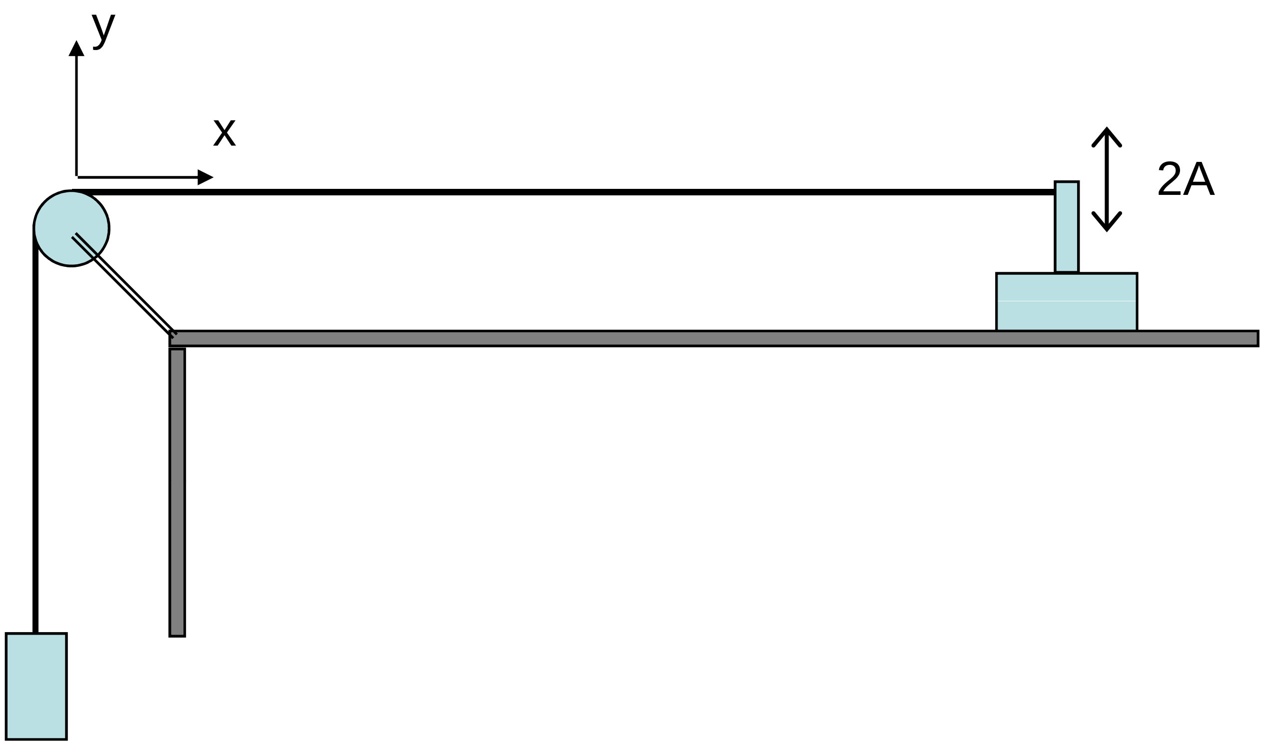
Ondas Estacionárias

Cássio Sigaud

Cordas Vibrantes
Movimento Forçado



Equação de Onda

$$\boxed{T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

T = tensão da corda , μ = densidade da corda

velocidade das ondas na corda: $c = \sqrt{T/\mu}$

Condições de contorno:

$$\boxed{\begin{aligned} y(0,t) &= 0 \\ y(L,t) &= A\cos(\omega t) \end{aligned}}$$

Solução da Equação de Onda

onda estacionária:

$$\boxed{y(x,t) = \frac{A\,\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)}{\mathrm{sen}(kL)}} \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

Quando a frequência de oscilação da extremidade for igual à de um modo normal da corda (ressonância):

$$k = \frac{n\pi}{L} \;\Rightarrow\; \mathrm{sen}(kL) = 0 \;\Rightarrow\; y(x,t) = \infty$$

a solução diverge

Amortecimento

A solução divergente não está de acordo com a experiência, portanto devemos ter <u>efeitos dissipativos</u>.

$$\boxed{T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - b\frac{\partial y}{\partial t} - \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

b = parâmetro de amortecimento (geralmente é função da frequência)

Solução com amortecimento

$$\boxed{y(x,t) = \frac{A\,\mathrm{sen}(k'x)\exp(i\omega t)}{\mathrm{sen}(k'L)}} \qquad \text{(parte real)}$$

O número de onda agora é complexo:

$$k' = \frac{\omega}{c}\left(1 - i\,\frac{\gamma}{\omega}\right)^{1/2} \qquad\qquad \gamma = \frac{b}{\mu}$$

Amortecimento fraco

Supondo que o amortecimento é fraco (γ pequeno):

$$k' = \frac{\omega}{c}\left(1 - i\,\frac{\gamma}{2\omega}\right) = k - i\,\frac{\gamma}{2c}$$

$$\boxed{y(x,t) = A\,\frac{\text{sen}(k - i\gamma/2c)x}{\text{sen}(k - i\gamma/2c)L}\exp(i\omega t)} \quad \text{(parte real)}$$

Ressonância

Na ressonância ($k = n\,\pi\,/\,L$):

$$\boxed{\begin{aligned} y(x,t) = {} & A(-1)^{n+1}\,\frac{2c}{\gamma L}\,\mathrm{sen}\!\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\mathrm{sen}(\omega t) \\ & + A(-1)^{n}\,\frac{x}{L}\cos\!\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos(\omega t) \end{aligned}}$$

- O primeiro termo tem amplitude muito maior que o segundo, já que $\underline{2c/\gamma L \gg 1}$.
- O termo dominante não está em fase com o vibrador.

Movimento dos nós

$$y(x,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{\gamma x}{2c}\,\mathrm{cotan}(\omega t)$$

Se $\gamma = 0$ os nós estão fixos:

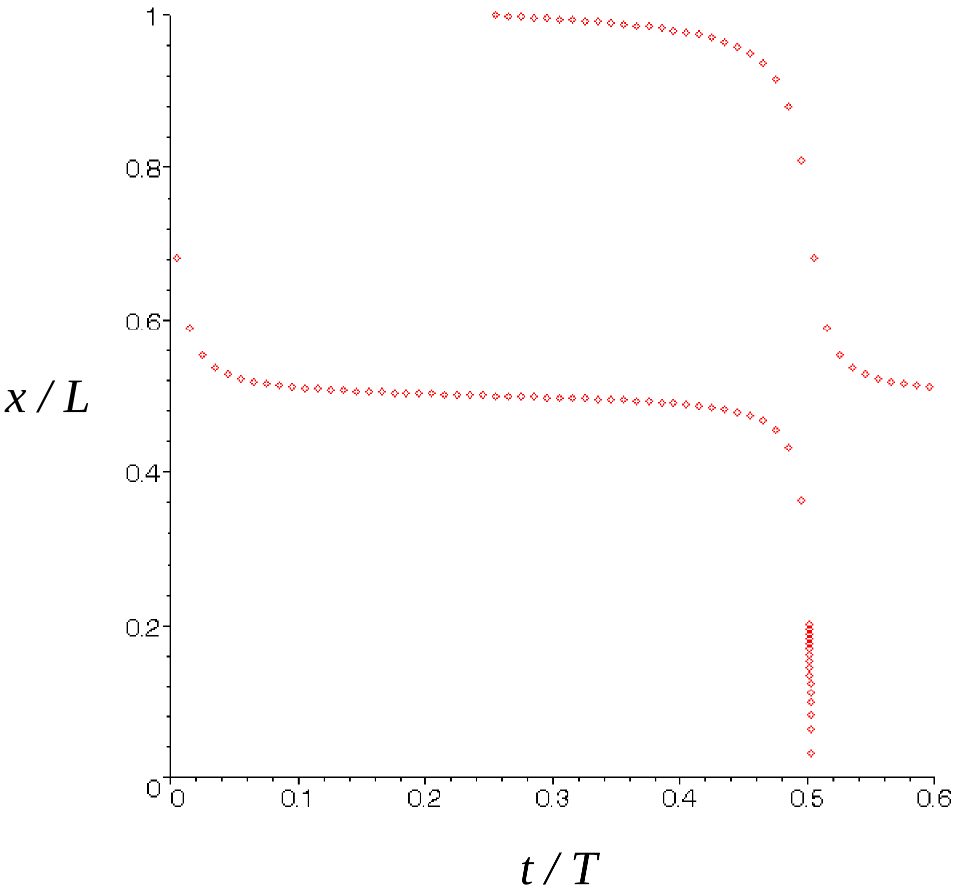
$$\tan\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = m\frac{L}{n}, \quad m = 0,1,2\ldots n$$

$\boxed{\text{Se } \gamma \neq 0 \text{ os nós se movem.}}$

Movimento dos nós

clique para ver animação

Movimento dos nós



Forma da envoltória

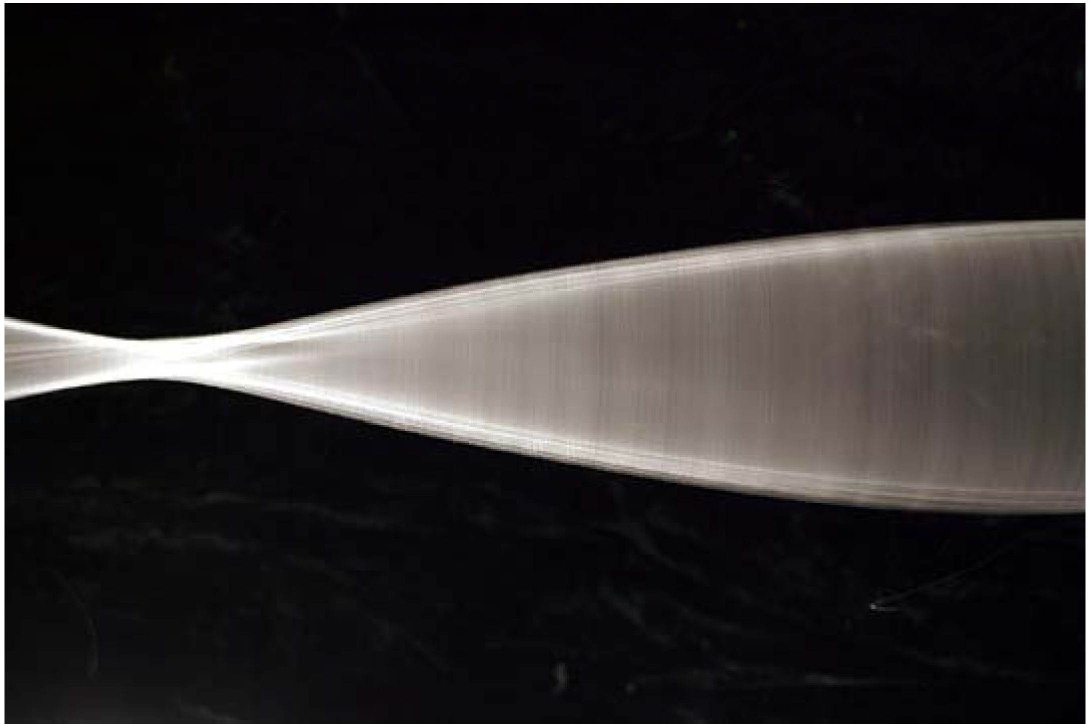
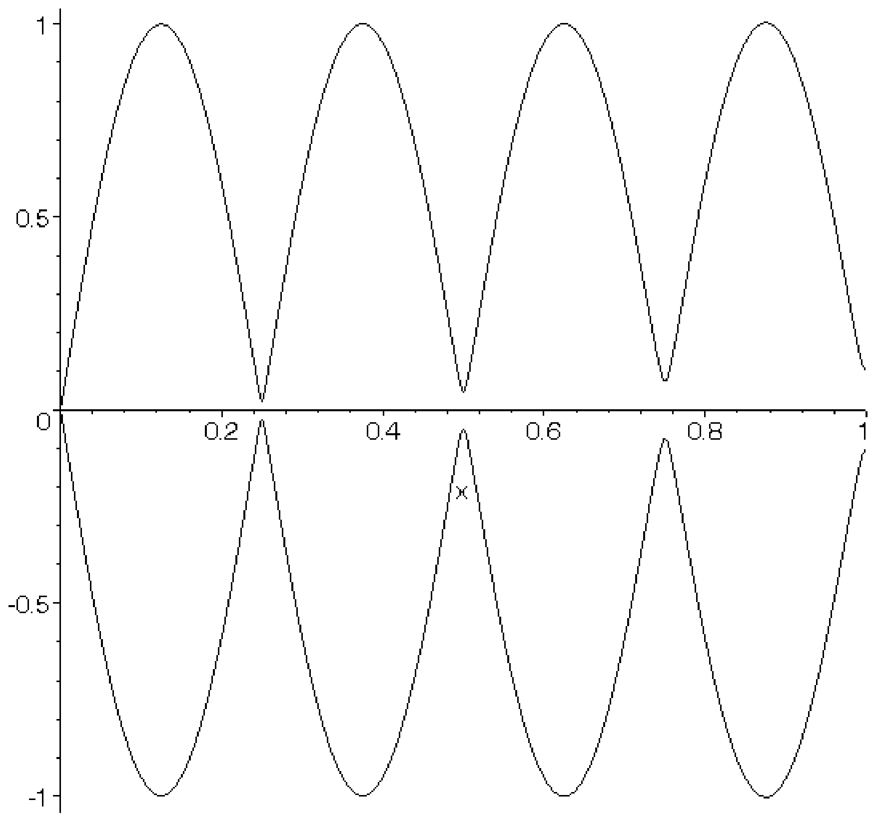


foto por Andrew Davidhazy (RIT/USA)

Forma da envoltória

$$Y_{\max}^{2}(x) \propto \operatorname{sen}^{2}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{\gamma^{2}}{4c^{2}}x^{2}$$



Filmando a corda vibrante

clique para ver o filme

Fim