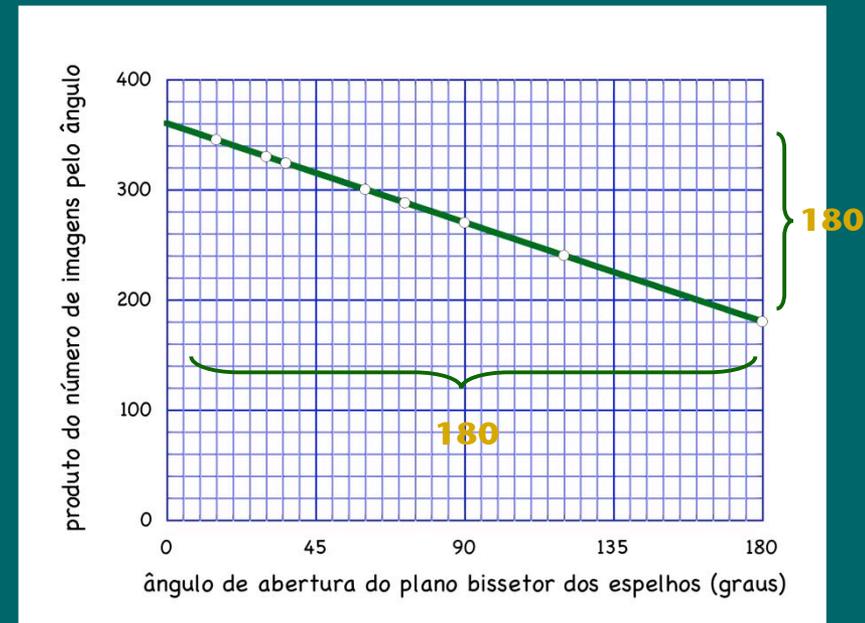
$$a \approx -1$$

Temos então:  $N\alpha = 360 - \alpha$

Portanto, podemos concluir:

$$N = \frac{360}{\alpha} - 1$$

$$a \approx \frac{180 - 360}{180} = -1$$



# Análise de dados

Ajuste linear:

$$y = b + ax$$

Do gráfico, observamos que:

$$y = N\alpha \quad x = \alpha$$

$$b \approx 360$$

$$a \approx -1$$

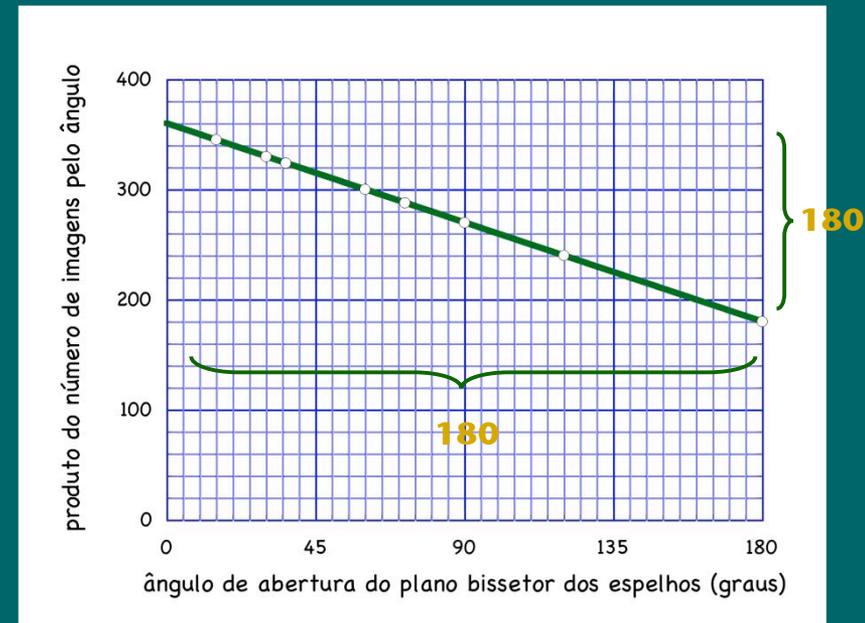
Temos então:  $N\alpha = 360 - \alpha$

Portanto, podemos concluir:

$$N = \frac{360}{\alpha} - 1$$

$$a \approx \frac{180 - 360}{180} = -1$$

Lembramos que esta equação é válida para casos onde o objeto real é colocado no plano bissetor entre os dois espelhos.



# Reversão

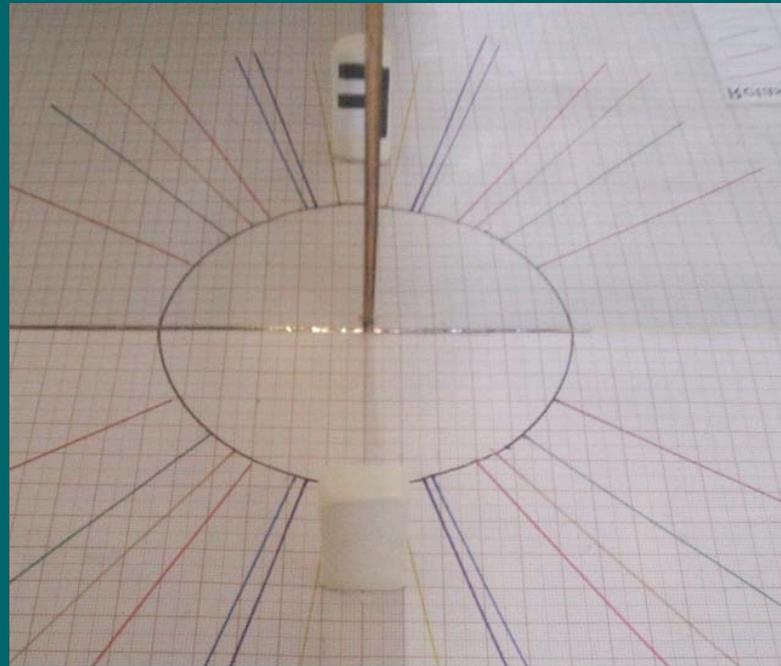
- Propriedade que representa o modo como a imagem aparece em relação ao objeto, que é de modo reverso e não inverso.

# Reversão

- Propriedade que representa o modo como a imagem aparece em relação ao objeto, que é de modo reverso e não inverso.
- Para reforçar a idéia de que a reversão é apenas em um dos eixos de rotação do objeto real, consideremos agora a borracha em pé com a letra F defronte para as faces dos espelhos.

# Reversão

- Para um ângulo de  $180^\circ$ .



- No caso acima houve apenas uma reversão horizontal.

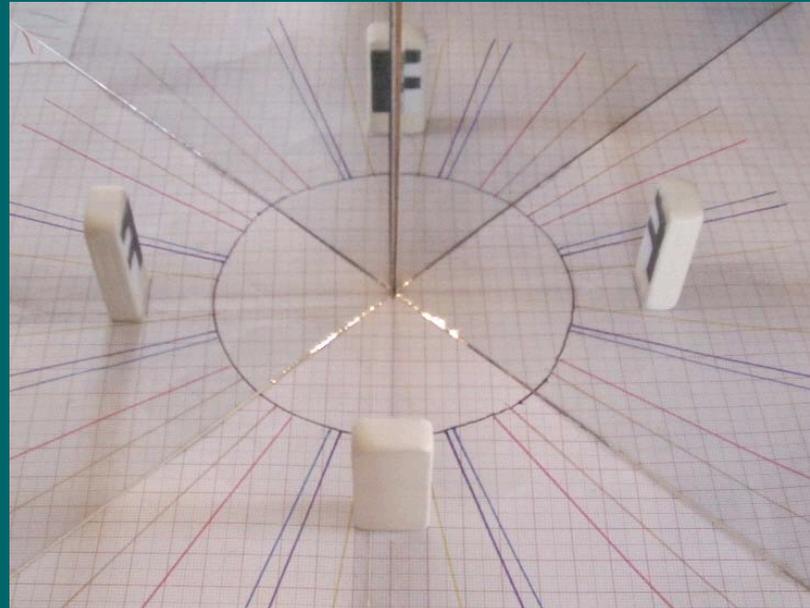
# Reversão

- Para um ângulo de  $120^\circ$  a reversão de cada imagem depende da posição de cada espelho em relação à borracha



# Reversão

- Para um ângulo de  $90^\circ$ .



# Reversão

- As demais imagens conjugadas para os outros ângulos originam-se da reflexão da imagem dos próprios espelhos.

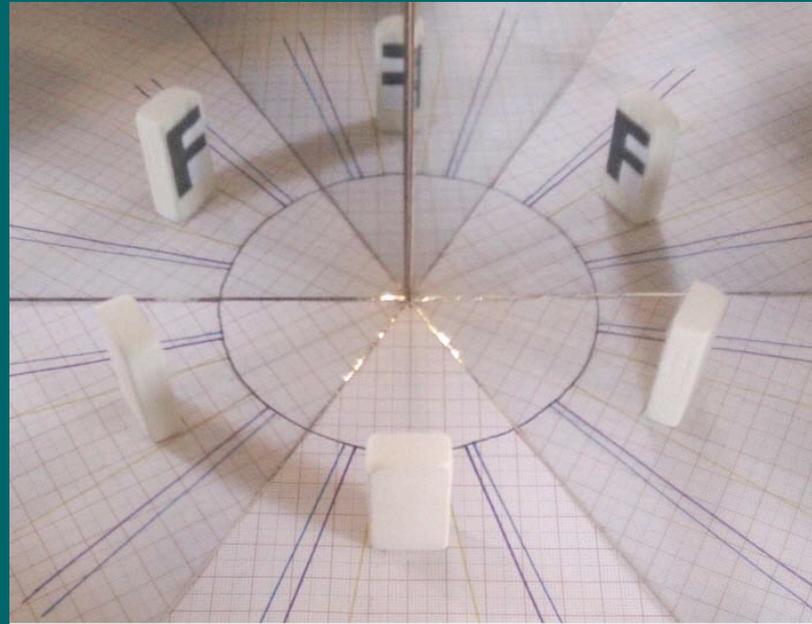
# Reversão

- As demais imagens conjugadas para os outros ângulos originam-se da reflexão da imagem dos próprios espelhos.
- Cada ponto imagem funciona como ponto objeto e, com isso, formando novas imagens virtuais.



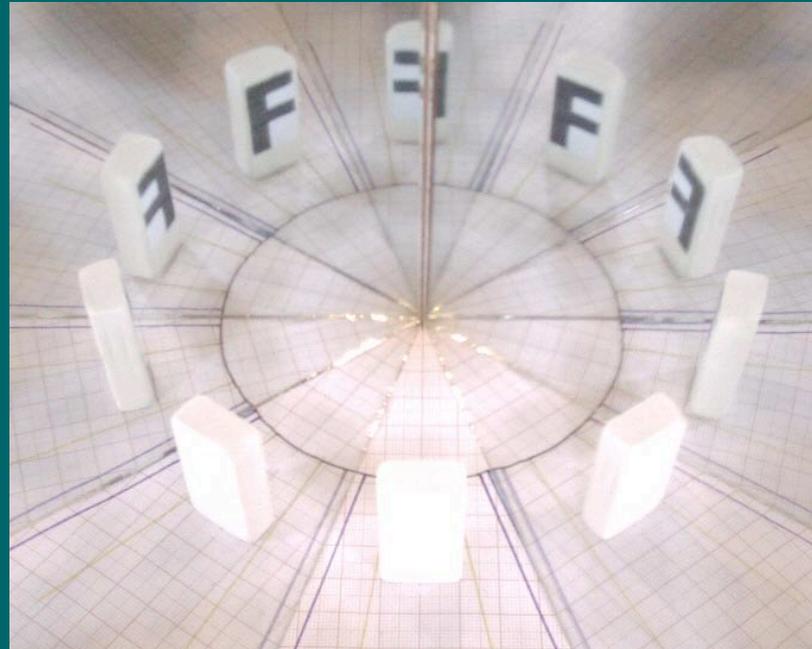
# Reversão

- Para um ângulo de  $60^\circ$ .



# Reversão

- Para um ângulo de  $36^\circ$ .



# Reversão

- Cada uma das séries termina quando se forma uma imagem que não pode servir de objeto para outro espelho.

É importante observarmos que, devido à simetria, a imagem de um objeto extenso fornecida por um espelho plano, embora idêntica a ele, não lhe é, em geral, superponível (caso da letra F).

- Entretanto, a imagem fornecida por um espelho plano de um objeto que admite um eixo de simetria é superponível a ele (caso da borracha).
- A posição do espelho em relação ao objeto, é que define o giro no eixo horizontal dado pela imagem.

# Simetria da distância

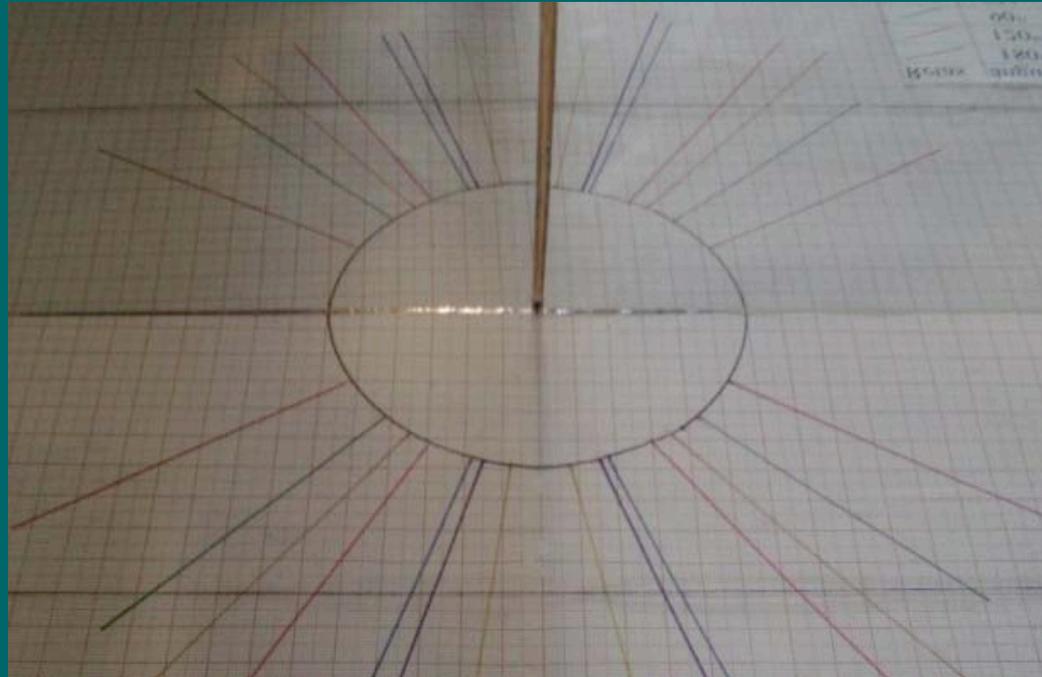
- Outro conceito que vamos explorar é da distância entre objeto-espelho e imagem-espelho.

# Simetria da distância

- Outro conceito que vamos explorar é o da distância entre objeto-espelho e o da imagem-espelho.
- Uma forma de demonstrar que esta relação existe experimentalmente é usando a associação de espelhos planos.

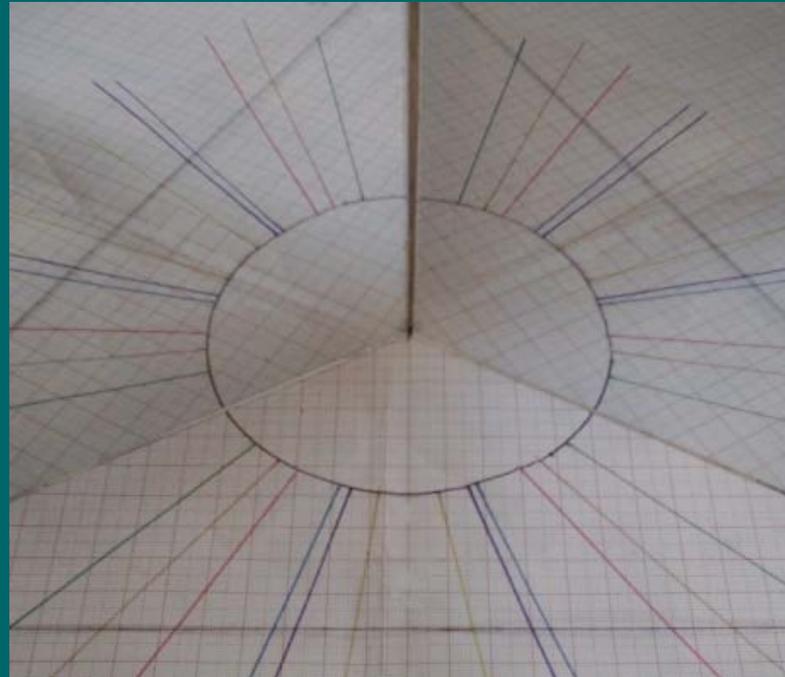
# Simetria da distância

- Para um ângulo de  $180^\circ$ .



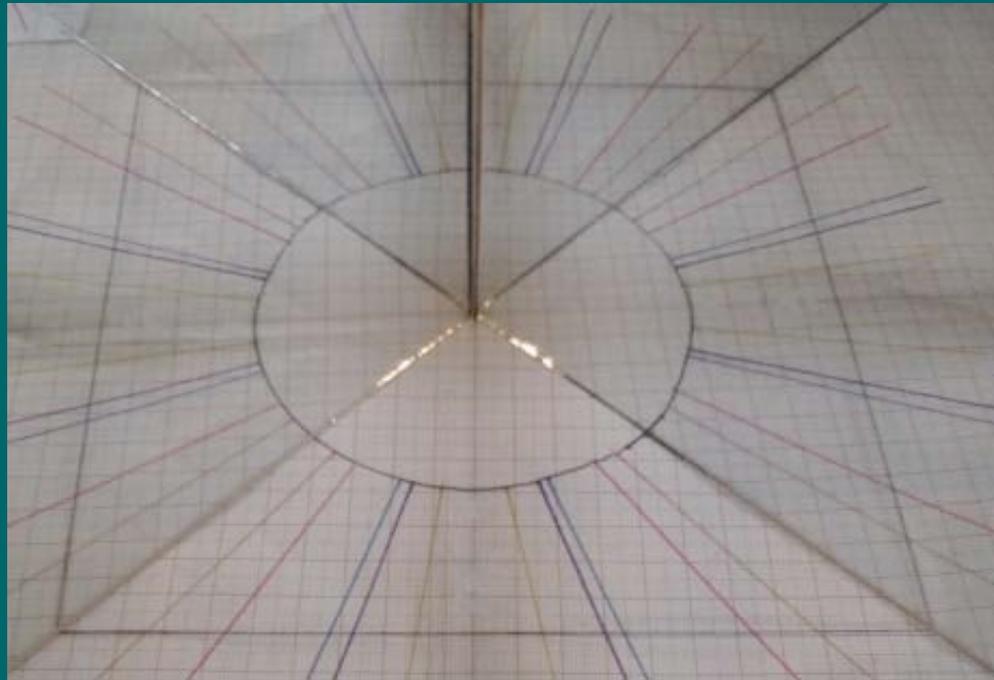
# Simetria da distância

- Para um ângulo de  $120^\circ$  é formado um triângulo equilátero.



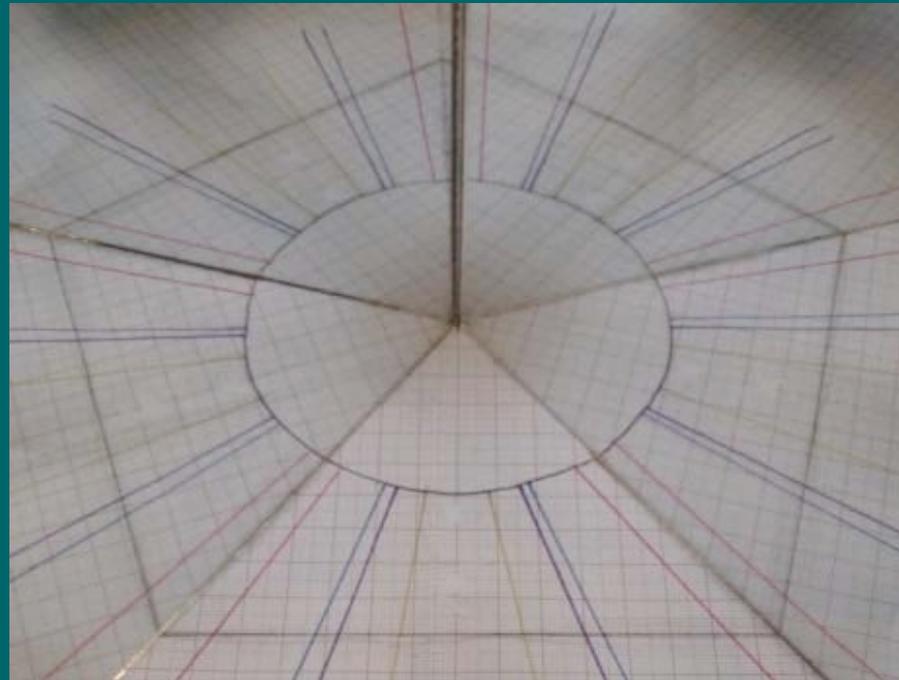
# Simetria da distância

- Para um ângulo de  $90^\circ$  é formado um quadrilátero regular.



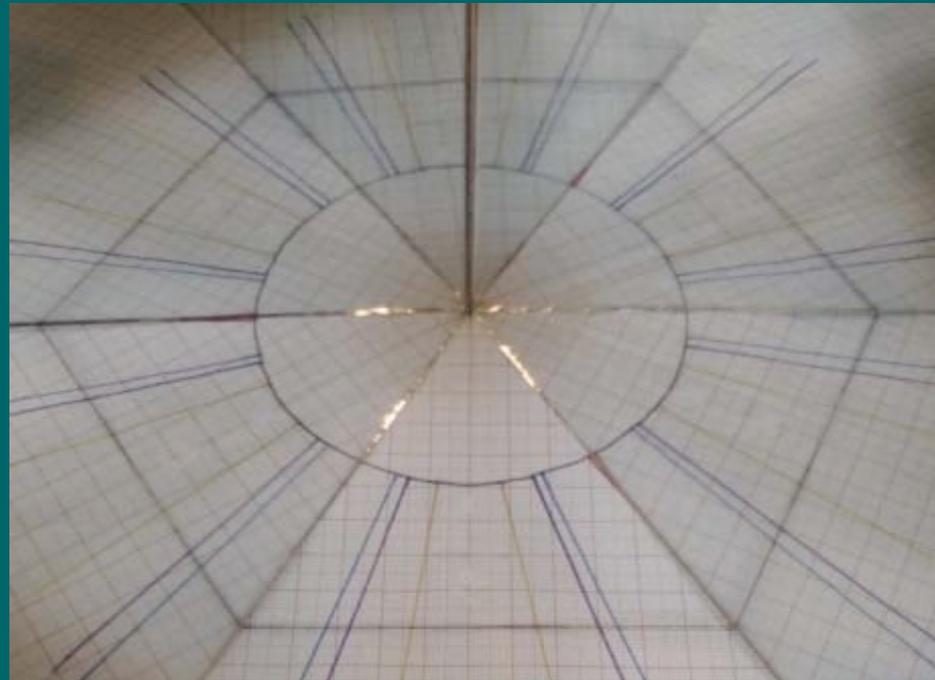
# Simetria da distância

- Para um ângulo de  $72^\circ$  é formado um pentágono regular.



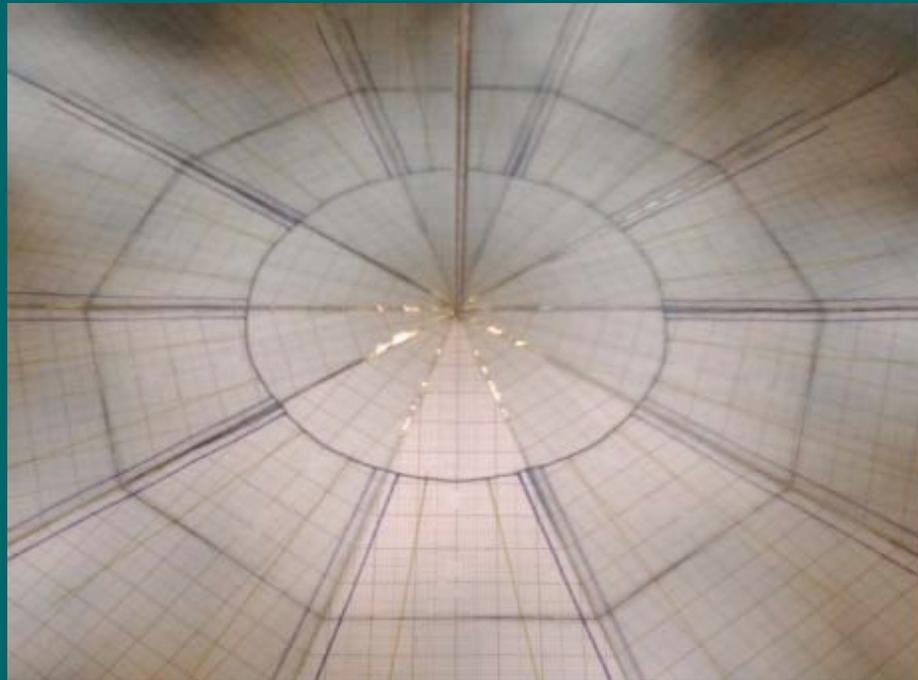
# Simetria da distância

- Para um ângulo de  $60^\circ$  é formado um hexágono regular.



# Simetria da distância

- Para um ângulo de  $36^\circ$  é formado um decágono regular.



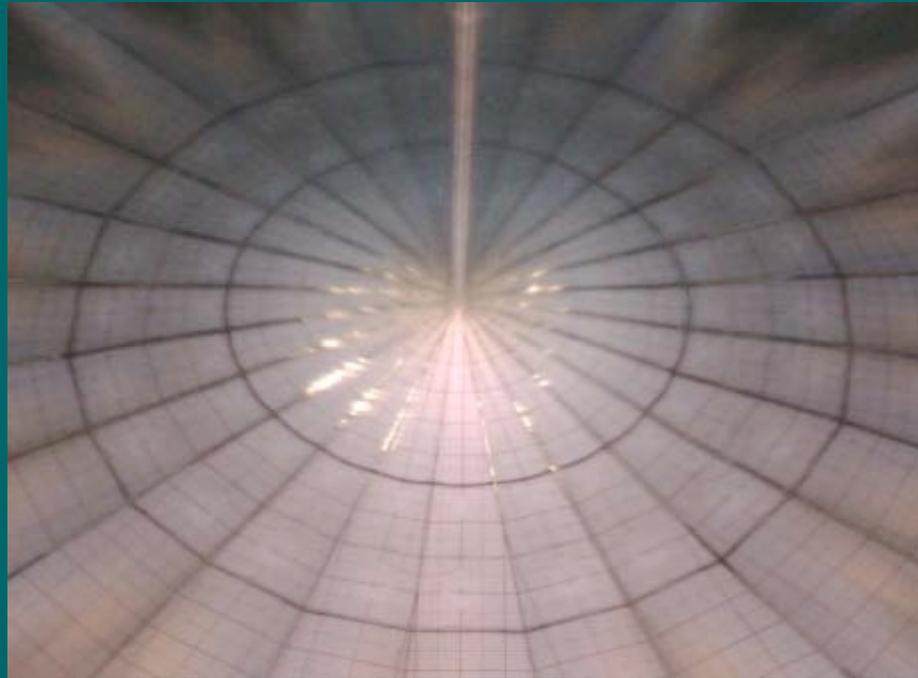
# Simetria da distância

- Para um ângulo de  $30^\circ$  é formado um dodecágono regular



# Simetria da distância

- Para um ângulo de  $15^\circ$  é formado um icosakaitetrágono regular.

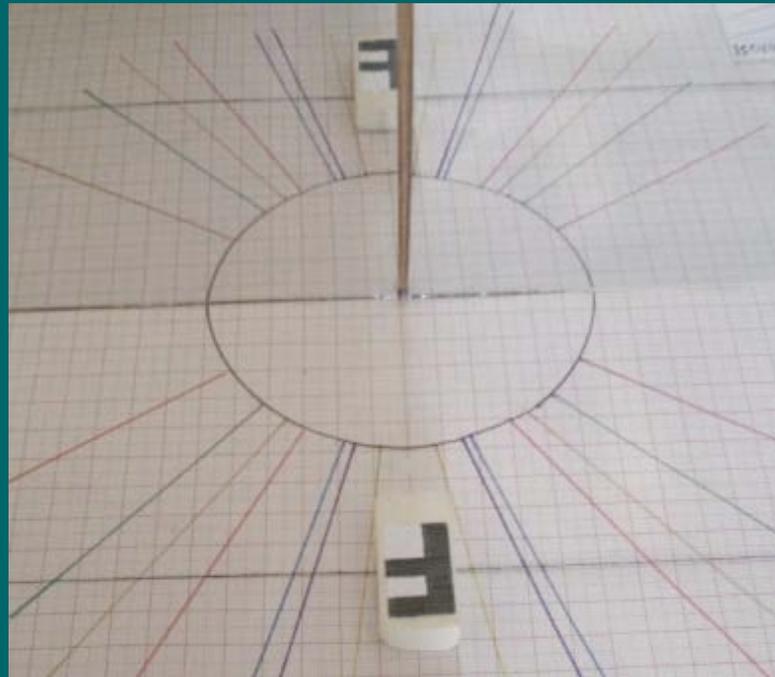


# Simetria da distância

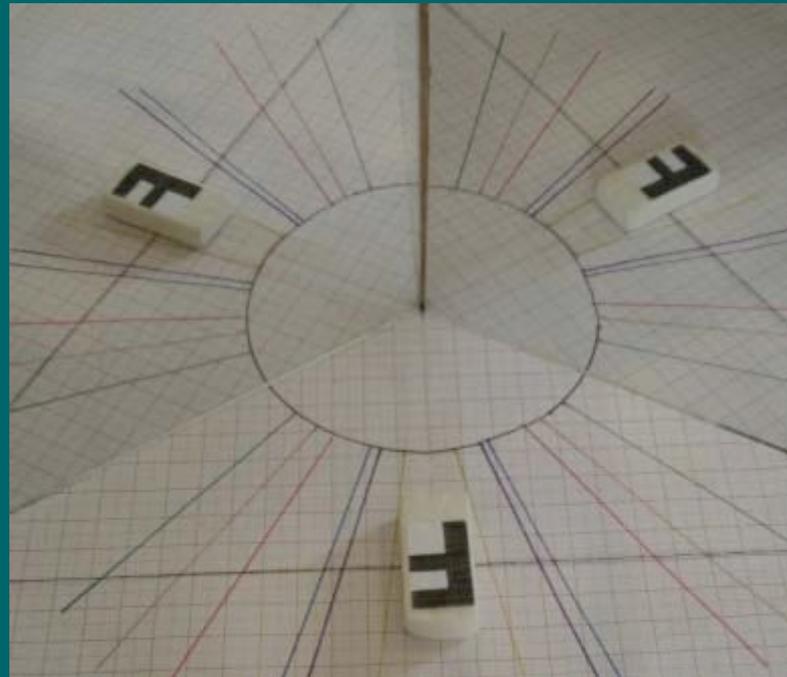
- Foi colocada a borracha sobre a linha, de modo a dividí-la em duas partes iguais, ou seja, numa linha imaginária que passa no ponto médio da borracha e que coincide com a linha utilizada no aparato experimental. No papel milimetrado, é a linha por onde passa o plano de associação dos dois espelhos.

# Simetria da distância

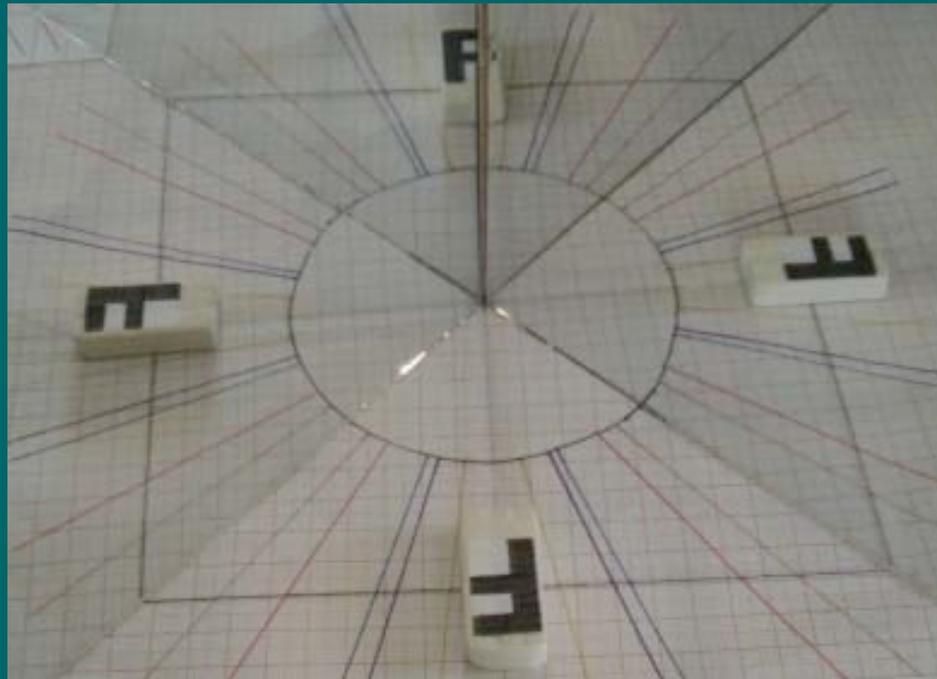
- Foi colocada a borracha sobre a linha, de modo a dividi-la em duas partes iguais, ou seja, numa linha imaginária que passa no ponto médio da borracha e que coincide com a linha utilizada no aparato experimental. No papel milimetrado, é a linha por onde passa o plano de associação dos dois espelhos.



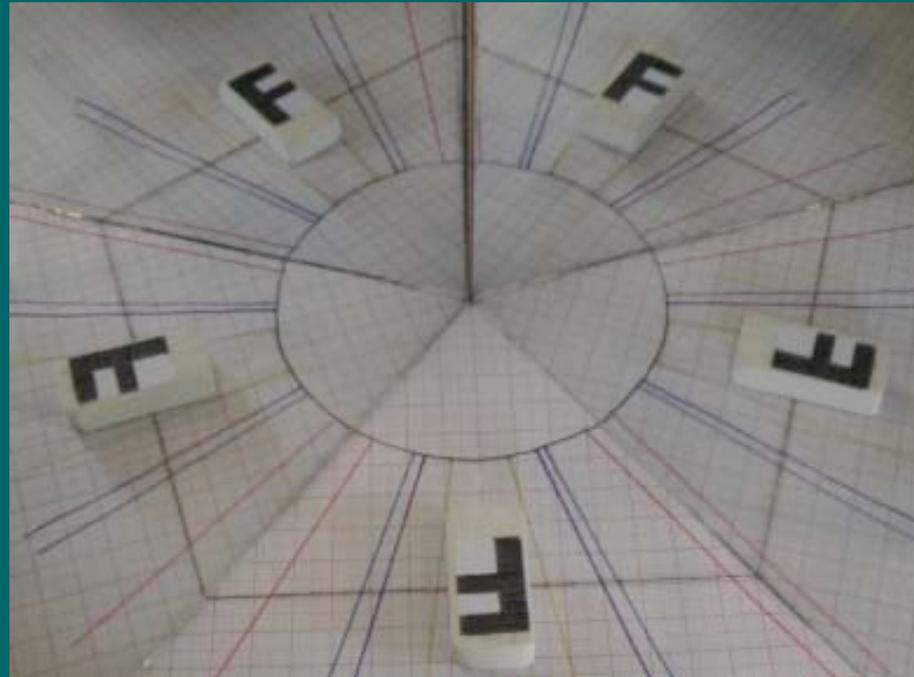
# Simetria da distância



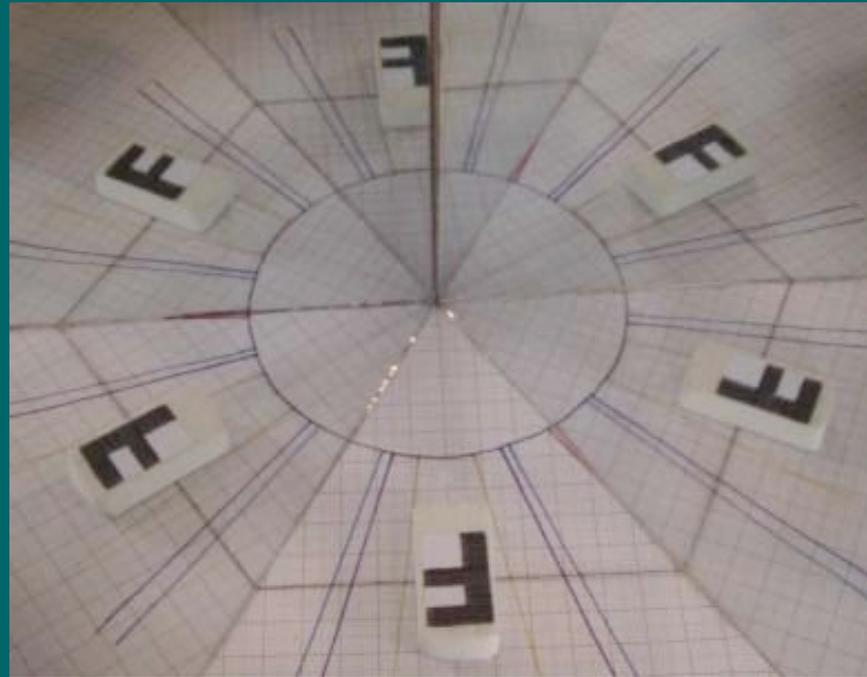
# Simetria da distância



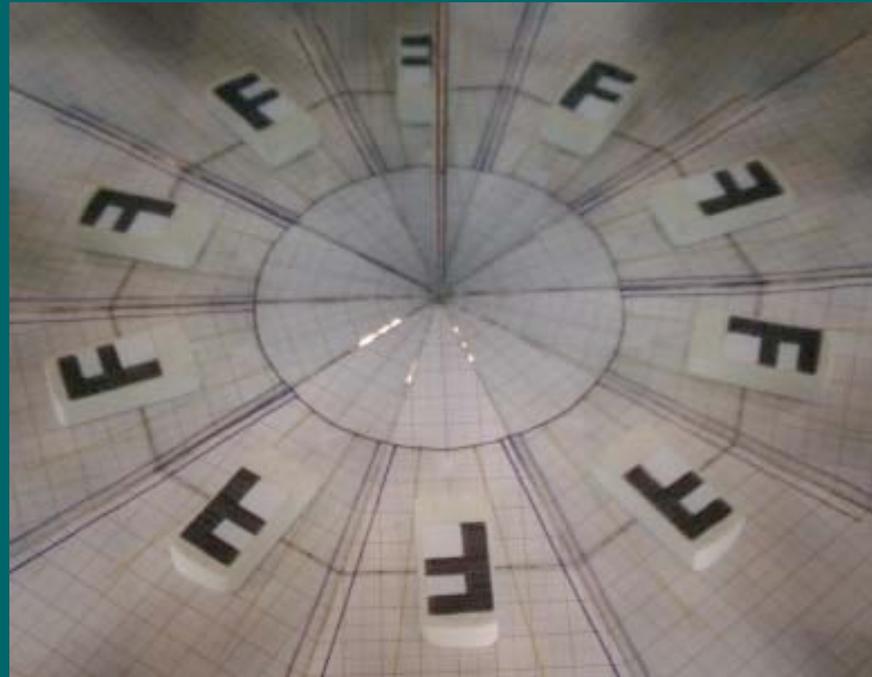
# Simetria da distância



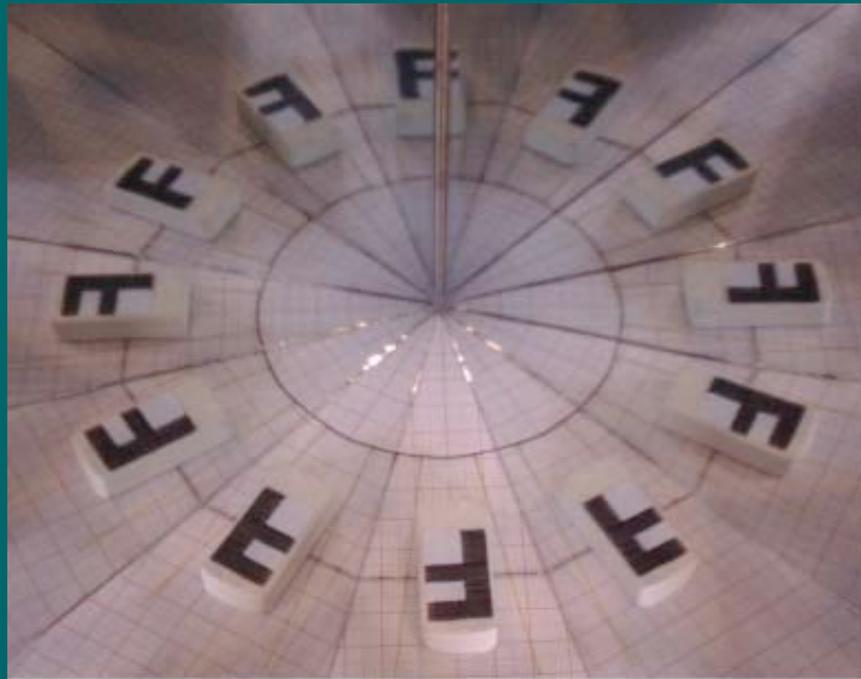
# Simetria da distância



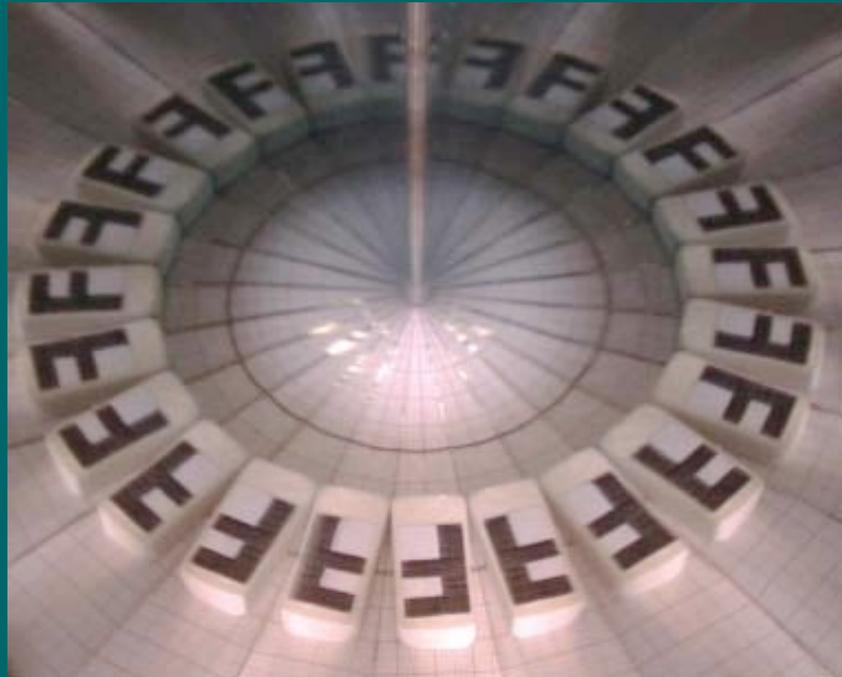
# Simetria da distância



# Simetria da distância



# Simetria da distância



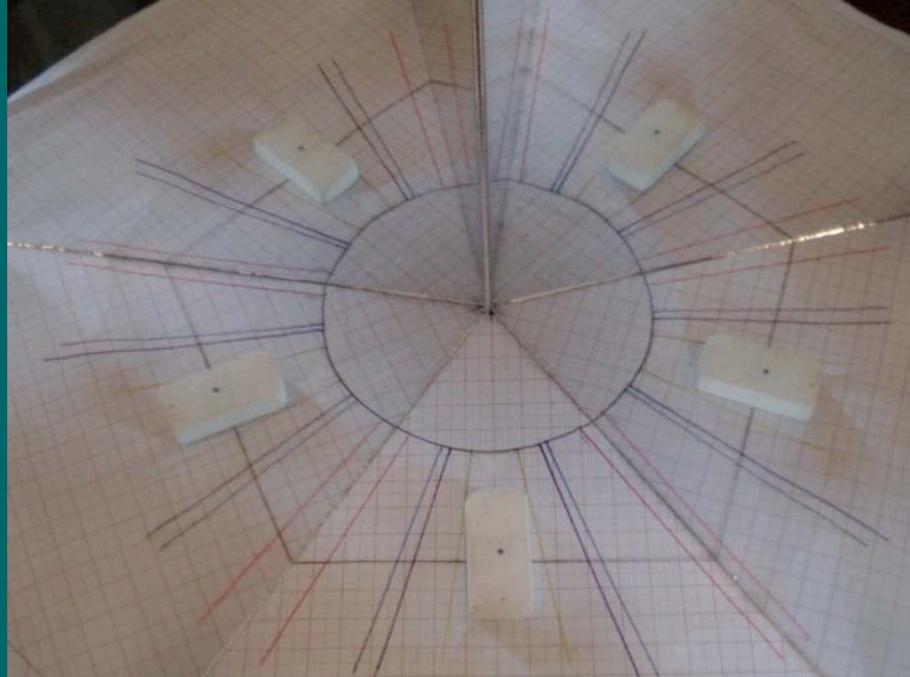
# Simetria da distância

- Como o objeto e as imagens se localizam nos pontos médios dos lados, fica bem claro o conceito de equidistância para as distâncias do objeto e da imagem em relação ao espelho.

# Simetria da distância

- Como o objeto e as imagens se localizam nos pontos médios dos lados, fica bem claro o conceito de eqüidistância para as distâncias do objeto e da imagem em relação ao espelho, e os estudantes do Ensino Médio podem ver experimentalmente a construção das propriedades ópticas.
- Nem sempre será formada uma figura regular.

# Simetria da distância



# Conclusões

- O presente trabalho permite também que o professor e os estudantes possam interagir de modo mais casual do que o tradicional professor-quadro ou aluno-caderno.
- A construção e a análise de gráficos são mais alguns aliados no sucesso do trabalho, pois o discente sente prazer ao realizar esta tarefa matemática.
- A coleta de dados, quanto ao número de imagens formadas, acaba se tornando uma discussão prazerosa entre os alunos.
- A demonstração da expressão matemática para o número de imagens entre dois espelhos planos, faz com que ele, o aluno, observe que uma fórmula tem muito mais sentido do que a simples substituição de parâmetros por valores numéricos.
- As observações de reversão e simetria através do aparato experimental auxiliam aos alunos a terem um conceito mais concreto dessas propriedades.